TEMA III: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MATRICES Y DETERMINANTES

Álgebra

García Muñoz, M.A.

OBJETIVOS GENERALES

1. **Ampliar el conocimiento acerca de la resolución de sistemas de ecuaciones con los procedimientos propios del tema,**
2. **Captar la utilidad del manejo de las matrices para realizar cálculos y sus aplicaciones.**
3. **Distinguir perfectamente los conceptos de matriz y determinante y conocer las aplicaciones de éstos.**

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Conocer la terminología relacionada con los sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Saber resolver sistemas de ecuaciones lineales empleando el método de Gauss-Jordan.
- ✓ Conocer la terminología que se utiliza al trabajar con matrices.
- ✓ Conocer el concepto de matriz, así como los principales tipos de matrices existentes. Matrices elementales.
- ✓ Saber operar con matrices y las propiedades que verifican estas operaciones.
- ✓ Conocer el concepto de matriz inversa y saber calcularla.
- ✓ Conocer el concepto de determinante y saber calcularlo para cualquier matriz cuadrada.
- ✓ Conocer las propiedades de los determinantes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Saber obtener el rango de una matriz.
- ✓ Conocer el Teorema de Rouché-Frobenius y mediante su aplicación saber discutir sistemas de ecuaciones.
- ✓ Conocer la regla de Cramer y mediante su aplicación saber resolver sistemas de ecuaciones.
- ✓ Saber discutir, y en su caso resolver, sistemas de ecuaciones con parámetros.
- ✓ Saber obtener la forma normal de Hermite de una matriz cualquiera.
- ✓ Saber obtener la inversa de una matriz dada mediante el método de las transformaciones elementales.
- ✓ Utilizar el lenguaje matricial y operaciones con matrices como instrumento para representar e interpretar datos, relaciones y ecuaciones (expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales).

BIBLIOGRAFÍA

- **"Álgebra lineal con métodos elementales", L. Merino, E. Santos. Thomson Paraninfo, 2006.**
- "Introducción al álgebra lineal", H. Anton. Ed. Limusa, 1990.
- "Álgebra lineal", J. Burgos. Ed. McGraw-Hill, 1993.
- "Álgebra lineal", F. Guzmán Aguilar. Ed. Patria, 2014. (disponible en línea).
- "Álgebra lineal con aplicaciones", S. Grossman. McGraw-Hill, 1992.
- "Álgebra lineal y teoría de matrices", R. Barbolla, P. Sanz, 1998.

BIBLIOGRAFÍA

- "Álgebra lineal y sus aplicaciones", D. C. Lay. Ed. Pearson, 2007. (disponible en línea).
- "Álgebra lineal y geometría: curso teórico-práctico", J. García-García y M. López Pellicer. Marfil, 1992.
- "Álgebra lineal y geometría: ejercicios", J. García-García y M. López Pellicer. Marfil, 1991.
- Álgebra lineal", F. Godoy y otros, Mc Graw Hill, 2012. (disponible en línea).
- "Álgebra lineal para ingeniería", J. Herrera Tobar y otros autores. Editorial Proyecto LATIn, 2014. (disponible en línea).

DESARROLLO TEÓRICO

1. INTRODUCCIÓN

En ciencias, en ingenierías, e incluso en la vida cotidiana, la información se organiza con frecuencia en filas y columnas para formar objetos rectangulares llamados “matrices”. Es común que las matrices sean tablas de datos numéricos que surgen de observaciones físicas.

Los sistemas de ecuaciones lineales se encuentran en el corazón del álgebra lineal y se usan para introducir de forma simple conceptos centrales del algebra lineal. Veremos como para resolver sistemas de ecuaciones, toda la información que se requiere está contenida en una matriz y que la solución se obtiene realizando operaciones adecuadas a dicha matriz.

Teniendo en cuenta que las computadoras constituyen el recurso idóneo para manipular objetos de información numérica, podemos entender la importancia del desarrollo de programas informáticos para resolver sistemas.

La importancia del álgebra lineal para las aplicaciones se ha elevado proporcionalmente al aumento de poder de las computadoras, cada nueva generación de equipos y programas de cálculo dispara una demanda de capacidades aún mayores. Por tanto, la ciencia de la computación está ligada al álgebra lineal mediante el crecimiento explosivo de los procesamientos paralelos de datos y los cálculos a gran escala.

