TEMA IV: ESPACIO VECTORIAL. ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Álgebra
García Muñoz, M.A.

OBJETIVOS GENERALES

1. Captar la esencia de la estructura algebraica de espacio vectorial como estructura de gran importancia en Álgebra lineal.

2. Conocer la subestructura algebraica de un espacio vectorial.

3. Captar por abstracción los siguientes conceptos: producto escalar, espacio vectorial euclídeo, norma, ángulo y perpendicularidad.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ **Conocer el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sus propiedades.**
- ✓ **Saber reconocer si un conjunto junto con ciertas operaciones tiene o no estructura de espacio vectorial.**
- ✓ **Saber estudiar si un conjunto de vectores dados es o no linealmente independiente, es sistema generador y, como consecuencia, forma una base.**
- ✓ **Reconocer cuando un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.**
- ✓ **Manejar las distintas formas de determinar un subespacio vectorial y pasar de unas a otras con soltura.**
- ✓ **Conocer el concepto de producto escalar.**

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ **Expresar el concepto de espacio vectorial euclídeo como un espacio vectorial en el que además se tiene definido un producto escalar.**
- ✓ **Conocer y manejar la expresión matricial de un producto escalar respecto de una base.**
- ✓ **Conocer y manejar el concepto de norma de un vector y sus propiedades.**
- ✓ **Conocer y manejar el concepto de ángulo entre vectores en cualquier espacio vectorial euclídeo.**
- ✓ **Conocer el concepto de ortogonalidad y ortonormalidad entre dos vectores.**
- ✓ **Manejar con soltura el método de Gram-Schmidt para la construcción de bases ortonormales.**

BIBLIOGRAFÍA

- **“Álgebra lineal con métodos elementales”, L. Merino, E. Santos. Thomson Paraninfo, 2006.**
- “Introducción al álgebra lineal”, H. Anton. Ed. Limusa, 1990.
- “Álgebra lineal”, J. Burgos. Ed. McGraw-Hill, 1993.
- “Álgebra lineal con aplicaciones”, S. Grossman. Ed. McGraw-Hill, 1992.
- “Álgebra lineal y sus aplicaciones”, D. C. Lay. Ed. Pearson, 2007. (disponible en línea).
- "Álgebra lineal: Método, fundamentos y algoritmos", R. Criado y Otros, Ed. AC, 1993.

BIBLIOGRAFÍA

- Álgebra lineal", F. Godoy y otros, Mc Graw Hill, 2012. (disponible en línea).
- "Álgebra lineal para ingeniería", J. Herrera Tobar y otros autores. Editorial Proyecto LATIn, 2014. (disponible en línea).
- "Álgebra lineal y geometría: curso teórico-práctico", J. García-García y M. López Pellicer. Marfil, 1992.
- "Álgebra y geometría analítica", F. Granero Rodríguez. Ed. McGraw Hill, 1985.

DESARROLLO TEÓRICO

1. INTRODUCCIÓN

Lo estudiado en los temas previos, sobre todo en el capítulo anterior, dará su fruto a partir de este tema. El Álgebra estudia números, matrices, vectores, aplicaciones y operaciones estos elementos. Clásicamente, la Matemática se dividía en ramas según los objetos estudiados en ella: la aritmética estudiaba los números, la geometría los objetos espaciales, el análisis las funciones, el álgebra las estructuras, etc.

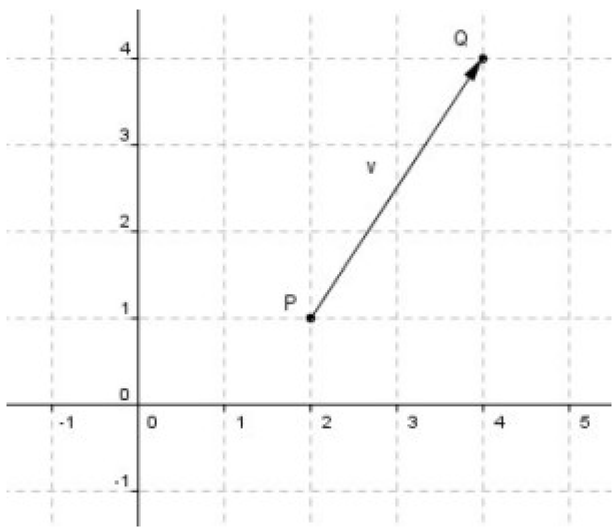
Lo mismo que un número real es un elemento del conjunto de los reales, un microchip es uno de los componentes de un circuito electrónico. Ahora bien, un conjunto de componentes informáticos no constituyen un ordenador; es necesario que estos componentes tengan cierta estructura definida mediante diferentes reglas o axiomas (estén conectados de forma correcta); así obtenemos estructuras algebraicas como las estudiadas en los temas previos: grupos, anillos, cuerpos…

