EJEMPLO 8 Use la propiedad 8 para estimar $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Debido a que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente sobre [0, 1], su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$. De la propiedad 8

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0)$$

o

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Ya que $e^{-1} \approx 0.3679$, se puede escribir

$$0.367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

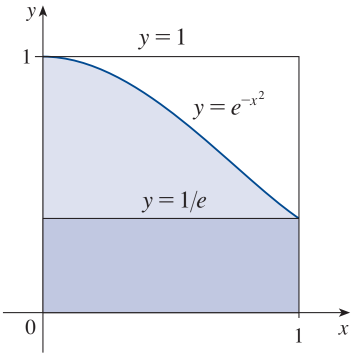


FIGURA 17

El resultado del ejemplo 8 se ilustra en la figura 17. La integral es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del cuadrado.

5.2 EJERCICIOS

1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x - 1$, $-6 \leqslant x \leqslant 4$, con cinco subintervalos, tomando los puntos finales izquierdos como los puntos muestra. Con ayuda de un diagrama, explique qué representa la suma de Riemann.

2. Si

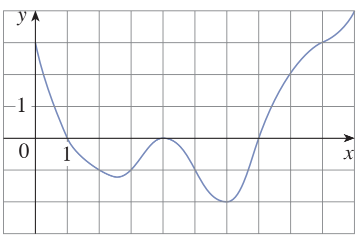
$$f(x) = \cos x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$$

evalúe la suma de Riemann con $n = 6$ tomando los puntos finales izquierdos como los puntos muestra (Dé su respuesta redondeada a seis decimales). ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

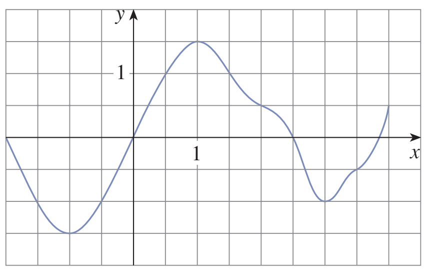
3. Si $f(x) = x^2 - 4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, determine la suma de Riemann con $n = 6$ tomando los puntos finales derechos como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

4. (a) Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, con cuatro términos, tomando los puntos muestra como los puntos finales derechos. (Dé su respuesta redondeada a seis decimales.) Explique, con ayuda de un diagrama, qué representa la suma de Riemann.
(b) Repita el inciso (a) con los puntos medios como los puntos muestra.

5. Se da la gráfica de una función. Estime $\int_0^{10} f(x)\,dx$ usando cinco subintervalos con (a) los puntos finales derechos, (b) los puntos finales izquierdos y (c) los puntos medios.



6. Se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando (a) los puntos finales derechos, (b) los puntos finales izquierdos y (c) los puntos medios.



7. Se presenta una tabla de valores de una función creciente f. Utilícela para hacer estimaciones inferiores y superiores de $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

8. En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_3^9 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con (a) los puntos finales derechos, (b) los puntos finales izquierdos y (c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-3.4	-2.1	-0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

9–12 Use la regla del punto medio, con el valor dado de n, para encontrar una aproximación de cada una de las integrales siguientes. Redondee cada respuesta a cuatro cifras decimales.

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx, \quad n = 4$ **10.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1}\, dx, \quad n = 5$

11. $\displaystyle\int_1^5 x^2 e^{-x}\, dx, \quad n = 4$ **12.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^2 x\, dx, \quad n = 4$

SAC **13.** Si tiene un SAC que evalúe las aproximaciones con los puntos medios y trace los rectángulos correspondientes (en Maple, use las instrucciones `RiemannSum` o `middlesum` y `middlebox`), compruebe la respuesta del ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. Después, repita con $n = 10$ y $n = 20$.

14. Con una calculadora programable o una computadora (véanse las instrucciones para el ejercicio 5.1.9), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x) = x/(x + 1)$ sobre el intervalo $[0, 2]$, con $n = 100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$0.8946 < \int_0^2 \frac{x}{x+1}\, dx < 0.9081$$

15. Use una calculadora o una computadora para hacer una tabla de valores de sumas de la derecha de Riemann R_n para la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿A qué valor parecen aproximarse estos números?

16. Use calculadora o computadora para hacer una tabla de valores de las sumas de Riemann de la izquierda y de la derecha L_n y R_n para la integral $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿Entre qué números tiene que encontrarse el valor de la integral? ¿Puede formular un enunciado similar para la integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$? Explique su respuesta.