Científicos e ingenieros trabajan hoy en problemas mucho más complejos de lo que creían posible hace sólo unas décadas. Entre las distintos ejemplos en los que se usan lo que aprenderemos en este tema podemos citar:

- Redes eléctricas: Los ingenieros utilizan programas de cómputo de simulación para diseñar circuitos eléctricos y microchips que incluyen millares de transistores. Estos programas usan técnicas de álgebra lineal y sistemas de ecuaciones lineales.

- Programación lineal. Muchas decisiones administrativas importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. Por ejemplo, las aerolíneas emplean programas lineales para crear los itinerarios de la tripulaciones de vuelo, monitorizar las ubicaciones de los aviones, o planear diversos programas de servicios de apoyo como mantenimiento y operaciones en terminal.
- Exploración petrolera. Cuando se busca depósitos submarinos de petróleo, diariamente las computadoras resuelven miles de sistemas de ecuaciones lineales. La información sísmica para elaborar las ecuaciones se obtiene a partir de ondas de choque submarinas creadas mediante explosiones con pistolas de aire, estas ondas rebotan en las rocas que hay bajo la superficie marina y su medición permite elaborar los sistemas de ecuaciones.

La primera evidencia de un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales aparece en el texto “Nueve capítulos de las artes matemáticas”, el libro de texto más antiguo de aritmética conocido, fue escrito durante la Dinastía Zhou (siglo XI al III a.C.) y fue compilado por varias generaciones de escribas entre los siglos II y I a.C. El trabajo original llegó a nuestros días por un comentario acerca de este texto datado en el siglo III d.C. y debido al matemático Liu Hui.

En este texto aparece el siguiente problema:

> “Se tienen 3 tipos de granos de manera que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero pesan 39 unidades. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero pesan 34 unidades. Finalmente, un saco del primero, dos del segundo y tres del tercero pesan 26 unidades. ¿Cuánto pesa cada uno de los sacos?”

Este problema aparece resuelto usando lo que hoy se conoce como el método de Gauss, quien lo redescubrió y desarrollo en el siglo XIX.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.1 Definiciones y notación.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, una ecuación lineal con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2\,x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ y reciben el nombre de **coeficientes**; b $\in \mathbb{K}$ y se llama **termino independiente** y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son símbolos que llamaremos **incógnitas**.

Ejercicio 1. ¿Son las siguientes ecuaciones lineales?
a) $x+yz = 1$,   b) $x + 2y + 3z = 0$,   c) $x + t = 3w$,   d) $x + y - 2^z = 0$

Una **solución** de una ecuación es una asignación de valores de forma que se verifique la igualdad.

Ejercicio 2. Comprobar que $x = 1$, $y = 1$ y $z = -1$ es una solución de la ecuación $x + 2y + 3z = 0$. Calcular otra solución de dicha ecuación.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, un conjunto de m ecuaciones lineales con las mismas incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se le llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas**, donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ son los coeficientes $\forall i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ y $b_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$ son los términos independiente

Llamaremos **solución** del sistema a cada asignación de valores de las incógnitas, $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$,..., $x_n = k_n$ que haga verificarse todas las igualdades simultáneamente.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A $(k_1, k_2,..., k_n)$ se le llama solución del sistema. Llamaremos **solución general** del sistema al conjunto de todas las soluciones del sistema.

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen la misma solución general.

Ejercicio 3. Comprobar que (1, 1, -1) es una solución de los dos primeros sistemas y no es solución del tercero:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Discusión de sistemas.

Según el número de soluciones los sistemas los podemos clasificar por:

a) **Sistemas compatibles**, si tienen alguna solución:

a.1) **Determinados**, sólo una solución.

a.2) **Indeterminados**, más de una solución.

b) **Sistemas incompatibles**, sin solución.

Al proceso de estudiar a que tipo pertenece un sistema dado lo llamaremos **discutir** el sistema:

discutir ≠ resolver

Un sistema se dice **homogéneo** si, $b_i = 0$, para todo i. Todo sistema homogéneo es compatible pues admite la solución (0, 0,..., 0).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

2.2 Método de Gauss-Jordan

El método consiste en conseguir a partir del sistema dado otro equivalente pero tan simple que sus soluciones sean conocidas.

