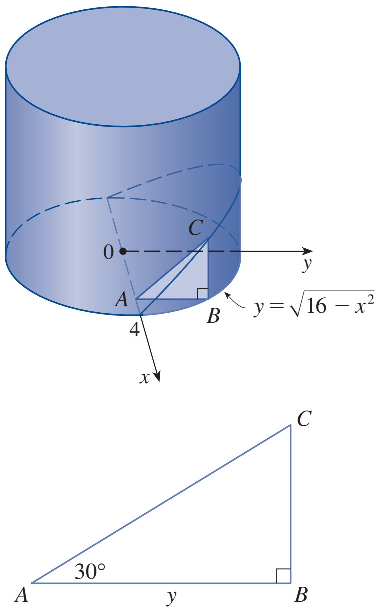


FIGURA 17

EJEMPLO 9 De un cilindro circular de radio 4, definido mediante dos planos, se corta una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro corta al primero en un ángulo de 30° a lo largo del diámetro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.

SOLUCIÓN Si se hace coincidir el eje x con el diámetro en el lugar donde se encuentran los planos, entonces la base del sólido es un semicírculo delimitado por la ecuación $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Una sección transversal perpendicular al eje x a una distancia x del origen es un triángulo ABC, como se muestra en la figura 17, cuya base es $y = \sqrt{16 - x^2}$ y cuya altura es $|BC| = y \tan 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

y el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\ &= \frac{128}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Para conocer otro método véase el ejercicio 64. ■

6.2 EJERCICIOS

1–18 Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región acotada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Trace la gráfica de la región, el sólido y un disco o arandela representativos.

1. $y = x + 1,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$; alrededor del eje x

2. $y = 1/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$; alrededor del eje x

3. $y = \sqrt{x - 1},\ y = 0,\ x = 5$; alrededor del eje x

4. $y = e^x,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$; alrededor del eje x

5. $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; alrededor del eje x

6. $2x = y^2,\ x = 0,\ y = 4$; alrededor del eje y

7. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0$; alrededor del eje y

8. $y = 6 - x^2,\ y = 2$; alrededor del eje x

9. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 5 - x^2$; alrededor del eje x

10. $x = 2 - y^2,\ x = y^4$; alrededor del eje y

11. $y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 2,\ y = 0$; alrededor del eje y

12. $y = x^3,\ y = 1,\ x = 2$; alrededor de $y = -3$

13. $y = 1 + \sec x,\ y = 3$; alrededor de $y = 1$

14. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; alrededor de $y = -1$

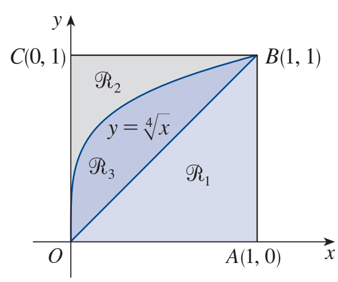
15. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1$; alrededor de $x = 2$

16. $y = x,\ y = \sqrt{x}$; alrededor de $x = 2$

17. $x = y^2,\ x = 1$; alrededor de $x = 1$

18. $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; alrededor de $x = 1$

19–30 Refiérase a la figura y calcule el volumen generado al hacer girar cada una de las regiones dadas alrededor de la recta especificada.



19. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OA

20. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OC

21. $\mathcal{R}_1$ alrededor de AB

22. $\mathcal{R}_1$ alrededor de BC

23. $\mathscr{R}_2$ alrededor de OA

24. $\mathscr{R}_2$ alrededor de OC

25. $\mathscr{R}_2$ alrededor de AB

26. $\mathscr{R}_2$ alrededor de BC

27. $\mathscr{R}_3$ alrededor de OA

28. $\mathscr{R}_3$ alrededor de OC

29. $\mathscr{R}_3$ alrededor de AB

30. $\mathscr{R}_3$ alrededor de BC

31–34 Plantee una integral para el volumen del sólido obtenido al hacer girar cada una de las regiones acotadas por las curvas dadas, alrededor de la recta especificada. Después utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación a cinco decimales.

31. $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

(a) alrededor del eje x (b) alrededor de $y = -1$

32. $y = 0,\ y = \cos^2 x,\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$

(a) alrededor del eje x (b) alrededor de $y = 1$

33. $x^2 + 4y^2 = 4$

(a) alrededor de $y = 2$ (b) alrededor de $x = 2$

34. $y = x^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0$

(a) alrededor del eje x (b) alrededor del eje y

35–36 Utilice una gráfica para encontrar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego utilice su calculadora para determinar (en forma aproximada) el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región acotada por estas curvas.

35. $y = \ln(x^6 + 2), \quad y = \sqrt{3 - x^3}$

36. $y = 1 + xe^{-x^3}, \quad y = \arctan x^2$

SAC **37–38** Mediante un sistema algebraico computacional, calcule el volumen exacto del sólido obtenido al rotar la región acotada por estas curvas alrededor de la recta especificada.

37. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $y = -1$

38. $y = x,\ y = xe^{1-x/2};$ alrededor de $y = 3$

39–42 Cada una de las integrales siguientes representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

39. $\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

40. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2]\, dx$

41. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8)\, dy$

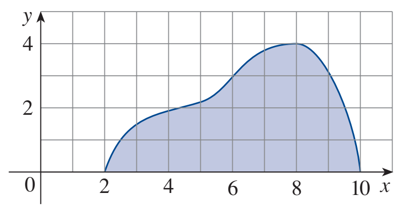
42. $\pi \int_1^4 \left[3^2 - \left(3 - \sqrt{x}\,\right)^2\right] dx$

43. Una TAC (tomografía computarizada) produce vistas transversales equidistantes de un órgano humano que dan información sobre el órgano que de otra manera se obtiene solamente con cirugía. Suponga que una TAC de un hígado humano muestra secciones transversales separadas 1.5 cm de distancia. El hígado es de 15 cm de largo y las áreas de las secciones transversales, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Utilice la regla del punto medio para determinar el volumen del hígado.

44. Se corta un tronco de árbol de 10 m de largo a intervalos de 1 m, y las áreas de las secciones transversales A (a una distancia x del extremo del tronco) se proporcionan en la tabla. Mediante la regla del punto medio $n = 5$, estime el volumen del tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

45. (a) Si la región que se muestra en la figura se gira respecto al eje x para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para determinar el volumen del sólido.



(b) Estime el volumen si se gira la región respecto al eje y. Una vez más aplique la regla del punto medio con $n = 4$.

SAC **46.** (a) Se obtiene un modelo para la forma de un huevo de un ave mediante el giro, respecto al eje x, de la región bajo la gráfica de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

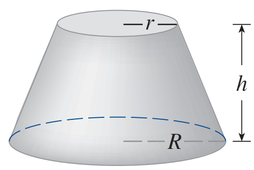
Utilice un SAC para encontrar el volumen de tal huevo.

(b) Para un pato de cuello rojo, $a = -0.06$, $b = 0.04$, $c = 0.1$ y $d = 0.54$. Trace la gráfica de f y encuentre el volumen de un huevo de esta especie.

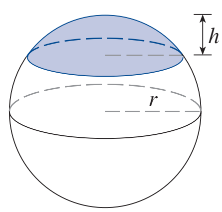
47–61 Calcule el volumen de cada uno de los sólidos S descritos.

47. Un cono circular recto cuya altura es h y el radio de la base es r.

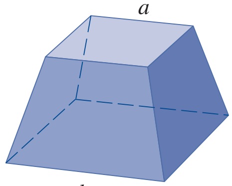
48. Un cono truncado circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r.



49. Un casquete de una esfera con radio r y altura h.



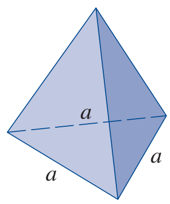
50. Una pirámide truncada con base cuadrada de lado b, cuadrado superior de lado a y altura h.



¿Qué sucede si $a = b$? ¿Qué sucede si $a = 0$?

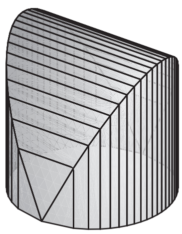
51. Una pirámide de altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.

52. Una pirámide de altura h y base en forma de triángulo equilátero con lado a (un tetraedro).



53. Un tetraedro con tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas recíprocamente perpendiculares con distancias 3, 4 y 5 cm.

54. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son cuadradas.



55. La base de S es una región elíptica acotada por la curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales son perpendiculares al eje x y son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base.

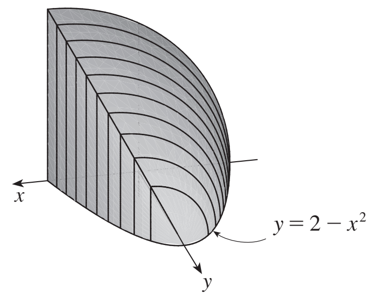
56. La base de S es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1). Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

57. La base de S es la misma que en el ejercicio 56, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados.

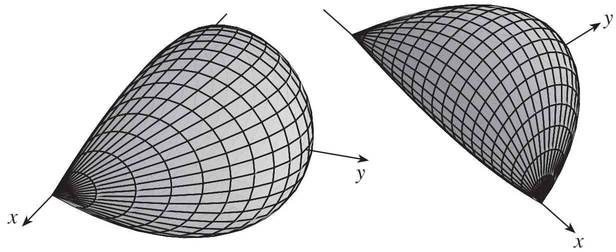
58. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados.

59. La base de S es la misma que la del ejercicio 58, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos isósceles con altura igual a la base.

60. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuartos de círculo.



