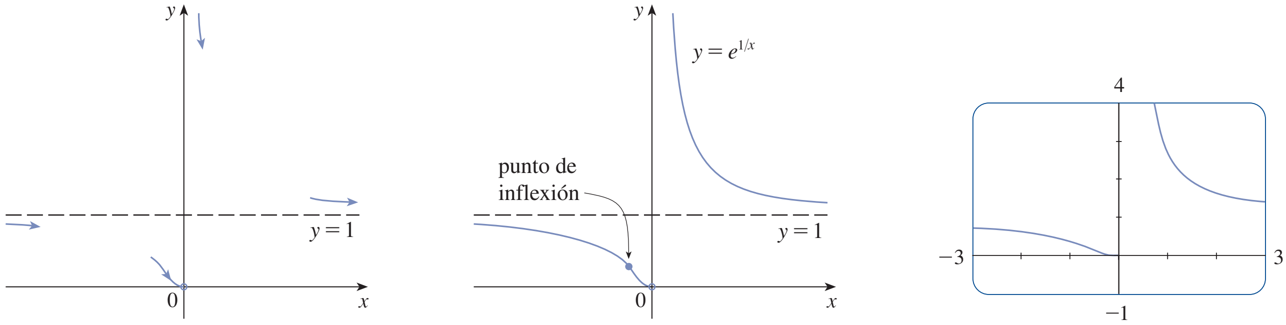
preliminar [figura 13(a)]. Estas partes reflejan la información relativa a los límites y el hecho de que f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Observe que se ha indicado que $f(x) \to 0$ conforme $x \to 0^-$, a pesar de que $f(0)$ no existe. En la figura 13(b) se termina el trazo incorporando la información relativa a la concavidad y el punto de inflexión. En la figura 13(c) se revisa el trabajo con un dispositivo graficador.



(a) Trazo preliminar (b) Trazo terminado (c) Confirmación de la computadora

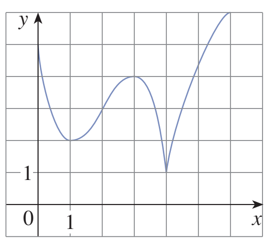
FIGURA 13 ■

4.3 EJERCICIOS

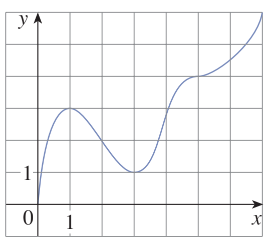
1–2 Utilice la gráfica de f para encontrar lo siguiente.

(a) Los intervalos abiertos en los que f es creciente.
(b) Los intervalos abiertos en los que f es decreciente.
(c) Los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia arriba.
(d) Los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia abajo.
(e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

1.



2.

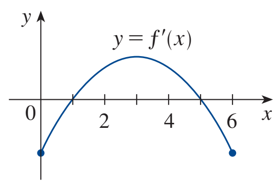


3. Suponga que se le da una fórmula para una función f.
(a) ¿Cómo determinaría dónde f es creciente o decreciente?
(b) ¿Cómo determinaría dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
(c) ¿Dónde se localizan los puntos de inflexión?

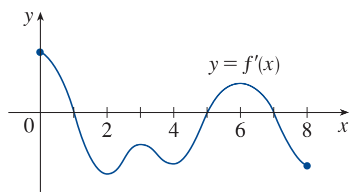
4. (a) Establezca la prueba de la primera derivada.
(b) Establezca la prueba de la segunda derivada. ¿Bajo qué circunstancias no son concluyentes? ¿Qué haría si no es válida?

5–6 En los ejercicios 5 y 6, se muestran las gráficas de la *derivada* f' de una función f.
(a) ¿En qué intervalos f crece o decrece?
(b) ¿Para qué valores de x, f tiene un máximo o mínimo local?

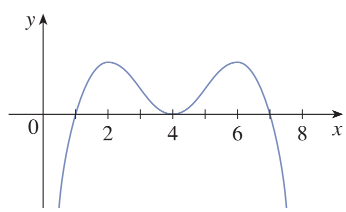
5.