Proposición 3.1. Si en un sistema de ecuaciones se intercambian dos ecuaciones, se multiplica una ecuación por un elemento no nulo del cuerpo o se suma a una ecuación otra multiplicada por un elemento del cuerpo, se obtiene un sistema equivalente.

Ejercicio 4. Obtener el sistema escalonado equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

Comprobar que el sistema es compatible determinado con solución (–1, –1,1).

Algoritmo (Pasar de un sistema a otro escalonado reducido)

Paso 1: Tomar como primera ecuación una en la que el coeficiente de x_1 sea no nulo.

Paso 2: Dividir dicha ecuación por el coeficiente de x_1

Paso 3: Eliminar la incógnita x_1 de las restantes ecuaciones, restándoles la primera multiplicada por el número conveniente.

Paso 4: Fijar la primera ecuación y repetir el proceso (pasos 1, 2 y 3) para las demás ecuaciones y la incógnita x_2.

Así sucesivamente para las siguientes incógnitas.

Tras eliminar las ecuaciones 0 = 0, obtenemos un **sistema escalonado** de la forma:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}\boxed{x_{r+1}} + \ldots + a_{1n}\boxed{x_n} = b_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}\boxed{x_{r+1}} + \ldots + a_{2n}\boxed{x_n} = b_2 \\ \qquad \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \qquad \qquad x_r + a_{rr+1}\boxed{x_{r+1}} + \ldots + a_{rn}\boxed{x_n} = b_r \end{cases}$$

Llamaremos **incógnitas principales** a las que aparecen como primera incógnita en alguna ecuación y **libres o secundarias** a las demás.

Cada incógnita principal de una ecuación puede ser eliminada de las restantes y obtener un **sistema escalonado reducido** con la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_1 + \quad\quad + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 + \quad + a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Ejercicio 5. Obtener el sistema escalonado reducido del sistema de ejercicio anterior.

Ejercicio 6. Obtener el sistema escalonado reducido del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

A partir del sistema escalonado reducido es muy simple la discusión del sistema:

Caso 1: Si aparece b = 0 con b ≠ 0 el sistema será incompatible.

Caso 2: Si todas las incógnitas son principales, el sistema escalonado reducido es de la forma:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b_1 \\ \qquad x_2 \qquad = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_n = b_n \end{cases}$$

Por tanto, es compatible determinado con $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$,..., $x_n = b_n$

Caso 3: Si existen incógnitas libres, las incógnitas principales pueden despejarse en función de las libres y existe una solución para cada elección de las incógnitas libres. Así, el sistema es compatible indeterminado. La solución se obtiene asignando a cada incógnita libre un parámetro.

3. MATRICES

Álgebra
García Muñoz, M.A.

3.1 Definiciones y notación.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, una **matriz** de orden m × n con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una caja de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{i,j}$$

que consta de n.m elementos de $\mathbb{K}$ distribuidos en m filas y n columnas de forma que denotamos por a_{ij} al elemento situado en la fila i, columna j.

Ejercicio 7. Escribir una matriz de orden 3 × 4 donde el elemento $a_{1j} = j$, la segunda fila esté dada por ceros y los elementos de la tercera sean los cuadrados de los elementos de la primera. ¿Quién es a_{33}?

Dos matrices son **iguales** si tiene igual orden e iguales elementos en cada una de sus posiciones.

Ejercicio 8. Comprobar si son iguales los siguientes pares de matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x & 2 \\ 2 & y^2 \end{pmatrix}$.

Dada una matriz de *m* filas y *n* columnas, se dice que es:

- Una **matriz cuadrada** cuando $m = n$ (tiene el mismo número de filas que de columnas). En otro caso se dice que es una **matriz rectangular**.
- Una **matriz fila** cuando $m = 1$ (sólo tiene una fila)
- Una **matriz columna** cuando $n = 1$ (sólo tiene una columna).

Notaremos por $\mathbf{M_{m \times n}(\mathbb{K})}$ al conjunto de las matrices de orden m×n y coeficientes en $\mathbb{K}$ y $\mathbf{M_{n}(\mathbb{K})}$ si m = n, es decir, el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Para una matriz A, llamaremos **submatriz** de A a cada matriz obtenida de A suprimiendo algunas de sus filas y columnas.

