Cálculos del Mecanismo de Retorno Rápido

Índice

1. Análisis de ángulos y velocidades

1.1. Relación entre θ y ϕ

El análisis geométrico del mecanismo permite establecer la relación fundamental entre los ángulos. A partir del triángulo formado por las longitudes r, d y L, se obtiene:

$$L^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos(180^\circ - \phi) \tag{1}$$

sabiendo que $\cos(180^\circ - \Phi) = -\cos(\phi)$, se tiene:

$$L = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos(\phi)} \tag{2}$$

Por la ley de senos:

$$\frac{\sin(180^\circ - \Phi)}{L} = \frac{\sin(\Theta)}{r} \tag{3}$$

sabiendo que $\sin(180 - \phi) = \sin(\phi)$ y despejando:

$$\sin(\theta) = \frac{\sin(\phi)r}{L} \tag{4}$$

Sustituyendo la expresión de L:

$$\boxed{\sin(\Theta) = \frac{r\sin(\Phi)}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos(\Phi)}}} \tag{5}$$

obtenemos una relación entre θ y ϕ.

1.2. Análisis de velocidades

Sabemos que la barra O_2A tiene velocidad y aceleración angulares, y al no presentar traslación, aplicamos rotación respecto a eje fijo:

$$\vec{V_a} = \omega_2 \times \vec{r}, \ \sphericalangle\Phi^\circ$$

Podemos escribir una descomposición relativa de $\vec{V_a}$:

$$\vec{V_a} = \vec{V_a}' + \vec{V}_{a/f}$$

donde $\vec{V_a}'$ sigue la trayectoria del sistema de rotación y $\vec{V}_{a/f}$ es la velocidad relativa.

$$V_{a/f} = (\omega_2 \cdot r \cdot \sin(\phi - \theta)) \tag{6}$$

Además:

$$V_a' = \cos(\Phi - \Theta)\, V_a \tag{7}$$

De donde:

$$\omega_1 L = [\cos(\Phi - \Theta)]\, \omega_2 r$$

Por tanto, la velocidad angular del eslabón es:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\omega_2 r}{L}\cos(\Phi - \Theta)} \tag{8}$$

2. Análisis de aceleraciones

Tal como en el análisis de velocidades sabemos que la barra O_2A tiene velocidad y aceleración angulares, y al no presentar traslación, aplicamos rotación respecto a eje fijo:

$$\vec{a}_a = (\alpha_2 \times \vec{r}),\ \measuredangle\,\Phi^\circ + (\omega_2 \times (\omega_2 \times \vec{r})),\ \measuredangle\,\Phi^\circ$$

Donde el primer y segundo término representan la aceleración tangencial y normal de a respectivamente. Ahora podemos reescribir la aceleración de a como parte de O_1B, obtieniendo la siguiente relación:

$$\vec{a}_a = \vec{a}'_a + \vec{a}_{a/f} + \vec{a}_{cor}$$

Donde:

- $$\vec{a}'_a = (\alpha_1 \times \vec{L}),\ \measuredangle\,\theta^\circ + (\omega_1 \times (\omega_1 \times \vec{L})),\ \measuredangle\,\theta^\circ$$

- $$\vec{a}_{cor} = (2\omega_1 \times \vec{V}_{a/f}),\ \measuredangle\,\theta^\circ$$

- $$a_{a/f} = \ \measuredangle\,\theta^\circ$$

Sabiendo esto proyectamos todos los vectores respecto a sus componentes rectangulares, obteniendo respectivamente para X e Y:

$$(a'_a)_t \sin\theta + (a_{a/f})\cos\theta = \omega_2^2 r\cos(\Phi) + \alpha_2 r\sin(\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f}\sin\theta - \omega_1^2 L\cos\theta$$

$$(a'_a)_t \cos\theta - (a_{a/f})\sin\theta = \alpha_2 r\cos(\Phi) - \omega_2^2 r\sin(\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f}\cos\theta + \omega_1^2 L\sin\theta$$

Solucionando el sistema para α_1 y $a_{a/f}$:

$$\alpha_1 = \frac{\omega_2^2 r\sin(\theta-\Phi) + \alpha_2 r\cos(\theta-\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f}}{L} \tag{9}$$

$$a_{a/f} = \omega_2^2 r\cos(\Phi-\theta) + \alpha_2 r\sin(\Phi-\theta) - \omega_1^2 L \tag{10}$$

