Diseño conceptual y análisis dinámico de un sistema de martillo accionado por un mecanismo de retorno rápido

Kevin Javier Gonzalez Luna
kegonzalezl@unal.edu.co

Ivan Felipe Malucho Suarez
imaluche @unal.edu.co

Juan David Hernández Daza
jhernandezda@unal.edu.co

Joseph Nicolas Mahecha Cruz
jomahecha@unal.edu.co

Nelson Arzola de la Peña

Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá D.C.
Facultad de Ingeniería.

2025.

Resumen

El presente proyecto desarrolla el diseño y modelado cinemático de un mecanismo de retorno rápido tipo Whitworth, modificado para operar como un martillo de impacto vertical. El objetivo principal consiste en transformar un movimiento rotacional uniforme, proporcionado por un motor eléctrico con reductor, en un movimiento alternativo de avance y retroceso con diferentes velocidades angulares efectivas, permitiendo un descenso lento y un retorno rápido del elemento percutor.

El rediseño propuesto introduce una variación estructural respecto al mecanismo clásico: el rodillo deslizante tradicional es reemplazado por un tornillo pasante que transmite directamente la fuerza entre la manivela motriz y la palanca ranurada. Esta modificación reduce el número de componentes, simplifica la fabricación y mantiene la eficiencia cinemática del sistema. La energía rotacional del motor se transmite desde el eje de entrada O_2 a la palanca oscilante pivotada en O_1, la cual a su vez impulsa una biela articulada que acciona un bloque deslizante. Dicho bloque, fabricado en acero A36, cumple la función de martillo y se desplaza guiado por dos varillas lineales, ejecutando un golpe controlado durante la fase de avance.

El mecanismo completo se inscribe en un volumen máximo de $60 \times 60 \times 15$ cm y fue analizado mediante el método del lazo vectorial, considerando relaciones angulares, velocidades y aceleraciones instantáneas. Los resultados obtenidos muestran una correspondencia directa entre la velocidad angular de entrada y la aceleración lineal del martillo, validando el comportamiento asimétrico característico del retorno rápido. Este diseño demuestra una alternativa funcional, compacta y didáctica para el estudio de la conversión de movimiento rotacional en lineal alternativo, aplicable tanto en entornos académicos como en desarrollos de prototipos mecánicos ligeros.

Palabras clave: mecanismo de retorno rápido de Whitworth; martillo de impacto vertical; palanca ranurada; pasador deslizante; lazo vectorial; cinemática de mecanismos.

Índice

1. Introducción

(falta arreglarlo)

2. Fundamentación teórica

El análisis de mecanismos planos requiere el uso de conceptos fundamentales de cinemática y cinética, entre estos para el análisis del mecanismo se harán uso de:

2.1. Movimiento de plano general

El movimiento de plano general describe los valores de velocidad y aceleración de un punto de un sólido rígido por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\vec{V}_b = \vec{V}_a + \vec{V}_{b/a} = \vec{V}_a + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{b/a}) \tag{1}$$

$$\vec{a}_b = \vec{a}_a + \vec{a}_{b/a} = \vec{a}_a + (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{b/a}) + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{b/a})) \tag{2}$$

Donde:

- $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ representan la velocidad y aceleración angular respectivamente, son iguales a la primera y segunda derivada del angulo de rotacion respecto al tiempo $(\dot{\theta}, \ddot{\theta})$
- $\vec{r}_{b/a}$ representa el vector que une $\vec{r}_a$ con $\vec{r}_b$

2.2. Movimiento plano de una particula relativa a un sistema de referencia en rotacion

Cuando se presentan casos donde el objeto se mueve dentro de un sistema en rotacion (como es en nuestro caso el pasador que se mueve linealmente sobre la barra $O1B$) es necesario usar las siguiente ecuaciones para encontrar la variables cinematicas de un punto p dado:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_p' + \vec{V}_{p/f} \tag{3}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_p' + \vec{a}_{p/f} + a_{cor} \tag{4}$$

Donde:

- $\vec{V_p'}$ y $\vec{a_p'}$ representan las variables cinematicas que posee el cuerpo producto de la rotacion del sistema de referencia, se puede entender como un punto del sistema de referencia que coincide con p en todo momento
- $\vec{V}_{p/f}$ y $\vec{a}_{p/f}$ representan las variables cinematicas del cuerpo relativas al sistema, en nuestro caso al ser un pasador sigue la geometria de la barra $\vec{r}_b$
- $\vec{a}_{cor}$ representa la aceleracion de coreolis, la cual debe ser igual a $2\vec{\Omega} \times \vec{V_{p/f}}$ y es propia del sistema en rotacion

2.3. Método del lazo vectorial

Este método analiza mecanismos a partir de ecuaciones vectoriales que cierran un circuito. Cada eslabón se modela como un vector de posición en un sistema de coordenadas global XY. Con las longitudes conocidas y los ángulos de entrada, se plantea el lazo de cierre para obtener relaciones geométricas entre las posiciones de los eslabones. Luego, dichas relaciones se derivan una y dos veces respecto al tiempo para obtener, respectivamente, las velocidades y las aceleraciones instantáneas[ref:https://hal.science/hal-01715664/document].