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$, los elementos $a_{11}, a_{22},..., a_{nn}$ constituyen la **diagonal principal**.

Se llama **traza** de una matriz cuadrada A, tr(A), a la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$tr(A)= a_{11} + a_{22} +...+ a_{nn}.$$

Se dice que A es una matriz **diagonal** si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entre las matrices cuadradas distinguimos:

- una matriz **simétrica** cuando $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall$i, j = 1, 2,..., n.
- una matriz **antisimétrica** cuando $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall$i, j = 1, 2,..., n.
- una matriz **triangular superior** cuando $a_{ij} = 0$, $\forall$i, j = 1, 2,..., n, con i >j (los elementos por debajo de su diagonal son cero).
- una matriz **triangular inferior** cuando $a_{ij} = 0$, $\forall$i, j = 1, 2,..., n, con i < j (los elementos por encima de su diagonal son cero).

La **matriz cero** es aquella cuyos elementos son siempre cero, es decir, $a_{ij} = 0$, $\forall$i, j.

La **matriz unidad** (**identidad**) de orden n es la matriz cuadrada I_n que tiene unos en la diagonal principal y ceros en el resto, es decir, es la matriz diagonal con $a_{ii} = 1$ $\forall$i = 1, 2, . . . ,n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\delta_{ij}})$$

3.2 Operaciones con matrices

Dadas dos matrices A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) $\in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, definimos su **suma,** como la matriz de orden m × n cuyos coeficientes son suma de los correspondientes de A y B:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición 3.2. ($M_{m \times n}(\mathbb{K})$, +) es un grupo abeliano. Esto es la suma de matrices verifica las propiedades asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro y elemento simétrico.

Dada una matriz $A=(a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, y dado un número real α, se define su **producto** como la matriz de orden $m \times n$ cuyos coeficientes son el producto de α por los correspondientes de A:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Realizar la operación (A – 3B) + 2C, donde:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ y\ \ C=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.3. El producto de un escalar por una matriz verifica las siguientes propiedades:

1. Distributiva respecto de la suma de escalares:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}),$$

2. Distributiva respecto de la suma de matrices:

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K}),$$

3. Pseudoasociativa:

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A);\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}),$$

4. Ley de identidad:

$$1A=A,\ \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}),$$

Dadas $A=(a_{ik}) \in M_{m \times p}(\mathbb{K})$, y $B=(b_{kj}) \in M_{p \times n}(\mathbb{K})$, matrices de orden $m \times p$ y $p \times n$ respectivamente, se define su **producto** como la matriz

$$AB = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K}),$$

donde cada coeficiente c_{ij} viene dado por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}$$

Importante: Nótese que para multiplicar A y B es necesario que el numero de columnas de A sea igual que el numero de filas de B y en tal caso la matriz AB tiene tantas filas como A y tantas columnas como B.

Ejercicio 9. Realizar la operación (A B) – C, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y \ C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.4. El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. Asociativa:

$$A(BC)=(AB)C, \text{ siempre que tenga sentido.}$$

2. Elemento neutro:

$$\text{Dada } A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}),\ I_m A = A \text{ y } A\, I_n = A.$$

3. Distributiva del producto respecto de la suma por la izquierda y la derecha:

$$A(B + C) = AB + AC, \text{ si tiene sentido.}$$

$$(A + B)C = AC + BC, \text{ si tiene sentido.}$$

4. Pseudoasociativa:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B, \text{ si tiene sentido.}$$

En el conjunto $M_n(\mathbb{K})$ el producto es una operación interna y se tiene:

Teorema 3.5. $(M_n(\mathbb{K}), +, .)$ es un anillo no conmutativo.

Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, de orden $m \times n$, llamaremos **matriz traspuesta** de A, $A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$, a la matriz cuyas filas son las columnas de A.

Proposición 3.6. La trasposición de matrices verifica:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$; $\forall$ A, B $\in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.
2. $(AB)^t = B^tA^t$; $\forall$ A $\in M_{m \times p}(\mathbb{K})$ y B $\in M_{p \times n}(\mathbb{K})$.
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall$ A $\in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Proposición 3.7. Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$, se tiene:

i) A es simétrica si y sólo si $A^t = A$,

ii) A es antisimétrica si y sólo si $A^t = -A$.

