Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
Grado en Ingeniería Informática

Algebra
Relación de problemas.
Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices y Determinantes

1.-Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales se pide:
i) Transformarlo en un sistema escalonado reducido.
ii) Discutirlo y resolverlo en caso de que admita solución.

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} y-3z &=& -5\\ 2x+3y-z &=& 7\\ 4x+5y-2z &=& 10\end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcr} x+y+2z &=& 2\\ y+z &=& 1\\ 2x+2z &=& 2\end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t &=& 0\\ x-y+z-t &=& 12\\ x+y-z+t &=& -8\end{array}\right.$$

$$d)\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 1\\ -2y+2z-t &=& -1\\ -4y+4z+3t &=& 2\\ -4y+4z+2t &=& 2\end{array}\right. \quad e)\left\{\begin{array}{rcr} 3x+2y+z &=& 5\\ 2x+3y+z &=& 1\\ 2x+y+3z &=& 11\end{array}\right.$$

2.-Dadas las matrices

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4\\ 4 & 0 & -1\\ -2 & -3 & -1\end{pmatrix} \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \mathrm{C}=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calcular $-A^t+2B^{-1}+4C^2$.

3.-Estudiar si las matrices siguientes son simétricas o antisimétricas:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 5\\ -3 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

4.-Hallar A^n para todo $n \in \mathbf{N}^*$, siendo $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$con $\alpha \in R$.

5.-Probar que el producto de matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior. Deducir una fórmula para las potencias de una matriz diagonal.

6.-Demostrar que el anillo de las matrices cuadradas no es conmutativo y tiene divisores de cero.

7.-Dadas las matrices A, B y C, comprobar que $AB = AC$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Concluir que la igualdad $AB = AC$ no implica necesariamente $B = C$.
8.-Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:
a) Calcular una matriz regular Q tal que $QA = H$.
b) Calcular una matriz regular P tal que $AP = C$.
c) ¿Son H y C equivalentes?¿Por qué?
9.- Calcular los determinantes para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & -1+2i \\ 1 & 2 & -2+i \\ -1 & -2+i & 2-2i \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix};D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & .. & a_{2n} \\ 0 & 0 & .. & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & a_{nn} \end{pmatrix};E=I_n$$

10.-Calcular el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 20 & -10 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

11.-Hallar los valores de α y β para los que el rango de la matriz A es lo más pequeño posible:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & \alpha & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 & \beta \end{pmatrix}$$

12.-Hallar las inversas de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2-i & -1+2i \\ 1 & 2 & -2+i \\ -1 & -2+i & 2-2i \end{pmatrix};D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

13.-Discutir, según los valores de los parámetros a y b, y resolver, en su caso, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+y+az & = & a^2 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+z & = & 1 \\ ax+y+bz & = & 1 \\ ax+y+z & = & b \end{array}\right. \quad c)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & ax \\ 5x+y+2z & = & ay \\ 4y+3z & = & az \end{array}\right.$$