En la práctica, el procedimiento consiste en:

- Plantear el cierre vectorial y su proyección en los ejes x y y.
- Resolver la geometría para las incógnitas instantáneas (p. ej., θ, β, y_c).
- Derivar una vez para obtener las ecuaciones de velocidad y una segunda vez para las de aceleración.

2.4. Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rigido

las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rigido me relacionan los vectores de fuerza efectiva con las fuerzas de reaccion del mecanismo:

- $\sum \vec{F} = m\bar{a}$
- $\sum \vec{M}_G = \dot{H}_G$

Donde:

- $\sum \vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas externas aplicadas al cuerpo.
- $\sum \vec{M}_G$ es la suma de los momentos respecto al centro de masa G.
- $\dot{H}_G$ es la derivada temporal del momento angular respecto al centro de masa.
- $\dot{H}_G = \bar{I}\alpha$

Estas ecuaciones permiten analizar el movimiento de cuerpos rígidos sometidos a fuerzas y momentos, relacionando las fuerzas efectivas con las reacciones internas del mecanismo. Son la base para el estudio dinámico de sistemas mecánicos como el mecanismo de martillo presentado en este informe.

3. Fase de Diseño Conceptual

El mecanismo consiste en un sistema de barras articuladas accionado por un motor que produce un movimiento de martilleo. Los componentes principales son:

- **Motor:** Proporciona rotación constante con velocidad angular ω_2 y aceleración angular $\alpha_2 = 0$
- **Barra motriz (O_2A):** De longitud r, conectada al motor en O_2 y al punto A
- **Barra acoplada (O_1B):** De longitud L variable aparente, articulada en O_1 y conectada en punto coincidente con A
- **Sistema de martillo:** Mecanismo articulado con barra de longitud constante K que produce el movimiento de impacto

3.1. Variables del sistema

- $\delta(t) = \omega_2 t$: Ángulo de la barra motriz (entrada del sistema)
- $\alpha(t)$: Ángulo de la barra acoplada (función de δ)
- $L(\delta)$: Distancia variable entre articulaciones
- $\omega_1 = \dot{\alpha}$: Velocidad angular de la barra acoplada
- $X_E(t)$: Posición del martillo
- R, D, K: Parámetros geométricos del mecanismo

3.2. Modelo de prototipo inicial

El proyecto se centra en el diseño y en la construcción de un mecanismo de retorno rápido basado en el mecanismo de Whitworth, modificado específicamente para funcionar como un martillo de forja. El objetivo principal es convertir el movimiento rotacional uniforme del motor eléctrico en un movimiento lineal alternativo con cinemática asimétrica, característica fundamental para que la fase de avance lento y controlado sea efectiva a la hora de transferir energía de impacto de forma eficiente. En la fase de retorno rápido, se busca reducir el tiempo muerto del ciclo, incrementando así la productividad del sistema.

La innovación central radica en una reinterpretación espacial y constructiva del mecanismo clásico. A diferencia de la configuración tradicional, el sistema ha sido reorientado noventa grados, posicionando el plano de movimiento en un eje vertical. Esta modificación permite que el bloque deslizante final actúe directamente como un martillo, aprovechando su carrera lineal para el golpeo. El principio de

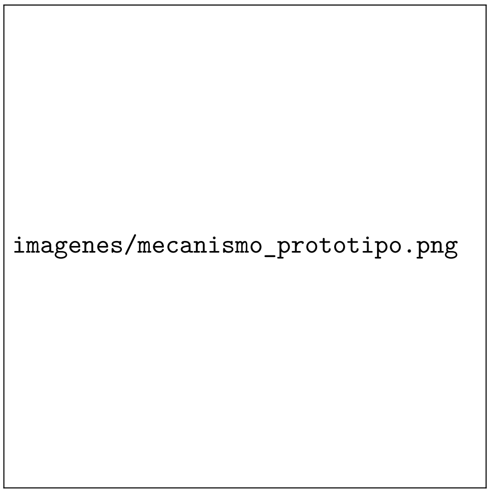

Figura 1: Modelo esquemático del mecanismo de retorno rápido tipo Whitworth modificado.

funcionamiento se basa en la transmisión de movimiento desde una manivela motriz, solidaria al eje del motor en el punto O_2, hacia una palanca oscilante ranurada que pivota en O_1.

