# TEMA VI: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS



## OBJETIVOS GENERALES

**1. Captar el significado de grafo.**

**2. Captar la utilidad de la teoría de grafos en ciencias de la computación.**

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ **Conocer el concepto de grafo y los distintos tipos de grafos.**
- ✓ **Saber calcular las matrices de adyacencia y de incidencia de un grafo no orientado.**
- ✓ **Saber calcular la matriz de adyacencia de un grafo orientado.**
- ✓ **Conocer el concepto de grado de un vértice.**
- ✓ **Reconocer cuando un grafo es regulares y completo.**
- ✓ **Saber cuando un grafo es un subgrafos de otro grafo.**
- ✓ **Reconocer cuando un grafo es un grafo bipartito.**
- ✓ **Conocer los conceptos de camino y ciclo.**
- ✓ **Saber cuando un grafo es de Euler y/o de Hamilton.**



## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ **Saber colorear un grafo.**
- ✓ **Reconocer cuando un grafo es plano.**
- ✓ **Saber cuando un grafo es un arbol o un bosque.**

## BIBLIOGRAFÍA


- **“Métodos computacionales en álgebra. Matemática discreta: Grupos y grafos”, J.F. Ruiz Ruiz. Publicaciones Universidad de Jaén, 2ª edición, 2012 (disponible en línea).**
- Elementos de matemática discreta. E. Bujalance y otros. Editorial: Madrid: Sanz y Torres, 2001.
- Matemática discreta. F. García Merayo. Editorial: Madrid: Thomson-Paraninfo, 2005.




## DESARROLLO TEÓRICO

# 1. Definición y tipos de grafos



La noción de grafo y los conceptos asociados pueden variar según la aplicación que pretendamos darle o el problema que queramos formalizar. Aunque los definiremos de la forma más genérica posible, después nos quedaremos con las nociones de grafo más habituales y simples.

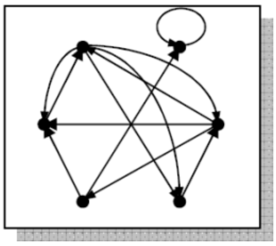
Distinguimos dos tipos básicos de grafos, orientados y no orientados.

## Grafo orientado o digrafo

Un **grafo orientado** o **digrafo** G es una terna ($W$, $F$, $\gamma$) formada por dos conjuntos no necesariamente finitos y una aplicación:

*i.* $W \neq \emptyset$ el conjunto de sus **vértices** o **nodos** también denotado por *W(G)*;

*ii.* $F$ el conjunto de sus **flechas**, **arcos** o **aristas orientadas**, también denotado por *F(G)*;



iii. La aplicación $\gamma$: $F \longrightarrow W \times W$, que definiremos para cada flecha $\alpha \in$ F por $\gamma(\alpha) = (v, w) \in W \times W$, donde v $\in W$ es el **vértice inicial** u **origen** de la flecha $\alpha$ y w $\in W$ es el **vértice final** u **destino** de la flecha $\alpha$

A las flechas con el mismo origen y destino las llamaremos **lazos** o **bucles**.

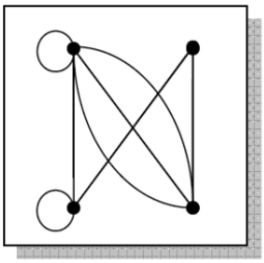


## Grafo no orientado

Un **grafo no orientado** G es una terna ($W$, $F$, c) formada por dos conjuntos no necesariamente finitos y una aplicación:

*i.* $W \neq \emptyset$ el conjunto de sus **vértices**;

*ii.* $F$ el conjunto de sus **lados** o **aristas**;



iii. La aplicación c: $F \longrightarrow \{\{v, w\} \mid v, w \in W\}$ (aplicación del conjunto F en el conjunto de todos los subconjuntos de W con 1 o 2 elementos), que definiremos para cada lado $\alpha \in$ F por $c(\alpha) = \{v, w\} \subseteq W$, donde v y w son los vértices que conectan dicho lado, en tal caso diremos que los vértices son **adyacentes**, y además que el lado $\alpha$ es **incidente** con los vértices v y w.