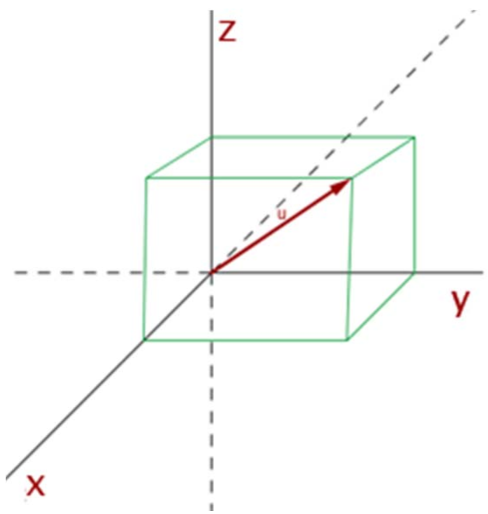
Todas las estructuras algebraicas aparecen en las distintas ramas de las matemáticas, pero también en la física y en otras ciencias.

Cuando se trabaja en un conjunto, los objetos no son lo primordial sino las relaciones entre ellos. Si nos quedamos con estas relaciones y nos olvidamos de los elementos, lo que estamos haciendo es definir una estructura algebraica, mediante la abstracción. Esto nos permite agrupar a conjuntos de elementos muy distintos, pero con relaciones y propiedades comunes. Lo hemos visto cuando hemos estudiado grupos, ya que a la vez hemos manejado conjuntos de números ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$,…), conjuntos de aplicaciones biyectivas (S_n), conjuntos de matrices, conjuntos de polinomios, etc, pero todos tenían las mismas propiedades.

En este capítulo introducimos otra estructura algebraica: el espacio vectorial, que surge al abstraer el comportamiento de los vectores del plano y del espacio.

La idea de vector está tomada de la Física, donde sirven para representar magnitudes vectoriales como fuerzas, velocidades o aceleraciones. Para ello se emplean vectores de dos componentes en el plano o de tres componentes en el espacio...





En Matemáticas, tratamos de abstraer las propiedades que caracterizan a los vectores para extenderlas también a otro tipo de objetos diferentes de los vectores de la Física, y que ya hemos estudiado anteriormente como las matrices, los polinomios y las funciones y veremos como podemos identificar todos estos elementos con vectores lo que nos permitirá resolver múltiples problemas.

Esencialmente, el comportamiento que caracteriza a los vectores es el siguiente:

- Podemos sumar dos vectores y obtenemos otro vector;
- Podemos multiplicar un vector por un número (escalar) y obtenemos otro vector.

Además estas operaciones cumplen ciertas propiedades, que observamos en los vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.

Este capítulo es una base para el desarrollo de la geometría tanto es así que se dice que:

“El Álgebra es la Geometría que se escribe y que la Geometría es el Álgebra que se dibuja”

2. ESPACIO VECTORIAL

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $V \neq \emptyset$ un conjunto, diremos que V es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$ si tenemos definidas dos operaciones, una interna en V que denotaremos por +, de forma que (V, +) es un grupo abeliano, es decir, se verifican:

i) Asociativa, $(u+v)+w = u+(v+w)$, $\forall u,v,w \in V$.

ii) Conmutativa, $u+v = v+u$, $\forall u,v \in V$.

iii) $\exists$ de elemento neutro, $\exists 0 \in V$ / $0+v = v = v+0$, $\forall v \in V$.

iv) $\forall v \in V$ $\exists -v \in V$, elemento opuesto / $v+(-v)=0=(-v)+v$.

y otra ley de composición externa de $\mathbb{K}$ en V, esto es, una aplicación de $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ que denotaremos por yuxtaposición verificando:

v) $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall u,v \in V$.

vi) $(\alpha+\beta)u = \alpha u+ \beta u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in V$.

vii) $\alpha(\beta u)= (\alpha\beta)u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in V$.

viii) $1u = u$, $\forall u \in V$, donde 1 es el neutro de $\mathbb{K}$ para el producto.

