3. Filtrado de frecuencia

Resumen

Trabajar en el dominio de la frecuencia puede ser menos intuitivo que hacerlo en el dominio espacial, pero ofrece algunos beneficios en algunas situaciones. Por un lado, algunas operaciones, como las convoluciones, se pueden realizar de forma más eficiente en algunos casos gracias al teorema de convolución. Por otro lado, algunos tipos de filtros pueden diseñarse o aplicarse de forma más natural en el dominio de la frecuencia. En esta práctica de laboratorio aprenderemos a aplicar, manipular y visualizar la Transformada de Fourier en imágenes; comprobaremos experimentalmente el teorema de convolución y nos familiarizaremos con él; y luego diseñaremos y aplicaremos filtros simples en el dominio de la frecuencia.

Palabras
clave Transformada de Fourier • Teorema de convolución • Filtros paso bajo, paso banda y paso alto

Contenido

1. Transformada de Fourier

No hay dificultad en aplicar la Transformada de Fourier (FT) utilizando alguna biblioteca adecuada, más allá de identificar las funciones y poco más. Hay varias bibliotecas de Python que admiten FT; Usaremos el módulo fft de NumPy.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que la Transformada de Fourier funciona con números complejos. Aunque los cálculos deben utilizar números complejos, visualizar la transformada de Fourier de una imagen generalmente depende del uso de alguna representación (simplificada) de dichos números; la magnitud de los números complejos y, quizás, su fase, se utilizan comúnmente.

En el caso de la magnitud, es su logaritmo el que generalmente se visualiza para tratar el amplio rango de valores E1 de las magnitudes a diferentes frecuencias. Por otro lado, el orden de frecuencias en el FT corresponde a los índices de las coordenadas espaciales. Por lo tanto, la transformada para la frecuencia (u, v) = (0,0) se ubicará en la primera fila y la primera columna del resultado (es decir, la esquina superior izquierda en las representaciones gráficas habituales de imágenes y matrices). Sin embargo, para la visualización del FT, es una práctica común ubicar las bajas frecuencias en el centro de la imagen. Para ello se realizan desplazamientos, p. ej. con fftshift(). No olvidemos que cuando aplicamos la FT inversa (IFT), se supone que el origen de frecuencias está en (0,0). Esto implica que necesitamos “deshacer el cambio” si es necesario, con ifftshift() ante el propio IFT.

Ahora, asegúrese de comprender el código proporcionado; luego, muestra el FT directo e inverso de varias imágenes e intenta cambiar algún aspecto de este proceso. Por ejemplo, ¿qué sucede si aplica fftshift() pero no ifftshift(), o viceversa; ¿ Cómo se muestra la magnitud si no se aplica el logaritmo?

2. Teorema de convolución

El teorema de convolución establece la equivalencia entre aplicar un filtro a través de una convolución en el dominio espacial y un producto por elementos de sus transformadas de Fourier. Concretamente, si I es la imagen que queremos filtrar y M es la máscara de

filtro, entonces: $I \quad M = F^{-1} (F(I)F(M))$,

donde representa la operación de convolución, es el producto por elementos, y F y F^{-1} son las transformadas de Fourier directa e inversa , respectivamente.

Ejecute el código donde se ilustra este teorema y estudie la implementación. Como de costumbre, asegúrese de comprenderlo y de saber cómo implementar un proceso similar. E2, E3

3. Filtros de frecuencia

En el apartado anterior, para comprobar el teorema de convolución, hemos aplicado la Transformada de Fourier al filtro definido en el dominio espacial. Sin embargo, en algunos casos, puede resultar más natural definir o diseñar filtros directamente en el dominio de la frecuencia.

Por ejemplo, cuando suavizamos una imagen, sabemos que se pierde la información correspondiente a pequeños detalles. Intuitivamente, esto corresponde a “eliminar las altas frecuencias” y “mantener las pequeñas”. Visto de esta manera, resulta bastante sencillo cómo debería comportarse un filtro en el dominio de la frecuencia. Este tipo de filtro se conoce como filtro de paso bajo. Dado que las bajas frecuencias en el dominio de la frecuencia están ubicadas en el centro de la matriz de la transformada FT, podemos producir una matriz (matriz) con unos en un área central y ceros fuera de esta área. Con dicho filtro (en el dominio de la frecuencia) y mediante el teorema de convolución, sabemos cómo producir la imagen filtrada, sin

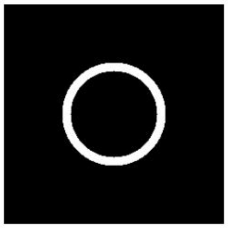

Figura 1. Filtro de paso de banda con r = 30 y R = 80 para una imagen de 255×255

sabiendo cómo se ve el filtro correspondiente en el dominio espacial.

