Inferencia Estadística (Fecha: 31/08/2023)

Tarea #1

Estudiante: Juan Javier Monsivais Borjón *ID:*

Problema 1

(Solución)

Consideremos que los ocnjuntos de bits son "infinitos"por lo que podemos considerar una v.a binomial, de la siguiente manera:

$$P(x) = \binom{12}{x}(0.1)^x(0.9)^{12-x} \tag{1}$$

Por lo que para la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete se corrompan?, tenemos:

$$\sum_{i=0}^{2}\binom{12}{i}(0.1)^i(0.9)^{12-i} = \boxed{0.88913}$$

Lo anterior, debido a que buscamos que haya 1, 2 o 3 bits corrompidos.

Para la siguiente pregunta: "Si 6 paquetes de bits se envían sobre el canal, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un paquete contenga 3 o más bits corruptos? "

Para responder, consideremos que nos pregunta del grupo de los $x \geq 3$, pero deberemos formar otra binomial que contenga esta probabilidad, debemos ver que:

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - 0.88913 = 0.11087$$

Con esta probabilidad generamos una nueva binomial, en la que tendremos $n = 6$;

$$P(y) = \binom{6}{y}(0.11087)^y(0.88913)^{6-x} \tag{2}$$

$$P(y \geq 1) = 1 - P(y < 1) = 1 - P(y = 0) =$$
$$= 1 - \binom{6}{0}(0.11087)^0(0.88913)^6 = 1 - 0.494074 = \boxed{0.505926}$$

Para la última pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que X excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

Para ello debemos encontrar la media y la desviación estándar de la v.a:

$$\mu = np = (0.11087)(6) = 0.66522$$

$$\begin{aligned} \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 0.313997\sqrt{n} &= 0.769066 \\ 2\sigma &= 1.53813 \end{aligned}$$

Teniendo los datos calculamos la probabilidad de que se halle fuera de este rango:

$$P(x \geq \mu + 2\sigma) = P(x \geq 2.20335) = P(x \geq 3) = \boxed{0.021042}$$

Problema 2

(Solución)

Al tener un grupo finito, observemos que la extracción de una de las manzanas afecta directamente al experimento, por lo cual no podmos usar una variable aleatoria binomial, aquella variable aleatoria que nos permite considerar lo anterior es la **hipergeométrica**.

Con ello en cuenta tendremos, $N = 12 + 4 = 16$, $n = 3$, x número de manzanas frescas:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{\binom{12}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{16}{3}} & para \quad x = 0, 1, 2, 3 \\ \\ 0 & otro \end{cases} \tag{3}$$

Debemos también encontrar su esperanza,

Para una variable aleatoria hipergeométrica, tenemos:

$$E[X] = \mu = \frac{nk}{N} = \frac{12 \cdot 3}{16} = 2.25 \tag{4}$$

Problema 3

(Solución)

(a)

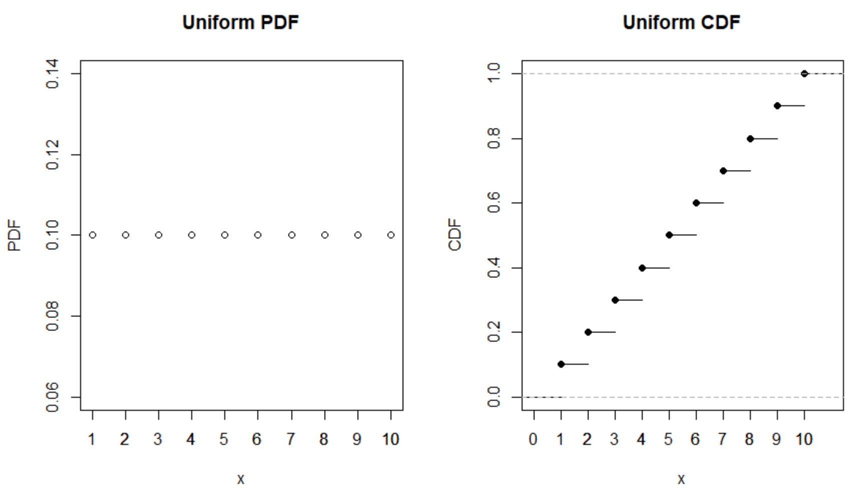

Figura 1: Gráficas de las funciones de masa y acumuladas de la distribución uniforme discreta para $n = 10$

Aquí observamos la distribución de uniforme que representa una constante, con probabilidad 0.1 para cada valor de x, y también se presenta la función acumulada de la misma.

