

Proyecto de Robótica

Javier Gil León

1 de abril de 2025

Índice

1. Enunciado y datos	3
2. Estudio Cinemático	4
2.1. Método de Denavit-Hartenberg para 6gdl	4
2.1.1. Establecimiento de ejes	4
2.1.2. Tabla de Denavit-Hartenberg	4
2.1.3. Matrices de transformación	5
2.2. Cinemática Directa	6
2.2.1. Establecimiento de ejes	6
2.2.2. Tabla de Denavit-Hartenberg	7
2.2.3. Matrices de transformación	7
2.2.4. Obtención de la posición	7
2.2.5. Obtención de la orientación	8
2.3. Cinemática Inversa	9
2.3.1. Declaración de los datos	9
2.3.2. Obtención de las ecuaciones	9
2.3.3. Obtención de q_1	9
2.3.4. Obtención de q_3	10
2.3.5. Obtención de q_2	11
2.4. Trayectoria Circular	12
2.5. Jacobiano	12
2.5.1. Jacobianos Directo e Inverso	12
2.5.2. Puntos Singulares	13

1. Enunciado y datos

El robot proporcionado para el DNI 3903294T es el siguiente:

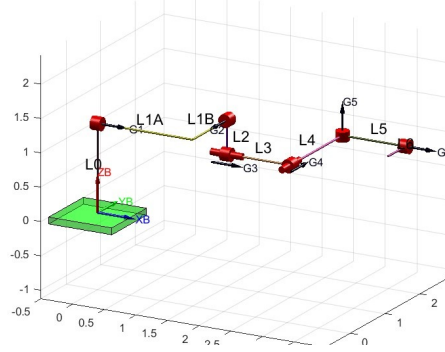


Figura 1: Robot de 6 grados de libertad

Siendo los datos específicos del brazo los siguientes:

	Articulación 0	Articulación 1	Articulación 2	Articulación 3	Articulación 4	Articulación 5	Articulación 6
Masa (Kg)	$m_0 = 85.2754$	$m_1 = 163.991$	$m_2 = 32.7982$	$m_3 = 65.5965$	$m_4 = 98.3947$	$m_5 = 65.5965$	$m_6 = 32.7982$
Longitud (m)	$L_0 = 1.3$	$L_{1A} = 1.5, L_{1B} = 1$	$L_2 = 0.5$	$L_3 = 1$	$L_4 = 1.5$	$L_5 = 1$	$L_6 = 0.5$
Inercias motores (kg m^2)	-	$J_1 = 0.00283288$	$J_2 = 0.00338424$	$J_3 = 0.00297458$	-	-	-
Fricciones motores (Nm/(rad/s))	-	$B_1 = 0.000274257$	$B_2 = 0.00020057$	$B_3 = 0.00011738$	-	-	-
Reductoras	-	$R_1 = 30$	$R_2 = 35$	$R_3 = 30$	-	-	-

Figura 2: Tabla de parámetros

La postura del robot en la figura se considerará como la posición HOME, es decir, cuando los parámetros articulares q_i son todos nulos, el robot debe aparecer como en la configuración representada en la figura.

Los eslabones son todos cilíndricos huecos con un radio interior $r_{int} = 0,08m$ y exterior $r_{ext} = 0,1m$ y tienen una densidad constante igual a $\rho = 5800\text{kg/m}^3$. Las articulaciones de rotación tienen un límite de movimiento angular entre $-\pi$ y π y las prismáticas entre 0 y 1,5m.