3. Lazo vectorial para obtener velocidad y aceleración del martillo

Planteando el lazo vectorial para el mecanismo, se tiene:
Al proyectar en los ejes x y y:

$$\begin{aligned} X &: D - R\cos\theta + K\sin\beta = 0 \\ Y &: y_c + K\cos\beta - R\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumando:

$$K^2 = (R\cos\theta - D)^2 + (R\sin\theta - y_c)^2$$

3.1. Derivación de la velocidad

Derivando ambos lados respecto al tiempo. Donde:

- K es constante
- $\frac{d\theta}{dt} = \omega_1$
- y_c es variable
- R es constante

- D es constante

$$\frac{d(K^2)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(R\cos(\theta) - D)^2 + (R\sin(\theta) - y_c)^2\right] \tag{11}$$

Como K es constante:

$$0 = \frac{d}{dt}\left[(R\cos(\theta) - D)^2 + (R\sin(\theta) - y_c)^2\right] \tag{12}$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$0 = 2(R\cos(\theta) - D)\frac{d}{dt}(R\cos(\theta) - D) + 2(R\sin(\theta) - y_c)\frac{d}{dt}(R\sin(\theta) - y_c) \tag{13}$$

Calculando las derivadas internas:

$$\frac{d}{dt}(R\cos(\theta) - D) = -R\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} = -R\sin(\theta)\omega_1 \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}(R\sin(\theta) - y_c) = R\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt} - \dot{y}_c = R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c \tag{15}$$

Sustituyendo:

$$0 = 2(R\cos(\theta) - D)(-R\sin(\theta)\omega_1) + 2(R\sin(\theta) - y_c)(R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c) \tag{16}$$

Dividiendo entre 2:

$$0 = -(R\cos(\theta) - D)R\sin(\theta)\omega_1 + (R\sin(\theta) - y_c)(R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c) \tag{17}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} 0 = {} & -R^2\cos(\theta)\sin(\theta)\omega_1 + DR\sin(\theta)\omega_1 \\ & + R^2\sin(\theta)\cos(\theta)\omega_1 - R\sin(\theta)\dot{y}_c \\ & - y_c R\cos(\theta)\omega_1 + y_c\dot{y}_c \end{aligned} \tag{18}$$

Los términos $R^2\cos(\theta)\sin(\theta)\omega_1$ se cancelan, quedando:

$$0 = DR\sin(\theta)\omega_1 - R\sin(\theta)\dot{y}_c - y_c R\cos(\theta)\omega_1 + y_c\dot{y}_c \tag{19}$$

Reorganizando:

$$\dot{y}_c(R\sin(\theta) - y_c) = R\omega_1(D\sin(\theta) - y_c\cos(\theta)) \tag{20}$$

3.2. Resultado para la velocidad

Dividiendo ambos lados por $(R\sin(\theta) - y_c)$:

$$\boxed{\dot{y}_c = \frac{R\omega_1(D\sin(\theta) - y_c\cos(\theta))}{R\sin(\theta) - y_c}} \tag{21}$$

Esta expresión es válida siempre que $R\sin(\theta) \neq y_c$ (es decir, que el denominador no sea cero).

3.3. Aceleración mediante lazo vectorial

Derivando nuevamente la ecuación de velocidad para obtener la aceleración:

$$\ddot{y}_c = R\,\frac{\left[\dot{\omega}_1 A - \omega_1^2 B - \omega_1\dot{y}_c\cos\theta\right]D_{en} - \omega_1 A(\dot{y}_c + R\omega_1\cos\theta)}{D_{en}^2} \tag{22}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= D\sin\theta - y_c\cos\theta, \\ B &= D\cos\theta + y_c\sin\theta, \\ D_{en} &= R\sin\theta - y_c. \end{aligned}$$

Nota: $\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta} = \alpha_1$ es la aceleración angular.