(c)
A continuación presentamos la tabla de las frecuencias del experimetno de una función uniforme usando sample con semilla = 13.

Número	**Frecuencia**
1	1004
2	983
3	991
4	1021
5	1031
6	994
7	976
8	1032
9	1007
10	961

Cuadro 1: Tabla de frecuencias de cada número en un experimento repetido $10,000$

Ahora presentamos la media y la varianza del experimento:

$$\mu = 5.4907$$
$$\sigma^2 = 8.181932$$

Problema 4

(Solución)

(a y b)
Para el problema número 4 se nos pide realizar un experimetno del lanzamiento de 10 monedas y contar el número de águilas ("H"), se nos pide hacer este experimetno 10, 000, A continuación se muestra la gráficas:

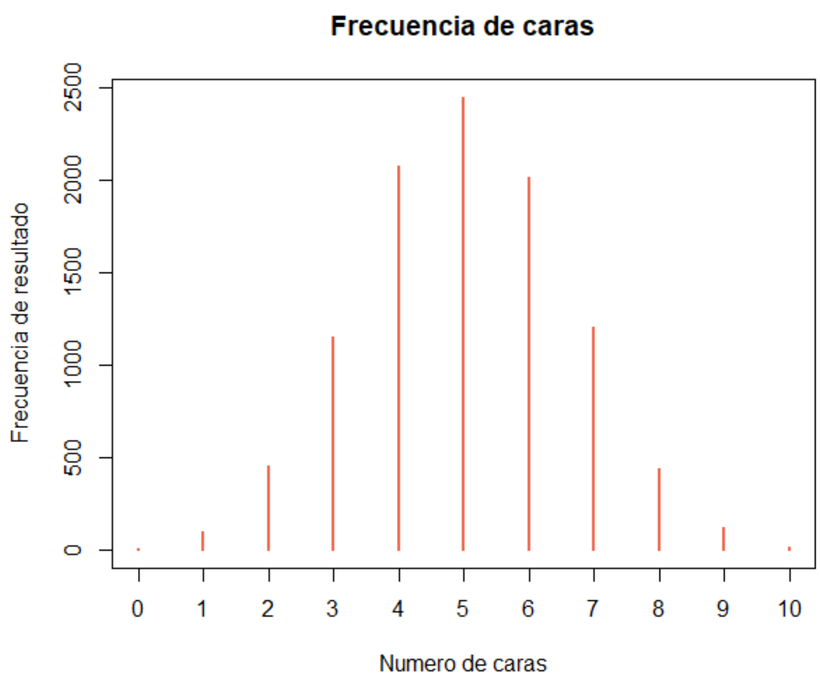

Figura 2: Experimetno de lanzar 10 monedas 10, 000 veces

Ahora se muestra el experimento en proporción, y a su vez comparado con la binomial que predice la probabilidad de que caiga cara.

