< 30'.

EXAMEN PARCIAL 1 – MATEMÁTICAS

IOI, II Y IIAA

DATOS DEL ALUMNO

Nombre y apellidos: Jorge Crespo Alvarez.

D.N.I.:

Grado: Profesor

NORMATIVA

NO se permite el uso **de teléfono móvil o cualquier otro aparato** de comunicación durante el desarrollo del examen. En todo caso, dichos aparatos deberán estar completamente desconectados.

Se debe entregar el examen con los datos identificativos en la cabecera, aunque no se haya contestado ninguna pregunta.

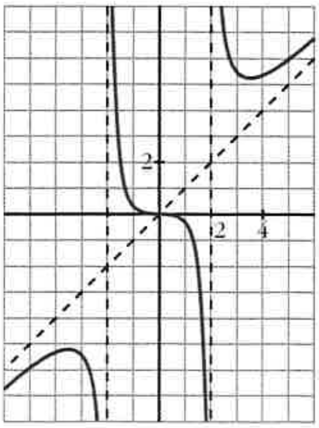
Las respuestas deben desarrollarse en las hojas de respuestas y cada una debe identificarse claramente.

Antes de responder, le aconsejamos que lea el enunciado de cada pregunta atentamente para asegurarse de que lo comprende bien. Asimismo, emplee el tiempo suficiente para realizar el examen y no olvide volver a repasar todas y cada una de las respuestas.

En el caso de que se detecte que un alumno o alumna está copiando, deberá abandonar inmediatamente el examen y este será calificado con cero puntos. Este hecho será puesto en conocimiento del director académico del grado.

ENUNCIADOS

1. **(4 puntos)**. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$; cuya gráfica se muestra a continuación:



a) Encuentre todas las asíntotas de f(x). **(2 puntos)**

b) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de f(x). **(2 puntos)**

2. **(2 puntos)**. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos x^2 & x < 0 \\ a & \mathrm{x} = 0 \\ e^{x^2} + b & x > 0 \end{cases}$;

a) Encuentre los valores de a y b de forma tal que la función sea continua. **(1 punto)**

b) Analice si la función es derivable en x = 0. **(1 punto)**

3. **(3 puntos)**. Dada la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2 + 1}$$

a) Investigue si se puede aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo [-π ; π]. **(1 punto)**

b) Utilice el Teorema de Lagrange para calcular de forma aproximada *f*(0,1). **(2 puntos)**

4. **(1 punto)** Utilice la definición de derivada (límite del cociente incremental) para demostrar que:

$$(e^x)' = e^x$$

DATOS DEL ALUMNO

Nombre y apellidos:

D.N.I.:

Grado:

HOJA DE RESPUESTAS

A continuación, responda a cada una de las preguntas:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

Dom: $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pm 2\}$

A. Verticales.

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = -\infty$ 0,2 $\quad \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = -\infty$ 0,2

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = +\infty$ 0,2 $\quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = +\infty$ 0,2

Las rectas $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales de f. 0,2

A. Horizontales

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$ 0,1

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = -\infty$ 0,1

$\therefore$ No hay asíntota Horizontal. 0,2

A. Oblicua.

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = 1 \qquad 0{,}1$$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = 1. \qquad 0{,}1$$

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-4} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+4x}{x^2-4} = 0. \qquad 0{,}1$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-4} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4} = 0. \qquad 0{,}1$$

La recta $y=x$ es asíntota oblicua de f. 0,2

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3(2x)}{[x^2-4]^2} = \frac{3x^4-12x^2-2x^4}{[x^2-4]^2} = \frac{x^4-12x^2}{[x^2-4]^2}$$

0,2 0,2 0,2

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{[x^2-4]^2}$$

		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
	$+\nearrow$		$\searrow$		$\searrow -$		$\searrow -$		$\searrow -$		$\nearrow +$

0,4

$$f''(x) = \frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2 - (x^4-12x^2)\,2(x^2-4)\cdot 2x}{[x^2-4]^4} \qquad 0{,}2$$

DATOS DEL ALUMNO

Nombre y apellidos:

D.N.I.:

Grado:

$$f''(x) = \frac{\cancel{(x^2-4)}(4x^3-24x)(x^2-4) - 4x(x^4-12x^3)}{[x^2-4]^{\cancel{4}\cdot 3}}$$ 0,2.

$$f''(x) = \frac{\cancel{4x^5} - 16x^3 - 24x^3 + 96x - \cancel{4x^5} + 48x^3}{[x^2-4]^3}$$ 0,2.

$$f''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{[x^2-4]^3} = \frac{8x(x^2+12)}{[x^2-4]^3}$$ 0,2.

$$\begin{array}{ccccccc} - \ - & & + \ + & & - \ - & & + \ + \\ \frown & -2 & \smile & 0 & \frown & 2. & \smile \end{array}$$ 0,2.