También distinguiremos distintos modelos de grafos tanto en los orientados como no orientados :

a) Un grafo se dice que es **etiquetado**, **ponderado** o **con peso** si a cada lado o flecha se le asocia un número real.

b) Un grafo se dice que es un **multigrafo** si existe más de una flecha o lado incidentes con los mismos vértices.

c) Un grafo G = (W, F) se dice que es **finito** si los conjuntos W y F son finitos. Si | W | = p y |F| = q, entonces diremos que G es un (p, q) –grafo.

d) Un grafo se dice que es **simple** si no posee lazos y no es un multigrafo.

Nosotros vamos a estudiar dos tipos concretos que son los más elementales y habituales:



1) Grafo orientado, simples y finitos que llamaremos simplemente **grafos dirigidos** o **digrafos** y que podemos entender que son pares $G = (W, F)$ formados por dos conjuntos finitos: $W \neq \varnothing$ el conjunto de sus vértices o nodos y $F \subseteq W \times W$ el conjunto de sus arcos o flechas, donde cada flecha $e \in F$ es un par ordenado de dos vértices $e = (v, w) \in W \times W$, que llamaremos respectivamente inicio y fin de la flecha.
2) Grafos no orientados, simples y finitos que llamaremos simplemente **grafos no orientado, no dirigido** o **grafos** y que podemos entender que son pares $G = (W, F)$ formados por dos conjuntos finitos: $W \neq \varnothing$ el conjunto de sus vértices y $F \subseteq \{\{v, w\}/\ v, w \in W\ y\ v \neq w\}$ (subconjunto del conjunto de todos los subconjuntos de dos elementos de $W$) el conjunto de sus aristas o lados, donde cada lado $e \in F$ es un subconjunto de dos vértices $e = \{v, w\} \subseteq W$.

# 2. Representación matricial de un grafo



## 2.1 Matriz de adyacencia

Dado un (p, q)-grafo no orientado, llamaremos **matriz de adyacencia** a la matriz $A = (a_{ij})$ con coordenadas:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si los vértices } v_i \text{ y } v_j \text{ son adyacentes.} \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Si el grafo es dirigido entonces la matriz de adyacencia se define como sigue:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (v_i, v_j) \in F. \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia no es única y depende del nombre y ordenación que asignemos a los vértices que la componen.

Si el grafo no es dirigido la matriz es simétrica y su diagonal principal se compondrá únicamente por ceros.

Si el grafo es dirigido, la diagonal principal también se compone únicamente de ceros y por cada 1 en un posición (i, j)-ésima tendrá un 0 en la (j, i)-ésima puesto que no consideramos multigrafos.

Aunque la matriz de adyacencia representa a un grafo determinado, ésta no contiene información alguna acerca de los nombres que tengan los vértices, para mayor comodidad y evitar ambigüedades identificaremos a los vértices por sus subíndices en vez de por sus nombres como ya hemos comentado. Por tanto, para utilizar una expresión matricial de un grafo será imprescindible esta identificación.



## 2.1 Matriz de incidencia

Dado un (p, q)-grafo no orientado, llamaremos **matriz de incidencia** a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

con coordenadas:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el lado } e_j \text{ es incidente con el vértice } v_i. \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

En la matriz de incidencia cada columna tendrá dos unos y el resto ceros (puesto que nuestros grafos son simples), además no es única, y dependerá del orden o nombre que demos a los vértices y los lados del grafo.

Si el grafo es dirigido no podríamos representarlo mediante una matriz de incidencia booleana. Nos limitaremos a estudiar las matrices de incidencia únicamente de los grafos no orientados.



# 3. Grafos isomorfos

Dos grafos $G_1 = (W_1, F_1)$ y $G_2 = (W_2, F_2)$ (resp. digrafos) diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación $f: W_1 \rightarrow W_2$ biyectiva tal que, $\{v, w\} \in F_1$ (resp. $(v, w) \in F_1$) si y sólo si $\{f(v), f(w)\} \in F_2$ (resp. $(f(v), f(w)) \in F_2$).



# 4. Grado de un vértice

## EL GRADO EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

Sea $G = (W, F)$ un grafo (no dirigido), llamaremos **grado** de un vértice $v \in W$ al número de lados incidentes con dicho vértice, lo denotaremos por $gr(v)$.

Es sencillo determinar el grado de un vértice desde la matriz de adyacencia, pues obsérvese que este viene dado por la suma de todos los unos de la fila o columna correspondiente, esto es, si A es la matriz de adyacencia, el grado de $v_i$ viene dado por la coordenada (i, i)-ésima de $A^2$.

