Se concluye esta sección mostrando una conexión sorprendente entre centroides y volúmenes de revolución.

Este teorema lleva el nombre del matemático griego Pappus de Alejandría, quien vivió en el siglo IV después de Cristo.

Teorema de Pappus Sea $\mathcal{R}$ la región plana que está completamente en un lado de una recta l en el plano. Si $\mathcal{R}$ se hace girar en torno a l, entonces el volumen del sólido resultante es el producto del área A de $\mathcal{R}$ y la distancia d recorrida por el centroide de $\mathcal{R}$.

DEMOSTRACIÓN Se da la demostración para el caso especial en que la región está entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$ como se muestra en la figura 13, y la recta l es el eje y. Con el método de los cascarones cilíndricos (véase la sección 6.3), se tiene

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi(\bar{x}A) \qquad \text{(por las fórmulas 9)} \\ &= (2\pi\bar{x})A = Ad \end{aligned}$$

donde $d = 2\pi\bar{x}$ es la distancia recorrida por el centroide durante una rotación en torno al eje y. ■

EJEMPLO 7 Un toro se forma al hacer girar un círculo de radio r en torno a una recta en el plano del círculo que es una distancia R ($> r$) desde el centro del círculo. Encuentre el volumen del toro.

SOLUCIÓN El círculo tiene área $A = \pi r^2$. Por el principio de simetría, su centroide es su centro geométrico y, por tanto, la distancia recorrida por el centroide durante una rotación es $d = 2\pi R$. Así, por el teorema de Pappus, el volumen del toro es

$$V = Ad = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$ ■

El método del ejemplo 7 debe compararse con el método del ejercicio 6.2.63.

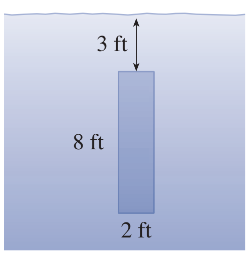
8.3 EJERCICIOS

1. Un acuario de 5 pies de largo, 2 pies de ancho y 3 pies de profundidad se llena de agua. Determine (a) la presión hidrostática en el fondo del acuario, (b) la fuerza hidrostática en el fondo y (c) la fuerza hidrostática en un extremo del acuario.

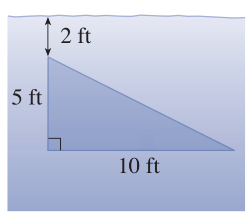
2. Un estanque de 8 m de largo, 4 m de ancho y 2 m de profundidad se llena con queroseno de densidad 820 kg/m^3 hasta una profundidad de 1.5 m. Encuentre (a) la presión hidrostática en el fondo del estanque, (b) la fuerza hidrostática en el fondo y (c) la fuerza hidrostática en un extremo del estanque.

3–11 Una placa vertical se sumerge en agua (o está parcialmente sumergida) y tiene la forma indicada. Explique cómo aproximar la fuerza hidrostática contra un extremo de la placa mediante una suma de Riemann. Luego, exprese la fuerza como una integral y evalúela.

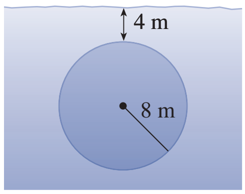
3.



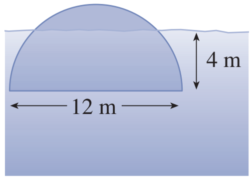
4.



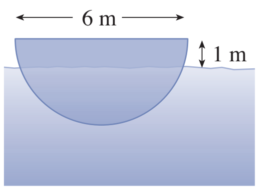
5.



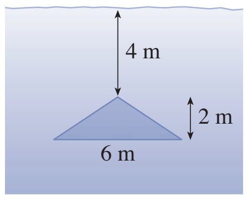
6.



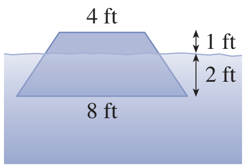
7.



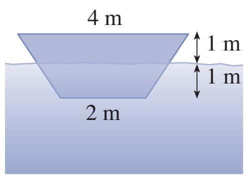
8.