3.3 Forma normal de Hermite

Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Llamaremos **pivote de una fila** (o **columna**) al primer elemento no nulo de dicha fila (o columna), si lo hay.

La matriz A se dice que es **escalonada por filas** si verifica:

1. Las filas formadas por ceros (si existen) están agrupadas en la parte inferior de la matriz.
2. El pivote de cada fila no nula es 1.
3. El pivote de cada fila no nula está a la derecha del de la fila anterior.
4. En la misma columna que el pivote de una fila y debajo de él, sólo hay ceros.

Ejercicio 10. ¿Son escalonadas por filas las siguientes matrices?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^t \quad y \quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

A.

La matriz A es **escalonada reducida por filas** si además de ser escalonada verifica:

4’. En la misma columna que el pivote de una fila sólo hay ceros.

Ejercicio 11. ¿Es alguna de las matrices anteriores escalonadas reducida por filas?

De igual forma se puede definir la **matriz escalonada por columnas** y la **matriz escalonada reducida por columnas**.

Vamos a dar una forma de transformar cada matriz en una escalonada reducida. Para ello, llamaremos **transformaciones elementales de filas** a cada una de las siguientes:

Tipo I: Intercambiar la posición de dos filas.

Tipo II: Multiplicar una fila por un escalar del cuerpo no nulo.

Tipo III: Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar.

Diremos que A y B son **equivalentes por filas**, lo denotamos por $A \sim_f B$, si se puede pasar de una a otra aplicando transformaciones elementales de filas.

Lema 3.9. "Ser equivalentes por filas" es una relación de equivalencia en $M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Lema 3.10. Si A y B son dos matrices escalonadas reducidas y A y B son equivalentes por filas, entonces A = B.

Teorema 3.11. Toda matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida por filas, su **forma normal de Hermite por filas**.

De igual forma se puede definir la **forma normal de Hermite por columnas**.

Ejercicio 12. Calcula la forma normal de Hermite por filas de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz A $\in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, llamaremos **rango** de A, y lo denotamos por rg(A), al número de filas no nulas de su forma normal de Hermite por filas (número de pivotes no nulos).

Proposición 3.12. Si A $\in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces rg(A) $\leq$ mín$\{m, n\}$.

Ejercicio 13. ¿Cuál es el rango de la matriz A del ejercicio anterior?

3.4. Matrices y sistemas de ecuaciones.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

llamaremos **matriz de coeficientes** del sistema a la matriz de orden m × n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y llamaremos matriz ampliada a la matriz de orden m × (n+1):

$$A|b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Proposición 3.13. Dado un sistema de ecuaciones lineales con A|b como matriz ampliada. Si H es la forma normal de Hermite por filas de A|b, entonces el sistema cuya matriz ampliada es H es un sistema escalonado reducido equivalente al de partida.

Ejercicio 14. Aplicar la proposición anterior para obtener un sistema escalonado reducido equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

Teorema 3.14. **(*Teorema de Rouché-Frobenius*)** Dado un sistema de ecuaciones lineales Ax = B (con A|b como matriz ampliada) con n incógnitas, se tiene:

1. El sistema es compatible si, y sólo si, rg(A) = rg(A|b).
2. El sistema es compatible determinado si, y sólo si, rg(A) = rg(A|b) = n.

3.5. Matrices elementales.

Llamaremos **matrices elementales** de orden n son las resultantes de aplicar una (y sólo una) transformación elemental por filas a la matriz identidad de orden n. Existen tres tipos:

Tipo I: E_{ij} se obtiene de la identidad intercambiando las filas i y j.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3.5. Matrices elementales.

Llamaremos **matrices elementales** de orden n son las resultantes de aplicar una (y sólo una) transformación elemental por filas a la matriz identidad de orden n. Existen tres tipos:

Tipo I: E_{ij} se obtiene de la identidad intercambiando las filas i y j.

Tipo II: $E_i(k)$ se obtiene multiplicando por $k \neq 0$ la fila i de la identidad.

$$E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3.5. Matrices elementales.

Llamaremos **matrices elementales** de orden n son las resultantes de aplicar una (y sólo una) transformación elemental por filas a la matriz identidad de orden n. Existen tres tipos:

Tipo I: E_{ij} se obtiene de la identidad intercambiando las filas i y j.

