PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. De acuerdo con el texto, existen $2n$ definiciones diferentes del det A, dependiendo de la fila o columna seleccionada. Analice la razón por la que todas las definiciones dan el mismo resultado numérico.
2. Explique cómo se puede usar la eliminación gaussiana para encontrar el determinante de una matriz.
3. Explique cómo se puede usar la eliminación gaussiana para encontrar la inversa de una matriz, si existe.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.5

1. Resuelva los siguientes sistemas lineales:

a. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Resuelva los siguientes sistemas lineales:

a. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3. Considere las siguientes matrices. Encuentre la matriz de permutación P tal que PA se puede factorizar en el producto LU, donde L es triangular inferior con 1 en su diagonal y U es triangular superior para estas matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

4. Considere las siguientes matrices. Encuentre la matriz de permutación P de tal forma que PA se puede factorizar en el producto LU, donde L es triangular inferior con 1 en su diagonal y U es triangular superior para estas matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

5. Factorice las siguientes matrices en la descomposición LU mediante el algoritmo de factorización LU con $l_{ii} = 1$ para todas las i.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$

6. Factorice las siguientes matrices en la descomposición LU mediante el algoritmo de factorización LU con $l_{ii} = 1$ para todas las i.

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2.121 & -3.460 & 0 & 5.217 \\ 0 & 5.193 & -2.197 & 4.206 \\ 5.132 & 1.414 & 3.141 & 0 \\ -3.111 & -1.732 & 2.718 & 5.212 \end{bmatrix}$

7. Modifique el algoritmo de factorización LU de tal forma que se pueda utilizar para resolver un sistema lineal y, a continuación, resuelva los siguientes sistemas lineales.

a. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 &= 1.984, \\ -2.132x_1 + 4.096x_2 - 7.013x_3 &= -5.049, \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 &= -3.895. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3, \\ x_1 + 1.5x_2 \qquad\qquad &= 4.5, \\ - 3x_2 + 0.5x_3 \qquad &= -6.6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} 2.1756x_1 + 4.0231x_2 - 2.1732x_3 + 5.1967x_4 &= 17.102, \\ -4.0231x_1 + 6.0000x_2 \qquad\qquad + 1.1973x_4 &= -6.1593, \\ -1.0000x_1 - 5.2107x_2 + 1.1111x_3 \qquad\qquad &= 3.0004, \\ 6.0235x_1 + 7.0000x_2 \qquad\qquad - 4.1561x_4 &= 0.0000. \end{aligned}$$

8. Modifique el algoritmo de factorización LU de tal forma que se pueda usar para resolver un sistema lineal y, a continuación, resuelva los siguientes sistemas lineales

a. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= 1, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{8}x_3 &= 2, \\ \frac{2}{5}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{8}x_3 &= -3. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \qquad &= 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= -2, \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 6. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} 2.121x_1 - 3.460x_2 \qquad\qquad + 5.217x_4 &= 1.909, \\ 5.193x_2 - 2.197x_3 + 4.206x_4 &= 0, \\ 5.132x_1 + 1.414x_2 + 3.141x_3 \qquad\qquad &= -2.101, \\ -3.111x_1 - 1.732x_2 + 2.718x_3 + 5.212x_4 &= 6.824. \end{aligned}$$

9. Obtenga factorizaciones de la forma $A = P^tLU$ para las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

10. Obtenga factorizaciones de la forma $A = P^tLU$ para las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS APLICADOS

11. El ejercicio 11 de la sección 6.3 se puede generalizar de acuerdo con lo siguiente. Suponga que el escarabajo tiene un periodo de vida de cuatro años. La hembra de la especie tiene una tasa de supervivencia de p_1 en el primer año de vida, tiene una tasa de supervivencia de p_2 desde el segundo hasta su tercer año, y tiene una tasa de supervivencia de p_3 desde el año 3 hasta el año 4 antes de expirar al final del cuarto año. El escarabajo hembra procrea un promedio de b_1 escarabajos hembras en el primer año, b_2 escarabajos hembras en el segundo año, b_3 escarabajos hembras en su tercer año y b_4 escarabajos hembras en su cuarto año.

Se puede usar una matriz $A = [a_{ij}]$ para modelar las contribuciones que realiza un escarabajo hembra, en un sentido probabilístico, a la población femenina de la especie al hacer que a_{ij} denote la contribución que una sola hembra de edad j realizará a la población de hembras del siguiente año de edad i. Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Por medio de la descomposición LU o descomposición P^tLU con $b_1 = 0, b_2 = 1/8, b_3 = 1/4, b_4 = 1/2, p_1 = 1/2, p_2 = 1/4$ y $p_3 = 1/8$, encuentre el número de hembras de cada edad necesario para que la población después de un año sea $\vec{b} = (175, 100, 50, 25)^t$.

b. Repita la parte a) mediante $\vec{b} = (100, 100, 100, 100)^t$. ¿Qué significa su respuesta?

EJERCICIOS TEÓRICOS

12. **a.** Muestre que el algoritmo de factorización LU requiere

$$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \text{ multiplicaciones/divisiones} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \text{ sumas/restas.}$$

b. Muestre que resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, donde L es una matriz triangular inferior con $l_{ii} = 1$ para i, requiere

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \text{ multiplicaciones/divisiones} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \text{ sumas/restas.}$$

c. Muestre que resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ al factorizar primero A en $A = LU$ y, después, resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ requiere el mismo número de operaciones que el algoritmo de eliminación gaussiana 6.1.

d. Cuente el número de operaciones requeridas para resolver m sistemas lineales $A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$ para $k = 1, \ldots, m$, al factorizar primero A y, después, utilizar el método de la parte c) m veces.

13. Suponga $A = P^tLU$, donde P es una matriz de permutación, L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior.

a. Cuente el número de operaciones necesarias para calcular P^tLU para una matriz determinada A.

b. Muestre que si P contiene k intercambios de fila, entonces

$$\det P = \det P^t = (-1)^k.$$

c. Utilice $\det A = \det P^t \det L \det U = (-1)^k \det U$ para contar el número de operaciones para determinar $\det A$ mediante factorización.

d. Calcule $\det A$ y cuente el número de operaciones cuando

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La descomposición LU es única? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Cuántas operaciones se necesitarían para descomponer una matriz $m \times m$ tridiagonal A en su factorización LU?
3. ¿Cómo se pueden manejar los intercambios de filas en la descomposición LU?
4. ¿Por qué la descomposición LU de una matriz A es tan útil? ¿La descomposición es computacionalmente práctica?
5. Si una matriz A requiere intercambios de fila, ¿cómo afecta la descomposición de A su factorización LU?
6. Analice los diferentes tipos de matrices de banda y los efectos de resolver mínimos cuadrados con matrices de banda mediante descomposiciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.6

1. Determine cuál de las siguientes matrices son i) simétricas, ii) singulares, iii) estrictamente diagonalmente dominantes y iv) definidas positivas.

   a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine cuál de las siguientes matrices son i) simétricas, ii) singulares, iii) estrictamente diagonalmente dominantes y iv) definidas positivas.

   a. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1.5 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

3. Utilice el algoritmo de factorización LDL^t para encontrar una factorización de la forma $A = LDL^t$ para las siguientes matrices:

   a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   c. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Utilice el algoritmo de factorización LDL^t para encontrar una factorización de la forma $A = LDL^t$ para las siguientes matrices:

   a. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

   c. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$