

# Cálculos del Mecanismo de Retorno Rápido

## Índice

<b>1. Análisis de ángulos y velocidades</b>	<b>2</b>
1.1. Relación entre $\theta$ y $\phi$	2
1.2. Análisis de velocidades	2
<b>2. Análisis de aceleraciones</b>	<b>2</b>
<b>3. Lazo vectorial para obtener velocidad y aceleración del martillo</b>	<b>3</b>
3.1. Derivación de la velocidad	3
3.2. Resultado para la velocidad	4
3.3. Aceleración mediante lazo vectorial	4
3.4. Forma expandida de la aceleración	5
<b>4. Cálculo de <math>\omega_3</math> y <math>\alpha_3</math></b>	<b>5</b>
4.1. Geometría	5
4.2. Velocidades	5
4.2.1. Descomposición vectorial	5
4.2.2. Proyección en eje horizontal	5
4.3. Aceleraciones	6
4.3.1. Descomposición vectorial	6
4.3.2. Proyección en eje horizontal	6
4.3.3. Proyección en eje vertical	6
<b>5. Análisis Cinético</b>	<b>6</b>
5.1. Ecuaciones de movimiento	6
5.2. Aceleraciones Centroidales	7
5.2.1. Eslabón $O_1 - B$	7
5.2.2. Eslabón $O_2$	7
5.2.3. Eslabón $B - C$	7
5.3. Notas adicionales	7

## 1. Análisis de ángulos y velocidades

### 1.1. Relación entre $\theta$ y $\phi$

El análisis geométrico del mecanismo permite establecer la relación fundamental entre los ángulos. A partir del triángulo formado por las longitudes  $r$ ,  $d$  y  $L$ , se obtiene:

$$L^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos(180^\circ - \phi) \quad (1)$$

sabiendo que  $\cos(180^\circ - \Phi) = -\cos(\phi)$ , se tiene:

$$L = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos(\phi)} \quad (2)$$

Por la ley de senos:

$$\frac{\sin(180^\circ - \Phi)}{L} = \frac{\sin(\Theta)}{r} \quad (3)$$

sabiendo que  $\sin(180 - \phi) = \sin(\phi)$  y despejando:

$$\sin(\theta) = \frac{\sin(\phi)r}{L} \quad (4)$$

Sustituyendo la expresión de  $L$ :

$$\boxed{\sin(\Theta) = \frac{r \sin(\Phi)}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos(\Phi)}}} \quad (5)$$

obtenemos una relación entre  $\theta$  y  $\phi$ .

### 1.2. Análisis de velocidades

Sabemos que la barra  $O_2A$  tiene velocidad y aceleración angulares, y al no presentar traslación, aplicamos rotación respecto a eje fijo:

$$\vec{V}_a = \omega_2 \times \vec{r}, \quad \forall \Phi^\circ$$

Podemos escribir una descomposición relativa de  $\vec{V}_a$ :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_a' + \vec{V}_{a/f}$$

donde  $\vec{V}_a'$  sigue la trayectoria del sistema de rotación y  $\vec{V}_{a/f}$  es la velocidad relativa.

$$V_{a/f} = (\omega_2 \cdot r \cdot \sin(\phi - \theta)) \quad (6)$$

Además:

$$V_a' = \cos(\Phi - \Theta) V_a \quad (7)$$

De donde:

$$\omega_1 L = [\cos(\Phi - \Theta)] \omega_2 r$$

Por tanto, la velocidad angular del eslabón es:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\omega_2 r}{L} \cos(\Phi - \Theta)} \quad (8)$$

## 2. Análisis de aceleraciones

Tal como en el análisis de velocidades sabemos que la barra  $O_2A$  tiene velocidad y aceleración angulares, y al no presentar traslación, aplicamos rotación respecto a eje fijo:

$$\vec{a}_a = (\alpha_2 \times \vec{r}), \nabla \Phi^\circ + (\omega_2 \times (\omega_2 \times \vec{r})), \nabla \Phi^\circ$$

Donde el primer y segundo término representan la aceleración tangencial y normal de  $a$  respectivamente. Ahora podemos reescribir la aceleración de  $a$  como parte de  $O_1B$ , obteniendo la siguiente relación:

$$\vec{a}_a = \vec{a}'_a + \vec{a}_{a/f} + \vec{a}_{cor}$$

Donde:

■

$$\vec{a}'_a = (\alpha_1 \times \vec{L}), \nabla \theta^\circ + (\omega_1 \times (\omega_1 \times \vec{L})), \nabla \theta^\circ$$