2. Estudio Cinemático

2.1. Método de Denavit-Hartenberg para 6gdl

2.1.1. Establecimiento de ejes

Para comenzar el desarrollo de la cinemática del proyecto, es necesario establecer los sistemas de ejes conforme dictan las reglas del método de Denavit-Hartenberg, quedando el dibujo de la forma:

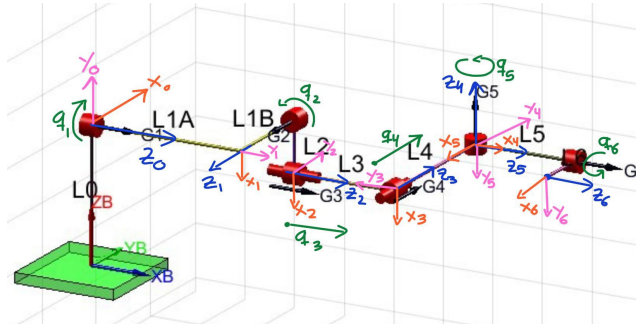


Figura 3: Robot de 6gdl con ejes

2.1.2. Tabla de Denavit-Hartenberg

Tras esto, se construye la **matriz de Denavit-Hartenberg**, de la forma:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
0	$\pi/2$	L_0	0	$\pi/2$
1	$q_1 - \pi/2$	L_{1A}	0	$\pi/2$
2	q_2	$-L_{1B}$	L_2	$-\pi/2$
3	0	$q_3 + L_3$	0	$-\pi/2$
4	$-\pi/2$	$q_4 + L_4$	0	$\pi/2$
5	$q_5 - \pi/2$	0	0	$-\pi/2$
6	q_6	L_5	L_6	0

Siendo:

- θ_i : El ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
- d_i : La distancia medida a lo largo de z_{i-1} que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.
- a_i : La distancia medida a lo largo de x_i que habría que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.
- α_i : El ángulo que habría que girar en torno a x_i , para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.

2.1.3. Matrices de transformación

Una vez se tiene la tabla construida, se forman las matrices de transformación A_{ij} mediante la expresión:

$$A_{ij} = \text{trotz}(\theta_i) \cdot \text{transl}(0, 0, d_i) \cdot \text{transl}(a_i, 0, 0) \cdot \text{trotz}(\alpha_i)$$

Que tras introducirlo en MATLAB, da lugar a las siguientes matrices:

$$A_{B0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{01} = \begin{bmatrix} \cos(q_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 & \sin(q_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(q_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 & -\cos(q_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_{1A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\sin(q_2) & L_2 \cdot \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & L_2 \cdot \sin(q_2) \\ 0 & -1 & 0 & -L_{1B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_3 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_4 + q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{45} = \begin{bmatrix} \cos(q_5 - \frac{\pi}{2}) & 0 & -\sin(q_5 - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(q_5 - \frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(q_5 - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{56} = \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & L_6 \cdot \cos(q_6) \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & L_6 \cdot \sin(q_6) \\ 0 & 0 & 1 & L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices, ya se puede obtener la transformación T_{B6} postmultiplíandolas de la forma:

$$T_{B6} = A_{B0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{45} \cdot A_{56}$$

La cual se puede comprobar que es correcta sustituyendo todas las q_i por 0, debiendo resultar en este caso en la posición HOME del brazo. Si esto se realiza, la matriz resultante queda:

$$T_{B6}(0, 0, 0, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L_3 + L_5 + L_{1A} \\ -1 & 0 & 0 & L_4 - L_6 + L_{1B} \\ 0 & -1 & 0 & L_0 - L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que dando un rápido vistazo a la figura 3 se comprueba que el resultado está correcto.

2.2. Cinemática Directa

2.2.1. Establecimiento de ejes

Con objetivo el estudio de la cinemática directa del robot, se reduce el brazo a sólo sus primeros 3 grados de libertad, quedando de la forma:

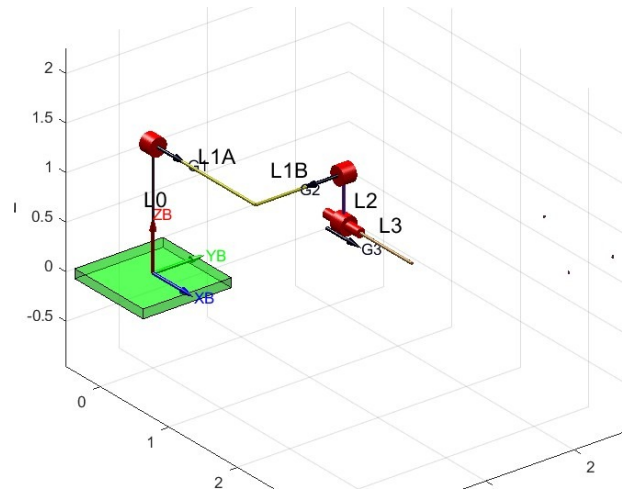


Figura 4: Robot de 3 gdl

Que, tras volver a colocarle los ejes mediante el método Denavit-Hartenberg, queda:

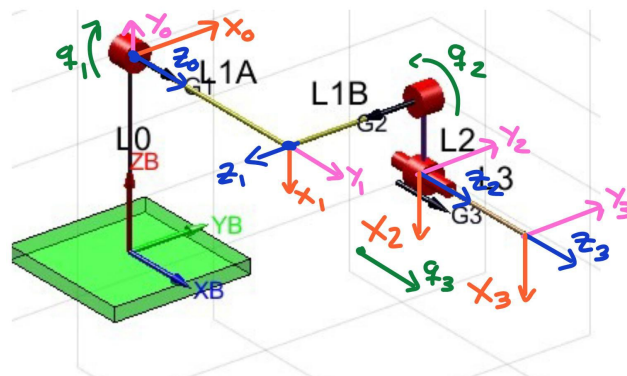


Figura 5: Robot de 3gdl con ejes

2.2.2. Tabla de Denavit-Hartenberg

Con los sistemas de ejes dispuestos, se obtiene una nueva tabla de Denavit-Hartenberg:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
0	$\pi/2$	L_0	0	$\pi/2$
1	$q_1 - \pi/2$	L_{1A}	0	$\pi/2$
2	q_2	$-L_{1B}$	L_2	$-\pi/2$
3	0	$q_3 + L_3$	0	0

2.2.3. Matrices de transformación

Con la tabla definida ella se obtienen las matrices de transformación correspondientes:

$$A_{B0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{01} = \begin{bmatrix} \cos(q_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 & \sin(q_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(q_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 & -\cos(q_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_{1A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\sin(q_2) & L_2 \cdot \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & L_2 \cdot \sin(q_2) \\ 0 & -1 & 0 & -L_{1B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que proporcionan la matriz de transformación T_{B3} al postmultiplicarlas de la forma:

$$T_{B3} = A_{B0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$T_{B3} = \begin{bmatrix} S_{q_2} & 0 & C_{q_2} & L_{1A} + C_{q_2} \cdot (L_3 + q_3) + L_2 \cdot S_{q_2} \\ C_{q_2} \cdot S_{q_1} & C_{q_1} & -S_{q_1} \cdot S_{q_2} & L_{1B} \cdot C_{q_1} + L_2 \cdot C_{q_2} \cdot S_{q_1} - L_3 \cdot S_{q_1} \cdot S_{q_2} - q_3 \cdot S_{q_1} \cdot S_{q_2} \\ -C_{q_1} \cdot C_{q_2} & S_{q_1} & C_{q_1} \cdot S_{q_2} & L_0 + L_{1B} \cdot S_{q_1} - L_2 \cdot C_{q_1} \cdot C_{q_2} + L_3 \cdot C_{q_1} \cdot S_{q_2} + q_3 \cdot C_{q_1} \cdot S_{q_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo anterior, se puede proceder al estudio de las expresiones analíticas de la posición y la orientación.