Una solución de diseño clave sustituye el rodillo convencional por un tornillo pasante que actúa como un elemento de unión y guía. Este tornillo se desliza dentro de la ranura longitudinal de la palanca, estableciendo un contacto lineal directo que transmite el esfuerzo. Esta simplificación no solo facilita la fabricación y reduce el número de componentes, al eliminar el rodamiento intermedio, sino que también mantiene la esencia del mecanismo de deslizamiento que genera el efecto de retorno rápido.

Finalmente, el movimiento angular oscilante de la palanca ranurada se transmite a través de una biela articulada al bloque deslizante o martillo. Este conjunto completa la transformación cinemática, guiando el martillo en su trayectoria vertical. Como resultado, se obtiene un dispositivo robusto y funcional que sincroniza perfectamente la entrada de rotación continua con la salida de impacto repetitivo.

Cabe destacar que el modelado presentado se encuentra sujeto a posibles modificaciones, ya que aún está pendiente el diseño definitivo de la estructura o soporte del mecanismo. Dicho componente será determinante para definir la disposición final de los ejes, la ubicación del motor y los puntos de anclaje, por lo que es posible que se requieran ajustes dimensionales o constructivos en el modelo actual una vez se integre el sistema de soporte completo.

4. Parámetros y modelo cinemático

Parámetros geométricos y operativos (SI)

Los valores usados en el análisis corresponden al diseño actual del prototipo y se expresan en unidades SI:

$$
\begin{array}{lll}
r = 0{,}070 \text{ m} & d = 0{,}110 \text{ m} & R = 0{,}200 \text{ m} \\
K = 0{,}070 \text{ m} & D = 0{,}00665 \text{ m} & \lambda = 0{,}1093458 \text{ m} \\
g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 & \omega_2 = 4{,}00 \text{ rad/s} & \alpha_2 = 0{,}00 \text{ rad/s}^2
\end{array}
$$

Se asume motor de velocidad angular constante ($\alpha_2 = 0$) y todos los ángulos en radianes. El valor de λ corresponde a la distancia del pivote O_1 al centroide del eslabón O_1B.

4.1. Relación geométrica entre θ y ϕ

Inicialmente para el analisis cinemático es necesario encontrar expresiones que permitan describrir las distancias e inclinaciones de todas las partes del mecanismo que conforman el sistema en funcion de una unica variable, para este fin y por medio de un analisis geometrico es posible establecer la siguiente relacion fundamental entre los ángulos por medio del triángulo formado por las longitudes r, d y L. De esta manera obtenemos:

(ACA VA EL DIAGRAMA!!!!!)

$$L^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos(180^\circ - \phi) \tag{5}$$

Por medio de la propiedad trigonometrica $\cos(180^\circ - \Phi) = -\cos(\phi)$, reducimos la expresion a:

$$L = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos(\phi)} \tag{6}$$

Donde L representara la distancia desde el punto O hasta el punto A. Sabiendo esto y usando la ley de senos es posible obtener la siguiente expresion:

$$\frac{\sin(180^\circ - \Phi)}{L} = \frac{\sin(\Theta)}{r} \tag{7}$$

Usando la propiedad trigonometrica $\sin(180 - \phi) = sin(\phi)$ y despejando r del lado derecho de la ecuacion obtenemos:

$$\sin(\theta) = \frac{\sin(\phi)r}{L} \tag{8}$$

Sustituyendo L en la expresion obtenemos:

$$\boxed{\sin(\Theta) = \frac{r\sin(\Phi)}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos(\Phi)}}} \tag{9}$$

De esta forma se establece una Relacion directa entre el angulo θ y ϕ.

4.2. Velocidades angulares y relativas

Con la geometria del sistema definimos la velocidad en el punto a por medio de las restricciones cinematicas de cada una de las partes a las que pertenece. En primera instancia sabemos que el punto a respecto la barra O_2A tiene velocidad y aceleración angulares, mas no presenta traslacion. Por tanto se puede plantear la siguiente ecuacion de rotacion respecto a un eje fijo:

$$\vec{V_a} = \omega_2 \times \vec{r}, \ \sphericalangle \Phi^\circ$$

De igual manera planteamos al punto a respecto a la barra O_1B, en la cual al generar un movimiento relativo a un sistema en rotacion es posible obtener la siguiente ecuacion vectorial para $\vec{V_a}$:

$$\vec{V_a} = \vec{V_a'} + \vec{V_{a/f}}$$

donde $\vec{V_a'}$ representa la velocidad producto de la rotacion del sistema mientras que $\vec{V_{a/f}}$ representa la velocidad relativa de a en el sistema. (SIGUE EL DIAGRAMA GRANDE CON EL TRIANGULO DE VELOCIDADES)