2)

a) $$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \cos x^2}_{0,2} = a = \lim_{x\to 0^+} e^{x^2} + b.$$ 0,2.

$$= a = e^0 + b.$$ 0,2.

$$a = 1$$
$$b = 0$$ 0,4.

b) $$f(x) = \begin{cases} \cos x^2 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ e^{x^2} & x>0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x^2 \cdot 2x & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 2xe^{x^2} & x>0 \end{cases}$$ 0,2.

$$\lim_{x\to 0^-} -2x\cdot \operatorname{sen} x^2 = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} 2xe^{x^2} = 0$$ 0,4.

$f'(x)$ es continua $\therefore f$ es derivable. 0,4.

3) a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2+1}$

$f(-\pi) = \dfrac{\operatorname{sen}(-\pi)}{(-\pi)^2+1} = 0.$ 0,1 $f(\pi) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi)}{\pi^2+1} = 0$ 0,1

$f(-\pi) = f(\pi)$ ✓. 0,2

f es continua en $\mathbb{R}$ porque $x^2+1 \neq 0 \ \forall x$ ∴ Es continua en $[-\pi, \pi]$ ✓ 0,2

$f'(x) = \dfrac{\cos(x)(x^2+1) - \operatorname{sen}(x) \cdot 2x}{x^2+1}$ 0,2.

$f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ ∴ f es derivable en $(-\pi, \pi)$ ✓

∴ Se puede aplicar el Teorema de Rolle. 0,2.

b) $b = 0{,}1$ 0,2 $a = 0.$ 0,2 $f(0) = 0$ 0,2.

$f'(0) = 1$ 0,2.

1,0. 0,2

$f(0{,}1) = f'(0)(0{,}1-0) + f(0) = 1(0{,}1-0) + 0 = 0{,}1$

4) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{(x_0+h)} - e^{x_0}}{h}$ 0,2 $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x_0} \cdot e^{h} - e^{x_0}}{h}$ 0,2

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x_0} (\cancel{e^h - 1})}{h}$ h por infinitésimos $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x_0} \cdot K}{K} = e^{x_0}$. 0,4

0,2.

< 30'.

EXAMEN PARCIAL 1 – MATEMÁTICAS

ADE Y CTA

DATOS DEL ALUMNO

Nombre y apellidos: Jorge Crespo Alvarez

D.N.I.:

Grado: Profesor

NORMATIVA

NO se permite el uso **de teléfono móvil o cualquier otro aparato** de comunicación durante el desarrollo del examen. En todo caso, dichos aparatos deberán estar completamente desconectados.

Se debe entregar el examen con los datos identificativos en la cabecera, aunque no se haya contestado ninguna pregunta.

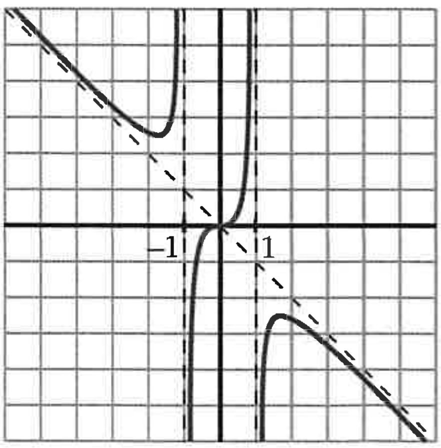
Las respuestas deben desarrollarse en las hojas de respuestas y cada una debe identificarse claramente.

Antes de responder, le aconsejamos que lea el enunciado de cada pregunta atentamente para asegurarse de que lo comprende bien. Asimismo, emplee el tiempo suficiente para realizar el examen y no olvide volver a repasar todas y cada una de las respuestas.

En el caso de que se detecte que un alumno o alumna está copiando, deberá abandonar inmediatamente el examen y este será calificado con cero puntos. Este hecho será puesto en conocimiento del director académico del grado.

