Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Límites de Funciones Reales II

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Continuar el estudio de los Límites de funciones reales de una variable

- Definición precisa de límite
- Límites laterales
- Límites infinitos
- Límites en el infinito

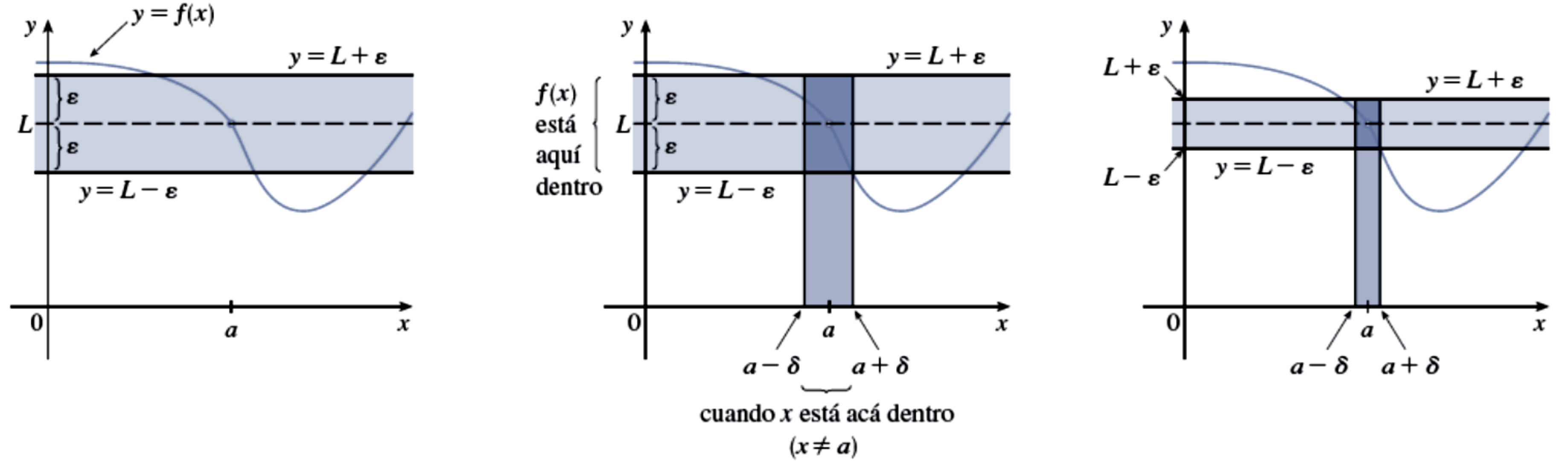
Definición Precisa de Límite

$\boxed{2}$ **Definición precisa de un límite** Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L**, y se expresa como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

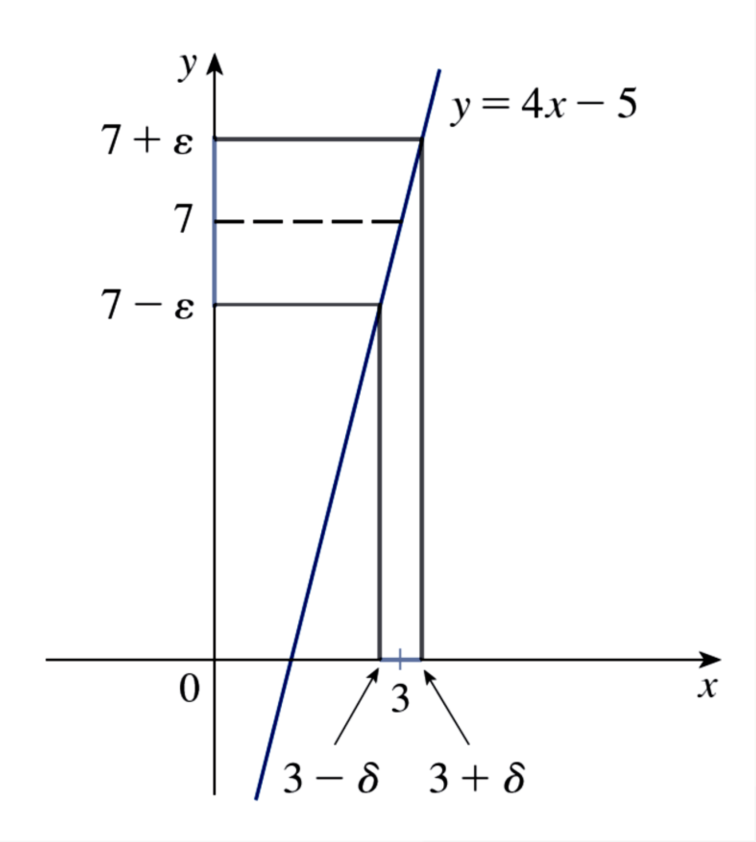
$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$