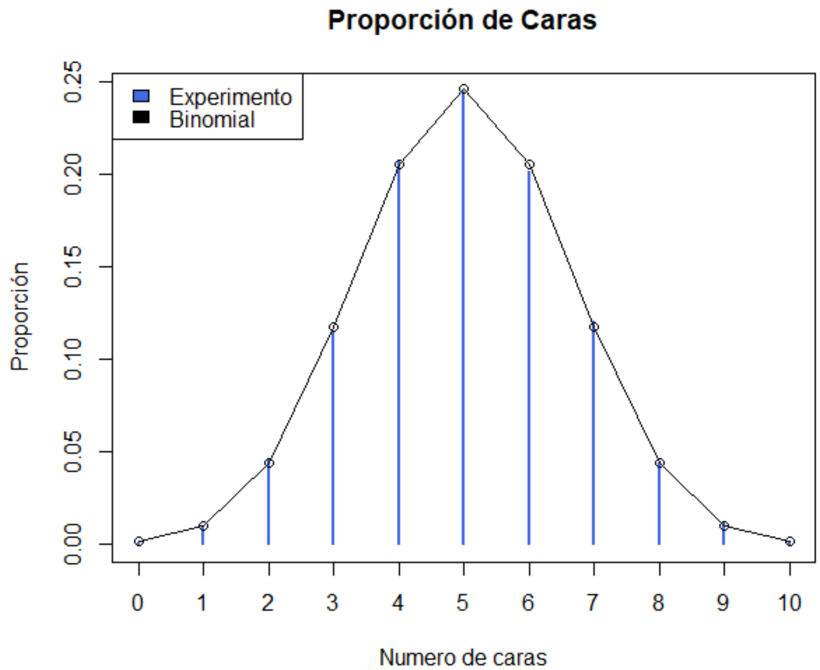

Figura 3: Experimento comparado con la función binomial

(c)

Ahora tendremos que hacer lo mismo pero para una moneda cargada con probabilidad $p = 0.3$ de obtener águila, es decir $q = 0.7$ de obtener cara. Con lo cual se presenta el gráfico de frecuencias de para este experimento

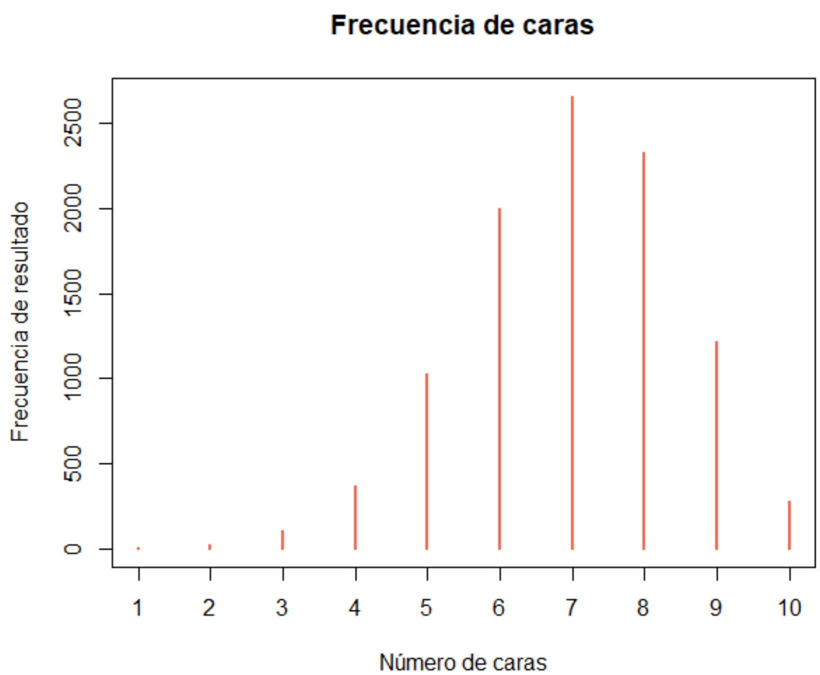

Figura 4: Frecuencias para el número de caras obtenidas en $10,000$ experimentos con moneda cargada.

Lo que debemos notar en esta gráfica es sin duda alguna la asimatría que se presenta, esto debido a que p y q ya no son iguales, con lo cual obener más caras se vuelve más **frecuente**.

