TEMA V: APLICACIONES LINEALES. DIAGONALIZACIÓN

Álgebra II
García Muñoz, M.A.

OBJETIVOS GENERALES

1. Captar el significado y utilidad de las aplicaciones lineales y su relación con los espacios vectoriales y las matrices.
2. Captar el motivo que justifica el problema de la diagonalización de endomorfismos.

Álgebra II
García Muñoz, M.A.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Conocer el concepto de aplicación lineal y saber determinar cuando una aplicación lo es.
- ✓ Conocer los subespacios vectoriales núcleo e imagen asociados a una aplicación lineal y saber calcularlos en casos concretos.
- ✓ Clasificar una aplicación lineal.
- ✓ Calcular la expresión matricial de una aplicación lineal respecto de cualesquiera bases del domino y codominio.
- ✓ Conocer la relación entre las expresiones matriciales respecto de bases distintas de una misma aplicación lineal.
- ✓ Conocer la relación entre diagonalización y semejanza de matrices.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Conocer los conceptos de valor y vector propio y subespacio propio de un endomorfismo.
- ✓ Saber calcular el polinomio característico de un endomorfismo y a partir de este los valores propios de dicho endomorfismo.
- ✓ Calcular las bases de los subespacios propios asociados a cada valor propio de un endomorfismo.
- ✓ Calcular la matriz del cambio de base que nos permita obtener la matriz diagonal del endomorfismo.
- ✓ Saber estudiar si una matriz es diagonalizable o no en $\mathbb{K}$, según el valor de los parámetros que en ella parezcan.
- ✓ Sabrá aplicar el problema de la diagonalización cuando sea preciso.

BIBLIOGRAFÍA

- **“Álgebra lineal con métodos elementales”, L. Merino, E. Santos. Thomson Paraninfo, 2006.**
- “Introducción al álgebra lineal”, H. Anton. Ed. Limusa, 1990.
- “Álgebra lineal”, J. Burgos. Ed. McGraw-Hill, 1993.
- “Álgebra lineal con aplicaciones”, S. Grossman. Ed. McGraw-Hill, 1992.
- "Álgebra lineal: Método, fundamentos y algoritmos", R. Criado y Otros, Ed. AC, 1993.
- “Álgebra lineal y geometría: curso teórico-práctico”, J. García-García y M. López Pellicer. Marfil, 1992.
- “Álgebra y geometría analítica”, F. Granero Rodríguez. Ed. McGraw Hill, 1985.

DESARROLLO TEÓRICO

V.1 Definicion y ejemplos.
V.2 Núcleo e imagen de una aplicación lineal.
V.3 Expresión matricial de una aplicación lineal.
V.4 Operaciones con aplicaciones lineales y matriz asociada.
V.5 Semejanza de matrices. El problema de la diagonalización.
V.6 Autovalores y autovectores. Polinomio característico.
V.7 Diagonalización de un endomorfismo por semejanza
V.8 Aplicaciones de la diagonalización

1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Dados V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, una aplicación f: V $\longrightarrow$ V' se dice que es una **aplicación lineal** si verifica:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$.
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$.

Ejercicio 1. Comprobar que la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (y, x)$ es lineal y $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (y, x^2)$ no lo es.

Proposición 5.1. (Caracterización linealidad) La aplicación f: V $\longrightarrow$ V' es lineal si, y solo si, $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in V$.

Proposición 5.2. Sea f: V $\longrightarrow$ V' una aplicación lineal, entonces se verifica:

1. $f(0) = 0$.
2. $f(-u) = -f(u)$.
3. $f(a_1u_1+...+a_nu_n) = a_1f(u_1)+...+ a_nf(u_n)$, $\forall a_1,..., a_n \in \mathbb{K}$, y $\forall u_1,..., u_n \in V$.

Ejemplos

1. La aplicación identidad Id:V $\longrightarrow$ V definida por Id(v) = v, $\forall v \in$ V.

2. Si U es un subespacio de V, la aplicación inclusión i:U $\longrightarrow$ V, definida por i(u) = u, $\forall u \in$ U.

3. Para cada dos espacios vectoriales V y V' la aplicación cero o trivial 0:V $\longrightarrow$ V', que lleva todo vector de V al cero de V'.