6.



7. En cada inciso establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión de f. Dé las razones de sus respuestas.
(a) La curva dada es la gráfica de f.
(b) La curva dada es la gráfica de f'.
(c) La curva dada es la gráfica de f''.



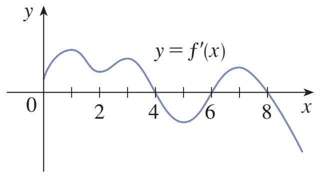
8. Se muestra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.

(a) ¿Sobre qué intervalos f es creciente? Explique.

(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.

(c) ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.

(d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



9–18

(a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.

(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.

(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

9. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

10. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f utilizando las pruebas de la primera y la segunda derivada. ¿Qué método prefiere?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

---

22. (a) Encuentre los números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.

(b) ¿Qué le dice la prueba de la segunda derivada acerca del comportamiento de f en estos números críticos?

(c) ¿Qué le dice la prueba de la primera derivada?

23. Suponga que f'' es continua en $(-\infty, \infty)$.

(a) Si $f'(2) = 0$ y $f''(2) = -5$, ¿qué puede decir acerca de f?

(b) Si $f'(6) = 0$ y $f''(6) = 0$, ¿qué puede decir acerca de f?

24–31 Trace la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones. dadas.

24. (a) $f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x

(b) $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x

25. (a) $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x

(b) $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x

26. $f'(1) = f'(-1) = 0, \quad f'(x) < 0$ si $|x| < 1$.

$f'(x) > 0$ si $1 < |x| > 2, \quad f'(x) = -1$ si $|x| > 2$,

$f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0$, punto de inflexión $(0, 1)$

27. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,

$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$,

$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,

$f''(x) > 0$ si $1 < x < 3, \quad f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

28. $f(x) > 0$ para toda $x \neq 1$, asíntota vertical $x = 1$,

$f''(x) > 0$ si $x < 1$ o $x > 3, \quad f''(x) < 0$ si $1 < x < 3$

29. $f'(5) = 0, \quad f'(x) < 0$ cuando $x < 5$,

$f'(x) > 0$ cuando $x > 5, \quad f''(2) = 0, f''(8) = 0$,

$f''(x) < 0$ cuando $x < 2$ o $x > 8$,

$f''(x) > 0$ para $2 < x < 8, \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

30. $f'(0) = f'(4) = 0, \quad f'(x) = 1$ si $x < -1$

$f'(x) > 0$ si $0 < x < 2$,

$f'(x) < 0$ si $-1 < x < 0$ o $2 < x < 4$ o $x > 4$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = -\infty$,

$f''(x) > 0$ si $-1 < x < 2$ o $2 < x < 4$,

$f''(x) < 0$ si $x > 4$

31. $f'(x) > 0$ si $x \neq 2, \quad f''(x) > 0$ si $x < 2$,

$f''(x) < 0$ si $x > 2$, f tiene punto de inflexión en $(2, 5)$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 8, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

---

32. Suponga que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ y $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x.

(a) Trace una posible gráfica para f.

(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$? ¿Por qué?

(c) ¿Es posible que $f'(2) = \frac{1}{3}$? ¿Por qué?

33. Suponga que f es una función continua donde $f(x) > 0$ para toda x, $f(0) = 4, \quad f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $x > 2$, $f'(x) < 0$ si $0 < x < 2, \quad f''(-1) = f''(1) = 0, \quad f''(x) > 0$ si $x < -1$ o $x > 1, \quad f''(x) < 0$ si $-1 < x < 1$.

(a) ¿Puede f tener un máximo absoluto? Si es así, trace una gráfica posible de f. Si no, explique por qué.

(b) ¿Puede f tener un mínimo absoluto? Si es así, trace una gráfica posible de f. Si no, explique por qué.

