UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE JAÉN

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

ÁLGEBRA (Grado en Ingeniería Informática)

CURSO 2017/18. Convocatoria Extraordinaria 2.

Nombre y Apellidos:_____________________________ DNI:_________Gr. Teoría:__

Evaluación Continua Grafos	**Sí. Nota_____** **No**	**Prácticas:**	**Evaluación continua. Nota_____** **Ordinaria 2. Nota_____** **En esta convocatoria. Nota_____**

1.- [*10 puntos*] Dados los polinomios,

$$p(x) = 1 + 8x - 5x^2 - 6x^3 \quad \text{y} \quad q(x) = -2 + 8x^2.$$

Se pide:

a) (*5 puntos*) Utilizar el algoritmo de Euclides en $\mathbb{Z}_7[x]$ para calcular un máximo común divisor, *d(x)*, de *p(x) y q(x)*.

b) (*2 puntos*) ¿Existe otro polinomio que sea máximo común divisor de *p(x) y q(x)* en $\mathbb{Z}_7[x]$? Razonar la respuesta.

c) (*3 puntos*) Expresar *d(x)* (obtenido en el apartado a), como combinación de *p(x) y q(x)* en $\mathbb{Z}_7[x]$ (Identidad de Bezout); esto es, calcular $\lambda(x)$ y $\mu(x)$ en $\mathbb{Z}_7[x]$ tales que

$$d(x) = \lambda(x)\, p(x) + \mu(x)\, q(x).$$

2.- [*10 puntos*] Consideremos A un anillo y U(A) el conjunto de sus unidades.

a) (*2 puntos*) Definición de grupo y de unidad en un anillo.

b) (*4 puntos*) Calcular la tabla de operaciones para $G=U(\mathbb{Z}_8)$ con el producto.

c) (*4 puntos*) Calcular, si es posible, el elemento neutro de G y los simétricos de los elementos de G.

3.- [*10 puntos*] Consideremos G el grafo no orientado cuya matriz de incidencia es

$$M=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

a) (*1 punto*) Calcular una representación gráfica de G.

b) (*1 punto*) Calcular la matriz de adyacencia de G.

c) (4 *puntos*) Definir grafo bipartito y razonar si G es bipartito. ¿Es bipartito completo?

d) (*4 puntos*) Definir isomorfismo de grafos y razonar si G es isomorfo a $K_{4,4}$.

4.- [*10 puntos*] Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

a) (*1 punto*) Demostrar que B ={(2, 0), (1, 2)} es base de $\mathbb{R}^2$.

b) (*2 puntos*) Calcular las coordenadas de los vectores v = (1, 1) y w = (1, -1) respecto de la base B del apartado anterior.

c) (*7 puntos*) Consideremos $\mathbb{R}^2$ el espacio vectorial euclídeo cuya matriz de Gram, respecto de la base B ={(2, 0), (1, 2)}, es

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

c.1.) (*1 punto*) Calcular la expresión general del producto escalar.

c.2.) (*2 puntos*) ¿Es B ortogonal? ¿Y unitaria? Calcular, a partir de B, una base unitaria.

c.3.) (*4 puntos*) Calcular el ángulo que forman los vectores u y w, donde

v =(1, 1) y w =(1, -1).

5. [*10 puntos*] Sea f: $P_2(\mathbb{Z}_2) \rightarrow P_3(\mathbb{Z}_2)$ la aplicación dada por

$$f(a + bx + cx^2) = a(1 + x^3) + bx^2$$

a) (1 *puntos*) Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

b) (4 *puntos*) Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de Ker(f) e Im(f).

c) (*1 punto*) ¿Es f un isomorfismo? Razonar la respuesta.

d) (4 *puntos*) Calcular, si es posible, un espacio vectorial isomorfo a $P_2(\mathbb{Z}_2)$ (distinto de él). En caso afirmativo, definir explícitamente un isomorfismo entre ellos y calcular la imagen de 1 + x.

6. [*10 puntos*] Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial complejo cuya matriz asociada respecto de una base B es

$$A=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&i\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

siendo *i* la unidad imaginaria.

a) (*3 puntos*) Estudiar si f es diagonalizable por semejanza.

b) (*7 puntos*) Calcular, si es posible, una matriz diagonal semejante a A y una base respecto de la cual la matriz asociada al endomorfismo sea dicha diagonal.

Los alumnos que quieran utilizar evaluación continua en el tema de grafos, deberán obtener un mínimo de 4 sobre 10 de media entre las restantes preguntas que tengan que realizar.