Analizando el diagrama y por medio del teorema de [INSERTAR TEOREMA] obtenemos:

$$V_{a/f} = (\omega_2 \cdot r \cdot \sin(\phi - \theta)) \tag{10}$$

Usando [TEOREMA 2] tambien obtenemos la siguiente expresion para la velocidad V_a':

$$V_a' = \cos(\Phi - \Theta)\, V_a \tag{11}$$

Finalmente a partir de esta ultima relacion y remplazando con sus valores producto de su rotacion respecto a un eje fijo obtenemos:

$$\omega_1 L = [\cos(\Phi - \Theta)]\, \omega_2 r$$

Despejando L del lado izquierdo de la ecuacion obtenemos la siguiente expresion para la velocidad angular del eslabón (ω_1):

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\omega_2 r}{L}\cos(\Phi - \Theta)} \tag{12}$$

4.3. Aceleraciones angulares y relativas

De manera similar a en el analisis de velocidades tomamos a a respecto a la barra O_2A tiene velocidad y aceleración angular y no presenta traslación, debido a esto aplicamos nuevamente rotación respecto a eje fijo y obtenemos la siguiente expresion vectorial:

$$\vec{a}_a = (\alpha_2 \times \vec{r}),\ \nwarrow\!\sphericalangle\,\Phi^\circ + (\omega_2 \times (\omega_2 \times \vec{r})),\ \swarrow\!\triangledown\,\Phi^\circ$$

Donde el primer termino representa la aceleracion tangencial de a mientras el segundo representa su aceleracion normal. Hecho esto ahora consideramos a como parte de la barra O_1B, obteniendo la sigueinte relacion:

$$\vec{a}_a = \vec{a}'_a + \vec{a}_{a/f} + \vec{a}_{cor}$$

Donde:

- $$\vec{a}'_a = (\alpha_1 \times \vec{L}),\ \swarrow\!\triangledown\,\theta^\circ + (\omega_1 \times (\omega_1 \times \vec{L})),\ \nwarrow\!\sphericalangle\,\theta^\circ$$

  $\vec{a}'_a$ representa la aceleracion producto de la rotacion del sistema

- $$\vec{a}_{cor} = (2\omega_1 \times \vec{V}_{a/f}),\ \triangledown\,\theta^\circ$$

  $\vec{a}_{cor}$ representa la aceleracion de coriolis, un termino adicional que surge en sistemas no inerciales de este tipo

- $$a_{a/f} =\ \swarrow\!\triangledown\,\theta^\circ$$

  $a_{a/f}$ representa la aceleracion del punto a relativo al sistema en rotacion

Igualando ambas ecuaciones vectoriales para encontrar las incognitas requeridas proyectamos todos los vectores respecto a sus componentes rectangulares, obteniendo las siguientes ecuaciones para X e Y:

$$(a'_a)_t \sin\theta + (a_{a/f})\cos\theta = \omega_2^2 r\cos(\Phi) + \alpha_2 r\sin(\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f}\sin\theta - \omega_1^2 L\cos\theta$$

$$(a'_a)_t \cos\theta - (a_{a/f})\sin\theta = \alpha_2 r\cos(\Phi) - \omega_2^2 r\sin(\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f}\cos\theta + \omega_1^2 L\sin\theta$$

Solucionando el sistema para α_1 y $a_{a/f}$:

$$\alpha_1 = \frac{\omega_2^2 r\sin(\theta - \Phi) + \alpha_2 r\cos(\theta - \Phi) + 2\omega_1 V_{a/f}}{L} \tag{13}$$

$$a_{a/f} = \omega_2^2 r\cos(\Phi - \theta) + \alpha_2 r\sin(\Phi - \theta) - \omega_1^2 L \tag{14}$$

4.4. Lazo vectorial del martillo: posición, velocidad y aceleración

Planteando el lazo vectorial para el mecanismo, se tiene:
Al proyectar en los ejes x y y:

$$X : D - R\cos\theta + K\sin\beta = 0$$
$$Y : y_c + K\cos\beta - R\sin\theta = 0$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumando:

$$K^2 = (R\cos\theta - D)^2 + (R\sin\theta - y_c)^2$$

4.4.1. Derivación de la velocidad

Derivando ambos lados respecto al tiempo. Donde:

- K es constante
- $\frac{d\theta}{dt} = \omega_1$
- y_c es variable
- R es constante
- D es constante

$$\frac{d(K^2)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(R\cos(\theta) - D)^2 + (R\sin(\theta) - y_c)^2\right] \tag{15}$$