Tipo II: $E_i(k)$ se obtiene multiplicando por $k \neq 0$ la fila i de la identidad.

Tipo III: $E_{ij}(k)$ se obtiene de la identidad sumando a la fila i la fila j multiplicada por k.

$$E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15. ¿Son matrices elementales en $M_3(\mathbb{R})$ las siguientes matrices?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición 3.15. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y E y F matrices elementales de ordenes m y n, respectivamente. Entonces:

(i) EA es la matriz que se obtiene de A aplicando a sus filas la misma transformación elemental con la que se obtiene E a partir de I_m.

(ii) AF es la matriz que se obtiene de A aplicando a sus columnas la misma transformación elemental con la que se obtiene F a partir de I_n.

Ejercicio 16. Comprobar lo anterior con las matrices elementales del ejercicio previo y la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Corolario 3.16. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, H la forma normal de Hermite por filas de la matriz A y C la forma normal de Hermite por columnas de A. Entonces:

1. $H = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$, para algunas matrices elementales $E_1, \ldots, E_{k-1}, E_k$ de orden m.
2. $C = AF_1F_2 \ldots F_s$, para algunas matrices elementales $F_1, F_2, \ldots, F_s$ de orden n.

Ejercicio 17. Vuelve al ejercicio 12 y escribe H la forman normal de Hermite por filas de la matriz A como producto de matrices elementales por la matriz A como en el corolario anterior.

3.6. Matrices inversas.

Dadas A, B matrices cuadradas de orden n, se dice que B es la **matriz inversa** de A si $AB = BA = Id_n$. Diremos que la matriz A es **invertible** o **regular** si existe una matriz inversa de A, en otro caso decimos que A es **singular**.

Proposición 3.8.

1. La inversa de $A \in M_n(\mathbb{K})$, si existe, es única y la denotaremos por A^{-1}.
2. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es invertible $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Si A y $B \in M_n(\mathbb{K})$ son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es invertible entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} =(A^{-1})^t$.

Proposición 3.17. Toda matriz elemental es invertible y su inversa es otra matriz elemental.

Ejercicio 18. Comprobar que las matrices inversas de las matrices elementales del ejercicio 15 son las matrices elementales E_{13}, $E_{12}(-3)$ y $E_2(-\frac{1}{2})$, respectivamente.

Teorema 3.18. Para una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$, equivalen:

a) A es invertible.

b) $rg(A) = n$.

c) La forma de Hermite por filas de A es la identidad.

d) A es un producto de matrices elementales.

Corolario 3.19. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ son matrices tales que $AB=I_n$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$.

Corolario 3.20. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ y H es su forma de Hermite. Entonces existe una matriz regular $Q \in M_n(\mathbb{K})$, tal que $H = QA$.

La matriz $Q = E_k E_{k-1} \ldots E_1 I$, es decir, Q se obtendrá aplicando a la matriz identidad las mismas transformaciones que se les aplican a A para obtener H. En la práctica tomaremos la matriz $(A|Id)$ resultante de pegar la matriz A y la matriz identidad y aplicando transformaciones elementales por filas a $(A|Id)$, obtendremos una matriz equivalente por filas $(H \mid Q)$ siendo H la forma normal de Hermite por filas de A y a la derecha obtendremos la matriz Q.

Ejercicio 19. Calcular la matriz Q tal que $QA = H$, donde A es la matriz del ejercicio 13 y H su forma normal de Hermite.

Observación: Si A es regular entonces su forma normal de Hermite por filas es la identidad y $Q = A^{-1}$.

Ejercicio 20. Realizar la operación $((BA^t)\,C)^{-1}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ y\ \ C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz inversa usando lo anterior.

3.7. Matrices equivalentes.

Lema 3.21. Dadas dos matrices A, B $\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A y B son equivalentes por filas (resp. columnas)

(b) A y B tienen igual forma de Hermite por filas (resp. columnas).

(c) $\exists$ Q $\in M_m(\mathbb{K})$ regular tal que B = QA (resp. $\exists$ P $\in M_n(\mathbb{K})$ regular tal que B = AP).