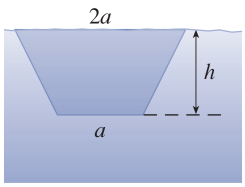
9.



10.



11.



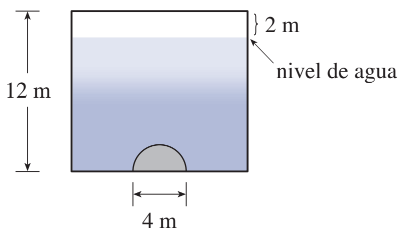
12. Un camión cisterna con tanque en forma de cilindro horizontal con diámetro de 6 pies transporta leche cuya densidad es 64.6 lb/pies^3.

(a) Encuentre la fuerza ejercida por la leche sobre uno de los extremos del tanque, cuando este está lleno.

(b) ¿Y cuándo está a la mitad?

13. Una pileta se llena con un líquido de densidad 840 kg/m^3. Los extremos de la pileta son triángulos equiláteros con lados de 8 m de largo y vértice en la parte de abajo. Determine la fuerza hidrostática en un extremo de la pileta.

14. Una presa vertical tiene una compuerta semicircular como se muestra en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática que se ejerce contra la compuerta.



15. Un cubo con lados de 20 cm de largo está asentado sobre el fondo de un acuario en el que el agua tiene un metro de profundidad. Determine la fuerza hidrostática sobre (a) la parte superior del cubo y (b) uno de los lados del cubo.

16. Una presa está inclinada en un ángulo de 30° desde la vertical y tiene la forma de un trapecio isósceles de 100 pies de ancho en la parte superior y 50 pies de ancho en el fondo y con una altura inclinada de 70 pies. Encuentre la fuerza hidrostática sobre la presa cuando está llena de agua.

17. Una alberca mide 10 m de ancho y 20 m de largo, y su fondo es un plano inclinado. El extremo poco profundo tiene una profundidad de 1 m y el extremo profundo, 3 m. Si la alberca se llena de agua, estime la fuerza hidrostática sobre (a) el extremo poco profundo, (b) el extremo profundo, (c) uno de los lados y (d) el fondo de la alberca.

18. Suponga que una placa se sumerge verticalmente en un fluido con densidad ρ y el ancho de la placa es $w(x)$, a una profundidad de x metros debajo de la superficie del fluido. Si la parte superior de la placa está a una profundidad a y el fondo está a una profundidad b, demuestre que la fuerza hidrostática en un lado de la placa es

$$F = \int_a^b \rho g x\, w(x)\, dx$$

19. Una placa metálica es sumergida verticalmente en el mar, cuya agua está a una densidad de 64 lb/pie^3. En la tabla se muestran las medidas de su ancho, tomadas a las profundidades indicadas. Use la regla de Simpson para estimar la fuerza del agua contra la placa.

Profundidad (pies)	7.0	7.4	7.8	8.2	8.6	9.0	9.4
Ancho de la placa (pies)	1.2	1.8	2.9	3.8	3.6	4.2	4.4

20. (a) Use la fórmula del ejercicio 18 para demostrar que

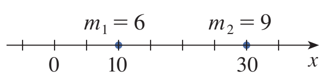
$$F = (\rho g \bar{x})A$$

donde $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la placa y A es su área. Esta ecuación muestra que la fuerza hidrostática contra una región plana vertical es la misma que si la región estuviera horizontal a la profundidad del centroide de la región.

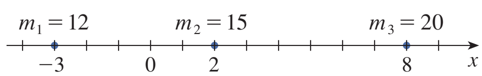
(b) Use el resultado del inciso (a) para dar otra solución al ejercicio 10.

21–22 Las masas puntuales m_i se localizan sobre el eje x como se muestra. Determine el momento M del sistema respecto al origen y el centro de masa $\bar{x}$.

21.



22.



23–24 Las masas m_i se localizan en los puntos P_i. Encuentre los momentos M_x y M_y y el centro de masa del sistema.