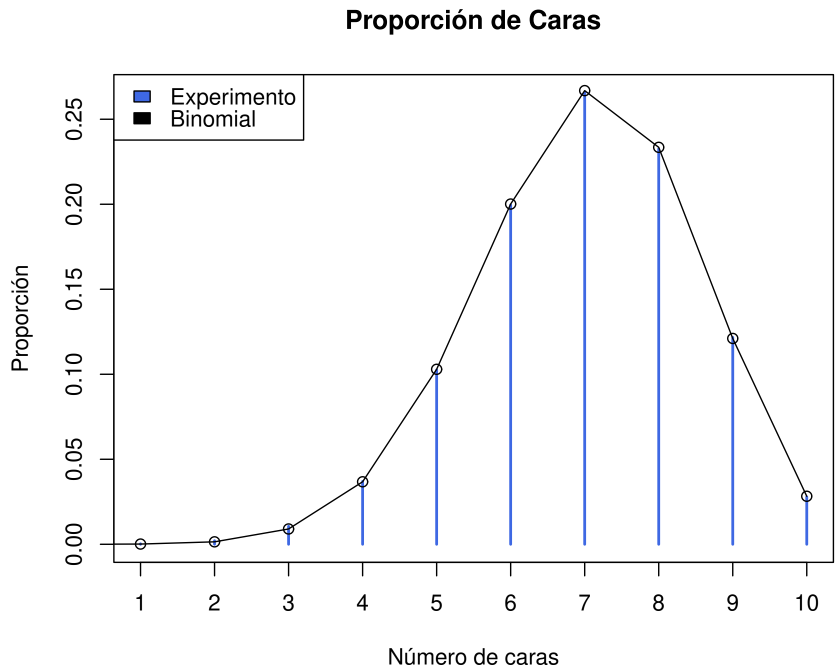

Figura 5: Proporción del número de caras obtenidas.

Como se mensionó, podemos ver como se "carga" la probabiilidad de obtener una cara hacia la derecha, obteniendo una proporción muy alta, ahora con una moda de 7.

Problema 5

(Solución)

A pesar de ser un experimento similar al anterior aquí debemos notar que nuestra población es finita, lo que nos provoca una dependencia en cada extracción, es decir, no hay remplazo.

A continuación se presentan la gráfica del experimento de extracción sin reemplazo:

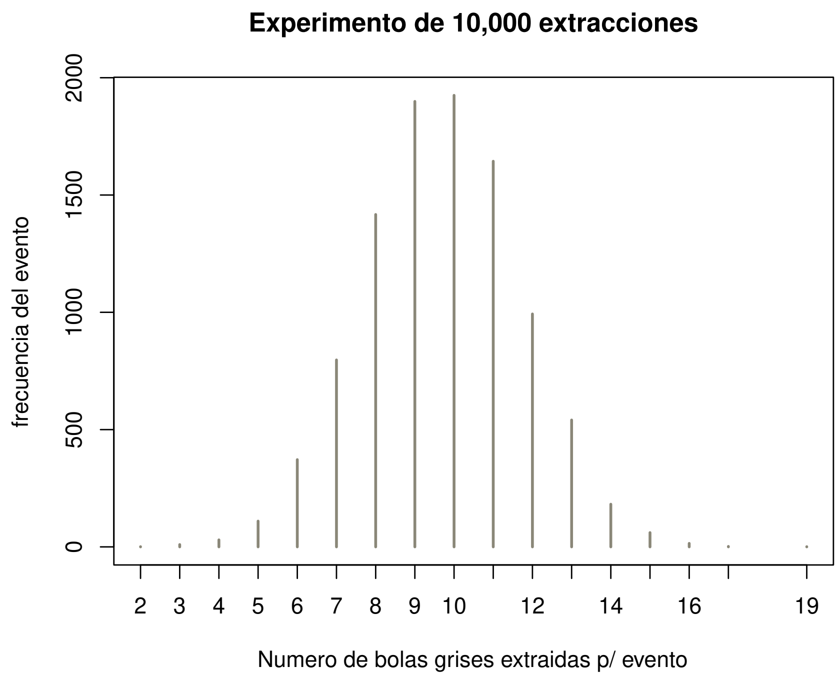

Figura 6: Frecuencias de la extracción de bolas grises

Y finalmente presentamos la gráfica en proporción al número de extracciones grises en total:

