Por tanto, f tiene el mismo valor que *cualesquiera* dos números x_1 y x_2 en (a, b). Esto significa que f es constante en (a, b). ■

El corolario 7 dice que si dos funciones tienen las mismas derivadas en un intervalo entonces sus gráficas deben ser las traslaciones verticales entre sí. En otras palabras, las gráficas tienen la misma forma, pero podrían estar corridas hacia arriba o hacia abajo.

7 Corolario Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante sobre (a, b); esto es, $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Así, por el teorema 5, F es constante; esto es, $f - g$ es constante. ■

NOTA Cuidado al utilizar el teorema 5. Sea

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de f es $D = \{x \mid x \neq 0\}$ y $f'(x) = 0$ para toda x en D. Pero f, evidentemente, no es una función constante. Esto no contradice el teorema 5 porque D no es un intervalo. Observe que f es constante sobre el intervalo $(0, \infty)$ y también sobre el intervalo $(-\infty, 0)$.

EJEMPLO 6 Demuestre la identidad $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Aunque no es necesario utilizar el cálculo para demostrar esta identidad, la demostración mediante él es muy sencilla. Si $f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

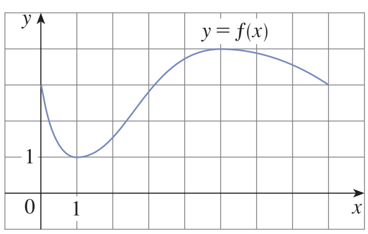
para todos los valores de x. Por tanto, $f(x) = C$, una constante. Para determinar el valor de C, se pone $x = 1$ [porque se puede evaluar $f(1)$ exactamente]. Entonces

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Así, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$. ■

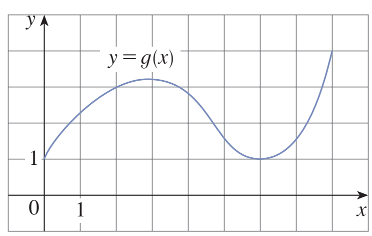
4.2 EJERCICIOS

1. Se muestra la gráfica de una función f. Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 8]$. Después encuentre todos los números c en ese intervalo, que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.



2. Dibuje la gráfica de una función definida en $[0, 8]$ tal que $f(0) = f(8) = 3$ y la función no satisface la conclusión del teorema de Rolle en $[0, 8]$.

3. Se muestra la gráfica de una función g.



(a) Verifique que g satisface las hipótesis del teorema de valor medio en el intervalo $[0, 8]$.

(b) Calcule el(los) valor(es) de c que satisfacen la conclusión del teorema de valor medio en el intervalo $[0, 8]$.

(c) Calcule el(los) valor(es) de c que satisfacen la conclusión del teorema de valor medio en el intervalo $[2, 6]$.

4. Dibuje la gráfica de una función que es continua en $[0, 8]$ donde $f(0) = 1$ y $f(8) = 4$ y no satisface la conclusión del teorema de valor medio en $[0, 8]$.

5–8 Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Luego encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.

5. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \quad [-1, 3]$

6. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2, \quad [-2, 2]$

7. $f(x) = \operatorname{sen}(x/2), \quad [\pi/2, 3\pi/2]$

8. $f(x) = x + 1/x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

9. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$, pero no hay ningún número c en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?

10. Sea $f(x) = \tan x$. Demuestre que $f(0) = f(\pi)$ pero no hay un número c en $(0, \pi)$ tales que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el teorema de Rolle?

11–14 Verifique que la función satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado. Después encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio.

11. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$

12. $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad [-2, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}, \quad [1, 4]$

15–16 Encuentre el número c que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre el intervalo dado. Trace la gráfica de la función, la recta secante a través de los puntos finales y la recta tangente en $(c, f(c))$. ¿Son paralelas la recta secante y la tangente?

15. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

16. $f(x) = e^{-x}, \quad [0, 2]$

17. Sea $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Demuestre que no hay ningún valor de c en $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. ¿Por qué no contradice esto el teorema del valor medio?

18. Sea $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Demuestre que no hay valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

19–20 Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene solo una raíz real.

19. $2x + \cos x = 0$

20. $x^3 + e^x = 0$

21. Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + c = 0$ tiene como máximo una raíz en el intervalo $[-2, 2]$.

22. Demuestre que la ecuación $x^4 + 4x + c = 0$ tiene como máximo dos raíces reales.

23. (a) Demuestre que una polinomial de grado 3 tiene a lo sumo tres raíces reales.

(b) Demuestre que una polinomial de grado n tiene como máximo n raíces reales.

24. (a) Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y tiene dos raíces. Demuestre que f' tiene al menos una raíz.

(b) Suponga que f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y tiene tres raíces. Demuestre que f'' tiene al menos una raíz.

(c) ¿Puede generalizar los incisos (a) y (b)?

25. Si $f(1) = 10$ y $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, ¿qué tan pequeño puede posiblemente ser $f(4)$?

26. Suponga que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. Demuestre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

27. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leqslant 2$ para toda x?

28. Suponga que f y g son continuas sobre $[a, b]$ y derivables sobre (a, b). Suponga también que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demuestre que $f(b) < g(b)$. [*Sugerencia:* utilice el teorema del valor medio para la función $h = f - g$.]

29. Demuestre que $\operatorname{sen} x < x$ si $0 < x < 2\pi$.

30. Suponga que f es una función impar y es derivable sobre todo su dominio. Demuestre que para todo número positivo b, existe un número c *en* $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

31. Utilice el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para toda } a \text{ y } b$$

32. Si $f'(x) = c$ (c es una constante) para toda x, utilice el corolario 7 para demostrar que $f(x) = cx + d$ para alguna constante d.

33. Sea $f(x) = 1/x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\[2mm] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en su dominio. ¿Se puede concluir del corolario 7 que $f - g$ es constante?

34. Utilice el método del ejemplo 6 para demostrar la identidad

$$2\operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

35. Demuestre la identidad $\arcsen \dfrac{x - 1}{x + 1} = 2\arctan\sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2}$.

36. A las 14:00 horas el velocímetro de un automóvil marca 50 km/h. A las 14:10 horas marca 65 km/h. Demuestre que en algún momento entre las 14:00 y 14:10 horas la aceleración es exactamente 90 km/h^2.

37. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan en un empate. Demuestre que en algún momento durante la carrera tienen la misma velocidad. [*Sugerencia*: considere $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones de posición de los dos corredores.]

38. Un número a se llama **punto fijo** de una función f si $f(a) = a$. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x, entonces f tiene a lo sumo un punto fijo.