

Diseño conceptual y análisis dinámico de un sistema de martillo accionado por un mecanismo de retorno rápido

Parámetros geométricos y operativos



imagenes/diagrama_mecanismo.png

Figura 1: Diagrama geométrico del mecanismo con referencias de dimensiones (r, d, R, K, D).

Los valores usados en el análisis corresponden al diseño actual del prototipo y se expresan en unidades SI:

$$\begin{array}{llll} r = 0.070 \text{ m} & d = 0.110 \text{ m} & R = 0.200 \text{ m} & \delta = 0.00665 \\ K = 0.070 \text{ m} & D = 0.17 \text{ m} & \lambda = 0.1093458 \text{ m} & g = 9.81 \text{ m/s}^2 \\ \omega_2 = 4.00 \text{ rad/s} & \alpha_2 = 0.00 \text{ rad/s}^2 & & \end{array}$$

Se asume motor de velocidad angular constante ($\alpha_2 = 0$) y todos los ángulos en radianes. El valor de λ corresponde a la distancia del pivote O_1 al centroide del eslabón O_1B .

1. Aceleraciones angulares y relativas

Ligadura cinemática para la aceleración de a respecto a O_2 :

$$\vec{a}_a = (\alpha_2 \times \vec{r}), \Phi^\circ + (\omega_2 \times (\omega_2 \times \vec{r})), \Phi^\circ$$

Planteamiento respecto a O_1 :

$$\vec{a}_a = \vec{a}'_a + \vec{a}_{a/f} + \vec{a}_{cor}$$

Donde:

$$\vec{a}'_a = (\alpha_1 \times \vec{L}), \theta^\circ + (\omega_1 \times (\omega_1 \times \vec{L})), \theta^\circ$$

\vec{a}'_a representa la aceleración producto de la rotación del sistema

- $\vec{a}_{cor} = (2\omega_1 \times \vec{V}_{a/f}), \theta^\circ$

\vec{a}_{cor} representa la aceleracion de coriolis, un termino adicional que surge en sistemas no inerciales de este tipo

- $a_{a/f} = \theta^\circ$

$a_{a/f}$ representa la aceleracion del punto a relativo al sistema en rotacion

2. Derivacion explicita Lazo vectorial del martillo

Planteando el lazo vectorial para el mecanismo, se tiene:



Figura 2: Lazo vectorial del mecanismo que relaciona O_1B , el eslabón BC y el desplazamiento vertical del martillo.

Al proyectar en los ejes x y y y organizar en una sola ecuacion tenemos:

$$K^2 = (R \cos \theta - D)^2 + (R \sin \theta - y_c)^2$$

2.1. Derivación explicita para la velocidad

Derivando ambos lados respecto al tiempo. Donde:

- K es constante
- $\frac{d\theta}{dt} = \omega_1$
- y_c es variable
- R es constante
- D es constante

$$\frac{d(K^2)}{dt} = \frac{d}{dt} [(R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2] \quad (1)$$

Como K es constante:

$$0 = \frac{d}{dt} [(R \cos(\theta) - D)^2 + (R \sin(\theta) - y_c)^2] \quad (2)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$0 = 2(R \cos(\theta) - D) \frac{d}{dt}(R \cos(\theta) - D) + 2(R \sin(\theta) - y_c) \frac{d}{dt}(R \sin(\theta) - y_c) \quad (3)$$

Calculando las derivadas internas:

$$\frac{d}{dt}(R \cos(\theta) - D) = -R \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = -R \sin(\theta) \omega_1 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}(R \sin(\theta) - y_c) = R \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} - \dot{y}_c = R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c \quad (5)$$

Sustituyendo:

$$0 = 2(R \cos(\theta) - D)(-R \sin(\theta) \omega_1) + 2(R \sin(\theta) - y_c)(R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c) \quad (6)$$

Dividiendo entre 2:

$$0 = -(R \cos(\theta) - D)R \sin(\theta) \omega_1 + (R \sin(\theta) - y_c)(R \cos(\theta) \omega_1 - \dot{y}_c) \quad (7)$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} 0 &= -R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \omega_1 + DR \sin(\theta) \omega_1 \\ &\quad + R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \omega_1 - R \sin(\theta) \dot{y}_c \\ &\quad - y_c R \cos(\theta) \omega_1 + y_c \dot{y}_c \end{aligned} \quad (8)$$

Los términos $R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \omega_1$ se cancelan, quedando:

$$0 = DR \sin(\theta) \omega_1 - R \sin(\theta) \dot{y}_c - y_c R \cos(\theta) \omega_1 + y_c \dot{y}_c \quad (9)$$

Reorganizando:

$$\dot{y}_c (R \sin(\theta) - y_c) = R \omega_1 (D \sin(\theta) - y_c \cos(\theta)) \quad (10)$$

Dividiendo ambos lados por $(R \sin(\theta) - y_c)$:

$$\boxed{\dot{y}_c = \frac{R \omega_1 (D \sin(\theta) - y_c \cos(\theta))}{R \sin(\theta) - y_c}} \quad (11)$$

Esta expresión es válida siempre que $R \sin(\theta) \neq y_c$ (es decir, que el denominador no sea cero).

2.2. Derivacion explicita para la Aceleración

Derivando nuevamente la ecuación de velocidad para obtener la aceleración:

$$\ddot{y}_c = R \frac{[\dot{\omega}_1 A - \omega_1^2 B - \omega_1 \dot{y}_c \cos \theta] D_{en} - \omega_1 A (\dot{y}_c + R \omega_1 \cos \theta)}{D_{en}^2} \quad (12)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= D \sin \theta - y_c \cos \theta, \\ B &= D \cos \theta + y_c \sin \theta, \\ D_{en} &= R \sin \theta - y_c. \end{aligned}$$

Nota: $\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta} = \alpha_1$ es la aceleración angular.