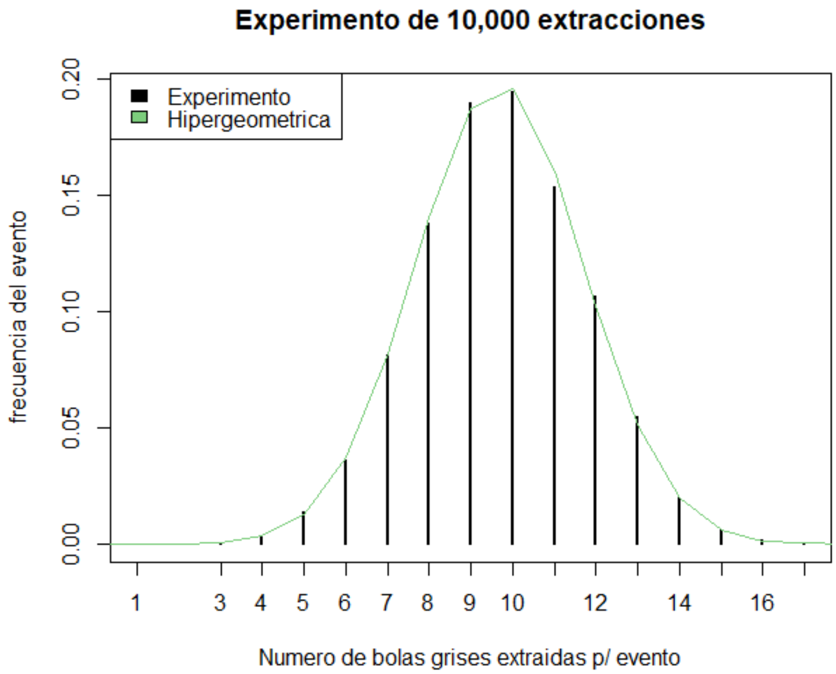

Figura 7: Proporción e hipergeométrica en comparación

Cómo vemos se ajusta muy bien al experimetno la hipergeométrica salvo en los puntos cercanos a la media.

Problema 6

(Solución)

Tengamos la función acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & para \quad x < 0 \\ 1/2 & para \quad 0 \leq x < 1/4 \\ 3/4 & para \quad 1/4 \leq x < 3/4 \\ 1 & para \quad 3/4 \leq x \end{cases} \tag{5}$$

Viendo de salto en salto de la función podemos ver que es una función discreta por su cimportamiento escalonado, donde tendremos tres valores diferentes: $0, 1/4, 3/4$

$$\frac{1}{2} - 0 = f_x(0) = 1/2$$
$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = f_x(1/4) = 1/4$$
$$1 - \frac{3}{4} = f_x(3/4) = 1$$

Con los valores de f_x posibles podemos armar nuestra función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{para} \quad x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \\ \\ \frac{1}{2} & \text{para} \quad x = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Problema 7

(Solución)

En este problema se nos presenta una función acumulada (CDF) definida como:

$$F(x) = x^2 \quad \textbf{para } x \in [0,1] \tag{7}$$

Para poder tener la función de probabilidad, recurrimos a la siguiente definición:

$$f_x(x) = \frac{d}{dx}F(x) \tag{8}$$

Basta con derivar nuestra función en el intervalo (que será el mismo de la CDF):

$$f_x(x) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x \quad \textbf{para } x \in [0,1]$$

(I)

Se nos pregunta la probabilidad de un intervalo por lo que simplemente hacemos uso de la función acumumulada, que es básicamente el teorema fundamental del cálculo para no hacer la integral:

$$P(1/4 < x < 3/4) = F(3/4) - F(1/4) = (3/4)^2 - (1/4)^2 = \boxed{1/2} \tag{9}$$

(II)

Ahora nos pide calcular un el intervalo de $x > 1/2$, dado que sabemos que es una función de probabilidad, podemos "invertir" el problema:

$$P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - F(1/2) = 1 - 1/4 = 3/4$$

(III)

Finalmente nos piden hallar la condicional:

$$\begin{aligned} P(x \leq 3/4 \mid x > 1/2) = \frac{P(x \leq 3/4 \cap x > 1/2)}{P(x > 1/2)} = \\ = \frac{P(1/2 < x < 3/4)}{P(x > 1/2)} = \frac{F(3/4) - F(1/2)}{3/4} = \\ = \boxed{0.41667} \end{aligned}$$

Problema 8

(Solución)

Debemos tener cuidado al leer el problema ya que hay un dato que nos dice: “El lote será aceptado si la proporción de defectuosos es menor a 0.1”, sin embargo, más adelante se nos alcara que el distribuidor nos aceptará los lotes de una selección de 10, si menos de 2 son defectuosos.

Otra cosa que debemos notar es que al ser un lote “muy grande”, podemos considerar independencia en los muestreos, por tanto podemos usar una distribución **binomial**, con probabilidades: $0.01, 0.05, 0.10, 0.20$.

Consideremos las posibles binomiales $X \sim B(10, 0.01), B(10, 0.05), B(10, 0.10), B(10, 0.20)$.

