CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.3

1. Realice las siguientes multiplicaciones de matriz-vector:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-vector:

a. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-matriz:

a. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-matriz:

a. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

5. Determine cuáles de las siguientes matrices son no singulares y calcule la inversa de esas matrices:

a. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Determine cuáles de las siguientes matrices son no singulares y calcule la inversa de esas matrices:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

7. Dados los sistemas lineales 4×4 que tienen la misma matriz de coeficientes:

$$\begin{array}{rl}
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1,\\
x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 4, & x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 1,\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2,\\
-x_2 + x_3 - x_4 = 5; & -x_2 + x_3 - x_4 = -1.
\end{array}$$

a. Resuelva los sistemas lineales al aplicar la eliminación gaussiana a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rrrr:rr} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right].$$

b. Resuelva los sistemas lineales al encontrar y multiplicar por la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -4\\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c. ¿Qué método requiere más operaciones?

8. Considere los cuatro sistemas lineales 3×3 que tienen la misma matriz de coeficientes:

$$\begin{array}{rl}
2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6,\\
x_1 + x_2 - x_3 = -1, & x_1 + x_2 - x_3 = 4,\\
-x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; & -x_1 + x_2 - 3x_3 = 5;
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1,\\
x_1 + x_2 - x_3 = 1, & x_1 + x_2 - x_3 = 0,\\
-x_1 + x_2 - 3x_3 = -3; & -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0.
\end{array}$$

a. Resuelva los sistemas lineales al aplicar la eliminación gaussiana a la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr:rrrr} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -3 & 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right].$$

b. Resuelva los sistemas lineales al encontrar y multiplicar por la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

c. ¿Qué método requiere más operaciones?

9. A menudo es útil dividir las matrices en una colección de submatrices. Por ejemplo, las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & -3\\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 0\\ 3 & 0 & 4 & 5\\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

se pueden dividir en

$$\left[\begin{array}{rr:r} 1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & -3\\ \hdashline 6 & 5 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12}\\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{rrr:r} 2 & -1 & 7 & 0\\ 3 & 0 & 4 & 5\\ \hdashline -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12}\\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

a. Muestre que el producto de A y B en este caso es

$$AB = \left[\begin{array}{c:c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}\\ \hdashline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

b. Si B se dividiera en

$$B = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right],$$

¿el resultado en la parte a) se mantendría?

c. Realice una conjetura respecto a las condiciones necesarias para el resultado en la parte a) para mantener el caso general.

EJERCICIOS APLICADOS

10. El estudio de cadenas alimenticias es un tema importante para determinar la distribución y acumulación de contaminantes ambientales en la materia viva. Suponga que una cadena de alimentos tiene tres vínculos. El primero consiste en vegetación de tipo $v_1, v_2, \ldots, v_n$, que provee requisitos alimenticios para los herbívoros de las especies $h_1, h_2, \ldots, h_m$ en el segundo vínculo. El tercer vínculo consiste en los animales carnívoros $c_1, c_2, \ldots, c_k$, que dependen enteramente de los herbívoros en el segundo vínculo para su suministro de comida. La entrada a_{ij} de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

representa el número total de plantas tipo v_i consumidas por los herbívoros en las especies h_j, mientras b_{ij} en

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

describe el número de herbívoros en las especies h_i que son devorados por los animales de tipo c_j.

a. Muestre que el número de plantas tipo v_i que al final terminaron en los animales de especies c_j está determinado por la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz AB.

b. ¿Qué importancia física está relacionada con las matrices A^{-1}, B^{-1}, y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$?

11. En un artículo titulado "Population Waves" ("Ondas de población") Bernadelli [Ber] (también consulte [Se]) realiza la hipótesis de que un tipo de escarabajo simplificado tiene un periodo de vida natural de tres años. Las hembras de esta especie tienen una tasa de supervivencia de $\frac{1}{2}$ en el primer año de vida, una de $\frac{1}{3}$ del segundo al tercer año y procrea un promedio de seis hembras nuevas antes de expirar al final del tercer año. Se puede utilizar una matriz para mostrar la contribución de una sola hembra, en un sentido probabilístico, a la población de hembras de la especie al permitir que a_{ij} en la matriz $A = [a_{ij}]$ denote la contribución que un solo escarabajo de edad j realizaría a la población de hembras de edad i el año siguiente; es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Por lo tanto, la contribución de un escarabajo femenino para la población de dos años se determina a partir de las entradas de A^2, de tres años a partir de A^3, y así sucesivamente. Construya A^2 y A^3, e intente realizar una declaración general sobre la contribución de un escarabajo hembra para la población en n años tiempo para cualquier valor entero positivo de n.

b. Utilice sus conclusiones a partir de a) para describir lo que pasará en los años futuros a una población de estos escarabajos que consiste inicialmente en 6000 escarabajos hembra en cada uno de los tres grupos de edad.

c. Construya A^{-1} y describa su importancia respecto a la población de estas especies.

EJERCICIOS TEÓRICOS

12. Pruebe las siguientes declaraciones o proporcione contraejemplos para mostrar que no son verdaderas.

a. El producto de dos matrices simétricas es simétrico.

b. La inversa de una matriz simétrica no singular es una matriz simétrica no singular.

c. Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $(AB)^t = A^t B^t$.

13. Las siguientes declaraciones son necesarias para probar el teorema 6.12.

a. Muestre que si A^{-1} existe, es única.

b. Muestre que si A es no singular, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

c. Muestre que si A y B son matrices $n \times n$ no singulares, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

14. **a.** Muestre que el producto de dos matrices triangulares inferiores $n \times n$ es triangular inferior.

b. Muestre que el producto de dos matrices triangulares superiores $n \times n$ es triangular superior.

c. Muestre que la inversa de una matriz triangular inferior no singular $n \times n$ es triangular inferior.