23. $m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 10;$
$P_1(1, 5),\ P_2(3, -2),\ P_3(-2, -1)$

24. $m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 1,\ m_4 = 4;$
$P_1(1, -2),\ P_2(3, 4),\ P_3(-3, -7),\ P_4(6, -1)$

25–28 Trace la región acotada por las curvas y estime en forma visual la ubicación del centroide. Después encuentre las coordenadas exactas del centroide.

25. $y = 2x, \quad y = 0, \quad x = 1$

26. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$

27. $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

28. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

29–33 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas dadas.

29. $y = x^2, \quad x = y^2$

30. $y = 2 - x^2, \quad y = x$

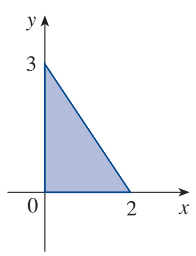
31. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x = \pi/4$

32. $y = x^3, \quad x + y = 2, \quad y = 0$

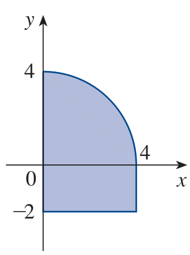
33. $x + y = 2, \quad x = y^2$

34–35 Calcule los momentos M_x y M_y y el centro de masa de una lámina con la densidad y forma dadas.

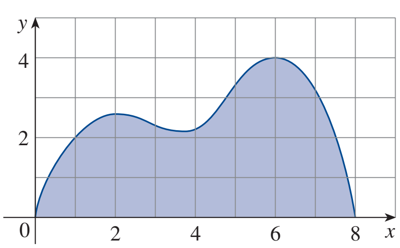
34. $\rho = 4$



35. $\rho = 6$



36. Utilice la regla de Simpson para estimar el centroide de la región que se muestra.



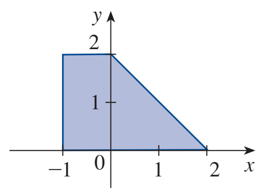
37. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 - 1$. Trace la región y trace la gráfica del centroide para ver si su respuesta es razonable.

38. Use una gráfica para encontrar coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas $y = e^x$ y $y = 2 - x^2$. Luego determine (de manera aproximada) el centroide de la región acotada por estas curvas.

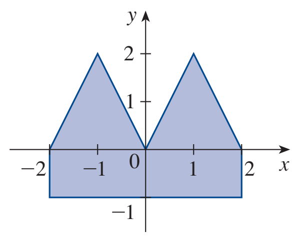
39. Demuestre que el centroide de cualquier triángulo se localiza en la intersección de las medianas. [*Sugerencia*: coloque los ejes de modo que los vértices sean $(a, 0)$, $(0, b)$ y $(c, 0)$. Recuerde que una mediana es un segmento de recta desde un vértice al punto medio del lado opuesto. Las medianas se intersecan en un punto a dos tercios del tramo de cada vértice (a lo largo de la mediana) al lado opuesto.]

40–41 Encuentre el centroide de la región que se muestra, no por integración, sino mediante la localización de los centroides de los rectángulos y triángulos (del ejercicio 39) y por medio de la suma de los momentos.

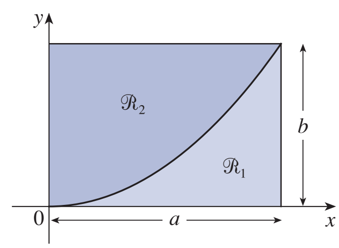
40.



41.



42. Un rectángulo $\mathcal{R}$ con lados a y b se divide en dos partes $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ mediante un arco de la parábola que tiene sus vértices en las esquinas de $\mathcal{R}$ y que pasa a través de la esquina opuesta. Encuentre el centroide en ambas $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.



43. Si $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la región que se encuentra bajo la gráfica de una función continua f, donde $a \leqslant x \leqslant b$, demuestre que

$$\int_a^b (cx + d) f(x)\, dx = (c\bar{x} + d) \int_a^b f(x)\, dx$$

44–46 Use el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido dado.

