

Diseño conceptual y análisis dinámico de un sistema de martillo accionado por un mecanismo de retorno rápido

Parámetros geométricos y operativos



Figura 1: Diagrama geométrico del mecanismo con referencias de dimensiones (r , d , R , K , D).

Los valores usados en el análisis corresponden al diseño actual del prototipo y se expresan en unidades SI:

$$\begin{array}{llll} r = 0.070 \text{ m} & d = 0.110 \text{ m} & R = 0.200 \text{ m} & \delta = 0.00665 \\ K = 0.070 \text{ m} & D = 0.17 \text{ m} & \lambda = 0.1093458 \text{ m} & g = 9.81 \text{ m/s}^2 \\ \omega_2 = 4.00 \text{ rad/s} & \alpha_2 = 0.00 \text{ rad/s}^2 & & \end{array}$$

Se asume motor de velocidad angular constante ($\alpha_2 = 0$) y todos los ángulos en radianes. El valor de λ corresponde a la distancia del pivote O_1 al centroide del eslabón O_1B .

1. Aceleraciones angulares y relativas

Ligadura cinemática para la aceleración de a respecto a O_2 :

$$\vec{a}_a = (\alpha_2 \times \vec{r}), \quad \Phi^\circ + (\omega_2 \times (\omega_2 \times \vec{r})), \quad \Phi^\circ$$

Planteamiento respecto a O_1 :

$$\vec{a}_a = \vec{a}'_a + \vec{a}_{a/f} + \vec{a}_{cor}$$

Donde:

■

$$\vec{a}'_a = (\alpha_1 \times \vec{L}), \quad \theta^\circ + (\omega_1 \times (\omega_1 \times \vec{L})), \quad \theta^\circ$$

\vec{a}'_a representa la aceleración producto de la rotación del sistema

■

$$\vec{a}_{cor} = (2\omega_1 \times \vec{V}_{a/f}), \theta^\circ$$

\vec{a}_{cor} representa la aceleracion de coriolis, un termino adicional que surge en sistemas no inerciales de este tipo

■

$$a_{a/f} = \theta^\circ$$

$a_{a/f}$ representa la aceleracion del punto a relativo al sistema en rotacion

2. Derivacion explicita Lazo vectorial del martillo

Planteando el lazo vectorial para el mecanismo, se tiene:

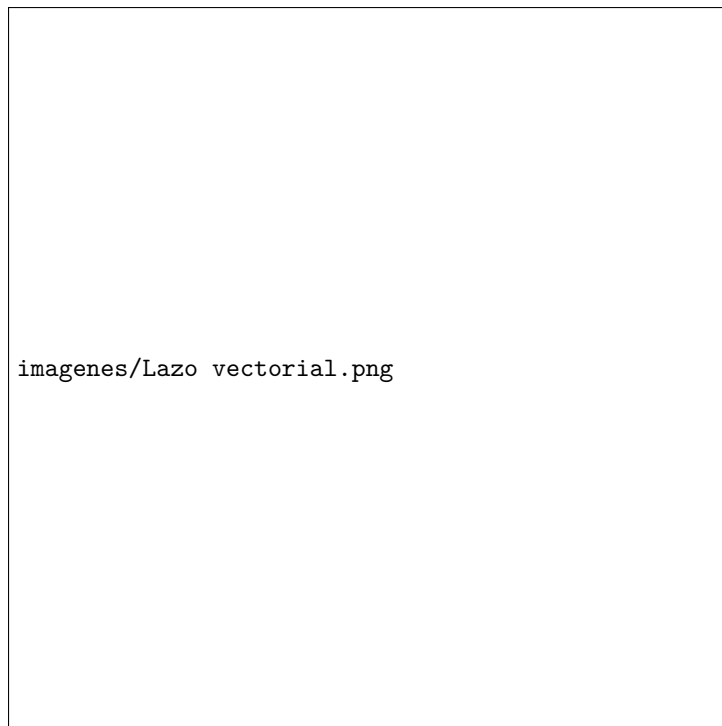


Figura 2: Lazo vectorial del mecanismo que relaciona O_1B , el eslabón BC y el desplazamiento vertical del martillo.