A los elementos del espacio vectorial V se les suele denominar **vectores** y los del cuerpo **escalares**. La operación externa recibe el nombre de **producto por escalares**.

Ejemplos:

1. El producto cartesiano de $\mathbb{K}$ consigo mismo n veces:

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

podemos dotarlo de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

2. El conjunto de las matrices cuadradas de orden n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $M_n(\mathbb{K})$.

3. El conjunto de los número complejos es un espacio vectorial sobre si mismo y sobre el conjunto de los números reales.

4. El conjunto de los polinomios $P(\mathbb{K})$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

5. El espacio vectorial cero o trivial $\{0\}$.

Ejercicio 1. Comprobar que P_2 ($\mathbb{Z}_3$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$ es un e. v.

Proposición 4.1. (Propiedades de la suma y el producto por escalares) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Para cualesquiera escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v \in V$ se verifica:

a) $0u = 0$.

b) $\alpha 0 = 0$.

c) Si $\alpha u = 0$ entonces $\alpha=0$ ó $u=0$.

d) $-(\alpha u) = (-\alpha)u = \alpha(-u)$.

e) $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

f) $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$.

g) Si $\alpha u = \beta u$ y $u \neq 0$, entonces $\alpha = \beta$.

h) Si $\alpha u = \alpha v$ y $\alpha \neq 0$, entonces $u = v$.

3. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL. BASES.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Dado un conjunto de vectores $v_1,v_2,...,v_n \in V$, llamaremos **combinación lineal** de estos vectores a cualquier vector de la forma $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$, con $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para i=1, 2,..., n.

Se dice que $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es un **conjunto linealmente dependiente** o que los vectores $v_1,...,v_n$ son **linealmente dependientes** si el vector 0 se puede escribir como combinación lineal de ellos con no todos los escalares nulos, es decir, existen escalares $\alpha_1,...,\alpha_n$ no todos nulos tales que $\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n = 0$.

Se dice que $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es un **conjunto linealmente independiente** o que los vectores $v_1,...,v_n$ son **linealmente independientes** si no son linealmente dependientes, es decir, de cada combinación lineal igualada a 0, $\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n = 0$ se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 =...= \alpha_n = 0$.

Ejercicio 2. Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores de $(\mathbb{Z}_3)^4$ son linealmente dependientes o independientes:

a) $\{(1,2,0,0), (0,1,-1,2), (1,0,2,-1)\}$

b) $\{(1,2,0,0), (0,1,-1,2), (1,0,2,0), (0,1,0,0)\}$

Ejercicio 3. Comprobar que los polinomios $\{x^2 + 1, x - 2, x^2 + x\}$ son linealmente independientes en $P_2(\mathbb{R})$.

Proposición 4.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces:

1. Si $0 \in \{v_1,\dots,v_n\}$, entonces $\{v_1,\dots,v_n\}$ es linealmente dependiente.
2. $\{v_1\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$.
3. Si $\{v_1,\dots,v_n\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{v_1,\dots,v_n,v_{n+1},\dots,v_{n+r}\}$ es linealmente dependiente.
4. Si $\{v_1,\dots,v_n,v_{n+1},\dots,v_{n+r}\}$ es linealmente independiente entonces $\{v_1,\dots,v_n\}$ es linealmente independiente.

Proposición 4.3. Un conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es linealmente dependiente si, y solo si, uno de los vectores es combinación lineal de los restantes.