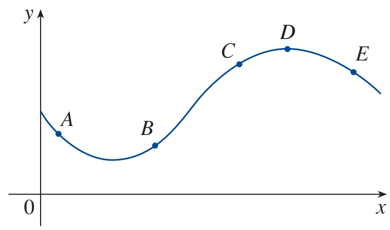
(c) Trace una gráfica posible para f que *no* alcance un mínimo absoluto.

34. Se muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos?

(a) $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ son ambas positivas.

(b) $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ son ambas negativas.

(c) $\dfrac{dy}{dx}$ es negativa pero $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es positiva.



35–36 Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.

(a) ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Decreciente?

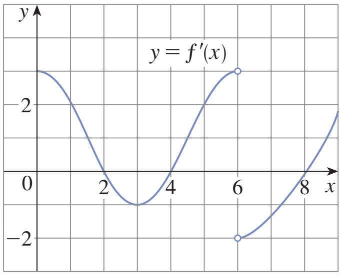
(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿Y un mínimo local?

(c) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba? ¿Cóncava hacia abajo?

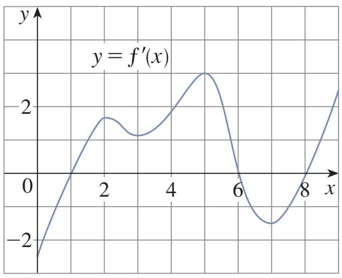
(d) Establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión.

(e) Suponiendo que $f(0) = 0$, trace una gráfica de f.

35.



36.



37–48

(a) Encuentre los intervalos donde crece o decrece.

(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.

(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

(d) Utilice la información de los incisos (a)-(c) para trazar la gráfica. Si tiene un dispositivo graficador, verifique sus respuestas.

37. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

38. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

39. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 3$

40. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

41. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

42. $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

43. $F(x) = x\sqrt{6 - x}$

44. $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

45. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

46. $f(x) = \ln(x^2 + 9)$

47. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

48. $S(x) = x - \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

49–56

(a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.

(b) Encuentre los intervalos donde crece o decrece.

(c) Determine los valores máximos y mínimos locales.

(d) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

(e) Utilice la información de los incisos (a)-(d) para trazar la gráfica de f.

49. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

50. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

51. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

52. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

53. $f(x) = e^{-x^2}$

54. $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

55. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

56. $f(x) = e^{\arctan x}$

57. Suponga que la derivada de una función f es $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. ¿En qué intervalo es f creciente?

58. Utilice los métodos de esta sección para trazar la curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, donde a es una constante positiva. ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de curvas? ¿Cómo difieren entre sí?

59–60

(a) Utilice la gráfica de f para estimar los valores máximos y mínimos. Después, encuentre los valores exactos.

(b) Estime el valor de x en el cual f crece más rápidamente. Luego, encuentre el valor exacto.

59. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

60. $f(x) = x^2e^{-x}$

61–62

(a) Utilice la gráfica de f para dar una estimación aproximada de los intervalos de concavidad y de las coordenadas de los puntos de inflexión.

(b) Utilice la gráfica de f'' para dar estimaciones mejores.

61. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

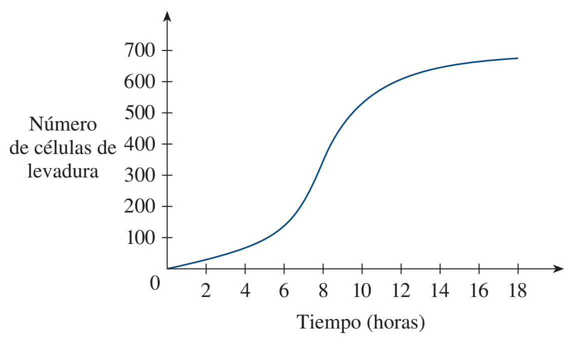
62. $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^3$

SAC **63–64** Estime los intervalos de concavidad redondeados a un decimal mediante un sistema algebraico computacional y la gráfica de f''.

63. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

64. $f(x) = \dfrac{x^2\tan^{-1}x}{1 + x^3}$

65. Se muestra la gráfica de una población de células de levadura en un cultivo de un reciente laboratorio como una función del tiempo.



(a) Describa cómo varía la tasa de crecimiento de la población.

(b) ¿Cuándo la tasa es más alta?
(c) ¿En qué intervalos es la función de población cóncava hacia arriba o hacia abajo?
(d) Estime las coordenadas del punto de inflexión.

66. En las noticias nacionales en la televisión, el locutor dijo: "¡Aquí tenemos una buena noticia! Este año se logró que las calificaciones disminuyeran a un ritmo más lento". Interprete los enunciados del locutor en términos de una función y sus primeras y segundas derivadas.

67. El secretario de economía del gobierno anuncia que el déficit nacional va en aumento, pero a un ritmo decreciente. Interprete este enunciado en términos de una función y sus primeras y segundas derivadas.

68. Sea $f(t)$ la temperatura en el tiempo t donde usted vive y suponga que en el tiempo $t = 3$ se siente incómodamente acalorado. ¿Cómo se siente en relación con los datos dados en cada caso?
(a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$
(b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$
(c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$
(d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

69. Sea $K(t)$ una medida de los conocimientos que obtiene usted estudiando durante t horas para un examen. ¿Cuál cree que es más grande, $K(8) - K(7)$ o $K(3) - K(2)$? ¿Es la gráfica de K cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? ¿Por qué?

70. Se vierte café en una jarrita como la que se ilustra en la figura, con una rapidez constante (medida en unidades de volumen por unidad de tiempo). Trace una gráfica aproximada de la altura ocupada por el café como función del tiempo. Explique la forma de la gráfica en términos de la concavidad. ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?

71. Una *curva de respuesta a un medicamento* describe el nivel de medicación en el torrente sanguíneo después de que un medicamento es administrado. Con frecuencia se aplica una función de onda de impulso $S(t) = At^p e^{-kt}$ para modelar la curva de respuesta, lo que refleja un aumento inicial en el nivel de medicamento y luego un descenso más gradual. Si, para un medicamento particular, $A = 0.01$, $p = 4$, $k = 0.07$ y t se mide en minutos, calcule los tiempos correspondientes a los puntos de inflexión y explique su significado. Si usted dispone de un dispositivo graficador, utilícelo para trazar la gráfica de la curva de respuesta.

72. La familia de curvas de campana

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

se utiliza en probabilidad y estadística y se le denomina *función de densidad normal*. La constante μ se conoce como *media*, y la constante positiva σ es la *desviación estándar*. Por simplicidad, se cambia la escala de la función de modo que se elimine el factor $(1/\sigma\sqrt{2\pi})$ y se analiza el caso especial donde $\mu = 0$. Por tanto, se estudia la función

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encuentre la asíntota, el valor máximo y los puntos de inflexión de f.
(b) ¿Qué papel tiene σ en la forma de la curva?
(c) Ilustre al trazar la gráfica de cuatro miembros de esta familia en la misma pantalla del dispositivo graficador.

73. Encuentre una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga un valor máximo local de 3 en $x = -2$ y un valor mínimo local de 0 en $x = 1$.

74. ¿Para qué valores de los números a y b la función

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tiene el valor máximo $f(2) = 1$?

75. (a) Si la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene el valor mínimo local $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ en $x = 1/\sqrt{3}$, ¿cuáles son los valores de a y b?
(b) ¿Cuál de las rectas tangentes a la curva en el inciso (a) tiene la menor pendiente?

76. ¿Para qué valores de a y b es (2, 2.5) y un punto de inflexión de la curva $x^2y + ax + by = 0$? ¿Qué puntos de inflexión adicionales tiene la curva?

77. Demuestre que la curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tiene tres puntos de inflexión y todos ellos se encuentran sobre una recta.