Al proyectar en los ejes x y y y organizar en una sola ecuacion tenemos:

$$K^2 = (R \cos \theta - D)^2 + (R \sin \theta - y_c)^2$$

2.1. Derivación explicita para la velocidad

Derivando ambos lados respecto al tiempo. Donde:

- K es constante
- $\frac{d\theta}{dt} = \omega_1$
- y_c es variable
- R es constante
- D es constante

$$\frac{d(K^2)}{dt} = \frac{d}{dt} [(R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2] \quad (1)$$

Como K es constante:

$$0 = \frac{d}{dt} [(R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2] \quad (2)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$0 = 2(R \cos(\theta) - D) \frac{d}{dt} (R \cos(\theta) - D) + 2(R \sin(\theta) - y_c) \frac{d}{dt} (R \sin(\theta) - y_c) \quad (3)$$

Calculando las derivadas internas:

$$\frac{d}{dt} (R \cos(\theta) - D) = -R \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = -R \sin(\theta) \omega_1 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} (R \sin(\theta) - y_c) = R \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} - \dot{y}_c = R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c \quad (5)$$

Sustituyendo:

$$0 = 2(R \cos(\theta) - D)(-R \sin(\theta) \omega_1) + 2(R \sin(\theta) - y_c)(R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c) \quad (6)$$

Dividiendo entre 2:

$$0 = -(R \cos(\theta) - D)R \sin(\theta) \omega_1 + (R \sin(\theta) - y_c)(R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c) \quad (7)$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} 0 = & -R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \omega_1 + DR \sin(\theta) \omega_1 \\ & + R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \omega_1 - R \sin(\theta) \dot{y}_c \\ & - y_c R \cos(\theta) \omega_1 + y_c \dot{y}_c \end{aligned} \quad (8)$$

Los términos $R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \omega_1$ se cancelan, quedando:

$$0 = DR \sin(\theta) \omega_1 - R \sin(\theta) \dot{y}_c - y_c R \cos(\theta) \omega_1 + y_c \dot{y}_c \quad (9)$$

Reorganizando:

$$\dot{y}_c (R \sin(\theta) - y_c) = R \omega_1 (D \sin(\theta) - y_c \cos(\theta)) \quad (10)$$

Dividiendo ambos lados por $(R \sin(\theta) - y_c)$:

$$\boxed{\dot{y}_c = \frac{R \omega_1 (D \sin(\theta) - y_c \cos(\theta))}{R \sin(\theta) - y_c}} \quad (11)$$

Esta expresión es válida siempre que $R \sin(\theta) \neq y_c$ (es decir, que el denominador no sea cero).

2.2. Derivacion explicita para la Aceleración

Derivando nuevamente la ecuación de velocidad para obtener la aceleración:

$$\ddot{y}_c = R \frac{[\dot{\omega}_1 A - \omega_1^2 B - \omega_1 \dot{y}_c \cos \theta] D_{en} - \omega_1 A (\dot{y}_c + R \omega_1 \cos \theta)}{D_{en}^2} \quad (12)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= D \sin \theta - y_c \cos \theta, \\ B &= D \cos \theta + y_c \sin \theta, \\ D_{en} &= R \sin \theta - y_c. \end{aligned}$$

Nota: $\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta} = \alpha_1$ es la aceleración angular.