Como K es constante:

$$0 = \frac{d}{dt}\left[(R\cos(\theta) - D)^2 + (R\sin(\theta) - y_c)^2\right] \tag{16}$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$0 = 2(R\cos(\theta) - D)\frac{d}{dt}(R\cos(\theta) - D) + 2(R\sin(\theta) - y_c)\frac{d}{dt}(R\sin(\theta) - y_c) \tag{17}$$

Calculando las derivadas internas:

$$\frac{d}{dt}(R\cos(\theta) - D) = -R\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} = -R\sin(\theta)\omega_1 \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}(R\sin(\theta) - y_c) = R\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt} - \dot{y}_c = R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c \tag{19}$$

Sustituyendo:

$$0 = 2(R\cos(\theta) - D)(-R\sin(\theta)\omega_1) + 2(R\sin(\theta) - y_c)(R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c) \tag{20}$$

Dividiendo entre 2:

$$0 = -(R\cos(\theta) - D)R\sin(\theta)\omega_1 + (R\sin(\theta) - y_c)(R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c) \tag{21}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} 0 = &-R^2\cos(\theta)\sin(\theta)\omega_1 + DR\sin(\theta)\omega_1 \\ &+ R^2\sin(\theta)\cos(\theta)\omega_1 - R\sin(\theta)\dot{y}_c \\ &- y_c R\cos(\theta)\omega_1 + y_c\dot{y}_c \end{aligned} \tag{22}$$

Los términos $R^2\cos(\theta)\sin(\theta)\omega_1$ se cancelan, quedando:

$$0 = DR\sin(\theta)\omega_1 - R\sin(\theta)\dot{y}_c - y_c R\cos(\theta)\omega_1 + y_c\dot{y}_c \tag{23}$$

Reorganizando:

$$\dot{y}_c(R\sin(\theta) - y_c) = R\omega_1(D\sin(\theta) - y_c\cos(\theta)) \tag{24}$$

4.4.2. Resultado para la velocidad

Dividiendo ambos lados por $(R\sin(\theta) - y_c)$:

$$\boxed{\dot{y}_c = \frac{R\omega_1(D\sin(\theta) - y_c\cos(\theta))}{R\sin(\theta) - y_c}} \tag{25}$$

Esta expresión es válida siempre que $R\sin(\theta) \neq y_c$ (es decir, que el denominador no sea cero).

4.4.3. Aceleración mediante lazo vectorial

Derivando nuevamente la ecuación de velocidad para obtener la aceleración:

$$\ddot{y}_c = R\,\frac{\left[\dot{\omega}_1 A - \omega_1^2 B - \omega_1 \dot{y}_c \cos\theta\right] D_{en} - \omega_1 A(\dot{y}_c + R\omega_1\cos\theta)}{D_{en}^2} \tag{26}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= D\sin\theta - y_c\cos\theta, \\ B &= D\cos\theta + y_c\sin\theta, \\ D_{en} &= R\sin\theta - y_c. \end{aligned}$$

Nota: $\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta} = \alpha_1$ es la aceleración angular.

4.4.4. Forma expandida de la aceleración

Expandiendo la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_c = &\frac{R\alpha_1(D\sin\theta - y_c\cos\theta)(R\sin\theta - y_c)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \\ &- \frac{R\omega_1^2(D\cos\theta + y_c\sin\theta)(R\sin\theta - y_c)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \\ &+ \frac{R\omega_1\dot{y}_c[R\sin\theta\cos\theta - y_c\cos\theta - D\sin\theta + y_c\cos\theta]}{(R\sin\theta - y_c)^2} \end{aligned} \tag{27}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_c = &\frac{R\alpha_1(D\sin\theta - y_c\cos\theta)(R\sin\theta - y_c)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \\ &- \frac{R\omega_1^2(D\cos\theta + y_c\sin\theta)(R\sin\theta - y_c)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \\ &+ \frac{R\omega_1\dot{y}_c\big(R\sin\theta\cos\theta - D\sin\theta\big)}{(R\sin\theta - y_c)^2} \end{aligned} \tag{28}$$

5. Cinemática del eslabón BC

5.1. Ángulo β del eslabón K

Antes de obtener las variables cineticas del mecanismo es necesario preparar el terreno por medio de algunas relaciones cinematicas adicionales las cuales no fueron necesarias con anterioridad para encontrar los puntos de inetres.