4. La aplicación D: P($\mathbb{R}$) $\longrightarrow$ P($\mathbb{R}$) que lleva cada polinomio en su derivada es lineal.

6. La aplicación ϕ: $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ que lleva cada matriz en su traspuesta es lineal**.**

Ejercicio 2. Comprobar usando la caracterización que la aplicación f: $P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(a+bx+cx^2) = (a - b, b + c)$ es lineal. ¿Es lineal si $f(a+bx+cx^2) = (a + b, c + 1)$?

2. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Dada una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V'$ se definen su **núcleo** e **imagen** respectivamente por:

$$\mathrm{Ker}(f)=\{x \in V \,/\, f(x) = 0\}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \,/\, x \in V\}$$

Lema 5.3. Dada una aplicación $f: V \longrightarrow V'$, se verifica:

i) Ker(f) es un subespacio de V.

ii) Im(f) es un subespacio de V'.

Lema 5.4. Dada una aplicación $f: V \longrightarrow V'$, si $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ es un sistema de generadores de V entonces $\{f(u_1),f(u_2),\ldots,f(u_n)\}$ es un sistema generador de Im(f).

El resultado anterior nos proporciona un método para calcular la imagen de una aplicación lineal. El núcleo de una aplicación lineal es fácil de calcular a partir de la definición.

Ejercicio 3. Calcular núcleo e imagen de la aplicación lineal $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(a+bx+cx^2) = (a - b, b + c)$.

Recordar que las aplicaciones se pueden clasificar en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, de la misma forma una aplicación lineal puede ser inyectiva, sobreyectiva o biyectiva si como aplicación es de algunos de estos tipos.

Revisión: Sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal

- **Inyectiva** si y sólo si $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$, o equivalentemente si $v_1 \neq v_2 \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$
- **Sobreyectiva** si y sólo si $\forall v' \in V'\ \exists\, v \in V$ tal que $f(v) = v'$
- **Biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

Proposición 5.5. Dada una aplicación lineal $f:V \longrightarrow V'$, se tiene:

a) f es inyectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0$.

b) f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = V'$.

Lema 5.6. Dada una aplicación lineal f: V $\longrightarrow$ V', se verifica:
1. f es inyectiva $\Leftrightarrow$ Para cada conjunto lin. independiente, $\{u_1, u_2,...,u_r\}$, el conjunto $\{f(u_1), f(u_2),...,f(u_r)\}$ es lin. independiente.
2. f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ Para cada sistema generador de V, $\{u_1, u_2,...,u_s\}$, el conjunto $\{f(u_1),f(u_2)...,f(u_s)\}$ es un sistema generador de V'.

A las aplicaciones lineales inyectivas se les llama también **monomorfismos**, a las sobreyectivas **epimorfismos** y a las biyectivas **isomorfismos**.

Dos espacios vectoriales V y V' se dice que son **isomorfos**, y se denota por $V \cong V'$, si existe un isomorfismo entre ellos.

Una aplicación lineal f: V $\longrightarrow$ V de un espacio vectorial en si mismo se dice que es un **endomorfismo**. Si además f es biyectiva decimos que es un **automorfismo** de V.

3. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea f: V $\longrightarrow$ V' una aplicación lineal, B={e_1,e_2,...,e_n} una base de V y B'={u_1, u_2,...,u_m} una base de V'.

f está totalmente determinada por las imágenes f(e_1), f(e_2),..., f(e_n) de los vectores de B, pues dado un vector x de V de coordenadas (x_1,x_2,...,x_n) en B, entonces,

$$f(x) = f(x_1e_1+...+x_ne_n) = x_1f(e_1)+...+x_nf(e_n)$$

Si las coordenadas respecto de B' de los vectores f(e_1), f(e_2),..., f(e_n) son:

$$f(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})_{B'}$$
$$f(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})_{B'}$$
....
$$f(e_n) = (a_{m1}, a_{m1}, \dots, a_{mn})_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde f(x) = (y_1, y_2,…, y_m) son las coordenadas de f(x) respecto de B':

Sea f: V $\longrightarrow$ V' una aplicación lineal, B={e_1,e_2,...,e_n} una base de V y B'={u_1, u_2,...,u_m} una base de V'.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta expresión recibe el nombre de **ecuación matricial** de la aplicación lineal f respecto de las bases B y B'.