44. Una esfera de radio r. (Use el ejemplo 4.)

45. Un cono con altura h y radio de la base r.

46. El sólido obtenido al hacer girar el triángulo con vértices (2, 3), (2, 5) y (5, 4) en torno al eje x.

---

47. El centroide de una *curva* se puede encontrar mediante un proceso similar al que se utilizó para encontrar el centroide de una región. Si C es una curva de longitud L, entonces el centroide es $(\bar{x}, \bar{y})$ donde $\bar{x} = (1/L)\int x\,ds$ y $\bar{y} = (1/L)\int y\,ds$. Aquí se asignan los límites adecuados de integración y ds se define como en las secciones 8.1 y 8.2. (El centroide a menudo no se encuentra sobre la curva misma. Si la curva fuera de alambre y se colocara en un tablero sin peso, el centroide sería el punto de equilibrio del tablero.) Encuentre el centroide del cuarto de círculo $y = \sqrt{16 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

48. El *segundo teorema de Pappus* tiene el mismo espíritu que el teorema de Pappus de la página 565, pero para el área de la superficie en lugar del volumen: que C sea una curva que se encuentra completamente en un lado de una línea l en el plano. Si C se gira alrededor de l, entonces el área de la superficie resultante es el producto de la longitud de arco de C y la distancia recorrida por el centroide C (véase el ejercicio 47).

(a) Demuestre el segundo teorema de Pappus para el caso en que C está dada por $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$ y C se gira sobre el eje x.
(b) Utilice el segundo teorema de Pappus para calcular el área de la superficie de la media esfera obtenida girando la curva del ejercicio 47 sobre el eje x. ¿Su respuesta está de acuerdo con las fórmulas geométricas?

49. Utilice el segundo teorema de Pappus que se describe en el ejercicio 48 para encontrar la superficie del toro en el ejemplo 7.

50. Sea $\mathcal{R}$ la región localizada entre las curvas

$$y = x^m \qquad y = x^n \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

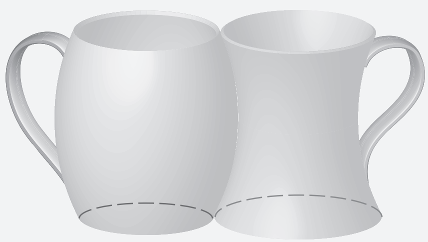
donde m y n son enteros con $0 \leqslant n < m$.
(a) Trace la región $\mathcal{R}$.
(b) Encuentre las coordenadas del centroide de $\mathcal{R}$.
(c) Trate de encontrar los valores de m y n tales que el centroide esté *fuera* de $\mathcal{R}$.

51. Demuestre las fórmulas 9.

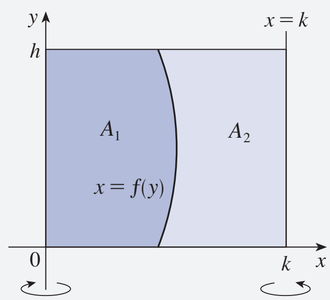
PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

TAZAS DE CAFÉ COMPLEMENTARIAS

Suponga que puede elegir entre los dos tipos de taza de café que se muestran, una que se curva hacia fuera y una hacia dentro, y observe que tienen la misma altura y sus formas se ajustan entre sí. Le interesa saber a qué taza le cabe más café. Naturalmente podría llenar una taza con agua y verter el contenido en la otra, pero como estudiante de cálculo, decide un planteamiento más matemático. Despreciando el asa de cada una, observe que ambas tazas son superficies de revolución, de esta manera puede pensar el café como un volumen de revolución.



Taza A Taza B



1. Suponga que las tazas tienen altura h, la taza A se forma por la rotación de la curva $x = f(y)$ en torno del eje y, y la taza B se forma por la rotación de la misma curva en torno de la recta $x = k$. Encuentre el valor de k tal que las dos tazas contengan la misma cantidad de café.

2. ¿Qué le indica el resultado del inciso 1 respecto a las áreas A_1 y A_2 que se muestran en la figura?

3. Utilice el teorema de Pappus para explicar su resultado en los incisos 1 y 2.

4. Con base en sus medidas y observaciones, sugiera un valor para h y una ecuación para $x = f(y)$ y calcule la cantidad de café que contiene cada una de las tazas.