Ejercicio 4. Comprobar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependiente en el correspondiente espacio vectorial:

a) $\{(1,2,0,0), (0,1,-1,2), (1,0,2, -1)\}$ en $(\mathbb{Z}_3)^4$.

b) $\{(1,2,0,0), (0,1,-1,2), (1,0,2, -1)\}$ en $\mathbb{R}^4$.

c) $\{(1+ i, 2i), (1, 1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

d) $\{(1+ i, 2i), (1, 1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un conjunto de vectores S se dice que es un **sistema generador** de V si todo vector de V es combinación lineal finita de S.

Ejercicio 5. Comprobar que los polinomios $\{x^2 + 1, x - 2, x^2 + x\}$ constituyen un sistema generador del espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$.

Proposición 4.4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si el conjunto $\{s_1, s_2,..., s_n\}$ es un sistema de generadores de V y s_i es combinación de los restantes vectores, entonces el conjunto que se obtiene eliminando s_i, $\{s_1,..., s_{i-1}, s_{i+1},..., s_n\}$ es también un sistema de generadores de V.

Ejercicio 6. Comprobar que el conjunto S = {(1, 0, 1), (1, 1, -1), (0, 1, -2), (1, 1, 0)} es un sistema generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. ¿Se puede obtener un subconjunto de S que también sea sistema generador de $\mathbb{R}^3$?

Proposición 4.5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Si $\{u_1, u_2,..., u_m\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente independiente y $\{s_1, s_2,..., s_r\}$ es un sistema de generadores de V, entonces $m \leq r$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Llamaremos **base** de V a todo subconjunto $B \subseteq V$ verificando:

1. B es un sistema de generadores de V, y
2. B es linealmente independiente.

Ejercicio 7. Deducir que el conjunto $\{x^2 + 1, x - 2, x^2 + x\}$ es una base del espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$.

Teorema 4.6. (Teorema de la base) Si un espacio vectorial V tiene una base formada por un número finito de vectores, entonces todas las bases de V son finitas y tiene el mismo número de vectores.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con una base formada por un número finito de vectores entonces diremos que V es un **espacio vectorial de dimensión finita** y llamaremos **dimensión,** $\dim_{\mathbb{K}}(V)$, al número de vectores de cualquiera de sus bases.

El espacio vectorial $\{0\}$ tiene dimensión es cero: $\dim_{\mathbb{K}}(\{0\}) = 0$.

Nótese que la dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número posible de vectores linealmente independientes y el menor número posible de vectores en un sistema de generadores de V.

Ejercicio 8. Comprobar que los siguientes conjuntos son bases de los respectivos espacios vectoriales:

a) $\{1, x, x^2,\ldots, x^n\}$ del espacio vectorial $P_n(\mathbb{R})$ (**base estándar**).

b) $\{(1, 0,\ldots, 0), (0, 1,\ldots, 0),\ldots, (0, 0,\ldots, 1)\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ (**base canónica**).

c) $\{A_{ij} / i = 1, 2,\ldots, m \text{ y } j = 1, 2,\ldots, n\}$ donde A_{ij} es la matriz que tiene ceros en todas las posiciones excepto en la posición i, j en la que tiene un uno, del espacio vectorial $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ (**base estándar**).

Calcula la dimensión de cada uno de los espacios vectoriales anteriores.

Ejercicio 9. Obtener una base y la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Teorema 4.7. En un espacio vectorial, no nulo, de cada sistema generador finito se puede extraer una base.

Teorema 4.8. (Teorema de ampliación de la base) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $\{v_1,...,v_r\}$ un conjunto linealmente independiente. Entonces existen vectores $v_{r+1},...,v_n$ tales que $\{v_1,...,v_r, v_{r+1},...,v_n\}$ es una base de V.

Corolario 4.9. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, entonces dado un conjunto de exactamente n vectores $S = \{v_1,...,v_n\}$ equivalen:

i) S es linealmente independiente.

ii) S es un sistema generador de V.

iii) S es una base de V.

Ejercicio 10. Comprobar si {(i, 1+i), (2, -1-i)} es una base del espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. ¿y de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$?

Proposición 4.10. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de V, entonces todo vector $x \in V$ se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de B.

Si $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$ es la única combinación lineal del vector $x \in V$ en función de los vectores de B, lo denotaremos por $x \equiv (x_1, x_2,\ldots, x_n)_B$ y diremos que lo anterior son las **coordenadas** o **componentes** de x respecto de la base B.

