Capítulo 7

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.1

1. Encuentre las normas l_∞ y l_2 de los vectores.

a. $\mathbf{x} = (3, -4, 0, \frac{3}{2})^t$

b. $\mathbf{x} = (2, 1, -3, 4)^t$

c. $\mathbf{x} = (\operatorname{sen} k, \cos k, 2^k)^t$ para un entero positivo fijo k

d. $\mathbf{x} = (4/(k+1), 2/k^2, k^2e^{-k})^t$ para un entero positivo fijo k

2. Encuentre las normas l_∞ y l_2 de los vectores.

a. $\mathbf{x} = (2, -2, 1)^t$

b. $\mathbf{x} = (-4/5, -2/5, 1/5, 2/5)^t$

c. $\mathbf{x} = ((2+k)/k, 1/\sqrt{k}, -3)^t$ para un entero positivo fijo k

d. $\mathbf{x} = ((3k+1)/(2k), 2, 0, 1/k)^t$ para un entero positivo fijo k

3. Pruebe que las siguientes sucesiones son convergentes y encuentre sus límites.

a. $\mathbf{x}^{(k)} = (1/k, e^{1-k}, -2/k^2)^t$

b. $\mathbf{x}^{(k)} = \left(e^{-k}\cos k, k\operatorname{sen}(1/k), 3 + k^{-2}\right)^t$

c. $\mathbf{x}^{(k)} = (ke^{-k^2}, (\cos k)/k, \sqrt{k^2+k} - k)^t$

d. $\mathbf{x}^{(k)} = (e^{1/k}, (k^2+1)/(1-k^2), (1/k^2)(1+3+5+\cdots+(2k-1)))^t$

4. Pruebe que las siguientes sucesiones son convergentes y encuentre sus límites.

a. $\mathbf{x}^{(k)} = (2 + 1/k, -2 + 1/k, 1 + 1/k^2)^t$

b. $\mathbf{x}^{(k)} = ((2+k)/k, k/(2+k), (2k+1)/k)^t$

c. $\mathbf{x}^{(k)} = ((3k+1)/k^2, (1/k)\ln k, k^2e^{-k}, 2k/(1+2k))^t$

d. $\mathbf{x}^{(k)} = \left(\dfrac{\cos k}{k}, \dfrac{\operatorname{sen} k}{k}, \dfrac{1-k}{k^2+1}, \dfrac{3k-2}{4k+1}\right)^t$

5. Encuentre la norma l_∞ de las matrices.

a. $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

6. Encuentre la norma l_∞ de las matrices.

a. $\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 11 & -11 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \pi & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

7. Los siguientes sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tienen x como la solución real y $\tilde{\mathbf{x}}$ como una solución aproximada. Calcule $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ y $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty$.

a.
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63},$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168},$$
$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t.$$

b.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2,$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.33, -7.9, 5.8)^t.$$

c.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2,$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.2, -7.5, 5.4)^t.$$

d.
$$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06,$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11,$$
$$\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t.$$

8. Los siguientes sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tienen x como la solución real y $\tilde{\mathbf{x}}$ como una solución aproximada. Calcule $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ y $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty$.

a.
$$3.9x_1 + 1.5x_2 = 5.4,$$
$$6.8x_1 - 2.9x_2 = 3.9,$$
$$\mathbf{x} = (1, 1)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.98, 1.02)^t.$$

b.
$$x_1 + 2x_2 = 3,$$
$$1.001x_1 - x_2 = 0.001,$$
$$\mathbf{x} = (1, 1)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.02, 0.98)^t.$$

c.
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2\pi,$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$
$$x_1 \quad + x_3 = \pi,$$
$$\mathbf{x} = (0, \pi, \pi)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.1, 3.18, 3.10)^t.$$

d.
$$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.0478,$$
$$0.4x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 = 0.413,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.14,$$
$$\mathbf{x} = (1.81, -1.81, 0.65)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (2, -2, 1)^t.$$

EJERCICIOS TEÓRICOS

9. **a.** Verifique que la función $\|\cdot\|_1$, definida en $\mathbb{R}^n$ mediante

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$.

b. Encuentre $\|\mathbf{x}\|_1$ para los vectores determinados en el ejercicio 1.

c. Pruebe eso para todas las $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_2$.

10. La norma matricial $\|\cdot\|_1$, definida por $\|A\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$, se puede calcular con la fórmula

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

donde la norma vectorial $\|\cdot\|_1$, se define en el ejercicio 9. Encuentre $\|\cdot\|_1$, para las matrices en el ejercicio 5.

11. Muestre con un ejemplo que $\|\cdot\|_\infty$, definida por $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$, no define una norma matricial.

12. Muestre que $\|\cdot\|_{①}$, definida por

$$\|A\|_{①} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

es una norma matricial. Encuentre $\|\cdot\|_{①}$, para las matrices en el ejercicio 5.

13. **a.** La norma de Frobenius (que no es una norma natural) se define para una matriz A $n \times n$ mediante

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Muestre que $\|\cdot\|_F$ es una norma matricial.

b. Encuentre $\|\cdot\|_F$ para las matrices en el ejercicio 5.

c. Para cualquier matriz A, muestre que $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq n^{1/2}\|A\|_2$.

14. En el ejercicio 13 se definió la norma de Frobenius de una matriz. Muestre que para cualquier matriz A $n \times n$ y vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.

15. Si S es una matriz definida positiva $n \times n$. Para cualquier $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ defina $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}$. Muestre que esto define una norma en $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: Utilice la factorización Cholesky para S y muestre que $\mathbf{x}^t S\mathbf{y} = \mathbf{y}^t S\mathbf{x} \leq (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}^t S\mathbf{y})^{1/2}$.]

16. Si S es una matriz real y no singular y si $\|\cdot\|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^n$. Defina $\|\cdot\|'$ por $\|\mathbf{x}\|' = \|S\mathbf{x}\|$. Muestre que $\|\cdot\|'$ también es una norma en $\mathbb{R}^n$.

17. Pruebe que si $\|\cdot\|$ es una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$, entonces $\|A\| = \text{máx}_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$ es una norma matricial.

18. El siguiente extracto de *Mathematics Magazine* [Sz] proporciona una forma alternativa de probar la desigualdad de Cauchy-Buniakowsky-Schwarz.

a. Muestre que cuando $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, tenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}} - \frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)^{1/2}} \right)^2.$$

b. Utilice el resultado en la parte a) para mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

19. Muestre que la desigualdad Cauchy-Buniakowsky-Schwarz se puede extender a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El análisis del error para problemas relacionados con vectores y matrices implica medir el tamaño de los errores en un vector o matriz. Existen dos tipos comunes de análisis de error que se usan para este propósito. ¿Qué son y cómo se utilizan las normas vectoriales y matriciales?
2. ¿Cuál es la norma espectral y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?
3. ¿Qué es una norma p y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?
4. ¿Qué es una norma de Frobenius y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.2

1. Calcule los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$