La matriz A recibe el nombre de **matriz asociada** a f respecto de las bases B y B' que denotaremos por A = $M_{B,B'}$(f). Notar que el número de columnas es igual a la dimensión de V y su número de filas igual a la dimensión de V'.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición 5.7. Sea V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y B y B' bases de V y V' respectivamente. Dada una aplicación lineal f: V $\longrightarrow$ V', la **ecuación matricial de f respecto de las bases B y B'** es la expresión:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

a partir de la cual dadas las coordenadas X de un vector x respecto de B, permite calcular las coordenadas Y de su imagen y = f(x) respecto de B'. A es la **matriz asociada a f respecto de B y B',** esto es: la matriz cuyas columnas son las coordenadas respecto de B' de las imágenes por f de los vectores de B.

Ejercicio 4. Calcular la expresión matricial respecto de las bases canónicas de la aplicación lineal f: $P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(a+bx+cx^2) = (a - b, b + c)$.

Recíprocamente, toda matriz es la matriz asociada a una aplicación lineal. Dados V y V' espacios vectoriales con bases B y B' respectivamente, para cada matriz A $\in$ $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, existe una única aplicación lineal f: V $\longrightarrow$ V' de forma que $M_{B,B'}(f) = A$, es decir, f(x) = Ax.

Proposición 5.8. Sea f: V $\longrightarrow$ V' una aplicación lineal, entonces se verifica:

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V).$$

Dada una aplicación lineal f: V $\longrightarrow$ V' se llama **rango** de f, (rg(f)), a la dimensión de su imagen y **nulidad** de f, (n(f)), a la dimensión de su núcleo

Así dada una aplicación lineal, su nulidad más su rango es igual a la dimensión del dominio de esta.

Otra forma de calcular núcleo e imagen de una aplicación:

Sabemos que las columnas de la matriz asociada a f, constituyen un sistema generador de Im(f). Si al calcular la forma de Hermite por columnas de A realizamos las operaciones elementales sobre la matriz que se obtiene al añadir la identidad debajo de A, además de obtener la forma normal de Hermite por columnas debajo de esta obtenemos una matriz regular P de orden n de forma que C = AP. Entonces las columnas no nulas de C constituyen una base de Im(f) y las columnas de P que están debajo de las columnas de ceros de C (si las hay) constituyen una base de Ker(f).

$$\left(\frac{A}{I}\right) \approx \left(\frac{C}{P}\right)$$

Ejemplo 11. *Consideremos la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *del ejemplo 8,* $f(x, y, z) = (x + z, y, x + 2y + z)$. *La matriz asociada a* f *respecto de la base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_c \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego una base de $Im(f)$ *es* $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$, *mientras que una base de* $Ker(f)$ *es* $\{(-1, 0, 1)\}$.

Ejercicio 5. Usar este último método para calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal f: $P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(a+bx+cx^2) = (a - b, b + c)$.

Corolario 5.8. Sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal con $\dim(V) = n$ y $\dim(V') = m$ y sea A la matriz de orden $m \times n$ asociada a f respecto de ciertas bases B y B'. Entonces:

1. f es monomorfismo $\Leftrightarrow$ rg(A) = n.
2. f es epimorfismo $\Leftrightarrow$ rg(A) = m.
3. f es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ A es cuadrada y regular.

Teorema 5.9. Dos espacios vectoriales V y V' de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ son isomorfos si y sólo si tienen igual dimensión:

$$V \cong V' \text{ si y sólo si } \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V')$$

Ejercicio 6. Comprobar que $M_2(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R}^4$ y que $P_2(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

Sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, y consideremos B y $\overline{B}$ bases de V y B' y $\overline{B}'$ bases de V'. Sea A es la matriz asociada a f respecto de B y B' y C es la matriz asociada a f respecto de $\overline{B}$ y $\overline{B}'$, ¿qué relación existe entre A y C?

Sean B y $\overline{B}$ bases de V con cambio de base de $\overline{B}$ a B dado por $X = P\overline{X}$

Sean B' y $\overline{B}'$ bases de V' con cambio de base de $\overline{B}'$ a B' dado por $Y = Q\overline{Y}$

Sea $f: V \longrightarrow V'$ aplicación lineal y sean

$A = M_{B,B'}(f)$ y $C = M_{\overline{B},\overline{B}'}(f)$ es decir

$Y_{B'} = A \cdot X_B$ y $\overline{Y}_{\overline{B}'} = C\,\overline{X}_{\overline{B}}$

Gráficamente:

$$V \longrightarrow V'$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] & B' \\ \bar{B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"] & \bar{B}' \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

Entonces:

$$\bar{Y} = Q^{-1} Y = Q^{-1} A X = Q^{-1} A P \bar{X}$$

Por tanto:

$$C = Q^{-1} . A . P$$

Sea $f:V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, y consideremos B y $\bar{B}$ bases de V y B' y $\bar{B}$' bases de V'. Sea A es la matriz asociada a f respecto de B y B' y C es la matriz asociada a f respecto de $\bar{B}$ y $\bar{B}$', ¿qué relación existe entre A y C?:

A y C son matrices equivalentes, además $C = Q^{-1}AP$, donde P es la matriz del cambio de base en V de $\bar{B}$ a B y Q es la matriz del cambio de base en V' de $\bar{B}$' a B'.