61. El sólido S está acotado por círculos que son perpendiculares al eje x, interseca el eje x, y tiene centros sobre la parábola $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.



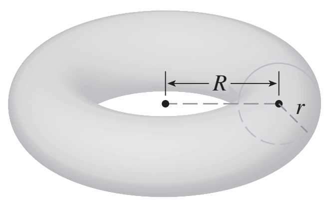
62. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son triángulos isósceles de altura h y el lado desigual en la base.

(a) Plantee una integral para el volumen de S.

(b) De acuerdo con la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen de S.

63. (a) Plantee una integral para el volumen de un *toro* sólido (el sólido en forma de dona que se muestra en la figura) de radio r y R.

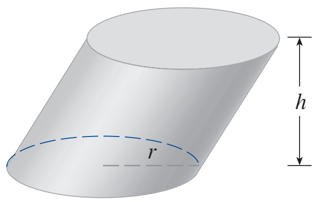
(b) Mediante la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen del toro.



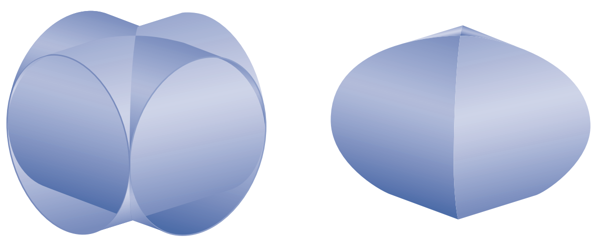
64. Resuelva el ejemplo 9 tomando secciones transversales paralelas a la recta de intersección de los dos planos.

65. (a) El principio de Cavalieri establece que si una familia de planos paralelos da áreas iguales de secciones transversales para dos sólidos S_1 y S_2, entonces los volúmenes de S_1 y S_2 son iguales. Demuestre este principio.

(b) Mediante el principio de Cavalieri determine el volumen del cilindro oblicuo que se muestra en la figura.



66. Determine el volumen común a dos cilindros circulares, ambos de radio r, si los ejes de los cilindros se cortan en ángulos rectos.



67. Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r, si el centro de cada esfera está sobre la superficie de la otra esfera.

68. Un tazón tiene la forma de un hemisferio con diámetro igual a 30 cm. Una pelota pesada de 10 cm de diámetro se coloca dentro del tazón, y se vierte agua en este hasta que alcanza una altura de h centímetros. Determine el volumen de agua que hay en el recipiente.

69. Se abre un agujero de radio r en un cilindro de radio $R > r$ en ángulos rectos al eje del cilindro. Plantee una integral, pero no la evalúe, para determinar el volumen cortado.

70. Un agujero de radio r se taladra en el centro de una esfera de radio $R > r$. Calcule el volumen de la parte restante de la esfera.

71. Algunos de los iniciadores del cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Stereometria doliorum* en 1615, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de los barriles.) A menudo se aproximan la forma de sus lados mediante parábolas.

(a) Se genera un barril de altura h y radio máximo R al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leqslant x \leqslant h/2$, donde c es una constante positiva. Demuestre que el radio de cada extremo del barril es $r = R - d$, donde $d = ch^2/4$.

(b) Demuestre que el volumen encerrado por el barril es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

72. Suponga que una región $\mathcal{R}$ tiene un área A que se localiza arriba del eje x. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de volumen V_1. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $y = -k$, (donde k es un número positivo), genera un sólido de volumen V_2. Exprese V_2 en función de V_1, k y A.

6.3 Volúmenes mediante cascarones cilíndricos

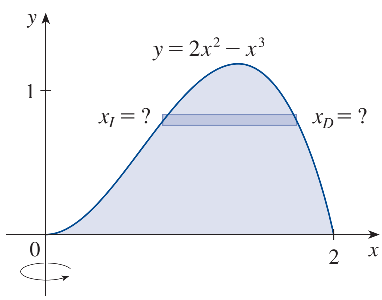


FIGURA 1

Algunos problemas relacionados con volúmenes son muy difíciles de manejar con los métodos de las secciones anteriores. Por ejemplo, se considera el problema de determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$. (Véase la figura 1.) Si se corta en forma perpendicular al eje y, se obtiene una arandela. Pero para calcular los radios interior y exterior de la arandela, se tiene que resolver la ecuación cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para encontrar x en función de y, y esto no es fácil.

Por fortuna, hay un sistema llamado **método de los cascarones cilíndricos**, que es más fácil de usar en tal caso. En la figura 2 se muestra un cascarón cilíndrico de radio

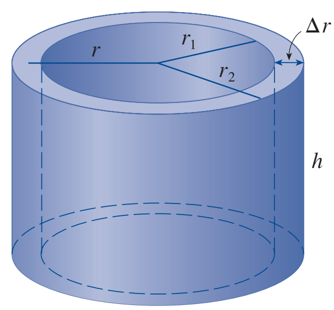


FIGURA 2