Análogamente, también podemos determinar el grado de un vértice desde la matriz de incidencia, éste coincide con el número de unos de la fila correspondiente.



Sea G un (p, q)-grafo, es fácil concluir que la suma de los grados de todos los vértices de un grafo ha de ser forzosamente el doble del número de lados:

$$\sum_{i=1}^{p} gr(v_i) = 2q$$

## EL GRADO EN GRAFOS DIRIGIDOS

Sea $G$ un grafo dirigido, llamaremos **grado de entrada** (resp. **de salida**) de un vértice $v \in W$ al número de flechas cuyo destino (resp. origen) es v, lo denotaremos por $gr^{-}(v)$ (resp. $gr^{+}(v)$).

# 5. Grafos regulares y grafos completos.



## Grafo no orientado

Un grafo se dice que es **k-regular** si todos sus vértices son de grado k.

Comprobar si un grafo es regular es inmediato: Podemos hacerlo, por ejemplo:

i) desde la matriz de adyacencia A comprobando que todas las filas o columnas tengan el mismo número de unos, o bien,
ii) utilizando el cuadrado de la matriz de adyacencia, comprobamos que todos los elementos de la diagonal coinciden.

## Grafo no orientado

Un (p, q)-grafo no orientado se dirá que es **completo** si cada vértice es adyacente con todos los demás, esto es, el grado de cada vértice es p – 1 o lo que es lo mismo es (p – 1)-regular, lo denotaremos por $K_p$.

La matriz de adyacencia de un grafo completo esta compuesta sólo por unos excepto la diagonal principal que tiene ceros.

Por otra parte comprobar si $G = (W, F)$ un (p, q) –grafo es o no completo resulta muy sencillo pues el número de lados que debe de tener es obligatoriamente p(p-1)/2.



# 6. Subgrafos y grafos bipartitos.

Dado un grafo (resp. grafo dirigido) $G$ =($W$, $F$), diremos que otro grafo (resp. grafo dirigido) $G_1$ =($W_1$, $F_1$) es un **subgrafo** de $G$ si $\emptyset \neq W_1 \subseteq W$ y $F_1 \subseteq F$, donde cada lado (resp. flecha) de $F_1$ es incidente con vértices de $W_1$.
Si un subgrafo es tal que $W_1 = W$ se dirá que es un **subgrafo maximal**.

Sea $G$ =($W$, $F$) un grafo o grafo dirigido y sea $W' \subseteq W$, llamaremos **subgrafo de *G* inducido por *W'*** y lo denotaremos por $< W' >$ al subgrafo de $G$ que tiene por conjunto de vértices a $W'$ y por conjunto de lados o flechas al subconjunto de $F$ formado por todos los lados o flechas de $F$ incidentes con vértices de $W'$.



## Grafo no orientado

Un grafo $G = (W, F)$ (no dirigido) se dirá **bipartito** si existen dos subconjuntos no vacíos de vértices $W_1$, $W_2 \subseteq W$ tales que:

i. $W_1 \cap W_2 = \emptyset$;
ii. $W = W_1 \cup W_2$;
iii. $< W_1 > = G_1 = (W_1, \emptyset)$;
iv. $< W_2 > = G_2 = (W_2, \emptyset)$;

esto es, todos los lados son incidentes con un vértice de $W_1$ y otro de $W_2$.

Si además cada vértice de $W_1$ es adyacente a todos los vértices de $W_2$, entonces se dirá que el grafo es **bipartito completo** y lo denotaremos por $K_{n,m}$ donde $|W_1| =$ n y $|W_2| =$ m.
Nótese que el número de lados de un grafo bipartito completo es n.m y además gr($w_1$) = m y gr($w_2$) = n para cada $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$.

# 7. Definición y tipos de caminos.



## Grafo no orientado

Sea $G = (W, F)$ un grafo no orientado, un **camino** $c$ es una sucesión finita de vértices

$$c = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}, \text{ con } v_i \in W \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, n+1;$$

tales que dos vértices consecutivos son adyacentes, esto es, verificando $\{v_i, v_{i+1}\} = e_i \in F$ para cada i = 1, 2,…, n; también podemos denotar un camino por la sucesión de lados

$$c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \text{ con } e_i \in F \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, n;$$

o incluso como la sucesión alternada de vértices y lados:

$$c = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_n, e_n, v_{n+1}\}.$$

Diremos que n es la **longitud** del camino $c$ y la denotaremos por $l(c)$. También diremos que el camino $c$ **conecta** los vértices $v_1$ y $v_{n+1}$, siendo $v_1$ el **origen** y $v_{n+1}$ el **fin** del camino, que denotaremos por $s(c)$ y $e(c)$ respectivamente.