Así las matrices asociadas a una misma aplicación lineal respecto de distintas bases son **equivalentes**.

Ejercicio 7. Resolver el ejercicio 5 convocatoria ordinaria 2 del curso 16-17.

Ejercicio 7bis. Resolver el ejercicio 8 de la relación 5.

Si f:V $\longrightarrow$ V es un endomorfismo tomando la misma base en dominio y codominio de la aplicación lineal, la relación entre A y C es $C = P^{-1}AP$. Dos matrices cuadradas A y C satisfaciendo lo anterior se dice que son **semejantes**. Luego las matrices asociadas a un mismo endomorfismo respecto de distintas bases son semejantes.

Proposición 5.10.

1. Dos matrices son equivalentes si, y sólo si, son matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.
2. Dos matrices son semejantes si, y sólo si, son matrices asociadas al mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

4. OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES Y MATRIZ ASOCIADA.

Dados V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, al conjunto de todas las aplicaciones lineales entre ellos lo denotamos por **$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}$(V, V')**.

En este conjunto definimos operaciones suma (f + g) y producto por escalar (λf) mediante:

$$f + g: V \longrightarrow V';\ (f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

$$\lambda f: V \longrightarrow V';\ \ (\lambda f)(u) = \lambda f(u)$$

donde f, g $\in$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}$(V, V') y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposición 5.11. Dados V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}$(V, V') de todas las aplicaciones lineales de V en V' tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones anteriores.

Proposición 5.12. Dadas aplicaciones lineales f: V $\longrightarrow$ V' y g: V' $\longrightarrow$ V'', su composición g o f: V $\longrightarrow$ V'' es también una aplicación lineal.

Denotamos por **$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}$(V)** = $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}$(V, V) al conjunto de todos los endomorfismos de V. En dicho conjunto la composición es una operación interna satisfaciendo las propiedades asociativa, existencia de elemento neutro, distributiva respecto de la suma y compatibilidad (λ(g o f) = (λg) o f = g o (λf)). Esto es, $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}$(V) con la suma, el producto por escalares y la composición, tiene estructura de $\mathbb{K}$-álgebra.

Proposición 5.13. Para cada isomorfismo de espacios vectoriales f: V $\longrightarrow$ V', su aplicación inversa f^{-1}: V' $\longrightarrow$ V es también lineal (y por tanto isomorfismo).

Denotamos por **Aut$_{\mathbb{K}}$(V)** al conjunto de todos los automorfismo de V (es decir, endomorfismos de V biyectivos). En este conjunto la composición es una operación interna y se tiene que (Aut$_{\mathbb{K}}$(V), o) es un grupo, que recibe el nombre de **grupo lineal** de V.

Proposición 5.14. Sean V, V' y V'' espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensiones finitas, B, B' y B'' bases de V, V' y V'' respectivamente y f,g: V $\longrightarrow$ V' y h:V' $\longrightarrow$ V'' aplicaciones lineales, entonces se tiene:

$$M_{B,B'}(f + g) = M_{B,B'}(f) + M_{B,B'}(g).$$
$$M_{B,B'}(\lambda f) = \lambda\, M_{B,B'}(f), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K}.$$
$$M_{B,B''}(h \circ f) = M_{B',B''}(h)\, M_{B,B'}(f).$$

Teorema 5.15. Sean V y V' espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensiones n y m respectivamente y dadas B y B' bases de V y V' entonces la aplicación:

$$M_{B,B'}: \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V') \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

que lleva cada aplicación lineal en su matriz asociada respecto de B y B', es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular se tiene dim(Hom$_{\mathbb{K}}$(V, V')) = mn.

