Final Econometría

February 18, 2026

Javier Ayala

Pregunta 1: 1b

Tenemos que

$$\Omega = \text{diag}(4, 9, 16, 25, 36) = PP', \qquad P = \text{diag}(2, 3, 4, 5, 6).$$

Sea $Var(u|x) = \Sigma = \Omega \otimes I_N$, definimos

$$T = (P^{-1} \otimes I_N), \quad \text{tal que:}$$

$$TT' = (P^{-1} \otimes I_N)(P^{-1} \otimes I_N)' = (P^{-1}P^{-1}) \otimes (I_N I_N) = \Omega^{-1} \otimes I_N = (\Omega \otimes I_N)^{-1} = \Sigma^{-1}$$

Partimos del modelo

$$Y = X\beta + u,$$

y transformamos el modelo multiplicando por T a la izquierda:

$$\begin{aligned} TY &= TX\beta + Tu \\ \tilde{Y} &= \tilde{X}\beta + \tilde{u}. \end{aligned}$$

donde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{5N} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{5N} \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{5N} \end{pmatrix}.$$

Ahora, si usamos OLS sobre el modelo transformado

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GLS} &= (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'\tilde{Y} \\ &= ((TX)'TX)^{-1}(TX)'TY \\ &= (X'T'TX)^{-1}X'T'TY \\ &= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}Y \end{aligned}$$

O sea, se obtiene $\hat{\beta}_{GLS}$ estimando por OLS el modelo transformado.

1 Pregunta 1: 7

Derivemos analíticamente cada resultado: Sea $T_n = T_n(W_n)$ un estadístico basado en la muestra W_n y sea $c \in \mathbb{R}$ un valor crítico.

Definimos el test como la función

$$\varphi_n((Y,X)_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } |T_n((Y,X)_n)| \leq c \quad (\text{accept } H_0), \\ 1 & \text{si } |T_n((Y,X)_n)| > c \quad (\text{reject } H_0). \end{cases}$$

El tamaño (nivel) del test con muestra n se define como

$$\alpha_n = P_{\theta_0}\big(\varphi_n((Y,X)_n) = 1\big) = P_{\theta_0}\big(|T_n((Y,X)_n)| > c\big).$$

Si bajo H_0 se cumple

$$T_n((Y,X)_n) \to^d \xi \sim G(\cdot)$$

fijamos un nivel asintótico α

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}(|T_n((Y,X)_n)| > c) = P(|\xi| > c) = P(\xi > c) + P(\xi < -c) = 2(1 - G(c))$$

y elegimos c tal que

$$2(1 - G(c)) = \alpha$$
$$c = G^{-1}(1 - \alpha/2)$$

En cada simulación $s = 1, \ldots, 5000$, generamos una muestra $(Y,X)_n^{(s)}$ y calculamos el estadístico tipo-t asociado a la hipótesis $H_0 : \beta_1 = 0.8$ como

$$T_n^{(s)}((Y,X)_n) = t_n^{(s)} = \frac{\hat{\beta}_1^{(s)}(n) - 0.8}{\widehat{\text{se}}\Big(\hat{\beta}_1^{(s)}(n)\Big)},$$

donde $\hat{\beta}_1^{(s)}(n)$ es la estimación FGLS con muestra de tamaño n de β_1 en la simulación s y $\widehat{\text{se}}(\hat{\beta}_1^{(s)})$ es su error estándar estimado. Por el Teorema del Límite Central tenemos que $c = \Phi(1 - \alpha/2)$ Dado el valor crítico c, en cada simulación definimos el indicador de rechazo

$$R_n^{(s)} = \mathbf{1}\{\, |t_n^{(s)}| > c \,\}.$$

de modo que $R_n^{(s)} = 1$ si se rechaza H_0 en la simulación s y $R_n^{(s)} = 0$ en caso contrario. Definiendo $\hat{\alpha}_n$ como sigue, y por ley de grandes numeros, tenemos:

$$\hat{\alpha}_n = \sum_{s=1}^{S} \frac{R_n^{(s)}}{S} \xrightarrow[S\to\infty]{p} E_{\theta_0}(R_n^{(s)}) = E_{\theta_0}(\mathbf{1}\{\, |t_n^{(s)}| > c \,\}) = P_{\theta_0}(|t_n^{(s)}| > c) = \alpha_n$$

Este $\hat{\alpha}_n$ es el que se reporta en la tabla para cada n. Ahora derivemos la potencia: dado el valor critico c, la función poder del test se define como

$$\pi_n(\theta) = P_\theta\big(\varphi_n((Y,X)_n) = 1\big) = P_\theta\big(|T_n((Y,X)_n)| > c\big).$$

para $\theta \neq \theta_0, \theta = 0, 0.4$, Entonces necesitamos generar nuevamente las 5000 simulaciones bajo los θ alternativos, el estadístico que usariamos sería

$$t_{\theta,n}^{(s)} = \frac{\hat{\beta}_1^{(s)}(n) - 0.8}{\widehat{\text{se}}\left(\hat{\beta}_1^{(s)}(n)\right)},$$

donde $\hat{\beta}_1^{(s)}(n)$ es la estimación FGLS con muestra de tamaño n de β_1 en la simulación s bajo el parámetro θ. Al igual que antes, dado el valor mismo valor crítico c de antes, en cada simulación definimos el indicador de rechazo

$$R_{\theta,n}^{(s)} = \mathbf{1}\{\,|t_{\theta,n}^{(s)}| > c\,\}.$$

Definiendo $\hat{\pi}(\theta)_n$ como sigue, y por ley de grandes numeros, tenemos:

$$\hat{\pi}(\theta)_n = \sum_{s=1}^{S} \frac{R_{\theta,n}^{(s)}}{S} \xrightarrow[S\to\infty]{p} E_\theta(R_{\theta,n}^{(s)}) = E_\theta(\mathbf{1}\{\,|t_n^{(s)}| > c\,\}) = P_\theta(|t_{\theta,n}^{(s)}| > c) = \pi_n(\theta)$$

Este $\hat{\pi}(\theta)_n$ es el que se reporta en la tabla pada cada n. En la tabla se reporta lo siguiente:

5N	Tamaño		Poder ($\beta_1 = 0$)		Poder ($\beta_1 = 0.4$)	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%
5	28.64%	38.30%	96.96%	98.34%	80.82%	87.68%
10	16.28%	25.90%	99.96%	100.00%	95.66%	97.90%
30	4.38%	11.58%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
100	1.78%	7.06%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
200	1.40%	6.12%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
500	1.04%	5.20%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

Table 1: Tamaño y poder del test bajo FGLS

En conclusión, en muestas pequeñas, $\hat{\alpha}_n$ esta muy por encima del tamaño nominal de la prueba, lo que significa que, condional a que $H_0 : \theta = \theta_0$, el test está arrojando que se rechaza a H_0 muchas veces. Con muestras pequeñas, nuestra estimación de Σ con $\hat{Var}(u)$ es muy mala, pero se necesita ese insumo para calcular $\hat{\beta}_{FGLS}$. A medida que aumenta n, esta estimación de la varianza mejora y el tamaño converge al tamaño asintótico α El poder particulamente es alto para $\beta_1 = 0$, pero no lo es tanto para $\beta_1 = 0.4$ en muestras pequeñas. Esto se debe a que 0.8 está mas cerca al 0.4 que de 0. Sin embargo, cuando se aumenta la muestra, la probabilidad de cometer error tipo II, que es que condicional a que H_0 sea falso se acepta, practicamente se anula.