Expandiendo la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_c = & \frac{R\alpha_1(D \sin \theta - y_c \cos \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ & - \frac{R\omega_1^2(D \cos \theta + y_c \sin \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ & + \frac{R\omega_1 \dot{y}_c [R \sin \theta \cos \theta - y_c \cos \theta - D \sin \theta + y_c \cos \theta]}{(R \sin \theta - y_c)^2}\end{aligned}\quad (13)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_c = & \frac{R\alpha_1(D \sin \theta - y_c \cos \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ & - \frac{R\omega_1^2(D \cos \theta + y_c \sin \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ & + \frac{R\omega_1 \dot{y}_c (R \sin \theta \cos \theta - D \sin \theta)}{(R \sin \theta - y_c)^2}\end{aligned}\quad (14)$$

3. Cinemática del eslabón BC

3.0.1. Ecuación vectorial de velocidad en el punto B

Usando movimiento del plano general podemos expresar la velocidad en el punto C por medio de la siguiente expresión:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} \quad (15)$$

En la cual:

- $\vec{v}_B = \omega_1 R \theta$, representa la velocidad del punto B y es producto a la rotación del eslabón O_1B
- $\vec{v}_{C/B} = \omega_3 K \beta$, representa la velocidad relativa tangencial del punto C respecto a B y es producto de la rotación del eslabón BC
- $\vec{v}_C = \dot{y}_c$ (dirección vertical \downarrow), representa la velocidad del martillo, obtenida mediante el método de lazo vectorial

Tomando en cuenta las inclinaciones proyectamos los vectores en el eje horizontal, obteniendo así la siguiente relación para ω_3 y ω_1 :

$$0 = -\omega_1 R \sin \theta - \omega_3 K \cos \beta \quad (16)$$

Despejando ω_3 de la ecuación anterior obtenemos:

$$\boxed{\omega_3 = -\frac{\omega_1 R \sin \theta}{K \cos \beta}} \quad (17)$$

3.1. Ecuación vectorial de aceleración en el punto B

De manera análoga a la velocidad se tiene un movimiento de plano general, el cual nos permite expresar la aceleración en el punto C por medio de la siguiente expresión:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} \quad (18)$$

En el cual:

- $\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_t + (\vec{a}_B)_n$:
 - $(\vec{a}_B)_t = \alpha_1 \cdot R \theta$, Representa la aceleración tangencial del punto B debido a la rotación fija en O_1
 - $(\vec{a}_B)_n = \omega_1^2 \cdot R \theta$, Representa la aceleración normal producto de la rotación respecto a O_1 . Apunta directamente hacia el eje de rotación

- $\vec{a}_{C/B} = (\vec{a}_{C/B})_t + (\vec{a}_{C/B})_n$ en donde:
 - $(\vec{a}_{C/B})_t = \alpha_3 \cdot K \cdot \beta$ Representa la aceleracion tangencial relativa del punto C respecto a B , es producto de la rotacion del eslabon BC
 - $(\vec{a}_{C/B})_n = \omega_3^2 \cdot K \cdot \beta$ Representa la aceleracion normal relativa del punto C respecto a B , apunta directamente hacia el eje de rotacion del eslabon BC
- $\vec{a}_C = \ddot{y}_c \downarrow$ Representa la aceleracion del martillo, obtenida mediante el metodo de lazo vectorial

Con esta ecuacion y por medio de las proyecciones en el eje horizontal de cada vector encontramos la siguiente relacion que describe a α_3 en funcion de α_1 y ω_1 :

$$0 = -\alpha_1 R \sin \theta + \omega_1^2 R \cos \theta + \alpha_3 K \cos \beta - \omega_3^2 K \sin \beta \quad (19)$$

Despejando α_3 :

$$\alpha_3 = \frac{\omega_1^2 R \cos \theta + \alpha_1 R \sin \theta - \omega_3^2 K \sin \beta}{K \cos \beta} \quad (20)$$

4. Análisis cinético

Las ecuaciones de movimiento se obtuvieron mediante los siguientes diagramas de cuerpo libre:



Figura 3: Diagrama C.



Figura 4: Diagrama BC.