2.2.4. Obtención de la posición

Para calcular las expresiones analíticas de la posición, basta con tomar las 3 primeras filas de la última columna de la matriz T_{B3} .

$$\begin{cases} x = L_{1A} + C_{q_2} \cdot (L_3 + q_3) + L_2 \cdot S_{q_2} \\ y = L_{1B} \cdot C_{q_1} + L_2 \cdot C_{q_2} \cdot S_{q_1} - L_3 \cdot S_{q_1} \cdot S_{q_2} - q_3 \cdot S_{q_1} \cdot S_{q_2} \\ z = L_0 + L_{1B} \cdot S_{q_1} - L_2 \cdot C_{q_1} \cdot C_{q_2} + L_3 \cdot C_{q_1} \cdot S_{q_2} + q_3 \cdot C_{q_1} \cdot S_{q_2} \end{cases}$$

Si se sustituyen las variables articulares por cero, se puede comprobar que se obtiene la posición HOME:

$$\begin{cases} x = L_{1A} + L_3 \\ y = L_{1B} \\ z = L_0 - L_2 \end{cases}$$

2.2.5. Obtención de la orientación

Para el cálculo de los ángulos de Euler, se utiliza como referencia la matriz resultante de:

$$ZXZ = \text{trotz}(\phi) \cdot \text{trotx}(\theta) \cdot \text{trotz}(\psi)$$

$$ZXZ = \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\psi - C\theta \cdot S\phi \cdot S\psi & -C\phi \cdot S\psi - C\psi \cdot C\theta \cdot S\phi & S\phi \cdot S\theta \\ C\psi \cdot S\phi + C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi & C\phi \cdot C\psi \cdot C\theta - S\phi \cdot S\psi & -C\phi \cdot S\theta \\ S\psi \cdot S\theta & C\psi \cdot S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

La cual es comparada con la submatriz superior izquierda 3x3 extraída de la matriz T_{B3} :

$$T_{B3}(1:3, 1:3) = \begin{bmatrix} Sq_2 & 0 & Cq_2 \\ Cq_2 \cdot Sq_1 & Cq_1 & -Sq_1 \cdot Sq_2 \\ -Cq_1 \cdot Cq_2 & Sq_1 & Cq_1 \cdot Sq_2 \end{bmatrix}$$

Para obtener ψ , se puede dividir el elemento (3,1) entre el elemento (3,2) de ambas matrices e igualarlos, quedando las ecuaciones de la forma:

$$\frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi)} = \frac{-\cos(q_1) \cdot \cos(q_2)}{\sin(q_1)}$$

$$\psi = \text{atan}\left(\frac{-\cos(q_1) \cdot \cos(q_2)}{\sin(q_1)}\right)$$

Con ψ ya conocido, se puede obtener θ mediante la división del elemento (3,2) entre el elemento (3,3) de ambas matrices:

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(q_1)}{\cos(\psi) \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2)}$$

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{\sin(q_1)}{\cos(\psi) \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2)}\right)$$

Por último, con objetivo de despejar ϕ , se puede dividir el elemento (1,3) entre el elemento (2,3) de ambas matrices:

$$\frac{\sin(\phi)}{-\cos(\phi)} = \frac{\cos(q_2)}{-\sin(q_1) \cdot \sin(q_2)}$$

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{\cos(q_2)}{\sin(q_1) \cdot \sin(q_2)}\right)$$

Al igual que en el apartado anterior, al sustituir las variables articulares por cero, se pueden obtener los ángulos de Euler correspondientes a la posición HOME:

$$\begin{cases} \phi = \pi/2 \\ \theta = \pi/2 \\ \psi = -\pi/2 \end{cases}$$

Los cuales corresponden a una rotación en Z de $\pi/2$, una rotación en X de $\pi/2$ y una rotación en Z de nuevo de $-\pi/2$

2.3. Cinemática Inversa

2.3.1. Declaración de los datos

Para este apartado, se consideran datos los valores de la posición y orientación del robot, debiéndose obtener las expresiones analíticas que proporcionan las variables articulares en función de estos datos.