## Grafo no orientado

Si n = 0, entenderemos que tenemos un **camino trivial** de longitud 0 cuya sucesión de vértices asociada tendrá longitud 1 y será de la forma $\{v_1\}$ sin ningún lado. Si un lado o vértice pertenece a un camino diremos que dicho camino **pasa** por ese lado o vértice.



## Grafo orientados o dirigidos

En los grafos orientados tenemos que distinguir entre dos tipos de caminos, los caminos orientados y los no orientados:

Sea $G = (W, F)$ un grafo dirigido, entonces:

a) un **camino** $c$ es una sucesión finita de vértices $c = \{v_1, v_2,\ldots,v_{n+1}\} \subseteq W$ verificando:
   $(v_i, v_{i+1}) \in F$ o bien $(v_{i+1}, v_i) \in F$ para cada i = 1, 2,…, n;
   Si llamamos $f_i$ a la correspondiente flecha, también podemos denotarlo como la sucesión de flechas $\{f_1, f_2,\ldots, f_n\} \subseteq F$ o como una sucesión alternada de vértices y flechas:
   $$c = \{v_1, f_1, v_2, f_2, v_3, \ldots, v_n, f_n, v_{n+1}\}.$$
   (Observar que si obviamos la orientación del grafo, un camino no orientado, conceptualmente coincide con un camino del grafo no orientado).

## Grafo orientados o dirigidos

b) un **camino orientado** o **camino dirigido** $c$ es una sucesión finita de flechas $c = \{f_1, f_2,\ldots,f_n\} \subseteq F$ o de vértices $\{v_1, v_2,\ldots,v_{n+1}\} \subseteq W$ verificando:

1) $e(f_i) = s(f_{i+1}) = v_{i+1}$;
2) $s(f_1) = v_1$ y $e(f_n) = v_{n+1}$ ;

es decir, $(v_i, v_{i+1}) = f_i \in F$ para cada i = 1, 2,…, n.

Al igual que para grafos no dirigidos, diremos que n es la **longitud** del camino $c$ (orientado o no) y la denotaremos por $l(c)$, diremos que el camino $c$ **conecta** los vértices $v_1$ y $v_{n+1}$, siendo $v_1$ el **origen** y $v_{n+1}$ el **fin** del camino, que también denotaremos por $s(c)$ y $e(c)$ respectivamente. Si n = 0, entenderemos que tenemos un **camino trivial** de longitud 0 cuya sucesión de vértices asociada tendrá longitud 1 y será de la forma $\{v_1\}$ sin ninguna flecha. Si una flecha o vértice pertenece a un camino diremos que dicho camino **pasa** por esa flecha o vértice.



## Tipos de caminos

Un camino cualquiera se dirá **simple** si no se repite ningún lado o flecha, esto es, no pasa dos veces por el mismo lado o flecha. Se dirá que es **elemental** si además de ser simple tampoco pasa más de una vez por el mismo vértice (aunque si puede empezar y terminar en el mismo vértice).

Un camino se $c$ dirá que es **cerrado** si $s(c) = e(c)$, los caminos cerrados se llaman **ciclos**. Un camino simple y cerrado se llama **circuito**.

# 8. Teorema del número de caminos.



***Teorema del número de caminos***. Sea $G = (W, F)$ un grafo (resp. un grafo dirigido) con matriz de adyacencia A para $W = \{v_1, v_2,\ldots,v_n\}$. Entonces el número de caminos (resp. caminos orientados) de longitud $l$ que conectan los vértices $v_i$ y $v_j$ coincide con la coordenada $(i, j)$-ésima de $A^l$.