78. Demuestre que las curvas $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$ tocan la curva $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$ en sus puntos de inflexión.

79. Demuestre que los puntos de inflexión de la curva $y = x \operatorname{sen} x$ están sobre la curva $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$.

80–82 Suponga que todas las funciones son dos veces derivables y las segundas derivadas nunca son 0.

80. (a) Si f y g son cóncavas hacia arriba en I, demuestre que $f + g$ es cóncava hacia arriba en I.
(b) Si f es positiva y cóncava hacia arriba en I, demuestre que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba en I.

81. (a) Si f y g son positivas, crecientes y funciones cóncavas hacia arriba en I, demuestre que la función producto fg es cóncava hacia arriba en I.
(b) Demuestre que el inciso (a) es verdadero si f y g son decrecientes.
(c) Suponga que f es creciente y g es decreciente. Muestre, dando tres ejemplos, que fg puede ser cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o lineal. ¿Por qué no funciona en este caso el argumento de los incisos (a) y (b)?

82. Suponga que f y g son cóncavas hacia arriba en $(-\infty, \infty)$. ¿Bajo qué condiciones sobre f será la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ cóncava hacia arriba?

83. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugerencia*: demuestre que $f(x) = \tan x - x$ es creciente en $(0, \pi/2)$.]

84. (a) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.
(b) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.
(c) Use inducción matemática para demostrar que para $x \geqslant 0$ y cualquier número entero positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

85. Demuestre que una función cúbica (una polinomial de tercer grado) siempre tiene exactamente un punto de inflexión. Si la gráfica tiene tres intersecciones en x: x_1, x_2 y x_3, demuestre que la coordenada x del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

86. ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tiene dos puntos de inflexión? ¿Un punto de inflexión? ¿Ninguno? Ilustre al trazar la gráfica de P para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c decrece?

87. Demuestre que si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f y f'' existe en un intervalo abierto que contiene a c, entonces $f''(c) = 0$. [*Sugerencia*: aplique la prueba de la primera derivada y el teorema de Fermat a la función $g = f'$.]

88. Demuestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

89. Demuestre que la función $g(x) = x\,|\,x\,|$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, pero $g''(0)$ no existe.

90. Suponga que f''' es continua y $f'(c) = f''(c) = 0$, pero $f'''(c) > 0$. ¿f tiene un máximo o mínimo local en c? ¿f tiene un punto de inflexión en c?

91. Suponga que f es derivable sobre un intervalo I y $f'(x) > 0$ para todos los números x en I, excepto por un único número c. Demuestre que f es creciente sobre todo el intervalo I.

92. Para qué valores de c la función

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + 3}$$

es creciente sobre $(-\infty, \infty)$?

93. Los tres casos en la prueba de la primera derivada cubren las situaciones que uno se encuentra con frecuencia, pero no agotan todas las posibilidades. Considere las funciones f, g y h cuyos valores en 0 son todas cero y, para $x \neq 0$,

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

(a) Demuestre que 0 es un número crítico de las tres funciones, pero sus derivadas cambian de signo infinitamente por ambos lados de 0.
(b) Demuestre que f no tiene un máximo local ni un mínimo local en 0, g tiene un mínimo local y h tiene un máximo local.

4.4 Formas indeterminadas y regla de L'Hôpital

Suponga que se trata de analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aunque F no está definida cuando $x = 1$, se necesita saber cómo se comporta *cerca* de 1. En particular, le gustaría saber el valor del límite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Para el cálculo de este límite no se puede aplicar la ley 5 de los límites (el límite de un cociente es el cociente de los límites, consulte la sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aunque en la expresión (1) existe el límite, su valor no es obvio porque el numerador y denominador tienden a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido.

En general, si se tiene un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to 0$ como $g(x) \to 0$ conforme $x \to a$, entonces este límite puede o no puede existir y se llama **forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.** Se encuentran algunos límites de este tipo en el capítulo 2. Para funciones racionales, se pueden eliminar factores comunes:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$