Ejercicio 11. Calcular las coordenadas del polinomio $p(x) = 2x - 2$ en $P_2(\mathbb{R})$ respecto de la base $B = \{x^2 + 1, x - 2, x^2 + x\}$ del ejercicio 7 y de la base estándar dada en el ejercicio 8.

Proposición 4.11. (Coordenadas y operaciones algebraicas) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, B una base de V y x, y $\in$ V de coordenadas $x \equiv (x_1, x_2,..., x_n)_B$ e $y \equiv (y_1, y_2,..., y_n)_B$ entonces:

i) $x + y \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)_B$

ii) $\alpha\, x \equiv (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2,..., \alpha\, x_n)_B$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}$.

Las coordenadas son muy útiles a la hora de determinar la dependencia e independencia lineal:

Proposición 4.12. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, B una base de V. Un conjunto de r vectores $\{v_1,\ldots,v_r\}$ en V son linealmente independientes si, y sólo si, la matriz cuyas columnas (respectivamente filas) son las coordenadas de estos vectores respecto de la base B, tiene rango r.

Ejercicio 11. Comprobar si $S = \{x^3 + x - 1, x - 2, -x^3 + 3x + 3\}$ es un conjunto linealmente independiente en $P_3(\mathbb{Z}_5)$.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y B = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y B' = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bases de V. Veamos la relación entre las coordenadas de un mismo vector en ambas bases.

Proposición 4.13. (Cambio de base) La ecuación matricial del cambio de base de B' a B es la expresión:

$$X_B = PX_{B'}$$

que permite calcular las coordenadas de un vector de V respecto de B conociendo las coordenadas respecto de B', donde X_B y $X_{B'}$ son las matrices columna formadas por las coordenadas del vector x en B y B', respectivamente y P es la **matriz de cambio de B' a B**, esto es, la matriz regular cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B' respecto de B. El cambio de base en el sentido contrario, de B a B', viene dado por: $X_{B'} = P^{-1}X_B$

Proposición 4.14. Toda matriz regular es una matriz del cambio de base.

4. SUBESPACIOS VECTORIALES.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea U subconjunto de V no vacío. Diremos que U es un **subespacio vectorial** de V y lo denotamos por $U \leq V$ si U es cerrado para la suma y para el producto por escalares, es decir:

1. $u + v \in U, \forall u, v \in U$
2. $\alpha u \in U, \forall u \in U$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Todo espacio vectorial no nulo tiene, al menos, dos subespacios: el mismo V y el formado por el vector cero $\{0\}$. A estos subespacios se les denomina **subespacios impropios.**

Ejemplos:

1. $U = \{(x, 2x) / x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, mientras que $W = \{(x, x-1) / x \in \mathbb{R}\}$ no lo es.
2. En el espacio vectorial $M_n(\mathbb{K})$ el conjunto de las matrices triangulares superiores (resp. inferiores) o el conjunto de las matrices simétricas (resp. antisimétricas) son subespacios vectoriales.

Proposición 4.14. (Caracterización de subespacio) Dado V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $\emptyset \neq U \subset V$ se tiene que U es subespacio vectorial de V si, y solo si,

$$\alpha u + \beta v \in U, \forall u, v \in U \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Ejercicio 12. Comprobar si son subespacios vectoriales:

i) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$.

ii) $S = \{A \in M_2(\mathbb{C}) / A \text{ es diagonal}\}$.

iii) $S = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) / p(0) = 0\}$.

Hay diferentes formas de determinar un subespacio:

1. Sistema de generadores.
2. Base.
3. Ecuaciones paramétricas.
4. Ecuaciones implícitas.

En lo que sigue aprenderemos a pasar de una a otra.

Dados s_1, s_2,..., s_r vectores de V. El conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de estos vectores

$$L(\{s_1, s_2,..., s_r\}) = \{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 +...+ \alpha_r s_r \,/\, \alpha_i \in \mathbb{K}\} \subset V$$

constituye un subespacio vectorial de V sobre $\mathbb{K}$ que se denomina **subespacio vectorial generado por** s_1, s_2,..., s_r.