5. SEMEJANZA DE MATRICES. EL PROBLEMA DE LA DIAGONALIZACIÓN

Sabemos que dado un endomorfismo f de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ y elegida una base B de V, la matriz $M_B(f)$ identifica completamente a f. Parece entonces que sería conveniente hacer elecciones de bases B de forma que $M_B(f)$ sea lo más sencilla posible. Como las matrices diagonales son las más sencillas a la hora de efectuar operaciones, parece que lo que debemos buscar es bases donde las matrices de f sean diagonal. Este proceso se llama **diagonalización** de f.

Recordar que dos matrices cuadradas A y B son **semejantes** si existe una matriz regular P de forma que $B = P^{-1}AP$ y que dos matrices asociadas a un mismo endomorfismo respecto distintas bases son semejantes. Así en este tema nos planteamos dada una matriz A encontrar otra matriz D semejante a A y de forma que D sea diagonal.

Por otra parte, dada A $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces A es la matriz asociada a un endomorfismo f: $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ respecto de la base canónica B de $\mathbb{K}^n$. Si D es una matriz semejante a A, esto es: D = $P^{-1}AP$ para cierta matriz regular P, entonces D será la matriz asociada a f respecto de una nueva base B' de $\mathbb{K}^n$ de forma que P es la matriz de cambio de base de B' a B.

Así el problema de diagonalización trata de ver como ha de ser B' = $\{u_1,u_2,...,u_n\}$, para que la matriz asociada a f respecto de B' sea diagonal, es decir, la matriz cuyas columnas son las coordenadas respecto de B' de los vectores $f(u_i)$ sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Por tanto, $f(u_i)=(0,...,\lambda_i,...,0)_{B'} = \lambda_i u_i$ para todo i=1,...,n.

Así el problema de diagonalización consistirá en encontrar vectores $u_1,...,u_n$ linealmente independientes (para que formen base) tales que para cada i se verifique $f(u_i)=\lambda_i u_i$ para ciertos escalares $\lambda_1,..., \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Ejercicio 8. Dada f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por f(x, y, z) = (x+y+x, 2y+z, 3z). Comprobar que la matriz asociada a f respecto de B = {(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)} es diagonal.

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$f(u_1)$ $f(u_2)$ $f(u_n) = (0,0,...,\lambda_n)_{B'} = 0u_1+0u_2+...+\lambda_n u_n$

$= \lambda_1 u_1$ $= \lambda_2 u_2$ $= \lambda_n u_n$

6. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES. POLINOMIO CARACTERÍSTICO.

Sea V un espacios vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $f:V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V. Se dice que el escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** (o **autovalor**) de f si existe un vector $0 \neq u \in V$ de forma que $f(u) = \lambda u$.

Para un escalar $\lambda \in K$, llamaremos **vector propio** (o **autovector**) asociado a λ a cada vector u de V tal que $f(u)= \lambda u$.

Denotamos por V_λ al conjunto de todos los autovectores asociados a λ, esto es:

$$V_\lambda=\{u \in V / f(u)= \lambda u\}$$

Proposición 5.16. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, f un endomorfismo de V y sea A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, se verifica:

1. $V_\lambda = Ker(f - \lambda I)$.
2. V_λ es un subespacio vectorial de V.
3. $dim(V_\lambda) = n - rg(A - \lambda I)$.
4. λ es autovalor de f $\Leftrightarrow$ $det(A - \lambda I) = 0$.

El subespacio V_λ recibe el nombre de **subespacio propio** de λ.

Ejercicio 9. Para el endomorfismo del ejercicio anterior, f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por f(x, y, z) = (x+y+x, 2y+z, 3z), comprobar que 2 es un autovalor y calcular el subespacio propio asociado a dicho autovalor.

Por la proposición anterior λ es un valor propio de f si, y sólo si, $det(A - \lambda I) = 0$; ahora bien, considerando el escalar λ como indeterminada, este determinante

$$p(\lambda)=|A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} - \lambda \end{vmatrix}$$

es un polinomio en λ, de grado n que recibe el nombre de **polinomio característico** de f. Los valores propios serán precisamente las raíces del polinomio característico.

Lema 5.17. El polinomio característico de f no depende de la matriz asociada a f que se considere.

Ejercicio 10. Calcular el polinomio característico del endomorfimo del ejercicio 8.

Lema 5.18. El número máximo de valores propios de un endomorfismo en V con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ es n.