Con el código que se le proporcionó, pruebe el filtro de paso de banda para diferentes valores de r e interprete los resultados. Como es habitual, revisar y estudiar la implementación. Pruebe también el filtro de paso alto y el filtro de paso de banda (Fig. 1), y experimente E7 con diferentes valores para r y R.

4. Ejercicios

1. Dada la transformada de Fourier de una imagen, calcule (a) la magnitud más baja y más alta; (b) mostrar un diagrama de caja con los valores de magnitud; y (c) trazar un histograma de los valores de fase. Para mostrar el diagrama de caja y el histograma, puede utilizar Matplotlib.

2. Hemos visto el teorema de convolución aplicado al filtro medio. Ahora, aplíquelo al filtro gaussiano y compruebe que el resultado también sea el esperado. Además de la imagen de salida (filtrada), muestre también la transformada de Fourier del filtro y el producto por elementos de las transformadas de Fourier de la imagen y el filtro. Intente descubrir la relación entre el tamaño del filtro medio y su transformada de Fourier. Repita este análisis con la desviación estándar.

3. Una implicación práctica del teorema de convolución es el ahorro computacional que puede ofrecer al realizar cálculos en el dominio de la frecuencia en lugar de en el dominio espacial. Realizar un estudio de los tiempos de ejecución para diferentes tamaños de filtro de máscara, y para diferentes tamaños de imagen. Muestre un gráfico de los tiempos medidos (media y desviación) para apreciar la influencia del tamaño de la imagen para un tamaño de máscara determinado, y otro gráfico donde el tamaño de la imagen es fijo y el tamaño de la máscara varía. Observe atentamente los resultados y coméntelos.

4. Escriba my_mask(n) sin bucles explícitos que devuelva una matriz 2D de tamaño n×n siguiendo este patrón:

   0-1-1 0-1 0   0 −1 −1 −1 1 0 −1
   −1 1 0 −1 1 0 .

   1 1   1   ,   1 1

   norte = 3   1 norte = 4

   Luego, escriba my_filter(im,n) para usar la salida de my_mask() como máscara para filtrar la imagen en el dominio de la frecuencia.

5. Obtenga la transformada de Fourier de stp1.gif y stp2.gif. Sean F1 y F2 estas transformaciones. Calcula y observa la transformada inversa de su combinación λ ·F1 + (1− λ)· F2,λ [0,1]. ¿Qué propiedad del FT ilustra este resultado?

6. (Opcional) Estudiar si el FT es distributivo con respecto al producto, es decir, si F(I1 I2) = F(I1)F(I2). Puedes utilizar las imágenes del ejercicio anterior para realizar un análisis empírico.

7. (Opcional) Los filtros de frecuencia que hemos visto se configuran en todo (1) o nada (0) para que se seleccionen o eliminen los rangos de frecuencia deseados (ya sea alto, bajo o banda), con cambios abruptos. Escriba versiones suavizadas de los filtros para que la transición entre 0 y 1 sea de alguna manera fluida. Para los mismos valores de r y R, compare los filtros abrupto y suave y comente la posible influencia en el resultado.

8. (Opcional) Además de su aplicación al filtrado, la Transformada de Fourier es útil en otros contextos. Este ejercicio ilustra uno de ellos: las marcas de agua. Podemos agregar marcas de agua a una imagen sin que la marca se note a simple vista. Lo hicimos en la imagen lena255.pgm y su tarea es averiguar si la imagen a.pgm o la imagen b.pgm (archivos proporcionados) es la que tiene la marca de agua; A la otra imagen se le acaba de agregar un poco de ruido guassiano para que no sea exactamente la misma imagen que la original. Para resolver tu tarea, debes considerar, además de las imágenes candidatas a.pgm y b.pgm:

   - el proceso seguido para generar la marca de agua (sección Marca de agua digital cuyo primer párrafo comienza con “Ahora pasamos a la aplicación principal …”, en análisis de Fourier); • el archivo position.p

   proporcionado con los puntos utilizados; (índices variables en esa página); y

   - la imagen original (lena255.pgm).

   Explique el proceso seguido para su análisis y llegar a su decisión.

   Por cierto, estrictamente hablando, no necesitaríamos ni la imagen original ni las posiciones para saber si una imagen determinada contiene una marca de agua. Sin embargo, el procedimiento sería algo más complicado y no merece la pena en el contexto de esta práctica de laboratorio. Es por eso que hemos simplificado el problema sin, con suerte, hacerlo menos interesante.

   Nota: puedes cargar los puntos en position.p con el módulo pickle:

```
importar archivos
de ubicaciones de pickle = "./imgs-P3/positions.p" archivo =
open(archivo de ubicaciones, "rb") índices =
pickle.load(archivo)
```