Relación de problemas. Tema 4.
ESPACIOS VECTORIALES Y ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS.

1. Estudiar si los siguientes conjuntos forman o no espacio vectorial sobre el conjunto de los números racionales:

a) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]=\{a+b\sqrt{5} : a,b\in\mathbb{Z}\}$
b) $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]=\{a+b\sqrt{5} : a,b\in\mathbb{Q}\}$

2. Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores de $M_2(\mathbb{R})$son linealmente independientes o linealmente dependientes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Estudiar si los siguientes vectores de $P_2(\mathbb{R})$ son base:

$$p(x)=x^2+x+1, \quad q(x)=2x+1, \; r(x)=x^2+1$$

Calcular las coordenadas del polinomio $5x^2+3x+2$

4. El mismo ejercicio para $K=\mathbb{Z}_2$.

5. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$B_1=\{(1,0,1),(-1,1,1),(1,-1,0)\}$$
$$B_2=\{(2,1,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}$$

Calcular la matriz de cambio de base de B_2 a B_1. Calcular las coordenadas en la base B_1 del vector cuyas coordenadas en la base B_2 son (3,-2,2).

6. Definir un producto escalar en $V=\mathbb{R}^3$ que verifique:

a) La base canónica no es ortonormal.
b) Sólo el primer vector de la base canónica es unitario.
c) Los dos primeros vectores de la base canónica no son ortogonales.
d) El primer y tercer vector de la base canónica forman un ángulo de 60

Calcular la expresión del producto escalar y calcular el producto escalar de los vectores (1,0,0) y (1,2,0)

7. Consideremos V un espacio vectorial de dimensión 3, y $<,>$ un producto escalar que respecto de una base $B=\{u_1, u_2, u_3\}$verifica:

$$< u_1, u_1>=1, \; < u_1, u_2>=1, \; < u_1, u_3>=1,$$
$$< u_2, u_2>=2, \; < u_2, u_3>=2, \; < u_3, u_3>=3$$

Se pide:

a) Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica.
b) Calcular la expresión del producto escalar.

c) Calcular dos vectores ortogonales no nulos.
d) Calcular una base ortonormal

8. Sea V el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 1. Definimos

$$<p(x),q(x)>=\int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

1. Demostrar que <,> es un producto escalar en V.
2. Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica.
3. Buscar dos polinomios ortogonales en V.
4. Calcular la matriz de Gram respecto de la base {2(x-1),2}
5. Estudiar explícitamente la relación entre ambas matrices.

9. Sea $\mathbb{R}^2$ el espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 con producto escalar es:

$$<(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

a) Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica.
b) Sin usar Gram-Schmidt, calcular una base ortogonal tal que el vector (1, 1) pertenezca a ella y con ésta determinar una base ortonormal.
c) Utilizar Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal que contenga al vector (1, 1)

10. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial euclídeo de dimensión 4 con producto escalar es:

$$<A, D> = tr(AD^t)$$

a) Demostrar dos de las propiedades del producto escalar
b) Calcular la matriz de Gram respecto de la base

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

b) ¿Son $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ortogonales?
c) Expresar en función del coseno, el ángulo que forman $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
d) ¿Es B unitaria? En caso negativo, transformarla en una base unitaria.

11. Determinar si los siguientes conjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:

a) $H=\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & c\end{pmatrix}\}$

b) $H=\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A=\begin{pmatrix}a & 1+a\\ a & c\end{pmatrix}\}$

c) $H=\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A=\begin{pmatrix}-b & a\\ a & b\end{pmatrix}\}$

d) $H=\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A=\begin{pmatrix}0 & b\\ a & 0\end{pmatrix}\}$

12. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 3 se consideran los subespacios

$$F_0=\{p(x) : p(0)=0\}$$

$$F_1=\{p(x) : p(1)=0\}$$
$$F_{-1}=\{p(x) : p(-1)=0\}$$

Escribir unas ecuaciones cartesianas y una base de cada uno de ellos.

13. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$. Se pide:
A) Demostrar que el polinomio x^3 y sus tres primeras derivadas forman una base de V.
B) Sea W el subespacio generado por los vectores $1+3x+5x^2$, $-1+2x^2$, $3+3x+x^2$. Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de W.
C) Sea U el subespacio generado por los vectores $1+x^2$ y $1-x^2$. Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de U. ¿Pertenecen los polinomios $1+x$ y $1+5x^2$ a U?.

14. Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{C}$. Consideremos U y W los conjuntos formados por las matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente. Demostrar que ambos son subespacios vectoriales. Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de U, W, $U\cap W$ y U+W.