Al conjunto de vectores $S = \{s_1, s_2,..., s_r\}$ se le llama **sistema generador del subespacio**.

Ejercicio 13. Obtener una base del subespacio L(S) generado por el conjunto $S = \{(1,2,0,0), (0,1,-1,2), (1,0,2, -1)\} \subseteq (\mathbb{Z}_3)^4$.

Ejercicio 13bis. Obtener una base del subespacio L(S) generado por el conjunto $S = \{(1,2,0,0), (0,1,-1,2), (1,0,2, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Consideremos $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de V y veamos como cada subespacio se puede interpretar como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones. Sea U un subespacio vectorial de dimensión $r < n$, y sea $B_U = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$ una base de U.

Supongamos que conocemos las coordenadas de los vectores u_i en función de la base B:

$$u_i = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni})_B \qquad i = 1, ..., r$$

Cualquier vector $x \in U$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores u_i, digamos $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_r u_r$. Si tiene como coordenadas $x = (x_1, x_2, ..., x_n)_B$ entonces:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, ..., x_n) = {} & \lambda_1 (a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}) + \\ & \lambda_2 (a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2}) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & \lambda_r (a_{1r}, a_{2r}, ..., a_{nr})\end{aligned}$$

e igualando coordenadas obtenemos lo que llamamos **ecuaciones paramétricas de U** respecto de la base B:

$$x_1 = a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1r}\lambda_n$$
$$x_2 = a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2r}\lambda_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \ldots + a_{nr}\lambda_n$$

Ejercicio 14. Obtener las ecuaciones paramétricas del subespacio del ejercicio 13.

Estas igualdades se pueden interpretar como el conjunto de soluciones de un cierto sistema de ecuaciones con n incógnitas. Es fácil notar que puesto que $0 \in U$, la solución trivial es una de las que aparece en este conjunto, por lo que el sistema es necesariamente homogéneo.

A cualquier sistema homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea el anterior lo llamaremos **ecuaciones cartesianas (o implícitas) de U** respecto de la base B.

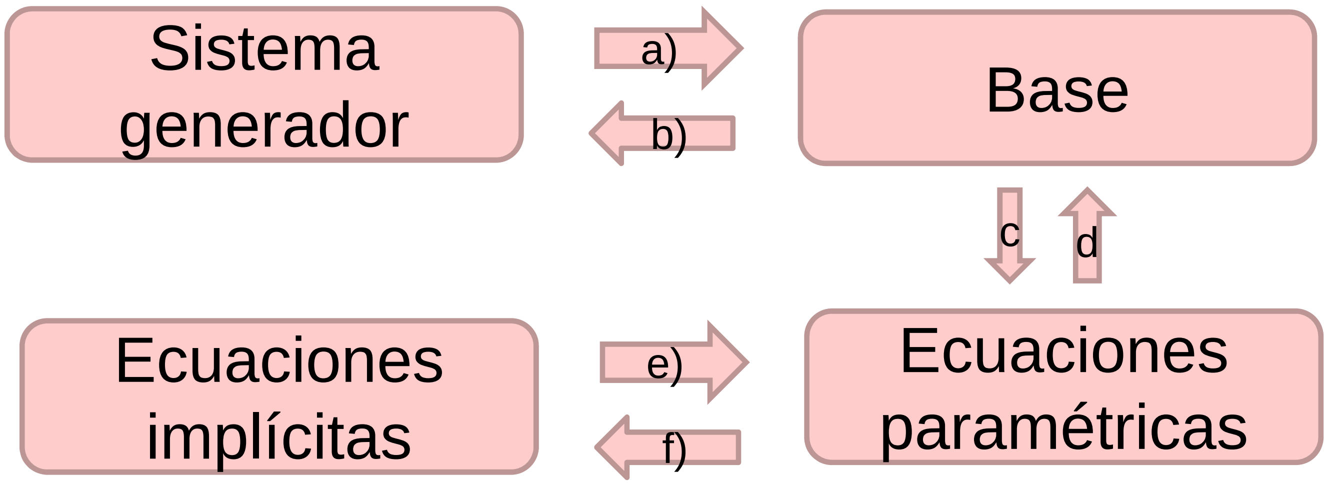
Estas ecuaciones nos dan las condiciones que tiene que cumplir las coordenadas de un vector para que pertenezca al subespacio en cuestión. Existen varios métodos para calcular unas ecuaciones cartesianas de un subespacio, entre ellos el de eliminación de parámetros.