5.1.1. Inclinacion eslabón K

Para encontrar el valor del angulo β el cual describe la inclinacion del eslabón respecto a la vertical se hace uso de la proyeccion en X desarrollada por medio del lazo vectorial, la cual al despejar β nos permite obtener la siguiente expresion:

$$\sin\beta = \frac{R\cos\theta - D}{K}, \qquad \beta = \arcsin\left(\frac{R\cos\theta - D}{K}\right) \tag{29}$$

5.1.2. Ecuacion vectorial de velocidad en el punto B

Usando movimiento del plano general podemos expresar la velocidad en el punto C por medio de la siguiente expresion:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} \tag{30}$$

En la cual:

- $\vec{v}_B = \omega_1\, R \measuredangle\, \theta$, representa la velocidad del punto B y es producto a la rotacion del eslabón O_1B

- $\vec{v}_{C/B} = \omega_3 K \measuredangle \beta$, representa la velocidad relativa tangecial del punto C respecto a B y es producto de la rotacion del eslabón BC
- $\vec{v}_C = \dot{y}_c$ (dirección vertical $\downarrow$), representa la velocidad del martillo, obtenida mediante el metodo de lazo vectorial

Tomando en cuenta las inclinaciones proyectamos los vectores en el eje horizontal, obtienendo asi la siguiente relacion para ω_3 y ω_1:

$$0 = -\omega_1 R \sin\theta - \omega_3 K \cos\beta \tag{31}$$

Despejando ω_3 de la ecuacion anterior obtenemos:

$$\boxed{\omega_3 = -\frac{\omega_1 R \sin\theta}{K \cos\beta}} \tag{32}$$

5.1.3. Ecuacion vectorial de aceleración en el punto B

De manera similar a en el caso de las velocidad se tiene un movimiento de plano general, el cual nos permite expresar la aceleracion en el punto C por medio de la siguiente expresion:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} \tag{33}$$

En el cual:

- $\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_t + (\vec{a}_B)_n$:
  - $(\vec{a}_B)_t = \alpha_1 \cdot R$, $\measuredangle\ \theta$, Representa la aceleracion tangecial del punto B debido a la rotacion fija en O_1
  - $(\vec{a}_B)_n = \omega_1^2 \cdot R \measuredangle\ \theta$, Representa la aceleracion normal producto de la rotacion respecto a O_1. Apunta directamente hacia el eje de rotacion
- $\vec{a}_{C/B} = (\vec{a}_{C/B})_t + (\vec{a}_{C/B})_n$ en donde:
  - $(\vec{a}_{C/B})_t = \alpha_3 \cdot K \measuredangle \beta$ Representa la aceleracion tangecial relativa del punto C respecto a B, es producto de la rotacion del eslabon BC
  - $(\vec{a}_{C/B})_n = \omega_3^2 \cdot K \measuredangle \beta$ Representa la aceleracion normal relativa del punto C respecto a B, apunta directamente hacia el eje de rotacion del eslabon BC
- $\vec{a}_C = \ddot{y}_c \downarrow$ Representa la aceleracion del martillo, obtenida mediante el metodo de lazo vectorial

Con esta ecuacion y por medio de las proyecciones en el eje horizontal de cada vector encontramos la siguiente relacion que describe a α_3 en funcion de α_1 y ω_1:

$$0 = -\alpha_1 R \sin\theta + \omega_1^2 R \cos\theta + \alpha_3 K \cos\beta - \omega_3^2 K \sin\beta \tag{34}$$

Despejando α_3:

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{\omega_1^2 R \cos\theta + \alpha_1 R \sin\theta - \omega_3^2 K \sin\beta}{K \cos\beta}} \tag{35}$$

6. Aceleraciones centroidales

Para el análisis cinético se requieren las aceleraciones de los centroides. Se asume cada eslabón como cuerpo rígido homogéneo (centroide en su centro geométrico salvo correcciones de masa).

6.1. Eslabón $O_1 B$

Centroide a distancia λ de O_1. Aceleraciones tangencial y normal:

$$\bar{a}_{O_{1x}} = -\left(\alpha_1 \lambda \sin\theta + \omega_1^2 \lambda \cos\theta\right) \tag{36}$$

$$\bar{a}_{O_{1y}} = \alpha_1 \lambda \cos\theta - \omega_1^2 \lambda \sin\theta \tag{37}$$

6.2. Eslabón O_2A

Centroide a $r/2$ de O_2:

$$\bar{a}_{O_{2x}} = -\left(\alpha_2 \frac{r}{2} \sin\phi + \omega_2^2 \frac{r}{2} \cos\phi\right) \tag{38}$$

$$\bar{a}_{O_{2y}} = \alpha_2 \frac{r}{2} \cos\phi - \omega_2^2 \frac{r}{2} \sin\phi \tag{39}$$