17–20 Exprese cada uno de los límites siguientes como una integral definida sobre el intervalo dado.

17. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1 + x_i}\Delta x, \quad [0, 1]$

18. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{1 + x_i^3}\; \Delta x, \quad [2, 5]$

19. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\, \Delta x, \quad [2, 6]$

20. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i}\Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

21–25 Use la forma de la definición de integral que se dio en el teorema 4 para evaluar la integral.

21. $\displaystyle\int_{-1}^{5} (1 + 3x)\, dx$ **22.** $\displaystyle\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\, dx$

23. $\displaystyle\int_{-2}^{0} (x^2 + x)\, dx$ **24.** $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^3)\, dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 3x^2)\, dx$

26. (a) Determine una aproximación a la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$, usando una suma de Riemann con puntos finales derechos y $n = 8$.
(b) Dibuje un diagrama como el de la figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso (a).
(c) Aplique el teorema 4 para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.
(d) Interprete la integral del inciso (c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la figura 4.

27. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Exprese la integral como un límite de sumas de Riemann. No evalúe el límite.

29. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{4 + x^2}\, dx$ **30.** $\displaystyle\int_2^5 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$

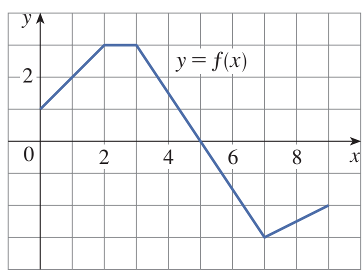
SAC **31–32** Exprese cada una de las integrales siguientes como un límite de sumas. Después, evalúe utilizando un sistema algebraico computacional para encontrar tanto la suma como el límite.

31. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 5x\, dx$ **32.** $\displaystyle\int_2^{10} x^6\, dx$

33. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada una de las integrales siguientes interpretándola en términos de áreas.

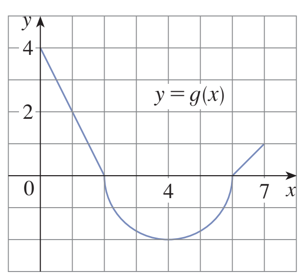
(a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\, dx$

(c) $\displaystyle\int_5^7 f(x)\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^9 f(x)\, dx$



34. La gráfica g consiste en dos rectas y una semicircunferencia. Úsela para evaluar cada una de las integrales siguientes.

(a) $\displaystyle\int_0^2 g(x)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_2^6 g(x)\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^7 g(x)\, dx$



35–40 Evalúe cada una de las integrales siguientes interpretándola en términos de áreas.

35. $\int_2^4 (1 - x)\,dx$ **36.** $\int_0^9 \left(\frac{1}{3}x - 2\right)dx$

37. $\int_{-3}^0 \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right)dx$ **38.** $\int_{-5}^5 \left(x - \sqrt{25 - x^2}\right)dx$

39. $\int_{-4}^3 \left|\frac{1}{2}x\right|dx$ **40.** $\int_0^1 |2x - 1|\,dx$

41. Evalúe $\int_1^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$.

42. Ya que $\int_0^\pi \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{3}{8}\pi$, ¿a qué es igual $\int_\pi^0 \operatorname{sen}^4 \theta\,d\theta$?

43. En el ejemplo 5.1.2, se demostró que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Utilice este hecho y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (5 - 6x^2)\,dx$.

44. Utilice las propiedades de las integrales y el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 (2e^x - 1)\,dx$.

45. Utilice el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 e^{x+2}\,dx$.

46. A partir de los resultados del ejercicio 27 y del hecho de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$ (del ejercicio 5.1.31), junto con las propiedades de las integrales, evalúe $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\,dx$.

47. Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_{-2}^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

48. Si $\int_2^8 f(x)\,dx = 7.3$ y $\int_2^4 f(x)\,dx = 5.9$, encuentre $\int_4^8 f(x)\,dx$.

49. Si $\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\,dx = 16$, encuentre

$$\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$$

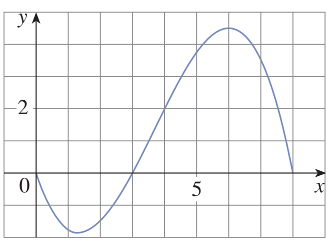
50. Encuentre $\int_0^5 f(x)\,dx$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

51. Para la función f cuya gráfica se muestra, presente las cantidades en orden creciente, de menor a mayor, y explique su razonamiento.