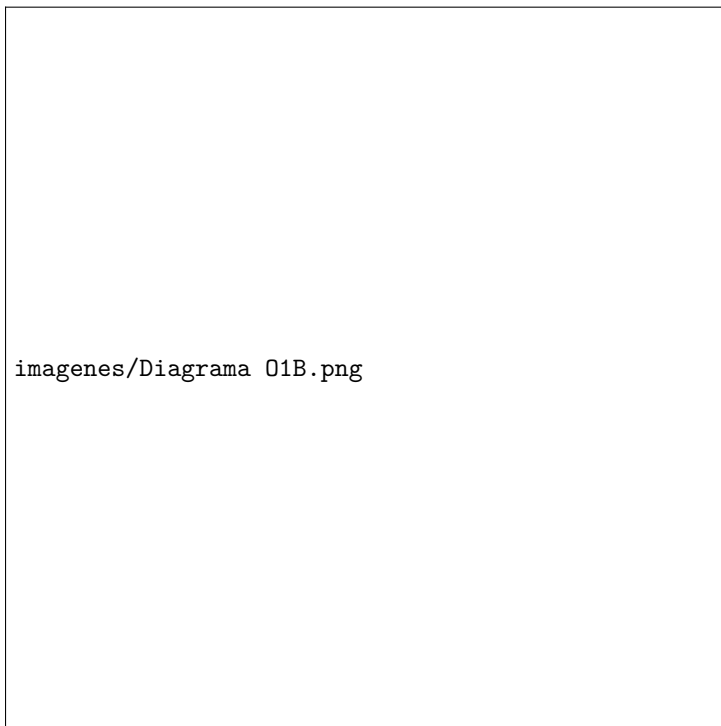


Figura 5: Diagrama O1B.




Figura 6: Diagrama O2A.

5. Análisis de los resultados teóricos


En base al modelo matemático desarrollado en las secciones anteriores se implementó un análisis numérico completo del mecanismo a lo largo de múltiples ciclos de operación. Los resultados presentados a continuación corresponden a las simulaciones realizadas con los parámetros geométricos y operativos especificados en la Sección 4, utilizando Python como plataforma de cálculo.

A continuación se presentan descripciones breves de las gráficas referenciadas:




imagenes/L_phi.png

Figura 7: Variación de la distancia L con el ángulo de entrada ϕ .



`imagenes/theta_t.png`

Figura 8: Evolución temporal del ángulo θ de la barra oscilante.



imagenes/beta_t.png

Figura 9: Evolución temporal del ángulo β del eslabón BC .