6.3. Martillo C

Traslación pura vertical:

$$\bar{a}_C = \ddot{y}_c \tag{40}$$

6.4. Eslabón BC

Centroide a $K/2$ de B con movimiento plano general:

$$\bar{a}_{BC,x} = -\frac{K}{2}\left(\alpha_3 \cos\beta + \omega_3^2 \sin\beta\right) \tag{41}$$

$$\bar{a}_{BC,y} = -\ddot{y}_c + \frac{K}{2}\left(\alpha_3 \sin\beta - \omega_3^2 \cos\beta\right) \tag{42}$$

6.5. Momentos de inercia centroidales de los eslabones

En el análisis cinético se requieren los momentos de inercia de los eslabones en el plano del mecanismo (eje z saliendo del plano). Puesto que los eslabones se fabrican como prismas rectangulares (longitud L y ancho en el plano b), el momento de inercia respecto al centroide G alrededor del eje z es:

$$\boxed{I_G = \frac{1}{12}\, m\,(L^2 + b^2)} \tag{43}$$

Aplicando a cada eslabón del mecanismo:

Eslabón O_1B (longitud R, ancho b_R, masa m_R). Momento de inercia centroidal y respecto al centro de area sin la ranura O_1:

$$I_{o_1} = \boxed{\frac{1}{12}\, m_R\,(R^2 + b_R^2 - R'^2 - b_R'^2)} \tag{44}$$

Con este valor es posible encontrar el momento de inercia centroidal de masa usando el teorema de ejes paralelos

$$\bar{I}_{o_1} = \boxed{I_{o_1} - m(\delta)^2} \tag{45}$$

Donde: R es la longitud total de la barra O_1B, δ es la distancia del centro geometrico sin ranura al centro de masa, b_R su ancho en el plano; R' es la longitud de la ranura a lo largo de la barra y b_R' el ancho de esa ranura; m_R es la masa efectiva del eslabón (masa de la barra menos el material retirado por la ranura).
Donde: R es la longitud total de la barra O_1B, b_R su ancho en el plano; R' es la longitud de la ranura a lo largo de la barra y b_R' el ancho de esa ranura; m_R es la masa efectiva del eslabón (masa de la barra menos el material retirado por la ranura).

Eslabón O_2A (longitud r, ancho b_r, masa m_r). Momento de inercia centroidal y respecto al pivote O_2:

$$\bar{I}_r = \boxed{\frac{1}{12}\, m_r\,(r^2 + b_r^2)} \tag{46}$$

Eslabón BC (longitud K, ancho b_K, masa m_K). Cuando el balance de momentos se toma alrededor del centroide del eslabón BC, como en la ecuación *Z-BC* del informe, se requiere el momento de inercia centroidal:

$$\bar{I}_K = \boxed{\frac{1}{12}\, m_K\,(K^2 + b_K^2)} \tag{47}$$

6.6. Momentos de inercia

Para barras prismáticas de longitud L y ancho en el plano b el momento de inercia centroidal (eje z perpendicular al plano) es $I_G = \frac{1}{12} m(L^2 + b^2)$. Se aplican correcciones por ranura en O_1B usando diferencia de áreas y teorema de ejes paralelos.

7. Análisis cinético

Con las variables cinemáticas se plantean ecuaciones de cuerpo rígido para cada eslabón (direcciones X, Y y momentos alrededor de pivotes o centroides). Se emplean las fuerzas: reacciones O_{1x}, O_{1y}, O_{2x}, O_{2y}, fuerza de pasador A, reacciones en B (B_x, B_y), fuerza vertical en martillo C y par motor τ.

7.1. Ecuaciones de movimiento martillo C

En el martillo C solo puede moverse verticalmente, ademas de que esta solo se mueve en traslacion y por tanto su aceleracion angular es 0.

1. X - C:
$$C_x + N = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = -N \tag{48}$$
2. Z - C:
$$-xC_x - yf_r = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x - Y(\mu_K)) = 0 \tag{49}$$
esta relacion debido a que todos los demas valores no pueden ser 0 nos indica que $N = C_x = 0$
3. Y - C:
$$W_c - C = m_c \bar{a}_c \quad \Rightarrow \quad C = m_c(g - \bar{a}_c) \tag{50}$$

7.2. Ecuaciones de movimiento del eslabon BC

El eslabon BC presenta movimiento de plano general y por tanto tiene aceleracion angular diferente de 0 y aceleracion lineal tanto vertical como horizontal.