3.4. Forma expandida de la aceleración

Expandiendo la expresión anterior:

$$
\begin{aligned}
\ddot{y}_c = {} & \frac{R\alpha_1(D\sin\theta - y_c\cos\theta)(R\sin\theta - y_c)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \\
& - \frac{R\omega_1^2(D\cos\theta + y_c\sin\theta)(R\sin\theta - y_c)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \\
& + \frac{R\omega_1\dot{y}_c[R\sin\theta\cos\theta - y_c\cos\theta - D\sin\theta + y_c\cos\theta]}{(R\sin\theta - y_c)^2}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Simplificando:

$$
\begin{aligned}
\ddot{y}_c = {} & \frac{R\alpha_1(D\sin\theta - y_c\cos\theta)(R\sin\theta - y_c)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \\
& - \frac{R\omega_1^2(D\cos\theta + y_c\sin\theta)(R\sin\theta - y_c)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \\
& + \frac{R\omega_1\dot{y}_c\big(R\sin\theta\cos\theta - D\sin\theta\big)}{(R\sin\theta - y_c)^2}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

4. Cálculo de ω_3 y α_3

Este apartado resume cómo calcular primero la velocidad angular ω_3 y luego la aceleración angular α_3 del eslabón K (ángulo β), a partir del giro de la manivela R (ángulo θ) con ω_1 y α_1.

4.1. Geometría

De la geometría del mecanismo:

$$
\sin\beta = \frac{R\cos\theta - D}{K}, \qquad \beta = \arcsin\left(\frac{R\cos\theta - D}{K}\right) \tag{25}
$$

4.2. Velocidades

4.2.1. Descomposición vectorial

La velocidad del punto C se puede descomponer como:

$$
\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} \tag{26}
$$

donde:

- $\vec{v}_B = \omega_1 \, R \measuredangle \theta$
- $\vec{v}_{C/B} = \omega_3 \, K \measuredangle \beta$
- $\vec{v}_C = \dot{y}_c$ (dirección vertical $\downarrow$)

4.2.2. Proyección en eje horizontal

Proyectando en el eje horizontal:

$$
0 = -\omega_1 \, R \, \sin\theta - \omega_3 \, K \cos\beta \tag{27}
$$

Despejando ω_3:

$$
\boxed{\omega_3 = -\frac{\omega_1 \, R \, \sin\theta}{K \, \cos\beta}} \tag{28}
$$

4.3. Aceleraciones

4.3.1. Descomposición vectorial

La aceleración del punto C se puede descomponer como:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} \tag{29}$$

donde:

- $\vec{a}_B = \vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n$ con:
  - $\vec{a}_B^t = \alpha_1 \, R \measuredangle \, \theta$ (tangencial)
  - $\vec{a}_B^n = \omega_1^2 \, R \measuredangle \, \theta$ (normal, hacia dentro)
- $\vec{a}_{C/B} = \vec{a}_{C/B}^t + \vec{a}_{C/B}^n$ con:
  - $\vec{a}_{C/B}^t = \alpha_3 \, K \measuredangle \, \beta$ (tangencial)
  - $\vec{a}_{C/B}^n = \omega_3^2 \, K \measuredangle \, \beta$ (normal, hacia dentro)
- $\vec{a}_C = \ddot{y}_c$ (dirección vertical $\downarrow$)

4.3.2. Proyección en eje horizontal

Proyectando en el eje horizontal:

$$0 = -\alpha_1 R \sin\theta + \omega_1^2 R \cos\theta + \alpha_3 K \cos\beta - \omega_3^2 K \sin\beta \tag{30}$$

Despejando α_3:

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{\omega_1^2 R \cos\theta + \alpha_1 R \sin\theta - \omega_3^2 K \sin\beta}{K \cos\beta}} \tag{31}$$

4.3.3. Proyección en eje vertical

Proyectando en el eje vertical:

$$-\ddot{y}_c = -\omega_1^2 R \sin\theta + \alpha_1 R \cos\theta + \omega_3^2 K \cos\beta - \alpha_3 K \sin\beta \tag{32}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a_C = -\omega_1^2 R \sin\theta + \alpha_1 R \cos\theta + \omega_3^2 K \cos\beta - \alpha_3 K \sin\beta} \tag{33}$$