Se dice que dos matrices A y B son **equivalentes** y se denota por **A ~ B**, si B se puede obtener de A por transformaciones elementales de filas y de columnas.

Nótese que dos matrices equivalentes por filas son equivalentes, pero el recíproco no es cierto.

Proposición 3.22. Dos matrices A, B $\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes si y sólo si $\exists$ Q $\in M_m(\mathbb{K})$, $\exists$ P $\in M_n(\mathbb{K})$ regulares tales que B = QAP.

Teorema 3.23. Dos matrices son equivalentes si, y sólo si, tienen igual rango.

Corolario 3.24. Si A $\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces $rg(A) = rg(A^t)$.

4. DETERMINANTES

Álgebra
García Muñoz, M.A.

4.1. Definiciones y propiedades

El **determinante** de una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ se define inductivamente mediante:

- Si $A = (a_{11})$, se define $\det(A)=a_{11}$.
- Supuesto conocido el valor del determinante de cada matriz de orden n-1, para una matriz $A=(a_{ij})$ de orden n se llama **ij-ésimo menor adjunto** de A a

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

donde A_{ij} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i-ésima y la columna j-ésima y se define el **determinante de A** por:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21}+\ldots+a_{m1}\alpha_{m1}$$

La formula anterior se conoce con el nombre de **desarrollo de Laplace** del determinante de A por su primera columna.

Ejercicio 21. Usar el desarrollo de Laplace para calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.25.

1. Si tres matrices cuadradas A, A', A'' son idénticas salvo en que la i-ésima fila (resp. columna) de A es suma de las filas (resp. columnas) correspondientes de A' y A'', entonces det(A) = det(A') + det(A'').
2. Si una matriz A tiene dos filas o columnas iguales entonces su determinante es cero.

3. Si se intercambian dos filas o columnas consecutivas de una matriz A entonces su determinante cambia de signo.
4. Si se multiplican los elementos de una fila o columna de la matriz A por un escalar k, entonces su determinante queda multiplicado por k. En particular si A tiene una fila de ceros entonces $\det(A) = 0$.
5. Si una fila o columna de una matriz cuadrada A se le suma otra multiplicada por un escalar k entonces su determinante no varia.
6. Una matriz cuadrada A es regular, si y solo si, $\det(A) \neq 0$, además $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1/\det(A)$.
7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
8. $\det(A) = \det(A^t)$.
9. El determinante de una matriz puede obtenerse desarrollando por cualquiera de sus filas o columnas.

Ejercicio 22. Volver a realizar el determinante de la matriz C del ejercicio anterior usando las propiedades previas.

4.2. Aplicaciones.

- Calculo de la inversa:

Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$, llamaremos **matriz adjunta** de A a la matriz

$$Adj(A) = (\alpha_{ij}),$$

esto es, la matriz que en cada posición tiene el correspondiente menor adjunto de A.

Proposición 3.26. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, una matriz de orden n regular, entonces $A\ Adj(A)^t = \det(A)\ I_n$.

Corolario 3.27. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, se tiene: $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{\det(A)}$

Ejercicio 23. Calcular usando lo anterior la matriz inversa del ejercicio 20.

Calculo del rango:

Teorema 3.28. Sea A $\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, una matriz de orden $m \times n$, entonces el rango de A coincide con el mayor orden de una submatriz cuadrada regular de A.

Así la definición nos proporciona un método para calcular el rango de A: Tomamos $k = \text{mín}\{m, n\}$, luego $rg(A) \leq k$, tomadas todas las submatrices cuadradas de A de orden k, si alguna es regular $rg(A) = k$, en otro caso $rg(A) \leq k-1$ y se repite el proceso con k-1 y así sucesivamente.

Ejercicio 24. Usar lo anterior para calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

➢ Resolución de sistemas:

Un sistema se dice que es de **Cramer** si el número de ecuaciones e incógnitas coincide y el rango de la matriz de coeficientes es igual a dicho número.

Para resolver estos sistema podremos usar la Regla de Cramer:

Teorema 3.29. **(Regla de Cramer)** Dado un sistema de Cramer la solución (única) del sistema viene dada por:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & b_m & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & b_m \end{vmatrix}}{|A|},$$

Ejercicio 25. Resolver usando lo anterior los sistemas compatibles del ejercicio 3.