(A) $\int_0^8 f(x)\,dx$ (B) $\int_0^3 f(x)\,dx$ (C) $\int_3^8 f(x)\,dx$

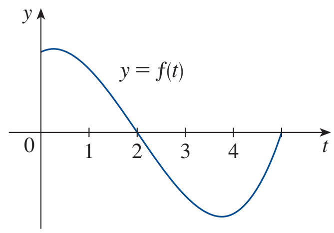
(D) $\int_4^8 f(x)\,dx$ (E) $f'(1)$



52. Si $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica está dada, ¿cuál de los valores siguientes es el más grande?

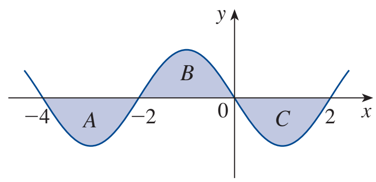
(A) $F(0)$ (B) $F(1)$ (C) $F(2)$

(D) $F(3)$ (E) $F(4)$



53. Cada una de las regiones A, B, y C, acotadas por la gráfica de f y el eje x, tiene área 3. Encuentre el valor de

$$\int_{-4}^2 [f(x) + 2x + 5]\,dx$$



54. Suponga que f tiene el valor mínimo absoluto m y el valor máximo absoluto M. ¿Entre qué valores se encuentra $\int_0^2 f(x)\,dx$? ¿Qué propiedad de las integrales le permite sostener su conclusión?

55–58 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

55. $\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\,dx \geqslant 0$

56. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$

57. $2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant 2\sqrt{2}$

58. $\dfrac{\pi}{12} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x\,dx \leqslant \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{12}$

59–64 Utilice la propiedad 8 para estimar el valor de cada una de las integrales siguientes.

59. $\int_0^1 x^3\,dx$ **60.** $\int_0^3 \dfrac{1}{x + 4}\,dx$

61. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$ **62.** $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$

63. $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$ **64.** $\int_\pi^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

65–66 Mediante las propiedades de las integrales, junto con los ejercicios 27 y 28, demuestre cada una de las desigualdades siguientes.

65. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\,dx \geqslant \dfrac{26}{3}$ **66.** $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}$

67. ¿Cuál de las integrales $\int_1^2 \arctan x\,dx$, $\int_1^2 \arctan \sqrt{x}\,dx$ y $\int_1^2 \arctan(\operatorname{sen} x)\,dx$ tiene el valor más grande? ¿Por qué?

68. ¿Cuál de las integrales $\int_0^{0.5} \cos(x^2)\,dx$, $\int_0^{0.5} \cos\sqrt{x}\,dx$ tiene el valor más grande? ¿Por qué?

69. Demuestre la propiedad 3 de las integrales.

70. (a) Si f es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

[*Sugerencia:* $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.]

(b) Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\,dx\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

71. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$.

72. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1/x$ si $0 < x \leqslant 1$. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$. [*Sugerencia*: demuestre que el primer término en la suma de Riemann, $f(x_i^*)\Delta x$, se puede hacer de manera arbitraria muy grande].

73–74 Exprese cada uno de los límites siguientes como una integral definida.

73. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia*: considere $f(x) = x^4$.]

74. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^2}$

---

75. Determine $\int_1^2 x^{-2}\,dx$. *Sugerencia:* elija x_i^* como la media geométrica x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO FUNCIONES DE ÁREAS

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y utilice la geometría para hallar el área bajo esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.

(b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra bajo la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría para encontrar una expresión para $A(x)$.

(c) Derive la función del área $A(x)$. ¿Qué observa?

2. (a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\,dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Describa y trace la gráfica de la región.

(b) A partir de los resultados del ejercicio 5.2.28 encuentre una expresión para $A(x)$.

(c) Determine $A'(x)$. ¿Qué observa?

(d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño, entonces $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y trace la gráfica de la región.

(e) Dibuje un rectángulo que aproxime la región del inciso (d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones, demuestre que

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Mediante el inciso (e) proporcione una explicación intuitiva del resultado del inciso (c).

3. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ en el rectángulo de vista $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.

(b) Si define una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$$

entonces $g(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 a x [hasta que $f(x)$ sea negativa, en cuyo punto $g(x)$ es una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso (a) para