De lo anterior se deduce que la matriz dada es de la forma:

$$T_d = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & px \\ ny & oy & ay & py \\ nz & oz & az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La cual cumple que:

$$T_d = T_{B0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

2.3.2. Obtención de las ecuaciones

Debido a que cada matriz de transformación depende únicamente de una variable articular, se puede despejar una de estas matrices con el objetivo de aislar esa variable de la que depende. Por ejemplo, para aislar q_1 :

$$A_{01}^{-1} \cdot T_{B0}^{-1} \cdot T_d = A_{12} \cdot A_{23}$$

De lo anterior se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} L_0 \cdot \cos(q_1) - pz \cdot \cos(q_1) + py \cdot \sin(q_1) = L_2 \cdot \cos(q_2) - \sin(q_2) \cdot (L_3 + q_3) & (1) \\ px - L_{1A} = \cos(q_2) \cdot (L_3 + q_3) + L_2 \cdot \sin(q_2) & (2) \\ L_0 \cdot \sin(q_1) - py \cdot \cos(q_1) - pz \cdot \sin(q_1) = -L_{1B} & (3) \end{cases}$$

2.3.3. Obtención de q_1

De la ecuación (3), se puede despejar q_1 mediante un cambio a coordenadas polares de la forma:

$$A \cdot \sin(q) + B \cdot \cos(q) = C$$

$$\begin{cases} A = R \cdot \cos(\alpha) \\ B = R \cdot \sin(\alpha) \\ R = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \alpha = \text{atan}\left(\frac{B}{A}\right) \end{cases}$$

$$R \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(q) + R \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(q) = C$$

$$\sin(q_1 + \alpha) = \frac{C}{R}$$

$$q = \text{atan2}\left(\frac{C}{R}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{C}{R}\right)^2}\right) - \alpha$$

Una vez obtenida la expresión anterior, basta con particularizar para los valores específicos de la ecuación (3), los cuales son:

$$\begin{cases} A_1 = L_0 - pz \\ B_1 = -py \\ C_1 = -L_{1B} \\ R_1 = \sqrt{(L_0 - pz)^2 + py^2} \\ \alpha_1 = \text{atan2}(-py, L_0 - pz) \end{cases}$$

Obteniéndose q_1 como:

$$q_1 = \text{atan2}\left(\frac{C_1}{R_1}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{C_1}{R_1}\right)^2}\right) - \alpha_1$$

2.3.4. Obtención de q_3

Conocida q_1 , se puede despejar q_3 si se realiza la operación $(1)^2 + (2)^2$, quedando la siguiente ecuación:

$$(L_0 \cdot \cos(q_1) - pz \cdot \cos(q_1) + py \cdot \sin(q_1))^2 + (L_{1A} - px)^2 = L_2^2 + L_3^2 + 2 \cdot L_3 \cdot q_3 + q_3^2$$

Llamando M a la suma de todos los términos que no dependen de q_3 y reordenando:

$$M = -(L_0 \cdot \cos(q_1) - pz \cdot \cos(q_1) + py \cdot \sin(q_1))^2 - (L_{1A} - px)^2 + L_2^2 + L_3^2$$

$$0 = M + 2 \cdot L_3 \cdot q_3 + q_3^2$$

De lo que se puede despejar fácilmente q_3 , siendo su ecuación de la forma:

$$q_3 = \frac{-2 \cdot L_3 \pm \sqrt{4 \cdot L_3^2 - 4 \cdot M}}{2}$$

2.3.5. Obtención de q_2

Por último, para despejar q_2 , como q_3 ya es conocido, puede volver a aplicarse el cambio a polares, siendo los parámetros los siguientes:

$$\begin{cases} A_2 = L_2 \\ B_2 = L_3 + q_3 \\ C_2 = px - L_{1A} \\ R_2 = \sqrt{L_2^2 + (L_3 + q_3)^2} \\ \alpha_2 = \text{atan2}(L_3 + q_3, L_2) \end{cases}$$

Por lo que su ecuación queda de la forma:

$$q_2 = \text{atan2}\left(\frac{C_2}{R_2}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{C_2}{R_2}\right)^2}\right) - \alpha_2$$

Debido a que q_1 tiene dos soluciones, q_3 , que depende de esta para cada solución de la raíz, tendrá 4 soluciones, ocurriendo lo mismo para q_2 , la cual tendrá 8 soluciones. Estas son las soluciones matemáticamente posibles, sin embargo, debido a las restricciones proporcionadas por los pares, el número de soluciones finales se ve afectado en función del punto dado como dato.

