Cálculos del Mecanismo de Retorno Rápido

Índice

1. calculos organizados

1.1. Modelo cinemático

1.1.1. Relación entre θ y ϕ

Inicialmente para el analisis cinemático es necesario encontrar expresiones que permitan describrir las distancias e inclinaciones de todas las partes del mecanismo que conforman el sistema en funcion de una unica variable, para este fin y por medio de un analisis geometrico es posible establecer la siguiente relacion fundamental entre los ángulos por medio del triángulo formado por las longitudes r, d y L. De esta manera obtenemos:

(ACA VA EL DIAGRAMA!!!!!)

$$L^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos(180° - \phi) \tag{1}$$

Por medio de la propiedad trigonometrica $\cos(180° - \Phi) = -\cos(\phi)$, reducimos la expresion a:

$$L = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos(\phi)} \tag{2}$$

Donde L representara la distancia desde el punto O hasta el punto A. Sabiendo esto y usando la ley de senos es posible obtener la siguiente expresion:

$$\frac{\sin(180° - \Phi)}{L} = \frac{\sin(\Theta)}{r} \tag{3}$$

Usando la propiedad trigonometrica $\sin(180 - \phi) = sin(\phi)$ y despejando r del lado derecho de la ecuacion obtenemos:

$$\sin(\theta) = \frac{\sin(\phi)r}{L} \tag{4}$$

Sustituyendo L en la expresion obtenemos:

$$\boxed{\sin(\Theta) = \frac{r\sin(\Phi)}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos(\Phi)}}} \tag{5}$$

De esta forma se establece una Relacion directa entre el angulo θ y ϕ.

1.1.2. Análisis de velocidades

Con la geometria del sistema definimos la velocidad en el punto a por medio de las restricciones cinematicas de cada una de las partes a las que pertenece. En primera instancia sabemos que el punto a respecto la barra O_2A tiene velocidad y aceleración angulares, mas no presenta traslacion. Por tanto se puede plantear la siguiente ecuacion de rotacion respecto a un eje fijo:

$$\vec{V_a} = \omega_2 \times \vec{r}, \ \sphericalangle \Phi°$$

De igual manera planteamos al punto a respecto a la barra O_1B, en la cual al generar un movimiento relativo a un sistema en rotacion es posible obtener la siguiente ecuacion vectorial para $\vec{V_a}$:

$$\vec{V_a} = \vec{V_a'} + \vec{V_{a/f}}$$

donde $\vec{V_a'}$ representa la velocidad producto de la rotacion del sistema mientras que $\vec{V_{a/f}}$ representa la velocidad relativa de a en el sistema. (SIGUE EL DIAGRAMA GRANDE CON EL TRIANGULO DE VELOCIDADES)

Analizando el diagrama y por medio del teorema de [INSERTAR TEOREMA] obtenemos:

$$V_{a/f} = (\omega_2 \cdot r \cdot \sin(\phi - \theta)) \tag{6}$$

Usando [TEOREMA 2] tambien obtenemos la siguiente expresion para la velocidad V_a':

$$V_a' = \cos(\Phi - \Theta)\, V_a \tag{7}$$

Finalmente a partir de esta ultima relacion y remplazando con sus valores producto de su rotacion respecto a un eje fijo obtenemos:

$$\omega_1 L = [\cos(\Phi - \Theta)]\, \omega_2 r$$

Despejando L del lado izquierdo de la ecuacion obtenemos la siguiente expresion para la velocidad angular del eslabón (ω_1):

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\omega_2 r}{L} \cos(\Phi - \Theta)} \tag{8}$$

1.1.3. Análisis de aceleraciones

De manera similar a en el analisis de velocidades tomamos a a respecto a la barra O_2A tiene velocidad y aceleración angular y no presenta traslación, debido a esto aplicamos nuevamente rotación respecto a eje fijo y obtenemos la siguiente expresion vectorial:

$$\vec{a}_a = (\alpha_2 \times \vec{r}),\ \nwarrow\!\triangleleft\, \Phi^\circ + (\omega_2 \times (\omega_2 \times \vec{r})),\ \swarrow\!\triangledown\, \Phi^\circ$$