Definición Precisa de Límite

Ejemplo:

Pruebe que $\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$



si $\quad 0 < |x - 3| < \delta \quad$ entonces $\quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$

Límites Laterales

3 Definición de límite por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad a - \delta < x < a \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

4 Definición de límite por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad a < x < a + \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

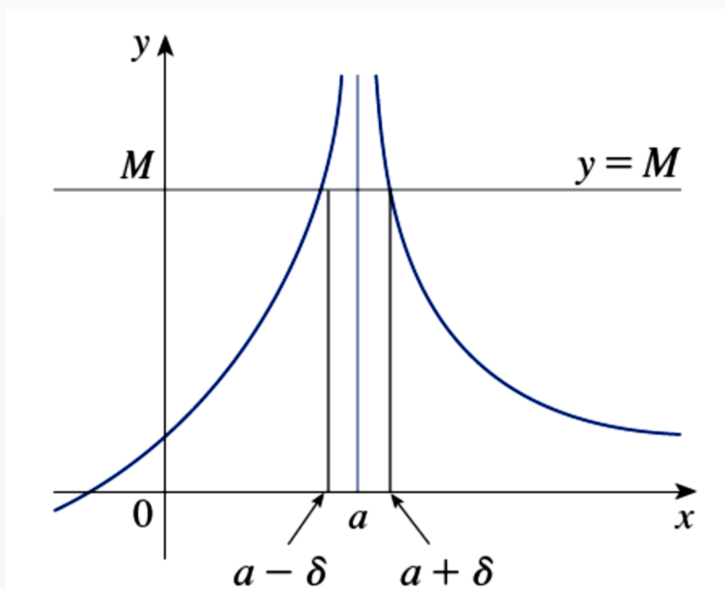
Límites Infinitos

6 Definición precisa de un límite infinito Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un número positivo tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad f(x) > M$$



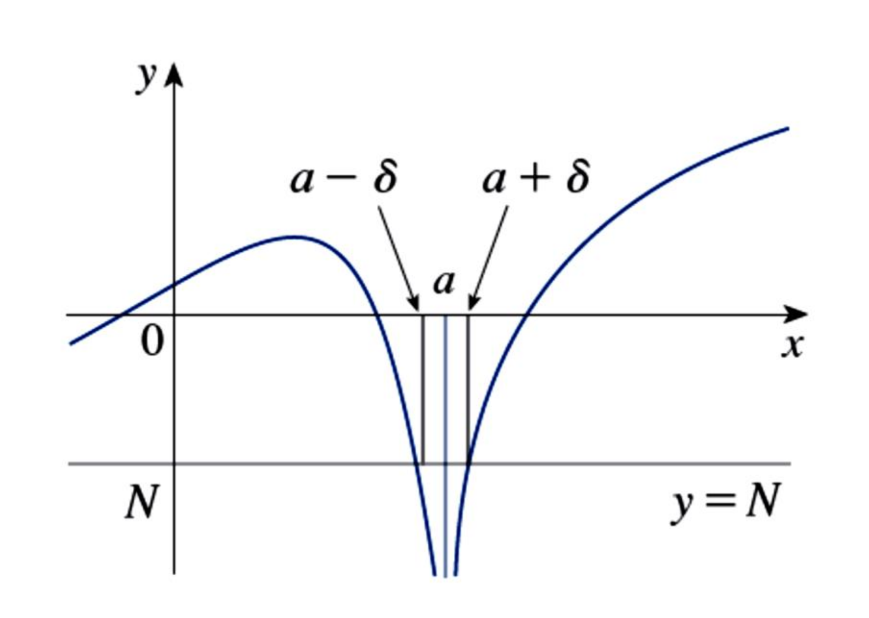
Límites Infinitos

7 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que para todo número negativo N existe un número positivo δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad f(x) < N$$