15. En la sección 3.6 encontramos que la forma paramétrica $(x(t), y(t))$ de los polinomios cúbicos de Hermite $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ y $(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ con puntos indicadores $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$ y $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1)$, respectivamente, están dados por

$$x(t) = (2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1))\, t^3 + (3(x_1 - x_0) - \alpha_1 - 2\alpha_0)\, t^2 + \alpha_0 t + x_0$$

y

$$y(t) = (2(y_0 - y_1) + (\beta_0 + \beta_1))\, t^3 + (3(y_1 - y_0) - \beta_1 - 2\beta_0)\, t^2 + \beta_0 t + y_0.$$

Los polinomios cúbicos de Bézier tienen la forma

$$\hat{x}(t) = (2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1))\, t^3 + (3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0))\, t^2 + 3\alpha_0 t + x_0$$

y

$$\hat{y}(t) = (2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1))\, t^3 + (3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0))\, t^2 + 3\beta_0 t + y_0.$$

a. Muestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transforma los coeficientes del polinomio de Hermite en los coeficientes del polinomio de Bézier.

b. Determine una matriz B que transforme los coeficientes del polinomio de Bézier en coeficientes del polinomio de Hermite.

16. Suponga que m sistemas lineales

$$A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots, m,$$

se resuelven, cada uno con la matriz de coeficientes $n \times n$ A.

a. Muestre que la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás aplicada a la matriz aumentada

$$\left[\; A : \quad \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} \cdots \mathbf{b}^{(m)} \;\right]$$

requiere

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n^2 - mn + \frac{1}{6}n \quad \text{sumas/restas.}$$

b. Muestre que el método Gauss-Jordan (consulte el ejercicio 14, sección 6.1) aplicado a la matriz aumentada

$$\left[\; A : \quad \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} \cdots \mathbf{b}^{(m)} \;\right]$$

requiere

$$\frac{1}{2}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{1}{2}n^3 + (m-1)n^2 + \left(\frac{1}{2} - m\right)n \quad \text{sumas/restas.}$$

c. Para el caso especial

$$\mathbf{b}^{(p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow p\text{-ésima fila},$$

para cada $p = 1, \ldots, m$, con $m = n$, la solución $\mathbf{x}^{(p)}$ es la p-ésima columna de A^{-1}. Muestre que la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás requiere

$$\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{4}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad \text{sumas/restas}$$

para esta aplicación y que el método Gauss-Jordan requiere

$$\frac{3}{2}n^3 - \frac{1}{2}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{3}{2}n^3 - 2n^2 + \frac{1}{2}n \quad \text{sumas/restas.}$$

d. Construya un algoritmo usando la eliminación gaussiana para encontrar A^{-1}, pero no haga multiplicaciones cuando se sepa que uno de los multiplicadores es 1 y no realice sumas/restas cuando uno de los elementos implicados sea 0. Muestre que los cálculos requeridos se reducen a n^3 multiplicaciones/divisiones y $n^3 - 2n^2 + n$ sumas/restas.

e. Muestre que resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cuando se conoce A^{-1} sigue requiriendo n^2 multiplicaciones/divisiones y $n^2 - n$ sumas/restas.

f. Muestre que resolver m sistemas lineales $A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}$, para $p = 1, 2, \ldots, m$, por el método $\mathbf{x}^{(p)} = A^{-1}\mathbf{b}^{(p)}$ requiere mn^2 multiplicaciones y $m(n^2 - n)$ sumas si se conoce A^{-1}.

g. Sea A una matriz $n \times n$. Compare el número de operaciones requeridas para resolver n sistemas lineales relacionados con A mediante eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y al invertir primero A y después, multiplicar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por A^{-1}, para $n = 3, 10, 50$ y 100. ¿En algún punto es ventajoso calcular A^{-1} para resolver sistemas lineales?

17. Utilice el algoritmo desarrollado en el ejercicio 16d) para encontrar las inversas de las matrices no singulares en el ejercicio 5.

18. Considere el sistema lineal 2×2 $(A + iB)(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \mathbf{c} + i\mathbf{d}$ con entradas complejas en forma de componente:

$$(a_{11} + ib_{11})(x_1 + iy_1) + (a_{12} + ib_{12})(x_2 + iy_2) = c_1 + id_1,$$
$$(a_{21} + ib_{21})(x_1 + iy_1) + (a_{22} + ib_{22})(x_2 + iy_2) = c_2 + id_2.$$

a. Utilice las propiedades de los números complejos para convertir este sistema al sistema lineal real equivalente 4×4

$$A\mathbf{x} - B\mathbf{y} = \mathbf{c},$$
$$B\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{d}.$$

b. Resuelva el sistema lineal

$$(1-2i)(x_1+iy_1)+(3+2i)(x_2+iy_2)=5+2i,$$
$$(2+i)(x_1+iy_1)+(4+3i)(x_2+iy_2)=4-i.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La declaración "todas las matrices diagonales son cuadradas" es verdadera o falsa? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Todas las matrices cuadradas tienen una inversa? ¿Por qué sí o por qué no?
3. ¿Una alteración muy pequeña en una matriz cuadrada singular puede crear una matriz no singular? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.4

1. Utilice la definición 6.15 para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. Utilice la definición 6.15 para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. Repita el ejercicio 1 usando el método del ejemplo 2.

4. Repita el ejercicio 2 usando el método del ejemplo 2.

5. Encuentre los valores de α que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

6. Encuentre los valores de α que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Encuentre los valores de α de tal forma que el siguiente sistema lineal no tenga soluciones.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

8. Encuentre los valores de α de tal forma que el siguiente sistema lineal tenga un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$