5. Análisis Cinético

5.1. Ecuaciones de movimiento

1. Y - C:
$$W_c - C = m_c \bar{a}_c \quad \Rightarrow \quad C = m_c(g - \bar{a}_c) \tag{34}$$
2. X - BC:
$$B_x = m_{BC} \cdot (\bar{a}_{BC})_x \tag{35}$$
3. Y - BC:
$$B_y - W_R - C = m_{BC} \cdot (\bar{a}_{BC})_y \quad \Rightarrow \quad B_y = m_{BC}(g + (\bar{a}_{BC})_y) + C \tag{36}$$
4. Z - BC:
$$\frac{K}{2}(B_y \sin\beta - B_x \cos\beta + C \sin(\beta)) = \bar{I_{BC}} \cdot \alpha_3 \tag{37}$$
5. X - O_1:
$$O_{1x} + A_x - B_x = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_x \quad \Rightarrow \quad O_{1x} + A_x = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_x + B_x \tag{38}$$
6. Y - O_1:
$$O_{1y} + A_y - B_y = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_y \quad \Rightarrow \quad (O_1)_y + A_y = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_y + B_y \tag{39}$$

7. Z - O_1:

$$\left(\frac{R}{2} - L\right)(A_x \sin\theta - A_y \cos\theta) - \frac{R}{2}(B_y \cos\theta + A\cos\theta - B_x \sin\theta - A_x \sin\theta) = \bar{I_{o_1}} \cdot \alpha_1 \tag{40}$$

8. X - O_2:

$$(O_2)_x - A_x = m_r(\bar{a}_{o_2})_x \tag{41}$$

9. Y - O_2:

$$(O_2)_y - A_y - W_r = m_r(\bar{a}_{o_2})_y \tag{42}$$

10. Z - O_2:

$$\frac{r}{2} \cdot (A_x \sin\phi + (o_2)_x \sin\phi - A_y \cos\phi - (o_2)_y \cos\phi) = \bar{I_{o_2}} \cdot \alpha_2 \tag{43}$$

5.2. Aceleraciones Centroidales

5.2.1. Eslabón $O_1 - B$

$$\bar{a}_{O_1} = \alpha_1 \frac{R}{2}, \measuredangle\, \theta^\circ \quad + \omega_1^2 \frac{R}{2}, \measuredangle\, \theta^\circ \tag{44}$$

$$\bar{a}_{O_{1x}} = -\left(\alpha_1 \frac{R}{2} \sin\theta + \omega_1^2 \frac{R}{2} \cos\theta\right) \tag{45}$$

$$\bar{a}_{O_{1y}} = \alpha_1 \frac{R}{2} \cos\theta - \omega_1^2 \frac{R}{2} \sin\theta \tag{46}$$

5.2.2. Eslabón O_2

$$\bar{a}_{O_2} = \alpha_1 \frac{r}{2}, \measuredangle\, \theta^\circ \quad + \omega_1^2 \frac{r}{2}, \measuredangle\, \theta^\circ \tag{47}$$

$$\bar{a}_{O_{2x}} = -\left(\alpha_2 \frac{r}{2} \sin\theta + \omega_2^2 \frac{r}{2} \cos\theta\right) \tag{48}$$

$$\bar{a}_{O_{2y}} = \alpha_2 \frac{r}{2} \cos\theta - \omega_2^2 \frac{r}{2} \sin\theta \tag{49}$$

5.2.3. Eslabón $B - C$

$$\bar{a}_{BC} = a_c + \alpha_3 \frac{K}{2}, \measuredangle\, \beta^\circ \quad + \omega_3^2 \frac{K}{2}, \measuredangle\, \beta^\circ \tag{50}$$

$$\bar{a}_{BC,x} = -\frac{K}{2}(\alpha_3 \cos\beta + \omega_3^2 \sin\beta) \tag{51}$$

$$\bar{a}_{BC,y} = -a_c + \frac{K}{2}(\alpha_3 \sin\beta - \omega_3^2 \cos\beta) \tag{52}$$

donde $\bar{a}_c = \bar{a}_c$

5.3. Notas adicionales

Las ecuaciones anteriores describen el sistema completo de fuerzas y momentos actuando sobre el mecanismo. Para resolver el sistema, se necesita:

- Conocer las aceleraciones angulares α_1, α_2, α_3
- Determinar las fuerzas de reacción A_x, A_y, B_x, B_y, C
- Calcular las reacciones en el punto de apoyo O_1
- Usar las aceleraciones centroidales para evaluar los términos inerciales