Expandiendo la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_c &= \frac{R\alpha_1(D \sin \theta - y_c \cos \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ &- \frac{R\omega_1^2(D \cos \theta + y_c \sin \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ &+ \frac{R\omega_1 \dot{y}_c [R \sin \theta \cos \theta - y_c \cos \theta - D \sin \theta + y_c \cos \theta]}{(R \sin \theta - y_c)^2}\end{aligned}\quad (13)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_c &= \frac{R\alpha_1(D \sin \theta - y_c \cos \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ &- \frac{R\omega_1^2(D \cos \theta + y_c \sin \theta)(R \sin \theta - y_c)}{(R \sin \theta - y_c)^2} \\ &+ \frac{R\omega_1 \dot{y}_c (R \sin \theta \cos \theta - D \sin \theta)}{(R \sin \theta - y_c)^2}\end{aligned}\quad (14)$$

3. Cinemática del eslabón BC

3.0.1. Ecuacion vectorial de velocidad en el punto B

Usando movimiento del plano general podemos expresar la velocidad en el punto C por medio de la siguiente expresion:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} \quad (15)$$

En la cual:

- $\vec{v}_B = \omega_1 R \theta$, representa la velocidad del punto B y es producto a la rotacion del eslabón $O_1 B$
- $\vec{v}_{C/B} = \omega_3 K \beta$, representa la velocidad relativa tangencial del punto C respecto a B y es producto de la rotacion del eslabón BC
- $\vec{v}_C = \dot{y}_c$ (dirección vertical \downarrow), representa la velocidad del martillo, obtenida mediante el metodo de lazo vectorial

Tomando en cuenta las inclinaciones proyectamos los vectores en el eje horizontal, obteniendo asi la siguiente relacion para ω_3 y ω_1 :

$$0 = -\omega_1 R \sin \theta - \omega_3 K \cos \beta \quad (16)$$

Despejando ω_3 de la ecuacion anterior obtenemos:

$$\omega_3 = -\frac{\omega_1 R \sin \theta}{K \cos \beta}$$

(17)

3.1. Ecuacion vectorial de aceleración en el punto B

De manera analoga al las velocidad se tiene un movimiento de plano general, el cual nos permite expresar la aceleracion en el punto C por medio de la siguiente expresion:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} \quad (18)$$

En el cual:

- $\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_t + (\vec{a}_B)_n$:
- $(\vec{a}_B)_t = \alpha_1 \cdot R \theta$, Representa la aceleracion tangencial del punto B debido a la rotacion fija en O_1
- $(\vec{a}_B)_n = \omega_1^2 \cdot R \theta$, Representa la aceleracion normal producto de la rotacion respecto a O_1 . Apunta directamente hacia el eje de rotacion

■ $\vec{a}_{C/B} = (\vec{a}_{C/B})_t + (\vec{a}_{C/B})_n$ en donde:

- $(\vec{a}_{C/B})_t = \alpha_3 \cdot K \beta$ Representa la aceleracion tangencial relativa del punto C respecto a B , es producto de la rotacion del eslabon BC
- $(\vec{a}_{C/B})_n = \omega_3^2 \cdot K \beta$ Representa la aceleracion normal relativa del punto C respecto a B , apunta directamente hacia el eje de rotacion del eslabon BC

■ $\vec{a}_C = \ddot{y}_c \downarrow$ Representa la aceleracion del martillo, obtenida mediante el metodo de lazo vectorial

Con esta ecuacion y por medio de las proyecciones en el eje horizontal de cada vector encontramos la siguiente relacion que describe a α_3 en funcion de α_1 y ω_1 :

$$0 = -\alpha_1 R \sin \theta + \omega_1^2 R \cos \theta + \alpha_3 K \cos \beta - \omega_3^2 K \sin \beta \quad (19)$$

Despejando α_3 :

$$\alpha_3 = \frac{\omega_1^2 R \cos \theta + \alpha_1 R \sin \theta - \omega_3^2 K \sin \beta}{K \cos \beta}$$

(20)

4. Análisis cinético

Las ecuaciones de movimiento se obtuvieron mediante los siguientes diagramas de cuadro libre: - Diagrama C - Diagrama BC - Diagrama O1B - Diagrama O2A

5. Notas finales

La resolucion numérica se implementa en Python generando curvas de $\theta(t)$, $\omega_1(t)$, $\dot{y}_c(t)$, $\ddot{y}_c(t)$, $\beta(t)$, $\omega_3(t)$, $\alpha_3(t)$, fuerzas y par $\tau(t)$, además de una búsqueda del parámetro D que maximiza la carrera evitando singularidades (denominadores cercanos a cero en la expresión de \dot{y}_c). Esto garantiza un régimen estable y aprovechamiento máximo del desplazamiento del martillo.

6. Fase de Diseño Detallado

7. Análisis de los resultados teóricos

8. Análisis sobre el funcionamiento del prototipo

9. Conclusiones y recomendaciones

Referencias

- [1] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr., William E. Clausen, "Dinámica para ingeniería", McGraw-Hill, última edición disponible.
- [2] Autor desconocido, "Vector loop approach for mechanism analysis," HAL Open Science, 2018. Disponible en: <https://hal.science/hal-01715664/document>
- [3] STIX Fonts Project, "STIX Two Math," 2020. Disponible en: <https://stixfonts.org>