Ejercicio 15. Obtener las ecuaciones implícitas del subespacio del ejercicio anterior.

Proposición 4.15. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, para cada subespacio U se tiene:

$$k = \dim(V) - \dim(U)$$

donde k es el menor número de ecuaciones (no nulas) cartesianas que definen U.



Pasar de una forma a otra:

a) Eliminando vectores linealmente dependientes.

b) La base ya es un sistema generador.

c) Multiplicando cada vector de la base por un parámetro distinto e igualándolo a un vector genérico del espacio vectorial.

d) La base viene dada por los vectores que multiplican a cada parámetro (ecuación vectorial).

e) Obteniendo las soluciones del sistema de ec. implícitas

f) Eliminando parámetros

Ejercicio 16. Obtener base, dimensión, ecuaciones paramétricas e implícitas de los siguientes subespacios:

i) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$.

ii) $S = \{A \in M_2(\mathbb{C}) / A \text{ es diagonal}\}$.

iii) $S = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) / p(0) = 0\}$.

6. Espacio vectorial euclídeo.

Álgebra
García Muñoz, M.A.

Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, un **producto escalar** en V es una aplicación $< , >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando las siguientes propiedades:

1. $< u, v > = < v, u >, \forall\ u, v \in V$.
2. $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >, \forall\ u, v, w \in V$.
3. $< \alpha u, v > = \alpha < u, v >, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall\ u, v \in V$.
4. $\forall\ u \in V, < u, u > \geq 0$ y
5. $< u, u> =0 \Leftrightarrow u = 0$.

Ejercicio 17. Comprobar que el producto escalar usual del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ satisface la anterior definición.

Un **espacio vectorial euclídeo** es un par (V,<,>) formado por un espacio vectorial real V y un producto escalar definido en él.

Proposición 4.16. De la definición de producto escalar se deduce:

i) $\forall$ u $\in$ V, < 0, u > = < u, 0 > = 0.

ii) Para todo $a_1,\ldots, a_r, b_1,\ldots, b_s \in \mathbb{R}, u_1,\ldots, u_r, v_1,\ldots,v_s \in V$.

$$< \sum_i a_i u_i , \sum_j b_j v_j > = \sum_{i,j} a_i b_j < u_i , v_j >$$

__**Ejemplos**__

1. En $\mathbb{R}^n$ la regla: $<(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)> = x_1y_1+\ldots+x_ny_n$ define un producto escalar, que recibe el nombre de **producto escalar usual** de $\mathbb{R}^n$.
2. En el espacio vectorial $M_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden n se define el producto escalar: $< A,B > = tr(AB^t)$.
3. En $P_n(\mathbb{R})$ se define el producto escalar:

$$<p(x), q(x)> = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $B=\{u_1,\ldots,u_n\}$ una base de V. Denotamos para cada i y cada j $a_{ij} = < u_i, u_j >$. Se llama **matriz de Gram** (o **matriz métrica**) respecto de B a la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notar que la matriz de Gram es siempre simétrica, pues $a_{ij} = a_{ji}$.

Proposición 4.17. Dados x, y $\in$ V de coordenadas $x = (x_1,\ldots,x_n)_B$, $y = (y_1,\ldots,y_n)_B$ se tiene $< x,y > = < x,y > = X^t G Y$. Esta formula recibe el nombre de **expresión matricial del producto escalar** respecto de la base B.

Ejercicio 18. Obtener las matriz de Gram para el producto escalar del ejemplo 3 con respecto a la base estándar de $P_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 19. Obtener las matriz de Gram para el producto escalar del usual de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base canónica y a la base B' = {(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)}. ¿Son iguales?