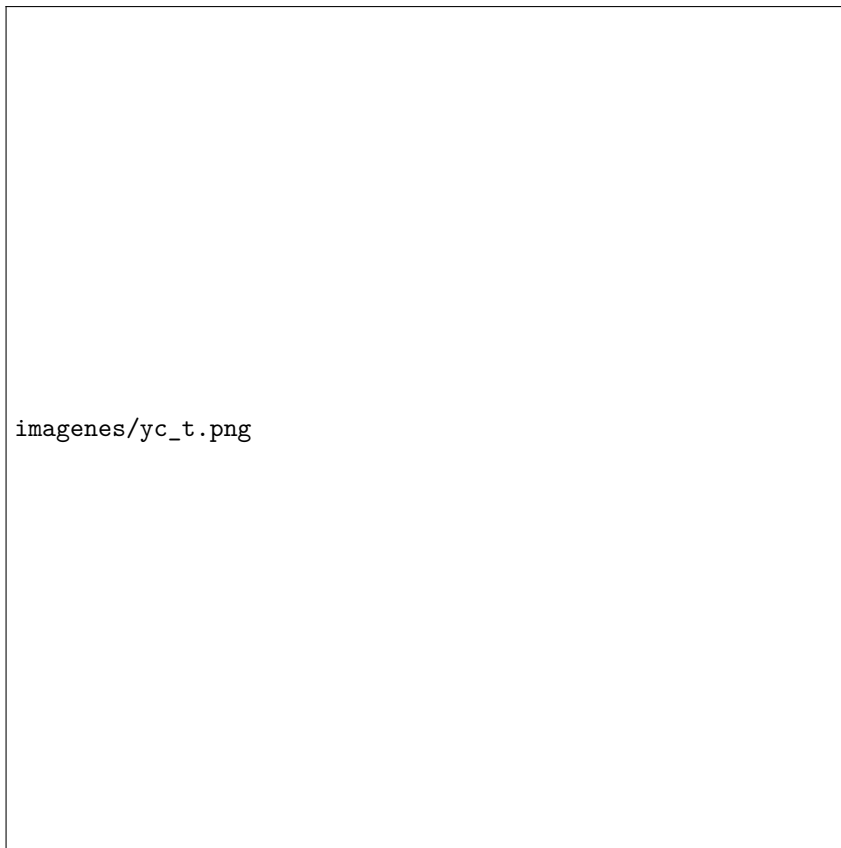
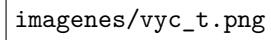
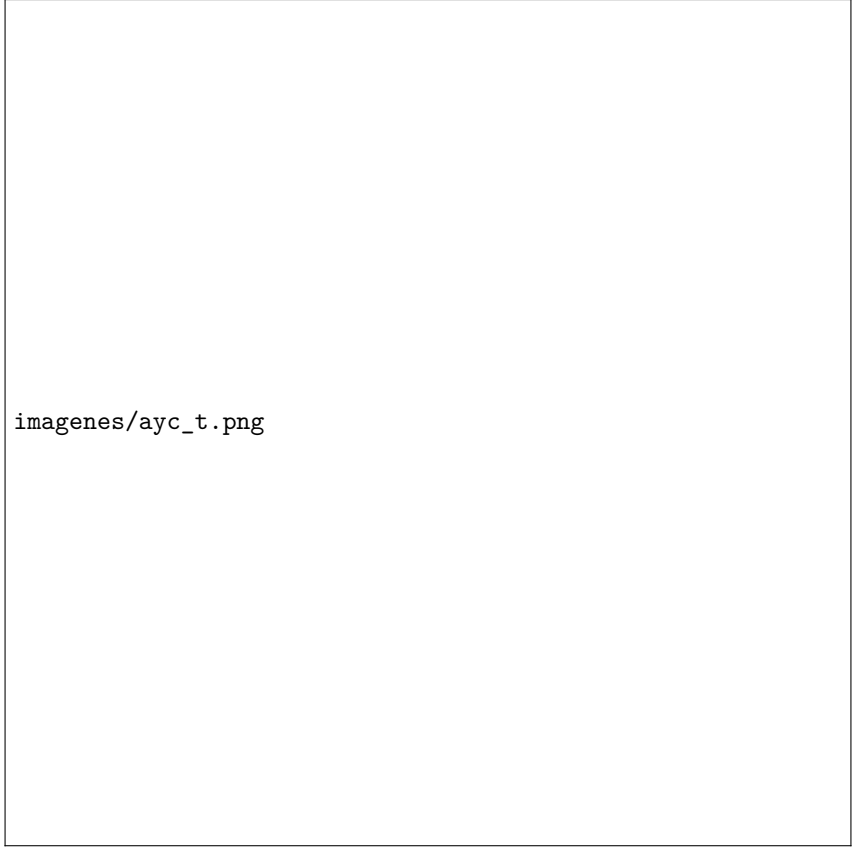


Figura 10: Desplazamiento vertical del martillo y_c a lo largo del ciclo.




imagenes/vyc_t.png

Figura 11: Velocidad vertical \dot{y}_c del martillo.




imagenes/ayc_t.png

Figura 12: Aceleración vertical \ddot{y}_c del martillo.



imagenes/omega_comp.png

Figura 13: Comparación de velocidades angulares ω_1 y ω_3 .



imagenes/alpha_comp.png

Figura 14: Comparación de aceleraciones angulares α_1 y α_3 .