En general, puede ocurrir que el polinomio característico no tenga exactamente n raíces. Una primera posibilidad involucra al cuerpo que se esté considerando, así si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, todas las raíces del polinomio han de estar en $\mathbb{C}$, pero si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puede suceder que el polinomio característico tenga raíces imaginarias que no nos sirven como autovalores, incluso aun cuando tenga todas las raíces en $\mathbb{R}$, puede tener menos de n valores propios distintos por la aparición de raíces múltiples.

Ejercicio 11. Calcular el polinomio característico y los valores propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Llamaremos **multiplicidad algebraica** del valor propio λ_i a la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico, es decir, el mayor exponente α para el cual el factor $(\lambda_i-\lambda)^\alpha$ aparece en la descomposición de $p(\lambda)$.

Llamaremos **multiplicidad geométrica** de λ_i a la dimensión d del subespacio propio $V_{\lambda i}$, esto es:

$$d = \dim(V_{\lambda i}) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda_i I)$$

Proposición 5.19. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V de matriz asociada A y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sus valores propios distintos. Entonces para cada $i = 1, 2, \ldots, r$ se tiene $1 \le d_i \le \alpha_i$.

7. DIAGONALIZACIÓN DE UN ENDOMORFISMO POR SEMEJANZA

Se dice que una matriz cuadrada A es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal D semejante a A.

Un endomorfismo $f:V \longrightarrow V$ es **diagonalizable** si existe una base B de V respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal.

Proposición 5.20. Un endomorfismo $f:V \longrightarrow V$ es diagonalizable si existe una base de V formada por vectores propios de f.

Lema 5.21. Vectores propios no nulos asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.

Teorema 5.22. **(Criterio de diagonalización)** Sea f: V $\longrightarrow$ V un endomorfismo y sean λ_1, λ_2,..., λ_r sus distintos valores propios. Entonces f es diagonalizable si, y sólo si, se verifica las siguientes condiciones:

1. $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r = n$ (todas las raíces del polinomio característico de f están en $\mathbb{K}$).
2. $d_i = \alpha_i$, para cada i = 1, 2,..., r.

Corolario 5.23. Sea A una matriz cuadrada de orden n, si A tiene n valores propios distintos en $\mathbb{K}$, entonces es diagonalizable.

Ejercicio 12. Estudiar si es diagonalizable la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En resumen:

Paso 1: Calculamos el polinomio característico $p(\lambda)$.

Paso 2: Descomponemos $p(\lambda)$ calculando sus raíces con lo que conoceremos valores propios y multiplicidades algebraicas α_i. Si tiene raices complejas, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$, aunque puede serlo en $\mathbb{C}$.

Paso 3: Calculamos las multiplicidades geométricas, $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Paso 4: Aplicamos el criterio de diagonalización, si existe algún i tal que $d_i \neq \alpha_i$, entonces la matriz no es diagonalizable. En caso contrario la matriz es diagonalizable y D es la matriz diagonal cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad.

Paso 5: Obtenemos bases de los subespacios propios $V_{\lambda i} = Ker(f - \lambda_i I)$.

Paso 6: Uniendo estas bases obtenemos una base de V para la cual la matriz asociada es D. Así pues la matriz de cambio de base P es aquella cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores propios y verifica $D = P^{-1}AP$.

Ejercicio 13. Para la matriz del ejercicio anterior obtener P y D tal que $D = P^{-1}AP$.

8. APLICACIONES DE LA DIAGONALIZACIÓN

A) Calculo de la inversa de una matriz regular, diagonalizable por semejanza.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ regular, diagonalizable por semejanza
Si $D = P^{-1}AP$, donde D es la matriz diagonal (todos los elementos de la diagonal son no nulos) y P es la matriz regular, entonces su inversa vendrá dada por $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ donde la matriz D^{-1} es diagonal y se obtiene calculando los inversos de los elementos de la diagonal de la matriz D.

B) Calculo de la potencia de una matriz diagonalizable

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalizable en $\mathbb{K}$ con $D = P^{-1}AP$, donde D es la matriz diagonal y $m \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que

$$A^m = P\,D^m\,P^{-1}$$

donde la matriz D^m es diagonal y se obtiene elevando a m los elementos de la diagonal de D.

Si además A fuese regular y s un entero negativo tendríamos $A^s = (A^{-1})^m$ donde $m = -s \in \mathbb{Z}^+$. Repitiendo el proceso anterior para A^{-1} en lugar de A podemos calcular A^s como

$$A^s = P\,D^s\,P^{-1}.$$

Ejercicio 13. Para la matriz del ejercicio 12, obtener, si es posible, A^4 y A^{-1}.