■

$$\vec{a}_{cor} = (2\omega_1 \times \vec{V}_{a/f}), \nabla \theta^\circ$$

■

$$a_{a/f} = \nabla \theta^\circ$$

Sabiendo esto proyectamos todos los vectores respecto a sus componentes rectangulares, obteniendo respectivamente para X e Y:

$$(a'_a)_t \sin \theta + (a_{a/f}) \cos \theta = \omega_2^2 r \cos(\Phi) + \alpha_2 r \sin(\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f} \sin \theta - \omega_1^2 L \cos \theta$$

$$(a'_a)_t \cos \theta - (a_{a/f}) \sin \theta = \alpha_2 r \cos(\Phi) - \omega_2^2 r \sin(\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f} \cos \theta + \omega_1^2 L \sin \theta$$

Solucionando el sistema para  $\alpha_1$  y  $a_{a/f}$ :

$$\alpha_1 = \frac{\omega_2^2 r \sin(\theta - \Phi) + \alpha_2 r \cos(\theta - \Phi) + 2\omega_1 V_{a/f}}{L} \quad (9)$$

$$a_{a/f} = \omega_2^2 r \cos(\Phi - \theta) + \alpha_2 r \sin(\Phi - \theta) - \omega_1^2 L \quad (10)$$

## 3. Lazo vectorial para obtener velocidad y aceleración del martillo

Planteando el lazo vectorial para el mecanismo, se tiene:

Al proyectar en los ejes  $x$  y  $y$ :

$$X : D - R \cos \theta + K \sin \beta = 0$$

$$Y : y_c + K \cos \beta - R \sin \theta = 0$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumando:

$$K^2 = (R \cos \theta - D)^2 + (R \sin \theta - y_c)^2$$

### 3.1. Derivación de la velocidad

Derivando ambos lados respecto al tiempo. Donde:

■  $K$  es constante

■  $\frac{d\theta}{dt} = \omega_1$

■  $y_c$  es variable

■  $R$  es constante

■  $D$  es constante

$$\frac{d(K^2)}{dt} = \frac{d}{dt} [(R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2] \quad (11)$$

Como  $K$  es constante:

$$0 = \frac{d}{dt} [(R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2] \quad (12)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$0 = 2(R \cos(\theta) - D) \frac{d}{dt} (R \cos(\theta) - D) + 2(R \sin(\theta) - y_c) \frac{d}{dt} (R \sin(\theta) - y_c) \quad (13)$$

Calculando las derivadas internas:

$$\frac{d}{dt} (R \cos(\theta) - D) = -R \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = -R \sin(\theta) \omega_1 \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} (R \sin(\theta) - y_c) = R \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} - \dot{y}_c = R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c \quad (15)$$

Sustituyendo:

$$0 = 2(R \cos(\theta) - D)(-R \sin(\theta) \omega_1) + 2(R \sin(\theta) - y_c)(R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c) \quad (16)$$

Dividiendo entre 2:

$$0 = -(R \cos(\theta) - D)R \sin(\theta) \omega_1 + (R \sin(\theta) - y_c)(R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c) \quad (17)$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} 0 = & -R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \omega_1 + DR \sin(\theta) \omega_1 \\ & + R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \omega_1 - R \sin(\theta) \dot{y}_c \\ & - y_c R \cos(\theta) \omega_1 + y_c \dot{y}_c \end{aligned} \quad (18)$$

Los términos  $R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \omega_1$  se cancelan, quedando:

$$0 = DR \sin(\theta) \omega_1 - R \sin(\theta) \dot{y}_c - y_c R \cos(\theta) \omega_1 + y_c \dot{y}_c \quad (19)$$

Reorganizando:

$$\dot{y}_c(R \sin(\theta) - y_c) = R \omega_1(D \sin(\theta) - y_c \cos(\theta)) \quad (20)$$

### 3.2. Resultado para la velocidad

Dividiendo ambos lados por  $(R \sin(\theta) - y_c)$ :

$$\dot{y}_c = \frac{R \omega_1(D \sin(\theta) - y_c \cos(\theta))}{R \sin(\theta) - y_c} \quad (21)$$

Esta expresión es válida siempre que  $R \sin(\theta) \neq y_c$  (es decir, que el denominador no sea cero).