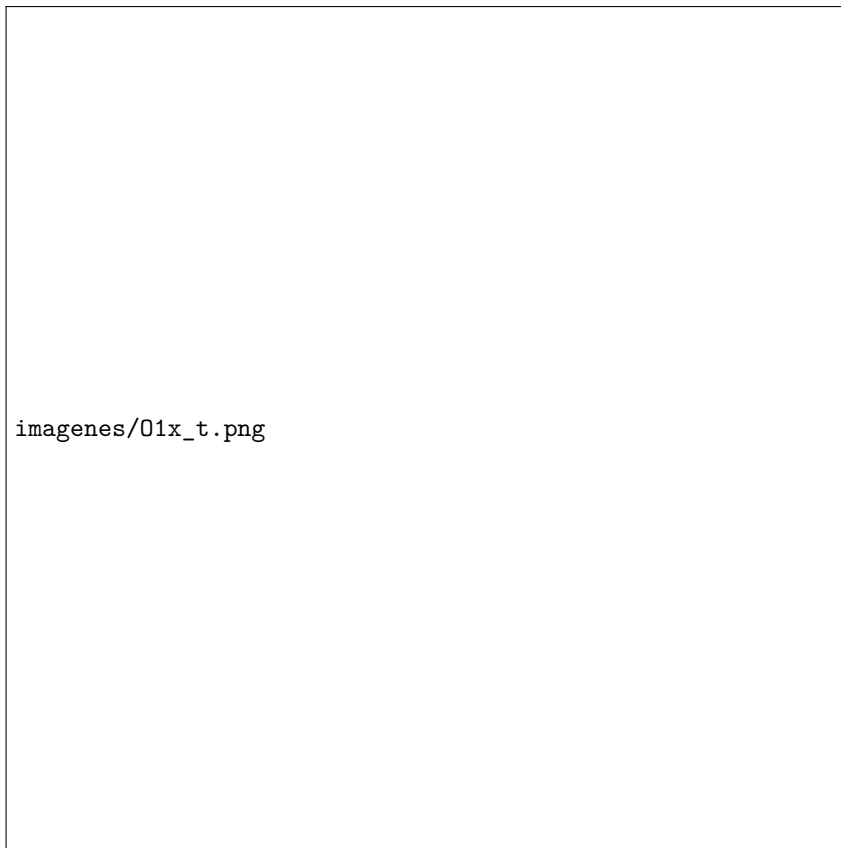
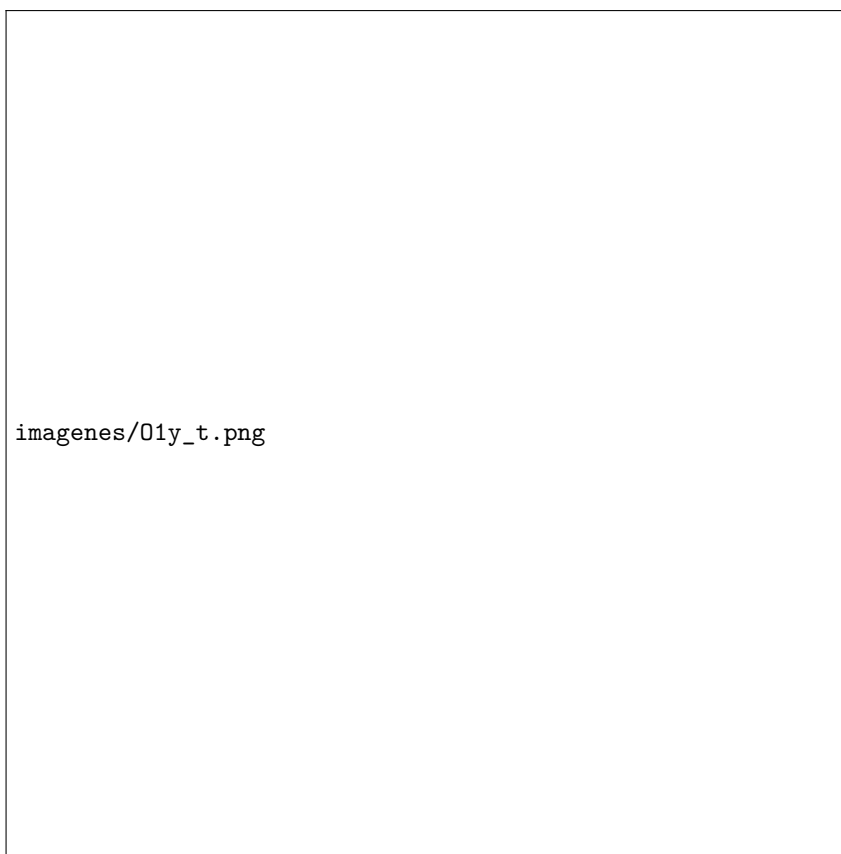