Para comprobar los cálculos, basta con introducir la posición HOME del robot, comprobando que se obtienen las variables articulares nulas como una de las soluciones:

```
>> CinematicaInversa([2.5,1,0.8])
ans =
    0    -0.9273     0    -0.9273
    0         0    0.9273    0.9273
    0         0     0         0
--
```

2.4. Trayectoria Circular

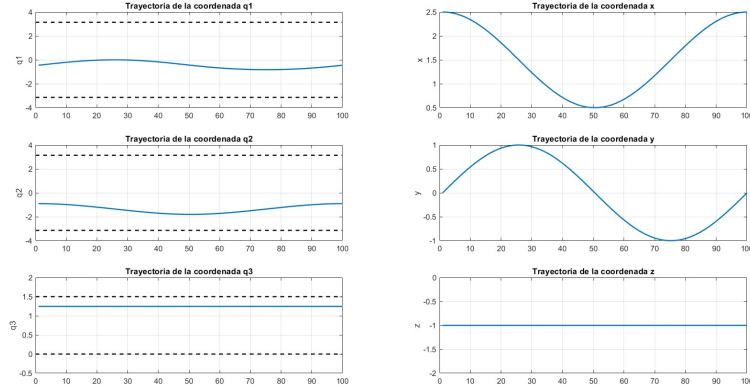
Para este apartado, era necesario representar el movimiento del robot siguiendo una circunferencia en el plano XY.

La circunferencia elegida, ha sido aquella con centro en $(L_{1A}, 0, -1)$ y radio $R = L_{1B}$, obteniéndose así las siguientes ecuaciones que la describen:

$$\begin{cases} x = L_{1A} + L_{1B} \cdot \cos(\alpha) \\ y = L_{1B} \cdot \sin(\alpha) \\ z = -1 \end{cases}$$

Y con α siendo un ángulo que está comprendido en el rango $[0, 2\pi]$

Una vez definida la circunferencia, basta con calcular la cinemática inversa del robot para cada uno de sus puntos y elegir la solución adecuada, quedando las gráficas de las variables articulares de la siguiente forma:



2.5. Jacobiano

2.5.1. Jacobianos Directo e Inverso

Para el cálculo del Jacobiano directo del robot, se parten de las ecuaciones de (x, y, z) de la cinemática directa y se monta la matriz de la forma:

$$J_{dir} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dq_1} & \frac{dx}{dq_2} & \frac{dx}{dq_3} \\ \frac{dy}{dq_1} & \frac{dy}{dq_2} & \frac{dy}{dq_3} \\ \frac{dz}{dq_1} & \frac{dz}{dq_2} & \frac{dz}{dq_3} \end{bmatrix}$$

Para el cálculo del Jacobiano inverso, no es más que invertir el Jacobiano directo de la forma:

$$J_{inv} = J_{dir}^{-1}$$

2.5.2. Puntos Singulares

Una vez obtenido el Jacobiano Directo, se pueden calcular los puntos singulares como aquellos puntos para los que su determinante se anula, siendo así que:

$$|J_{dir}| = 0 \rightarrow -(L_3 + q_3) \cdot (L_3 \cdot Sq_2 - L_2 \cdot Cq_2 + q_3 \cdot Sq_2) = 0$$

Siendo así que las posibilidades son:

$$\begin{cases} q_3 = -L_3 \\ \tan(q_2) = \frac{L_2}{L_3 + q_3} \end{cases}$$

Por las limitaciones de las articulaciones, la primera posibilidad nunca va a darse, quedando solo la segunda, que se dará en el caso de que esa relación llegue a cumplirse.