Con ello en mente, se nos pregunta las probabilidades de $x \leq 2$, para cada binomial, por lo que tendremos cuatro sumas:

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} \cdot (0.01)^i \cdot (0.99)^{10-i} = \boxed{0.9998}$$
$$\sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} \cdot (0.05)^i \cdot (0.95)^{10-i} = \boxed{0.9885}$$
$$\sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} \cdot (0.10)^i \cdot (0.90)^{10-i} = \boxed{0.9298}$$
$$\sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} \cdot (0.20)^i \cdot (0.80)^{10-i} = \boxed{0.6778}$$

Lo que debe ser intuitivo es que las probabilidades de tener menos de 2 defectuosos debe disminuir para las proporciones más bajar, justo en el lote de proporción $p = 0.2$, las porbabilidades disminuyen drásticamente.

Problema 9

(Solución)

Tengamos la matriz de posibles resultados como pares ordenados, donde la primer componente es el lanzmiento del primer dado, y la segunda el resultado del segundo dado:

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

(I)

Debemos demostrar si se cumple o no la propiedad siguiente, que nos idicaría independencia entre eventos:

$$P(A \cap F) = P(A)P(F)$$

Para lo cual debemos obtener las probailidades indivisuales y luego la intersección, para $P(A)$ tenemos una probabilidad de $1/2$, dado que nuestro conjunto es $N = 6$ y nuestro subconjunto es de tamaño 3.

Para $P(F)$ no es tan obvio, debemos buscar en nuestra matriz aquellos elementos que coumplan con que la suma sea igual a 7, la diagonal opuesta de la matriz de posibles resultados en ambos dados, nos da esos resultados que deseamos, por lo que nuestro subconjunto es de tamaño 6, dividido entre 36, nos da unn resultado de $P(F) = 1/6$, por lo que:

$P(A)P(F) = (1/2)(1/6) = 1/12$

Ahora para conocer la probabilidad de $P(A \cap F)$, debemos observar en la matriz aquellos elementos que cumplan con ambos requisitos, sabemos que debe estar en la diagonal opuesta, pero aquellos que cumplen con A son solo 3 de ellos, por lo que:

$$P(A \cap F) = 1/12$$

Por lo que podemos decir que ambos eventos **son independientes**

(II)

(Solución)

Procedemos de la misma manera:

$$P(A) = 1/2$$
$$P(D) = 1/12$$

Ahora, aquellos que cumplan ambas características al mismo tiempo son:
$(3, 1), (2, 2), (1, 3)$, por tanto $P(A \cap D) = 1/12$
El hecho de saber que sumó 4 o que el primer dado está en G, nos limita la información, Y dado que $P(A \cap D) \neq P(A)P(D)$, **son eventos dependientes**.

(III)

(Solución)

Procedemos de la misma manera:

$$P(A) = 1/2$$
$$P(E) = 4/36$$

Y ahora enontremos los resultados que satisfacen ambos escenarios: $(3, 2), (2, 3), (1, 4)$, por lo que tendremos $P(A \cap E) = 1/12$
Dado que:
$P(A)P(E) = 1/18 \neq 1/12$ **Ambos eventos son dependientes**

(IV)

(Solución)

Nos piden verificar si: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ de la misma manera vamos obteniendo probabilidades:

$$P(A) = 1/2$$
$$P(B) = 1/2$$
$$P(C) = \frac{18}{36} = 1/2$$

Para $P(C)$ Son los "cuadrantes 1 y 3" de la matriz que cumplen con esa condición.
Entonces $P(A)P(B)P(C) = 1/8$

Para la intersección tendremos, todos aquellos pares en los que aparezcan 4,5, pero el evento C no pertenece a ninguno que cumpla esto, por lo que, la probabilidad es nula.

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

por tanto $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$ **Son eventos dependientes**

(V)

(Solución)

Nos piden verificar si A y C son independientes;

$$P(A) = 1/2$$
$$P(C) = 1/2$$

Para $P(A \cap C) = 1/4$ Que son los eventos del "cuadrante 1':
$P(A)P(C) = 1/4 = P(A \cap C)$ Por lo que **son eventos independietes**.