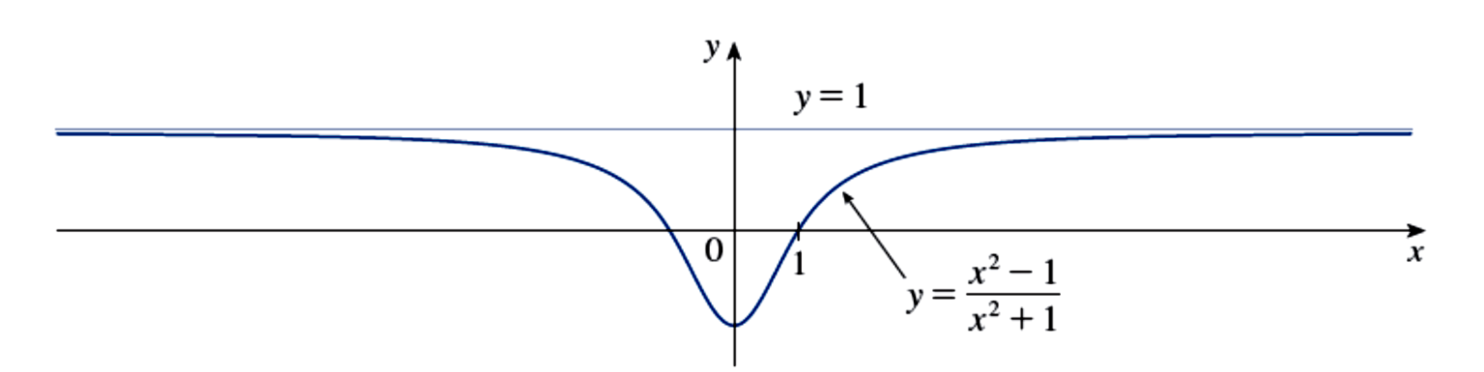
Límites en el Infinito

Ejemplo:

Investigue el comportamiento de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ conforme x se hace grande.

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$



Límites en el Infinito

1 Definición intuitiva de un límite al infinito Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar arbitrariamente a L tanto como se quiera, eligiendo a x suficientemente grande.

2 Definición Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea suficientemente negativa.

3 Definición La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

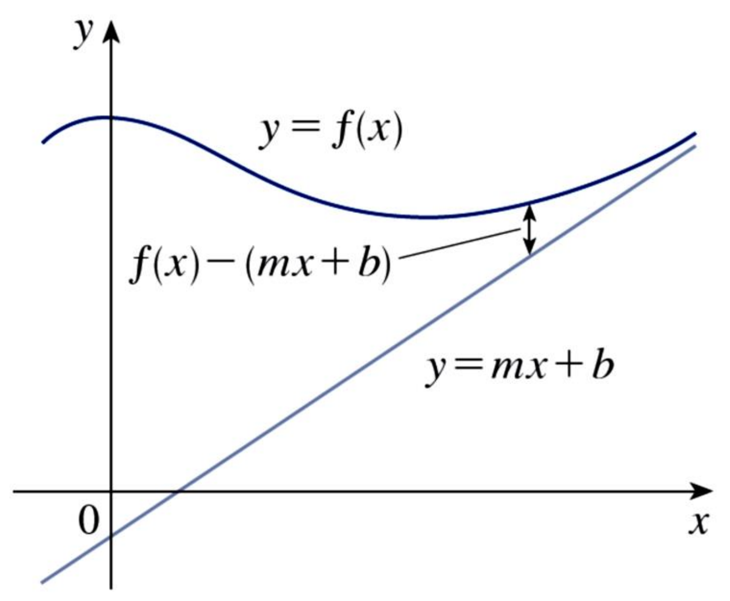
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Asíntotas inclinadas

Algunas curvas tienen asíntotas que son *oblicuas*, esto es, no son horizontales ni verticales. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