Son muchas las aplicaciones del teorema del número de caminos:

i. Se puede usar para determinar el grado de cada vértice ya que la diagonal principal de $A^2$, según el teorema, representa el número de ciclos de longitud 2 que existen para cada vértice y teniendo en cuenta que existen tantos ciclos de longitud 2 que empiecen y terminen en él como lados incidentes con él, esto es, la $(i, i)$-ésima coordenada de $A^2$ es el grado del vértice $v_i$.

ii. La coordenada $(i, i)$-ésima de $A^3$ es el doble del número de triángulos (ciclos de longitud 3) que contienen al vértice $v_i$.
iii. Podemos reconocer los grafos regulares y completos comprobando la diagonal principal del cuadrado de la matriz de adyacencia.
iv. Conseguiremos hallar la distancia entre dos vértices y el número de geodésicas como veremos más adelante.
v. Nos permitirá determinar si un grafo no orientado es conexo o si un digrafo es conexo o fuertemente conexo y además calcular sus respectivas componentes conexas o fuertemente conexas.



# 9. Grafos conexos y componentes conexas.

## Grafo orientados y no orientados

Un grafo no orientado (resp. grafo dirigido) se dirá **conexo** (o **débilmente conexo**) si para cada par de vértices existe un camino (resp. camino no orientado) que los conecta. Un grafo dirigido se dirá que es **fuertemente conexo** si para cada par de vértices existe un camino orientado que los conecta para ambos sentidos, esto es, para cualquier par de vértices existe un ciclo que pasa o incluye a ambos.

Los mayores subgrafos conexos de un grafo respecto de la inclusión se llamarán **componentes conexas**. Análogamente, los mayores subgrafos fuertemente conexos de un grafo dirigido se llamarán **componentes fuertemente conexas**.



Dado un (p, q)-grafo (no dirigido) cuya matriz de adyacencia sea A, entre los dos vértices conectados existirá al menos un camino que los conecta de longitud menor o igual a p – 1. Luego teniendo en cuenta el teorema del número de caminos, si pretendemos averiguar si dos vértices están o no conectados, bastará con ver si existe algún camino de cualquier longitud que los conecta, pero sabemos, que de estar conectados, al menos existirá uno de longitud menor o igual que p – 1. Si calculamos, $B = A + A^2 + \ldots + A^{(p-1)}$ la coordenada (i, j)-ésima de B representará el número de caminos que conectan los vértices $v_i$ y $v_j$ de longitud menor o igual a p – 1, por tanto, si ambos vértices están conectados, esta coordenada será distinta de 0. Luego el grafo será conexo si y sólo si $b_{ij} \neq 0$ para cada $i \neq j$, donde $B = (b_{ij})$.

El teorema del número de caminos también es válido para grafos dirigidos, si bien, en este caso a los caminos a los que se refiere son orientados. Lo que aplicábamos antes también es válido para comprobar si el grafo dirigido es fuertemente conexo.



# 10. Distancias y geodésicas.

## Grafo orientados y no orientados

Sea G un grafo (resp. dirigido), llamaremos **distancia** entre dos vértices d($u$, $v$) a la longitud de cualquiera de los caminos (resp. caminos orientados) más cortos que conectan $u$ con $v$, a estos caminos (los de menor longitud) los llamaremos **geodésicas**.

Ambos conceptos pueden ser analizados también con el teorema del número de caminos, la distancia entre dos vértices conectados d($v_i$, $v_j$) se corresponde con el menor $\ell$ tal que la coordenada (i, j)-ésima de $A^\ell$ es distinta de cero, dicha coordenada indicará también el número de geodésicas que existen.



# 11. Grafos de Euler.

## Grafo orientados y no orientados

Sea $G = (W, F)$ un grafo (resp. grafo dirigido) sin vértices aislados, un camino simple (resp. un camino orientado simple) que pase por todos los lados (resp. flechas) del grafo, se dice que es de **Euler.** Un camino (resp. orientado) de Euler cerrado, se dirá que es un **ciclo o circuito de Euler**. Un grafo que posea al menos un ciclo de Euler se llamará **grafo de Euler.**

Nótese que los grafos de Euler (resp. digrafos de Euler) son conexos (resp. fuertemente conexos).



Existen caracterizaciones de los grafos de Euler que nos permiten fácilmente detectarlos:

## Grafos no orientados

***Teorema.*** Sea $G = (W, F)$ un grafo (no dirigido) conexo, entonces G es de Euler si y sólo si el grado de cada vértice es par.

## Grafo orientados o dirigidos

***Teorema.*** Sea $G = (W, F)$ un grafo dirigido conexo, entonces G es de Euler si y sólo si el grado de entrada de cada vértice coincide con el de salida.