### 3.3. Aceleración mediante lazo vectorial

Derivando nuevamente la ecuación de velocidad para obtener la aceleración:

$$\ddot{y}_c = R \frac{[\dot{\omega}_1 A - \omega_1^2 B - \omega_1 \dot{y}_c \cos \theta] D_{en} - \omega_1 A (\dot{y}_c + R \omega_1 \cos \theta)}{D_{en}^2} \quad (22)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= D \sin \theta - y_c \cos \theta, \\ B &= D \cos \theta + y_c \sin \theta, \\ D_{en} &= R \sin \theta - y_c. \end{aligned}$$

Nota:  $\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta} = \alpha_1$  es la aceleración angular.

### 3.4. Forma expandida de la aceleración

Expandiendo la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_c = & \frac{R\alpha_1(D \sin \theta - y_c \cos \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ & - \frac{R\omega_1^2(D \cos \theta + y_c \sin \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ & + \frac{R\omega_1 \dot{y}_c [R \sin \theta \cos \theta - y_c \cos \theta - D \sin \theta + y_c \cos \theta]}{(R \sin \theta - y_c)^2}\end{aligned}\quad (23)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_c = & \frac{R\alpha_1(D \sin \theta - y_c \cos \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ & - \frac{R\omega_1^2(D \cos \theta + y_c \sin \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ & + \frac{R\omega_1 \dot{y}_c (R \sin \theta \cos \theta - D \sin \theta)}{(R \sin \theta - y_c)^2}\end{aligned}\quad (24)$$

## 4. Cálculo de $\omega_3$ y $\alpha_3$

Este apartado resume cómo calcular primero la velocidad angular  $\omega_3$  y luego la aceleración angular  $\alpha_3$  del eslabón  $K$  (ángulo  $\beta$ ), a partir del giro de la manivela  $R$  (ángulo  $\theta$ ) con  $\omega_1$  y  $\alpha_1$ .

### 4.1. Geometría

De la geometría del mecanismo:

$$\sin \beta = \frac{R \cos \theta - D}{K}, \quad \beta = \arcsin\left(\frac{R \cos \theta - D}{K}\right) \quad (25)$$

### 4.2. Velocidades

#### 4.2.1. Descomposición vectorial

La velocidad del punto  $C$  se puede descomponer como:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} \quad (26)$$

donde:

- $\vec{v}_B = \omega_1 R \nabla \theta$
- $\vec{v}_{C/B} = \omega_3 K \nabla \beta$
- $\vec{v}_C = \dot{y}_c$  (dirección vertical  $\downarrow$ )

#### 4.2.2. Proyección en eje horizontal

Proyectando en el eje horizontal:

$$0 = -\omega_1 R \sin \theta - \omega_3 K \cos \beta \quad (27)$$

Despejando  $\omega_3$ :

$$\boxed{\omega_3 = -\frac{\omega_1 R \sin \theta}{K \cos \beta}} \quad (28)$$

### 4.3. Aceleraciones

#### 4.3.1. Descomposición vectorial

La aceleración del punto  $C$  se puede descomponer como:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} \quad (29)$$

donde:

- $\vec{a}_B = \vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n$  con:
  - $\vec{a}_B^t = \alpha_1 R \mathbf{\hat{t}}$  (tangencial)
  - $\vec{a}_B^n = \omega_1^2 R \mathbf{\hat{n}}$  (normal, hacia dentro)
- $\vec{a}_{C/B} = \vec{a}_{C/B}^t + \vec{a}_{C/B}^n$  con:
  - $\vec{a}_{C/B}^t = \alpha_3 K \mathbf{\hat{t}}$  (tangencial)
  - $\vec{a}_{C/B}^n = \omega_3^2 K \mathbf{\hat{n}}$  (normal, hacia dentro)
- $\vec{a}_C = \ddot{y}_c$  (dirección vertical  $\downarrow$ )

#### 4.3.2. Proyección en eje horizontal

Proyectando en el eje horizontal:

$$0 = -\alpha_1 R \sin \theta + \omega_1^2 R \cos \theta + \alpha_3 K \cos \beta - \omega_3^2 K \sin \beta \quad (30)$$

Despejando  $\alpha_3$ :

$$\alpha_3 = \frac{\omega_1^2 R \cos \theta + \alpha_1 R \sin \theta - \omega_3^2 K \sin \beta}{K \cos \beta} \quad (31)$$

#### 4.3.3. Proyección en eje vertical

Proyectando en el eje vertical:

$$-\ddot{y}_c = -\omega_1^2 R \sin \theta + \alpha_1 R \cos \theta + \omega_3^2 K \cos \beta - \alpha_3 K \sin \beta \quad (32)$$

Por lo tanto:

$$a_C = -\omega_1^2 R \sin \theta + \alpha_1 R \cos \theta + \omega_3^2 K \cos \beta - \alpha_3 K \sin \beta \quad (33)$$