(VI)

(Solución)

Ahora nos piden saber si C y E son independientes:

$$P(C) = 1/2$$
$$P(E) = 1/9$$

Para la intersección solo tenemos 2 que cumplen las características: $(1, 4), (4, 1)$ Por lo tanto $P(A \cap E) = 2/36 = 1/18$;

$$P(C)P(E) = 1/2 \cdot 1/9 = 1/18 = P(A \cap E) \text{ } \textbf{Son independientes}$$

(VII)

(Solución)

$$P(A) = 1/2$$
$$P(C) = 1/2$$
$$P(E) = 1/9$$

$$P(A \cap C \cap E) = 1/36$$

La única manera en que todas se cumplan es que sea el resultado (4,1).

$$P(A)P(C)P(E) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/9 = 1/36 = P(A \cap C \cap E)$$

Por lo tanto **es verdadero**.

(VIII)

(Solución)

El hecho de que la multiplicación no nos garantiza independencia, es una condicion necesaria pero no suficiente, debemos demostrar además que entre cada uno de ellos también es la misma, es decir las combinaciones :

$$\begin{aligned} P(A)P(E) &= P(A \cap E) \\ P(A)P(C) &= P(A \cap C) \\ P(C)P(E) &= P(C \cap E) \end{aligned}$$

Pero como en el inciso (III) se observa que:

$$P(A)P(E) \neq P(A \cap E)$$

Por lo tanto los eventos son dependientes. **Falso**

Problema 1 extra

(Solución)

$$P(x) = \frac{1}{N+1} \quad x = 0, 1, 2, ..., N$$
$$P(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \notin [0, 1, 2, ..., N]$$

Esto por ser una veriable uniformemente distribuida, la función de ganancia podemos exprezarla como:

$$G(x) = \left(\frac{1}{N+1}\right)(gx - p(N - x)) \tag{10}$$

Donde, g representa la ganancia por unidad vendida, p la pérdida por unidad no vendida, N es el total producido, y x es la demanda del producto, es decir, cuánto se vendió.

Para resolver el problema debemos derivar dicha función e igualarla a 0,

$$\frac{d}{dx}G(X) = \left(\frac{1}{N+1}\right)(g + p)$$
$$\text{Igualando a 0}$$
$$g + p = 0 \to g = -p$$

Lo anterior no nos otorga información de N, solo de las ganancias, que al sustituirlo nos da:

$$G(x) = gN$$

Problema 3 extra

(Solución)

Para este problema podemos hacer un proceso muy similar al de los dados, creando una matriz de resultados como se ve a continuación:

(H, H)	(H, T)
(T, H)	(T, T)

Siendo los enventos:

- $A =$ "La primera moneda cae cara"
- $B =$ "La segunda moneda cae cara"
- $C =$ "Una y solo una moneda cae cara"

(a)

Para corroborar si A y B son independientes debemos simplemente ver si la probabilidad de la intersección entre los eventos es igual a la multiplicación de las probabilidades de cada evento por separado:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{11}$$

$$P(A) = 1/2 \quad \text{Debido a que hay 2 eventos que empiezan con "H"}$$
$$P(B) = 1/2 \quad \text{Debido a que hay 2 eventos que terminan con "H"}$$

Para su intersección debemos ver qué 2 eventos cumplen con ambos conjuntos "A" y "B" al mismo tiempo:

$$P(A \cap B) = 1/4 \quad \text{Debido a que solo está el evento } (H, H)$$

Al multiplicar ambas probailidades:

$$P(A)P(B) = (1/2)(1/2) = 1/4 = P(A \cap B)$$
$$\therefore \text{Son independientes}$$

De la misma manera podemos contestar a la pregunta " ¿Qué pasa con A y C":

$$P(C) = 2/4 = 1/2 \quad \text{Ya que hay 2 eventos: } (H,T) \text{ y } (T,H)$$
$$P(A) = 1/2$$
$$P(A)P(B) = 1/4$$

Y ahora sacamos la probablidad en la intersección de ambos eventos:

$$P(A \cap C) = 1/4 \quad \text{Dado que solo el evento } (H,T) \text{ cumple}$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C) \quad \text{Son eventos independientes}$$

(b)

Para este caso es evidente que no hay interseccipon entre los 3 eventos, por lo que la probabilidad es 0, en cambio las probabilidades indivisuales no son nulas, por ende, no son eventos independientes.