# 12. Grafos de Hamilton.



## Grafo orientados y no orientados

Sea $G = (W, F)$ un grafo con más de tres vértices (resp. grafo dirigido), un camino elemental (resp. un camino orientado elemental) que pase por todos los vértices del grafo, se dice que es de **Hamilton.** Un camino (resp. orientado) de Hamilton cerrado, se dirá que es un **ciclo o circuito de Hamilton**. Un grafo que posea al menos un ciclo de Hamilton se llamará **grafo de Hamilton.**

No existen caracterizaciones de los grafos de Hamilton como ocurre con los de Euler, por lo que estudiarlos se limitará al uso de algunas condiciones suficientes o necesarias. La opción que usaremos, al menos en Mathematica, será buscar el ciclo de Hamilton, si lo encontramos podremos decir que el grafo es de Hamilton.

Enumeramos algunas:

i) Sea $G = (W, F)$ un (n, m)-grafo (no digrafo) conexo con más de tres vértices tal que $gr(v) \geq \frac{n}{2}$ para cada $v \in W$, entonces $G$ es un grafo de Hamilton.

ii) Si un grafo posee una **articulación** (vértice de un grafo conexo tal que el subgrafo resultante de eliminar dicho vértice y todos los lados que inciden en él es no conexo), entonces no es de Hamilton.

iii) Sea $G = (W, F)$ un (n, m)-grafo (no digrafo) conexo con más de tres vértices tal que $gr(v) + gr(w) \geq n$ para cada $v$, $w \in W$ dos vértices no adyacentes, entonces $G$ es un grafo de Hamilton.

iv) Sea $G = (W, F)$ un (n, m)-grafo (no digrafo) conexo con más de tres vértices tal que $m \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, entonces $G$ es un grafo de Hamilton.



# 13. Coloración de un grafo.

## Grafo no orientados

Sea $G = (W, F)$ un grafo (no dirigido), **colorear** un grafo $G$ consiste en asignar colores a cada vértice de forma que a dos vértices adyacentes no se les asigne un mismo color. Si el número de colores usado en una coloración de $G$ es n entonces diremos que tenemos una **n-coloración** de $G$. Al menor n para el cual conseguimos una n-coloración se le llama **número cromático** de $G$, en tal caso se dice que $G$ es **n-cromático.** Una coloración óptima será una n-coloración donde n es el número cromático del grafo.

El número de colores que podemos usar para colorear un grafo estará comprendido entre el número cromático y el número de vértices del grafo.

¿Cuál es el número cromático de un grafo bipartito?



# 14. Grafos planos.

## Grafo no orientados

Un grafo se dirá **plano** si podemos representarlo gráficamente en el plano de forma que no se corten sus lados.

Sea $G = (W, F)$ un grafo no orientado y sea $e = \{w_1, w_2\} \in F$ un lado, **una subdivisión elemental** de G es otro grafo $G_1 = (W_1, F_1)$ donde $W_1 = W \cup \{w\}$ y $F_1 = (F - \{e\}) \cup \{\{w_1, w\}, \{w, w_2\}\}$ para algún $w \notin W$.

Dos grafos $G_1 = (W_1, F_1)$ y $G_2 = (W_2, F_2)$ son **isomorfos** si existen dos aplicaciones biyectivas $\varphi: W_1 \to W_2$ y $\psi: F_1 \to F_2$ de modo que para cada $e = \{w_1, w_2\} \in F_1$ entonces $\psi(e) = \{\varphi(w_1), \varphi(w_2)\}$.



## Grafo no orientados

Dos grafos $G_1$ y $G_2$ diremos que son **homeomorfos** si existen dos grafos isomorfos $H_1$ y $H_2$ tales que de $H_1$ llegamos a $G_1$ y de $H_2$ a $G_2$ por sucesivas subdivisiones o bien son isomorfos.

Podemos caracterizar los grafos plano con el siguiente teorema:

***Teorema de Kuratowaki***. Un grafo es plano si y sólo si no contiene un subgrafo homeomorfo a $K_5$ o $K_{3,3}$.

# 15. Árboles y bosques.



## Grafo no orientados

Un **árbol** es un grafo conexo y sin ciclos elementales (circuitos).

Un **bosque** es un grafo sin ciclos elementales, esto es, es un grafo donde cada componente conexa es un árbol.

Los arboles son fácilmente caracterizables por el siguientes resultado:

***Teorema.*** Dado $G$ un (p, q)-grafo conexo, entonces:

G es un árbol si y sólo si $p = q + 1$.