## 5. Análisis Cinético

### 5.1. Ecuaciones de movimiento

1. Y - C:

$$W_c - C = m_c \bar{a}_c \Rightarrow C = m_c(g - \bar{a}_c) \quad (34)$$

2. X - BC:

$$B_x = m_{BC} \cdot (\bar{a}_{BC})_x \quad (35)$$

3. Y - BC:

$$B_y - W_R - C = m_{BC} \cdot (\bar{a}_{BC})_y \Rightarrow B_y = m_{BC}(g + (\bar{a}_{BC})_y) + C \quad (36)$$

4. Z - BC:

$$\frac{K}{2}(B_y \sin \beta - B_x \cos \beta + C \sin(\beta)) = I_{BC}^- \cdot \alpha_3 \quad (37)$$

5. X -  $O_1$ :

$$O_{1x} + A_x - B_x = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_x \Rightarrow O_{1x} + A_x = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_x + B_x \quad (38)$$

6. Y -  $O_1$ :

$$O_{1y} + A_y - B_y = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_y \Rightarrow (O_1)_y + A_y = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_y + B_y \quad (39)$$

7. Z -  $O_1$ :

$$\left(\frac{R}{2} - L\right)(A_x \sin \theta - A_y \cos \theta) - \frac{R}{2}(B_y \cos \theta + A \cos \theta - B_x \sin \theta - A_x \sin \theta) = \bar{I}_{O_1}^- \cdot \alpha_1 \quad (40)$$

8. X -  $O_2$ :

$$(O_2)_x - A_x = m_r(\bar{a}_{O_2})_x \quad (41)$$

9. Y -  $O_2$ :

$$(O_2)_y - A_y - W_r = m_r(\bar{a}_{O_2})_y \quad (42)$$

10. Z -  $O_2$ :

$$\frac{r}{2} \cdot (A_x \sin \phi + (O_2)_x \sin \phi - A_y \cos \phi - (O_2)_y \cos \phi) = \bar{I}_{O_2}^- \cdot \alpha_2 \quad (43)$$

## 5.2. Aceleraciones Centroidales

### 5.2.1. Eslabón $O_1 - B$

$$\bar{a}_{O_1} = \alpha_1 \frac{R}{2}, \curvearrowright \theta^\circ + \omega_1^2 \frac{R}{2}, \curvearrowleft \theta^\circ \quad (44)$$

$$\bar{a}_{O_{1x}} = -\left(\alpha_1 \frac{R}{2} \sin \theta + \omega_1^2 \frac{R}{2} \cos \theta\right) \quad (45)$$

$$\bar{a}_{O_{1y}} = \alpha_1 \frac{R}{2} \cos \theta - \omega_1^2 \frac{R}{2} \sin \theta \quad (46)$$

### 5.2.2. Eslabón $O_2$

$$\bar{a}_{O_2} = \alpha_2 \frac{r}{2}, \curvearrowright \theta^\circ + \omega_2^2 \frac{r}{2}, \curvearrowleft \theta^\circ \quad (47)$$

$$\bar{a}_{O_{2x}} = -\left(\alpha_2 \frac{r}{2} \sin \theta + \omega_2^2 \frac{r}{2} \cos \theta\right) \quad (48)$$

$$\bar{a}_{O_{2y}} = \alpha_2 \frac{r}{2} \cos \theta - \omega_2^2 \frac{r}{2} \sin \theta \quad (49)$$

### 5.2.3. Eslabón $B - C$

$$\bar{a}_{BC} = a_c + \alpha_3 \frac{K}{2}, \curvearrowright \beta^\circ + \omega_3^2 \frac{K}{2}, \curvearrowleft \beta^\circ \quad (50)$$

$$\bar{a}_{BC,x} = -\frac{K}{2}(\alpha_3 \cos \beta + \omega_3^2 \sin \beta) \quad (51)$$

$$\bar{a}_{BC,y} = -a_c + \frac{K}{2}(\alpha_3 \sin \beta - \omega_3^2 \cos \beta) \quad (52)$$

donde  $\bar{a}_c = \bar{a}_c$

## 5.3. Notas adicionales

Las ecuaciones anteriores describen el sistema completo de fuerzas y momentos actuando sobre el mecanismo. Para resolver el sistema, se necesita:

- Conocer las aceleraciones angulares  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- Determinar las fuerzas de reacción  $A_x, A_y, B_x, B_y, C$
- Calcular las reacciones en el punto de apoyo  $O_1$
- Usar las aceleraciones centroidales para evaluar los términos inerciales