

Derivación de la restricción de longitud constante

Ecuación inicial

Dado:

$$K^2 = (R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2 \quad (1)$$

Donde:

- K es constante
- $\frac{d\theta}{dt} = \omega_1$
- y_c es variable
- R es constante
- D es constante

Derivación respecto al tiempo

Derivando ambos lados respecto al tiempo:

$$\frac{d(K^2)}{dt} = \frac{d}{dt} [(R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2] \quad (2)$$

Como K es constante:

$$0 = \frac{d}{dt} [(R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2] \quad (3)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$0 = 2(R \cos(\theta) - D) \frac{d}{dt} (R \cos(\theta) - D) + 2(R \sin(\theta) - y_c) \frac{d}{dt} (R \sin(\theta) - y_c) \quad (4)$$

Calculando las derivadas internas:

$$\frac{d}{dt} (R \cos(\theta) - D) = -R \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = -R \sin(\theta) \omega_1 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} (R \sin(\theta) - y_c) = R \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} - \dot{y}_c = R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c \quad (6)$$

Sustituyendo:

$$0 = 2(R \cos(\theta) - D)(-R \sin(\theta) \omega_1) + 2(R \sin(\theta) - y_c)(R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c) \quad (7)$$

Dividiendo entre 2:

$$0 = -(R \cos(\theta) - D)R \sin(\theta) \omega_1 + (R \sin(\theta) - y_c)(R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c) \quad (8)$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned}
0 = & -R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \omega_1 + DR \sin(\theta) \omega_1 \\
& + R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \omega_1 - R \sin(\theta) \dot{y}_c \\
& - y_c R \cos(\theta) \omega_1 + y_c \dot{y}_c
\end{aligned} \tag{9}$$

Los términos $R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \omega_1$ se cancelan, quedando:

$$0 = DR \sin(\theta) \omega_1 - R \sin(\theta) \dot{y}_c - y_c R \cos(\theta) \omega_1 + y_c \dot{y}_c \tag{10}$$

Reorganizando:

$$\dot{y}_c (R \sin(\theta) - y_c) = R \omega_1 (D \sin(\theta) - y_c \cos(\theta)) \tag{11}$$

Despeje de \dot{y}_c

Dividiendo ambos lados por $(R \sin(\theta) - y_c)$:

$$\dot{y}_c = \frac{R \omega_1 (D \sin(\theta) - y_c \cos(\theta))}{R \sin(\theta) - y_c} \tag{12}$$

Esta expresión es válida siempre que $R \sin(\theta) \neq y_c$ (es decir, que el denominador no sea cero).

Aceleración mediante lazo vectorial

Derivando nuevamente la ecuación de velocidad para obtener la aceleración:

$$\ddot{y}_c = R \frac{[\dot{\omega}_1 A - \omega_1^2 B - \omega_1 \dot{y}_c \cos \theta] D_{en} - \omega_1 A (\dot{y}_c + R \omega_1 \cos \theta)}{D_{en}^2} \tag{13}$$

donde:

$$\begin{aligned}
A &= D \sin \theta - y_c \cos \theta, \\
B &= D \cos \theta + y_c \sin \theta, \\
D_{en} &= R \sin \theta - y_c.
\end{aligned}$$

Nota: $\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta} = \alpha_1$ es la aceleración angular.

Forma expandida de la aceleración

Expandiendo la expresión anterior:

$$\ddot{y}_c = R \frac{\alpha_1 A \cdot D_{en} - \omega_1^2 B \cdot D_{en} - \omega_1 \dot{y}_c \cos \theta \cdot D_{en} - \omega_1 A \dot{y}_c - R \omega_1^2 A \cos \theta}{D_{en}^2} \tag{14}$$

Factorizando:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_c = & \frac{R(R \sin \theta - y_c) \alpha_1 (D \sin \theta - y_c \cos \theta)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\
& + \frac{R \omega_1^2 [R y_c - D y_c \cos \theta - y_c^2 \sin \theta - R(D \cos \theta + y_c \sin \theta)]}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\
& + \frac{R \omega_1 \dot{y}_c [\cos \theta (R \sin \theta - y_c) - (D \sin \theta - y_c \cos \theta)]}{(R \sin \theta - y_c)^2}
\end{aligned} \tag{15}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_c = & \frac{R \alpha_1 (D \sin \theta - y_c \cos \theta) (R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\
& - \frac{R \omega_1^2 (D \cos \theta + y_c \sin \theta) (R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\
& + \frac{R \omega_1 \dot{y}_c [R \sin \theta \cos \theta - y_c \cos \theta - D \sin \theta + y_c \cos \theta]}{(R \sin \theta - y_c)^2}
\end{aligned} \tag{16}$$