Proposición 4.18. Las matrices de Gram G y G' de un espacio vectorial euclídeo respecto de distintas bases B y B' son matrices congruentes; esto es, existe una matriz P regular tal que

$$G' = P^t \, G \, P$$

siendo P la matriz del cambio de base de B' en B.

Ejercicio 20. Comprobar lo anterior con lo obtenido en el ejercicio previo.

Sea (V, <>) un espacio vectorial euclídeo. Se define la **norma** o **módulo** de un vector $v \in V$, como:

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

Observar que $\|v\| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{V^t G V}$

Proposición 4.19. Sea $(V, < , >)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $u \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $||u|| \geq 0$.
2. $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
3. $||\alpha u|| = \alpha||u||$.

Un vector u se dice que es **unitario** si tiene norma 1. A partir de un vector $v \in V$, cualquiera podemos obtener uno unitario dividiendo por su norma.

Teorema 4.20. (Desigualdad de Schwartz) Sea $(V, < , >)$ un espacio vectorial euclídeo. Para cada $u, v \in V$ se verifica:

$$|<u, v>| \leq ||u||\ ||v||$$

Teorema 4.21. (Desigualdad triangular o de Minkowski) Sea (V, $<\ ,\ >$) un espacio vectorial euclídeo. Para cada u, v $\in$ V se verifica:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Llamaremos **ángulo** entre los vectores x e y al único número real α, $0 \leq \alpha \leq \pi$ de forma que:

$$\cos(\alpha) = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Sea (V, $<\ ,\ >$) un espacio vectorial euclídeo. Se dice que los vectores u, v $\in$ V son **ortogonales**, y se denota por $u \perp v$, si $< u, v > = 0$ (o equivalentemente si el ángulo que forman es $\pi/2$).

Ejercicio 21. Obtener el ángulo que forman los polinomios $p(x) = x^2 - 1$ y $q(x) = 2x$ considerando el espacio vectorial euclídeo $P_2(\mathbb{R})$ dotado del producto escalar del ejemplo 3. ¿Son perpendiculares? ¿Es alguno de ellos unitario?

Sea (V, < , >) un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Diremos que una base B $=\{v_1,\dots,v_n\}$ es **ortogonal** si los vectores que la forman son ortogonales dos a dos, esto es: $<v_i, v_j> = 0$, $\forall\ i\neq j$.

Se dice que B es una **base ortonormal** si es ortogonal y además todos los vectores que la forman tienen norma 1, esto es: $\|v_i\| = 1$, $\forall\ v_i \in B$.

Proposición 4.22. Sea (V, <,>) un espacio vectorial euclídeo y sea B $= \{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V. Sea G la matriz de Gram respecto de la base B. Entonces:

1. B es ortogonal si, y sólo si, G es diagonal.
2. B es ortonormal si, y sólo si, G es la identidad.

Proposición 4.23. La matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales es una matriz ortogonal; esto es, $P^t = P^{-1}$.

Lema 4.24. En un espacio vectorial euclídeo, un conjunto de vectores ortogonales dos a dos son linealmente independientes.

Proposición 4.25. Sea (V, <,>) un espacio vectorial euclídeo. Si $B = \{v_1,...,v_n\}$ es una base ortogonal de V, entonces

$$B' = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$$

es un base ortonormal de V.

Proposición 4.26. (Teorema de Gram-Schmidt) Sea (V, <,>) un espacio vectorial euclídeo y sea $B = \{v_1,...,v_n\}$ una base de V. Entonces existe una base ortogonal $\{u_1,...,u_n\}$ de V de forma que para cada k se verifica $L(\{v_1,...,v_k\}) = L(\{u_1,...,u_k\})$.

Demostración (Método de Gram-Schmidt)

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{\|u_1\|^2}u_1$$

…………………………

$$u_n = v_n - \frac{<v_n,u_1>}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{<v_n,u_2>}{\|u_2\|^2}u_2 \ldots - \frac{<v_n,u_{n-1}>}{\|u_{n-1}\|^2}u_{n-1}$$

Ejercicio 22. Obtener una base ortogonal y otra ortonormal $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar del usual a partir de la base B = {(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)}.

Ejercicio 23. Ejercicio 8 de la relación.

Ejercicio 24. Ejercicio 10 de la relación.