Donde el primer termino representa la aceleracion tangencial de a mientras el segundo representa su aceleracion normal. Hecho esto ahora consideramos a como parte de la barra O_1B, obteniendo la sigueinte relacion:

$$\vec{a}_a = \vec{a}'_a + \vec{a}_{a/f} + \vec{a}_{cor}$$

Donde:

- $$\vec{a}'_a = (\alpha_1 \times \vec{L}),\ \swarrow\!\triangledown\, \theta^\circ + (\omega_1 \times (\omega_1 \times \vec{L})),\ \nwarrow\!\triangleleft\, \theta^\circ$$

  $\vec{a}'_a$ representa la aceleracion producto de la rotacion del sistema

- $$\vec{a}_{cor} = (2\omega_1 \times \vec{V}_{a/f}),\ \forall\, \theta^\circ$$

  $\vec{a}_{cor}$ representa la aceleracion de coriolis, un termino adicional que surge en sistemas no inerciales de este tipo

- $$a_{a/f} = \ \swarrow\!\triangledown\, \theta^\circ$$

  $a_{a/f}$ representa la aceleracion del punto a relativo al sistema en rotacion

Igualando ambas ecuaciones vectoriales para encontrar las incognitas requeridas proyectamos todos los vectores respecto a sus componentes rectangulares, obteniendo las siguientes ecuaciones para X e Y:

$$(a'_a)_t \sin\theta + (a_{a/f}) \cos\theta = \omega_2^2 r \cos(\Phi) + \alpha_2 r \sin(\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f} \sin\theta - \omega_1^2 L \cos\theta$$

$$(a'_a)_t \cos\theta - (a_{a/f}) \sin\theta = \alpha_2 r \cos(\Phi) - \omega_2^2 r \sin(\Phi) + 2\omega_1 V_{a/f} \cos\theta + \omega_1^2 L \sin\theta$$

Solucionando el sistema para α_1 y $a_{a/f}$:

$$\alpha_1 = \frac{\omega_2^2 r \sin(\theta - \Phi) + \alpha_2 r \cos(\theta - \Phi) + 2\omega_1 V_{a/f}}{L} \tag{9}$$

$$a_{a/f} = \omega_2^2 r \cos(\Phi - \theta) + \alpha_2 r \sin(\Phi - \theta) - \omega_1^2 L \tag{10}$$

2. Lazo vectorial para obtener velocidad y aceleración del martillo

Planteando el lazo vectorial para el mecanismo, se tiene:
[diagrama del lazo]
Al proyectar en los ejes x y y:

$$X : D - R\cos\theta + K\sin\beta = 0$$
$$Y : y_c + K\cos\beta - R\sin\theta = 0$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumandolas:

$$K^2 = (R\cos\theta - D)^2 + (R\sin\theta - y_c)^2$$

2.1. Derivación de la velocidad

Derivando ambos lados respecto al tiempo. Donde:

- K es constante
- $\frac{d\theta}{dt} = \omega_1$
- y_c es variable
- R es constante
- D es constante

$$\frac{d(K^2)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(R\cos(\theta) - D)^2 + (R\sin(\theta) - y_c)^2\right] \tag{11}$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$0 = 2(R\cos(\theta) - D)\frac{d}{dt}(R\cos(\theta) - D) + 2(R\sin(\theta) - y_c)\frac{d}{dt}(R\sin(\theta) - y_c) \tag{12}$$

Calculando las derivadas internas:

$$\frac{d}{dt}(R\cos(\theta) - D) = -R\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} = -R\sin(\theta)\omega_1 \tag{13}$$
$$\frac{d}{dt}(R\sin(\theta) - y_c) = R\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt} - \dot{y}_c = R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c \tag{14}$$

Sustituyendo:

$$0 = 2(R\cos(\theta) - D)(-R\sin(\theta)\omega_1) + 2(R\sin(\theta) - y_c)(R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c) \tag{15}$$

Dividiendo entre 2:

$$0 = -(R\cos(\theta) - D)R\sin(\theta)\omega_1 + (R\sin(\theta) - y_c)(R\cos(\theta)\omega_1 - \dot{y}_c) \tag{16}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} 0 = &-R^2\cos(\theta)\sin(\theta)\omega_1 + DR\sin(\theta)\omega_1 \\ &+ R^2\sin(\theta)\cos(\theta)\omega_1 - R\sin(\theta)\dot{y}_c \\ &- y_c R\cos(\theta)\omega_1 + y_c\dot{y}_c \end{aligned} \tag{17}$$