ENUNCIADOS

1. **(4 puntos)**. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$; cuya gráfica se muestra a continuación:



a) Encuentre todas las asíntotas de f(x). **(2 puntos)**

b) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de f(x). **(2 puntos)**

2. **(2 puntos)**. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ a & \mathrm{x} = 0 \\ \operatorname{sen} x + b & x > 0 \end{cases}$;

   a) Encuentre los valores de a y b de forma tal que la función sea continua. **(1 punto)**

   b) Analice si la función es derivable en x = 0. **(1 punto)**

3. **(3 puntos)**. Dada la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2 - 1}$$

   a) Investigue si se puede aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo [-0,5 ; 0,5]. **(1 punto)**

   b) Utilice el Teorema de Lagrange para calcular de forma aproximada *f*(0,1). **(2 puntos)**

4. **(1 punto)** Utilice la definición de derivada (límite del cociente incremental) para demostrar que:

$$(e^x)' = e^x$$

DATOS DEL ALUMNO

Nombre y apellidos:

D.N.I.:

Grado:

HOJA DE RESPUESTAS

A continuación, responda a cada una de las preguntas:

1) a) Dominio. Dom: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \pm 1\}$

$1-x^2=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

A. Verticales

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0} = +\infty$ 0,2 $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0} = +\infty$ 0,2

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0} = -\infty$ 0,2 $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$ 0,2

Las rectas $x=1$ y $x=-1$ Asíntotas verticales 0,2

A. Horizontales

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$ 0,1 $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty$ 0,1

No hay asíntota Horizontal. 0,2

A. Oblicua.

$m_1 = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$ 0,1

$m_2 = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$ 0,1

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3} - x - \cancel{x^3}}{1-x^2} = 0. \quad 0{,}1$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3} - x - \cancel{x^3}}{1-x^2} = 0. \quad 0{,}1$$

La recta $y=-x$ asintota oblicua. 0,2.

b)

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} \qquad f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} \quad 0{,}2$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} \overset{0{,}2}{=} \frac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2} \quad 0{,}2$$

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} & \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \searrow \\ & - & & + & & + & & + & & + & & - \\ & & -\sqrt{3} & & -1 & & 0 & & 1 & & +\sqrt{3} & \end{array} \quad 0{,}4.$$

$$f''(x) = \frac{(-4x^3+6x)(1-x^2)^{\cancel{2}} - (-x^4+3x^2)\,2\cancel{(1-x^2)}(-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} \quad 0{,}2$$

$$f''(x) = \frac{-4x^3 + \cancel{4x^5} + 6x - 6x^3 - \cancel{4x^5} + 12x^3}{(1-x^2)^3} \overset{0{,}2}{=} \frac{+2x^3+6x}{(1-x^2)^3} \quad 0{,}2$$

$$= \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & ++ & & -- & & ++ & & -- \\ & & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

0,4.

DATOS DEL ALUMNO

Nombre y apellidos:

D.N.I.:

Grado:

2)
a) $\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \cos x}$ $= a = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x + b$ 0,2.

$1 = a = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x + b = b=1$ 0,2.

0,2

$a=1,\ b=1$ 0,4.

b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \operatorname{sen} x + 1 & x>0 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & x<0 \\ 0 & x=0 \\ +\cos x & x>0 \end{cases}$ 0,2

$\lim_{x\to 0^-} -\operatorname{sen} x = 0.$ $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ 0,4.

f' no es continua en 0 $\therefore$ f no es derivable en 0
0,4.

3)
a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2-1}$ $f(0{,}5) = \dfrac{\operatorname{sen}(0{,}5^2)}{(0{,}5)^2-1}$ 0,1

$f(-0{,}5) = \dfrac{\operatorname{sen}((-0{,}5)^2)}{(-0{,}5)^2-1}$ 0,1

$f(0{,}5) = f(-0{,}5)$ ✓ 0,2.

✓ $f(x) \to$ continua en $\mathbb{R} - \{\pm 1\} \therefore f(x)$ continua en $[-0{,}5, 0{,}5]$

0,2

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cos(x^2)\cdot 2x - \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x}{[x^2-1]^2}$$ 0,2

$f'(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ $\therefore$ $f(x)$ derivable en $(-0{,}5;0{,}5)$

$\therefore$ Se puede aplicar el teorema de Rolle. 0,2

b) $b=0{,}1$ 0,2 $a=0$. 0,2 $f(0)=0$ 0,2

$f'(0)=0$ 0,2

$f(0{,}1) = f'(0)(0{,}1-0)+f(0)$

1,0

$f(0{,}1) = 0(0{,}1-0)+(0) = 0$. 0,2

4) $(e^x)' = e^x$

0,2 0,2

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(x_0+h)} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}\cdot e^{h} - e^{x_0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(\cancel{e^h-1})}{h} \quad h \text{ por infinitésimos eq.} \quad = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}\cdot \cancel{K}}{\cancel{K}} = e^{x_0}.$$

0,2 0,4.