Figura 15: Componente horizontal de la reacción en O_1 .



imagenes/01y_t.png

Figura 16: Componente vertical de la reacción en O_1 .

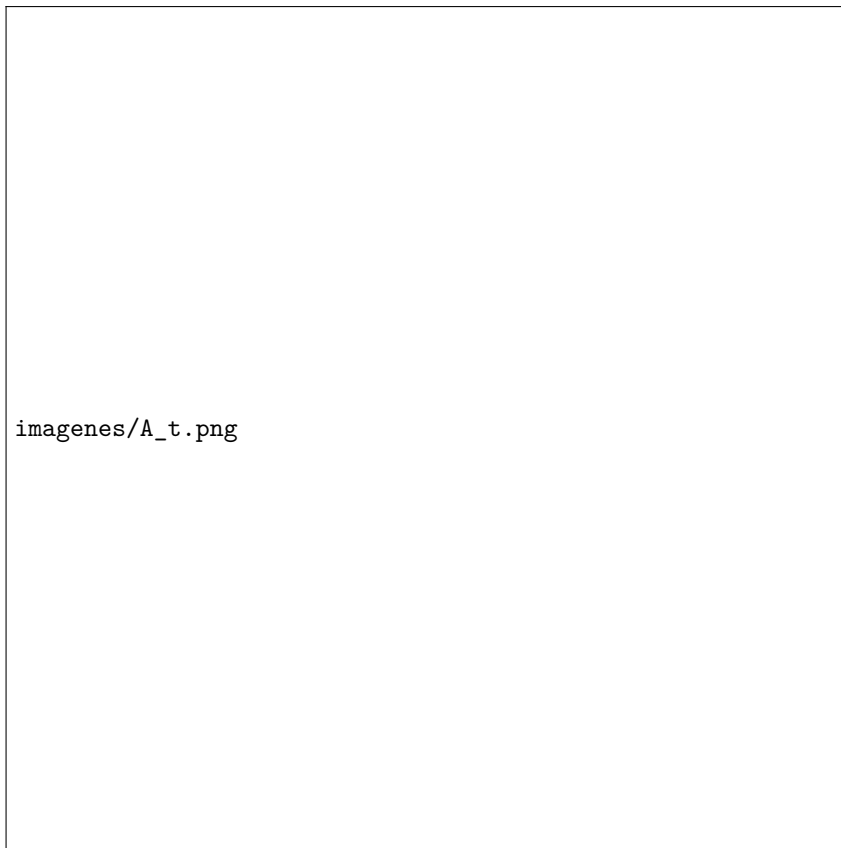
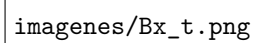
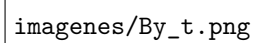


Figura 17: Magnitud de la fuerza en el pasador deslizando A .



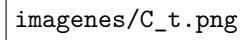
imagenes/Bx_t.png

Figura 18: Componente horizontal de la reacción en B .