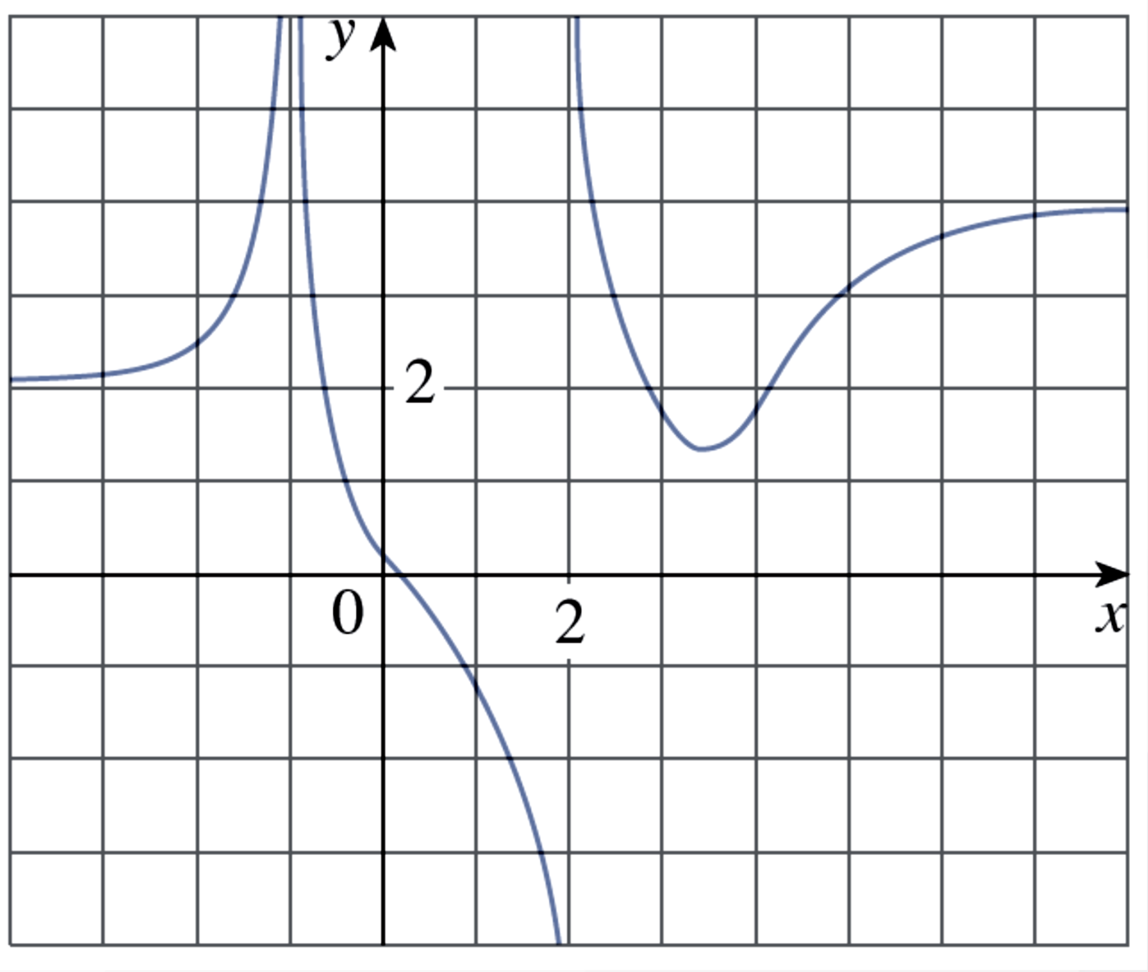
donde $m \neq 0$, entonces la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota inclinada** (oblicua) porque la distancia vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a cero,



Límites en el Infinito

Ejemplo:

Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función cuya gráfica se muestra a continuación.



Ejemplo:

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Ejemplo:

Encuentre las asíntotas oblicuas de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