Los términos $R^2\cos(\theta)\sin(\theta)\omega_1$ se cancelan, quedando:

$$0 = DR\sin(\theta)\omega_1 - R\sin(\theta)\dot{y}_c - y_c R\cos(\theta)\omega_1 + y_c\dot{y}_c \tag{18}$$

Reorganizando:

$$\dot{y}_c(R\sin(\theta) - y_c) = R\omega_1(D\sin(\theta) - y_c\cos(\theta)) \tag{19}$$

2.2. Resultado para la velocidad

Dividiendo ambos lados por $(R\sin(\theta) - y_c)$:

$$\boxed{\dot{y}_c = \frac{R\omega_1(D\sin(\theta) - y_c\cos(\theta))}{R\sin(\theta) - y_c}} \tag{20}$$

Esta expresión es válida siempre que $R\sin(\theta) \neq y_c$ (es decir, que el denominador no sea cero).

2.3. Aceleración mediante lazo vectorial

Derivando nuevamente la ecuación de velocidad para obtener la aceleración:

$$\ddot{y}_c = R\,\frac{\left[\dot{\omega}_1 A - \omega_1^2 B - \omega_1 \dot{y}_c \cos\theta\right] D_{en} - \omega_1 A(\dot{y}_c + R\omega_1\cos\theta)}{D_{en}^2} \tag{21}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= D\sin\theta - y_c\cos\theta, \\ B &= D\cos\theta + y_c\sin\theta, \\ D_{en} &= R\sin\theta - y_c. \end{aligned}$$

Nota: $\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta} = \alpha_1$ es la aceleración angular.

3. Cálculo de ω_3 y α_3

Este apartado resume cómo calcular primero la velocidad angular ω_3 y luego la aceleración angular α_3 del eslabón K (ángulo β), a partir del giro de la manivela R (ángulo θ) con ω_1 y α_1.

3.1. Geometría

De la geometría del mecanismo:

$$\sin\beta = \frac{R\cos\theta - D}{K}, \qquad \beta = \arcsin\left(\frac{R\cos\theta - D}{K}\right) \tag{22}$$

3.2. Velocidades

3.2.1. Descomposición vectorial

La velocidad del punto C se puede descomponer como:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} \tag{23}$$

donde:

- $\vec{v}_B = \omega_1\, R \measuredangle\, \theta$
- $\vec{v}_{C/B} = \omega_3\, K \measuredangle\, \beta$
- $\vec{v}_C = \dot{y}_c \downarrow$

[diagrama velocidades]

3.2.2. Proyección en eje horizontal

Proyectando en el eje horizontal:

$$0 = -\omega_1\, R\, \sin\theta - \omega_3\, K\, \cos\beta \tag{24}$$

Despejando ω_3:

$$\boxed{\omega_3 = -\frac{\omega_1\, R\, \sin\theta}{K\, \cos\beta}} \tag{25}$$

3.3. Aceleraciones

3.3.1. Descomposición vectorial

La aceleración del punto C se puede descomponer como:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} \tag{26}$$

donde:

- $\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_t + (\vec{a}_B)_n$ con:
  - $(\vec{a}_B)_t = \alpha_1 \cdot R, \measuredangle\ \theta$
  - $(\vec{a}_B)_n = \omega_1^2 \cdot R \measuredangle\ \theta$
- $\vec{a}_{C/B} = (\vec{a}_{C/B})_t + (\vec{a}_{C/B})_n$ con:
  - $(\vec{a}_{C/B})_t = \alpha_3 \cdot K \measuredangle\ \beta$
  - $(\vec{a}_{C/B})_n = \omega_3^2 \cdot K \measuredangle\ \beta$
- $\vec{a}_C = \ddot{y}_c \downarrow$

3.3.2. Proyección en eje horizontal

Proyectando en el eje horizontal:

$$0 = -\alpha_1 R \sin\theta + \omega_1^2 R \cos\theta + \alpha_3 K \cos\beta - \omega_3^2 K \sin\beta \tag{27}$$

Despejando α_3:

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{\omega_1^2 R \cos\theta + \alpha_1 R \sin\theta - \omega_3^2 K \sin\beta}{K \cos\beta}} \tag{28}$$

4. Análisis Cinético

4.1. Ecuaciones de movimiento

1. Y - C:
$$W_c - C = m_c \bar{a}_c \quad \Rightarrow \quad C = m_c(g - \bar{a}_c) \tag{29}$$
2. X - BC:
$$B_x = m_{BC} \cdot (\bar{a}_{BC})_x \tag{30}$$
3. Y - BC:
$$B_y - W_R - C = m_{BC} \cdot (\bar{a}_{BC})_y \quad \Rightarrow \quad B_y = m_{BC}(g + (\bar{a}_{BC})_y) + C \tag{31}$$
4. Z - BC:
$$\frac{K}{2}(B_y \sin\beta - B_x \cos\beta + C\sin(\beta)) = \bar{I}_{BC} \cdot \alpha_3 \tag{32}$$
5. X - O_1:
$$O_{1x} + A_x - B_x = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_x \quad \Rightarrow \quad O_{1x} + A_x = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_x + B_x \tag{33}$$
6. Y - O_1:
$$O_{1y} + A_y - B_y = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_y \quad \Rightarrow \quad (O_1)_y + A_y = m_{o_1}(\bar{a}_{o_1})_y + B_y \tag{34}$$
7. Z - O_1:
$$\left(\frac{R}{2} - L\right)(A_x \sin\theta - A_y \cos\theta) - \frac{R}{2}(B_y \cos\theta + A\cos\theta - B_x \sin\theta - A_x \sin\theta) = \bar{I}_{o_1} \cdot \alpha_1 \tag{35}$$
8. X - O_2:
$$(O_2)_x - A_x = m_r(\bar{a}_{o_2})_x \tag{36}$$
9. Y - O_2:
$$(O_2)_y - A_y - W_r = m_r(\bar{a}_{o_2})_y \tag{37}$$
10. Z - O_2:
$$\frac{r}{2} \cdot (A_x \sin\phi + (o_2)_x \sin\phi - A_y \cos\phi - (o_2)_y \cos\phi) = \bar{I}_{o_2} \cdot \alpha_2 \tag{38}$$

4.2. Aceleraciones Centroidales

4.2.1. Eslabón $O_1 - B$

$$\bar{a}_{O_1} = \alpha_1 \frac{R}{2}, \measuredangle \theta^\circ \quad + \omega_1^2 \frac{R}{2}, \measuredangle \theta^\circ \tag{39}$$

$$\bar{a}_{O_{1x}} = -\left(\alpha_1 \frac{R}{2} \sin\theta + \omega_1^2 \frac{R}{2} \cos\theta\right) \tag{40}$$

$$\bar{a}_{O_{1y}} = \alpha_1 \frac{R}{2} \cos\theta - \omega_1^2 \frac{R}{2} \sin\theta \tag{41}$$

4.2.2. Eslabón O_2

$$\bar{a}_{O_2} = \alpha_1 \frac{r}{2}, \measuredangle \theta^\circ \quad + \omega_1^2 \frac{r}{2}, \measuredangle \theta^\circ \tag{42}$$

$$\bar{a}_{O_{2x}} = -\left(\alpha_2 \frac{r}{2} \sin\theta + \omega_2^2 \frac{r}{2} \cos\theta\right) \tag{43}$$

$$\bar{a}_{O_{2y}} = \alpha_2 \frac{r}{2} \cos\theta - \omega_2^2 \frac{r}{2} \sin\theta \tag{44}$$

4.2.3. Eslabón $B - C$

$$\bar{a}_{BC} = a_c + \alpha_3 \frac{K}{2}, \measuredangle \beta^\circ \quad + \omega_3^2 \frac{K}{2}, \measuredangle \beta^\circ \tag{45}$$

$$\bar{a}_{BC,x} = -\frac{K}{2}(\alpha_3 \cos\beta + \omega_3^2 \sin\beta) \tag{46}$$

$$\bar{a}_{BC,y} = -a_c + \frac{K}{2}(\alpha_3 \sin\beta - \omega_3^2 \cos\beta) \tag{47}$$

donde $\bar{a}_c = \bar{a}_c$