



ÁLGEBRA (Grado en Ingeniería Informática) CURSO 2021/22. Convocatoria Ordinaria 2.

Apellidos y Nombre: _____ DNI: _____ Gr. Teoría: _____

1. [0.75 puntos] Calcular la factorización en irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ del polinomio, $p(x) = 12x^4 - 12x$.
2. [0.75 puntos] Encontrar una operación que dote de estructura de grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4 \times A_3$ y justificarlo. Calcular, si es posible, tres subgrupos propios finitos y dos subgrupos propios no finitos de dicho grupo.
3. [0.5 puntos] Consideremos el grafo cuyo conjunto de vértices es $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y conjunto de aristas es $F = \{\{x, y\} : x+y \equiv 1 \pmod{2}\}$.
 - a) Determinar la matriz de adyacencia y representarlo gráficamente.
 - b) Enunciar el teorema del número de caminos y utilizarlo, para calcular el número de ciclos de longitud 3 que pasan por el vértice 2.
4. [1 punto] Sea $V = M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ y consideremos el subconjunto

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a+b & b & c \end{pmatrix} : b+c=0 \right\}$$

- a) Demostrar que U es subespacio vectorial de V .
 - b) Calcular, de forma razonada, dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de U .
5. [1.5 puntos] Sea V el espacio vectorial euclídeo cuya matriz de Gram respecto de una base, $B = \{e_1, e_2\}$, es

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

- a. Calcular la expresión general del producto escalar.
 - b. Calcular el ángulo que forman los vectores e_1 y e_2
 - c. Calcular la matriz de Gram, G' , respecto de una base ortonormal, si existe.
 - d. Demostrar, explícitamente, la relación existente entre G y G' .
6. [1.5 puntos] Sea $f: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ la aplicación definida por $f(A) = 2A + A^t$ donde A^t es la traspuesta de A .
 - a. Estudiar si f es lineal.
 - b. Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
 - c. Clasificar f .
 - d. Estudiar si f es diagonalizable por semejanza. En caso afirmativo, calcular la matriz diagonal y la base de vectores propios.

NOTA: Incluir todas las definiciones de los conceptos subrayados. Recuerden que se evalúan los procedimientos y por tanto, estos deben explicarse de forma clara (no son válidos los resultados sin razonarlos).
Entregar cada ejercicio en un bloque de folios y ordenarlos, en forma creciente, según la numeración del examen.