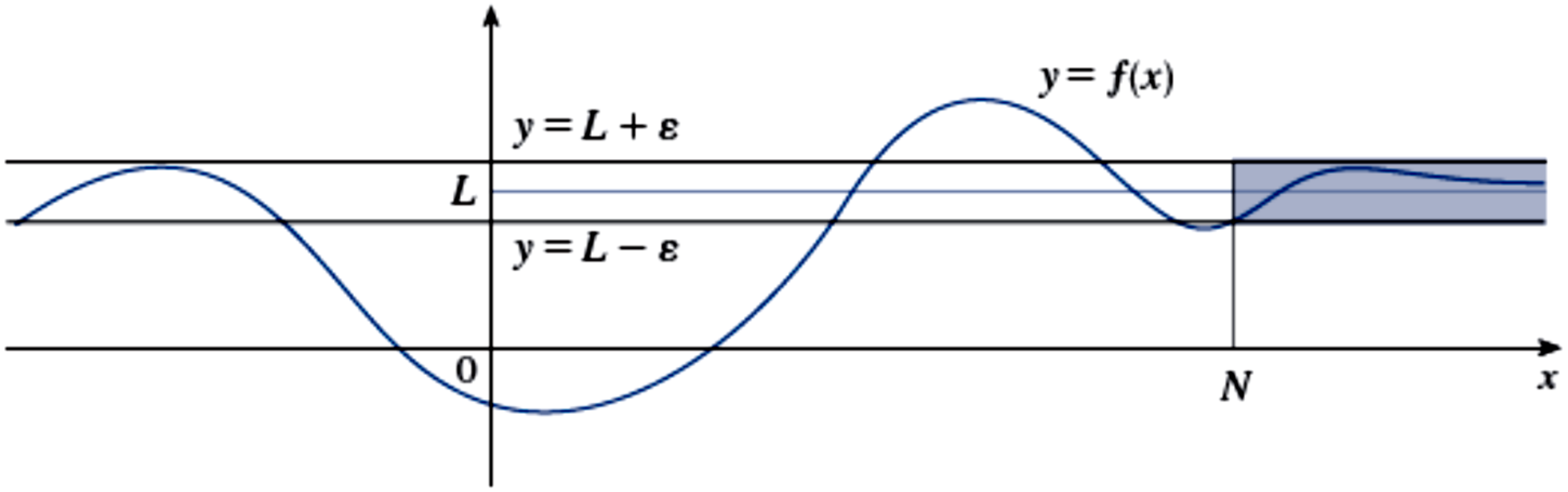
Límites en el Infinito

7 Definición precisa de un límite al infinito Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que

$$\text{si} \qquad x > N \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$



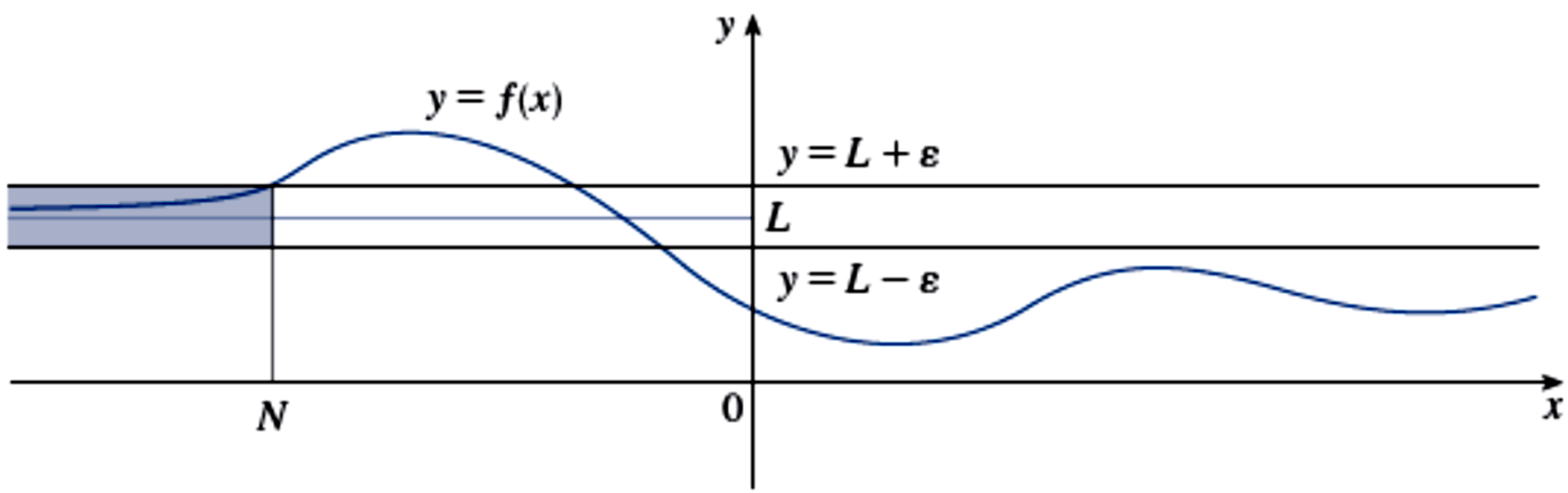
Límites en el Infinito

8 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que

$$\text{si} \qquad x < N \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$



Límites en el Infinito

9 Definición de un límite infinito al infinito Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un correspondiente número positivo N tal que

$$\text{si} \quad x > N \qquad \text{entonces} \qquad f(x) > M$$

Límites en el Infinito

Ejemplo:

Utilice la definición 7 para demostrar que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$:

$$\text{si} \qquad x > N \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es