1. X - BC:
$$B_x = m_{BC} \cdot (\bar{a}_{BC})_x \tag{51}$$
2. Y - BC:
$$B_y - W_R - C = m_{BC} \cdot (\bar{a}_{BC})_y \quad \Rightarrow \quad B_y = m_{BC}(g + (\bar{a}_{BC})_y) + C \tag{52}$$
3. Z - BC:
$$\frac{K}{2}(B_y \sin\beta - B_x \cos\beta + C\sin(\beta)) = \bar{I_{BC}} \cdot \alpha_3 \tag{53}$$

7.3. Ecuaciones de movimiento eslabon O1-B

El eslabon O1-B no presenta restriccion en la direccion x e y, ademas que su aceleracion angular es diferente de 0. Es importante resaltar que el punto a debido a ser la reaccion de la ranura se sabe que es normal a la barra O1-B y λ representa la distancia de o1 al centroide

1. X - O_1:
$$O_{1x} - A\sin\theta - B_x = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_x \quad \Rightarrow \quad O_{1x} - A\sin\theta = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_x + B_x \tag{54}$$
2. Y - O_1:
$$O_{1y} + A\cos\theta - B_y - W_{o_1} = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_y \quad \Rightarrow \quad O_{1y} + A\cos\theta = m_{o_1}(g + \bar{a}_{o_1 y}) + B_y \tag{55}$$
3. Z - O_1:
$$(L - \lambda)A + \lambda(-B_y\cos\theta + B_x\sin\theta - O_{1y}\cos\theta + O_{1x}\sin\theta) = \bar{I_{o_1}} \cdot \alpha_1 \tag{56}$$

7.4. Ecuaciones de movimiento eslabon O2-A

La barra O2-A no presenta restriccion en la direccion x e y, ademas que su aceleracion angular es diferente de 0 y se le es impreso un par por parte del motor (τ).

1. X - O_2:
$$O_{2x} + A\sin\phi = m_r(\bar{a}_{o_2})_x \tag{57}$$
2. Y - O_2:
$$O_{2y} - A\cos\phi - W_r = m_r(\bar{a}_{o_2})_y \quad \Rightarrow \quad O_{2y} - A\cos\phi = m_r((\bar{a}_{o_2})_y + g) \tag{58}$$
3. Z - O_2:
$$\tau - \frac{r}{2}\cos(\phi - \theta) + \frac{r}{2}(-O_{2y}\cos\phi + O_{2x}\sin\phi) = \bar{I_{o_2}} \cdot \alpha_2 \tag{59}$$

7.5. Sistema reducido para resolución secuencial

Dada una fuerza requerida C en el martillo se procede: (i) calcular B_x, B_y usando las aceleraciones centroidales de BC; (ii) resolver O_{1x}, O_{1y}, A mediante el sistema lineal:

$$\begin{aligned}
O_{1x} - A\sin\theta &= m_{o1}\,\bar{a}_{O_{1x}} + B_x, \\
O_{1y} + A\cos\theta &= m_{o1}(\bar{a}_{O_{1y}} + g) + B_y, \\
\lambda\sin\theta\,O_{1x} - \lambda\cos\theta\,O_{1y} + (L-\lambda)A &= \bar{I}_{o1}\,\alpha_1 - \lambda(B_x\sin\theta - B_y\cos\theta).
\end{aligned}$$

Finalmente el par motor instantáneo:

$$au = \bar{I}_{o2}\,\alpha_2 + rA\cos(\phi - \theta) + \frac{r}{2}m_{o2}g\cos\phi.$$

7.6. Potencia y eficiencia

La potencia de entrada y salida se estiman como:

$$P_{in} = \tau\,\omega_2, \qquad P_{out} = C\,\dot{y}_c, \qquad \eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \times 100\,\%.$$

8. Notas finales

La resolución numérica se implementa en Python generando curvas de $\theta(t)$, $\omega_1(t)$, $\dot{y}_c(t)$, $\ddot{y}_c(t)$, $\beta(t)$, $\omega_3(t)$, $\alpha_3(t)$, fuerzas y par $\tau(t)$, además de una búsqueda del parámetro D que maximiza la carrera evitando singularidades (denominadores cercanos a cero en la expresión de $\dot{y}_c$). Esto garantiza un régimen estable y aprovechamiento máximo del desplazamiento del martillo.

9. Fase de Diseño Detallado

10. Análisis de los resultados teóricos

11. Análisis sobre el funcionamiento del prototipo

12. Conclusiones y recomendaciones

Referencias

[1] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr., William E. Clausen, ”Dinámica para ingeniería”, McGraw-Hill, última edición disponible.

[2] Autor desconocido, “Vector loop approach for mechanism analysis,” HAL Open Science, 2018. Disponible en: https://hal.science/hal-01715664/document

[3] STIX Fonts Project, “STIX Two Math,” 2020. Disponible en: https://stixfonts.org