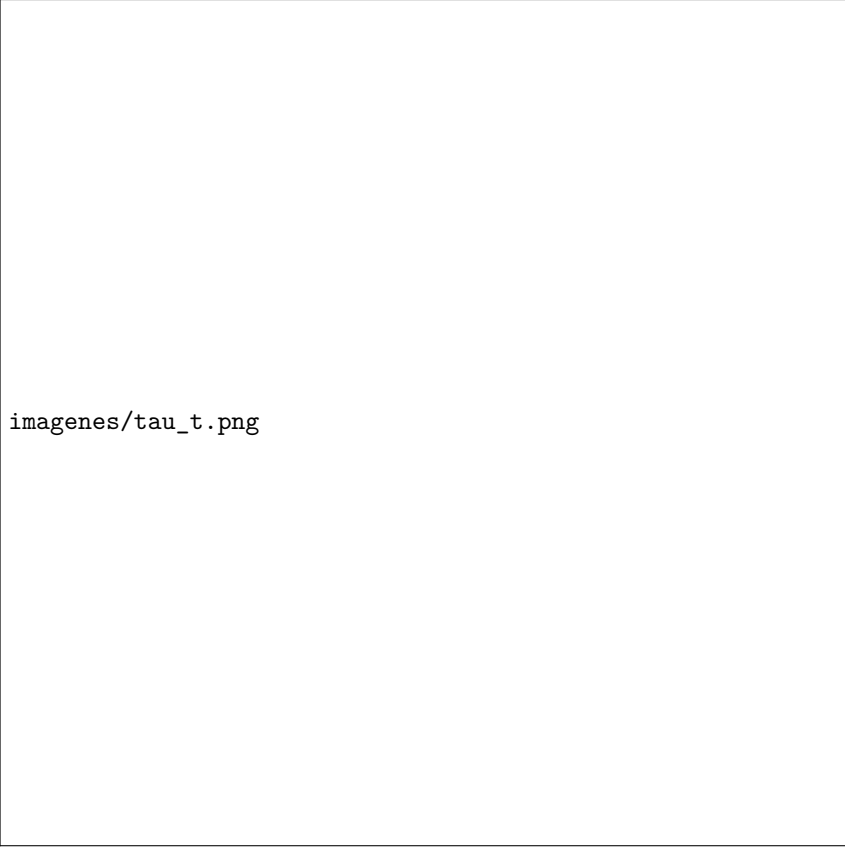
imagenes/By_t.png

Figura 19: Componente vertical de la reacción en B .



imagenes/C_t.png

Figura 20: Fuerza de contacto del martillo C sobre la pieza de trabajo.



imagenes/tau_t.png

Figura 21: Par motor instantáneo τ requerido para mantener ω_2 constante.

Figura 7: Variación de la distancia L con el ángulo de entrada ϕ (comportamiento no lineal).

Figura 8: Evolución temporal del ángulo θ de la barra oscilante.

Figura 9: Evolución temporal del ángulo β del eslabón BC .

Figura 10: Desplazamiento vertical del martillo y_c a lo largo del ciclo.

Figura 11: Velocidad vertical \dot{y}_c del martillo (muestra la asimetría avance/retorno).

Figura 12: Aceleración vertical \ddot{y}_c del martillo (picos en inversiones de movimiento).

Figura 13: Comparación de velocidades angulares ω_1 y ω_3 .

Figura 14: Comparación de aceleraciones angulares α_1 y α_3 .

Figura 15: Componente horizontal de la reacción en O_1 .

Figura 16: Componente vertical de la reacción en O_1 .

Figura 17: Magnitud de la fuerza en el pasador deslizante A .

Figura 18: Componente horizontal de la reacción en B .

Figura 19: Componente vertical de la reacción en B .

Figura 20: Fuerza de contacto del martillo C sobre la pieza de trabajo.

Figura 21: Par motor instantáneo τ requerido para mantener ω_2 constante.

Estos resultados teóricos servirán como base de comparación para las pruebas experimentales que se realizarán con el prototipo físico, permitiendo validar el modelo matemático y ajustar los parámetros de diseño según sea necesario.