Universidad Europea del Atlántico
www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Normas de Vectores y Matrices

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Aprender a Calcular las Normas de un Vector

- Normas Vectoriales
- Distancia entre Vectores en $\mathbb{R}^n$
- Normas Matriciales

Normas Vectoriales

Sea que $\mathbb{R}^n$, denota el conjunto de todos los vectores columna n-dimensionales con componentes de números reales. Para definir la distancia en $\mathbb{R}^n$, usamos la noción de una norma, que es la generalización del valor absoluto en $\mathbb{R}$, el conjunto de números reales.

Una **norma vectorial** en $\mathbb{R}^n$, es una función, $\|\cdot\|$, de $\mathbb{R}^n$, a $\mathbb{R}$, con las siguientes propiedades:

i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

ii) $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

iii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

iv) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. ■

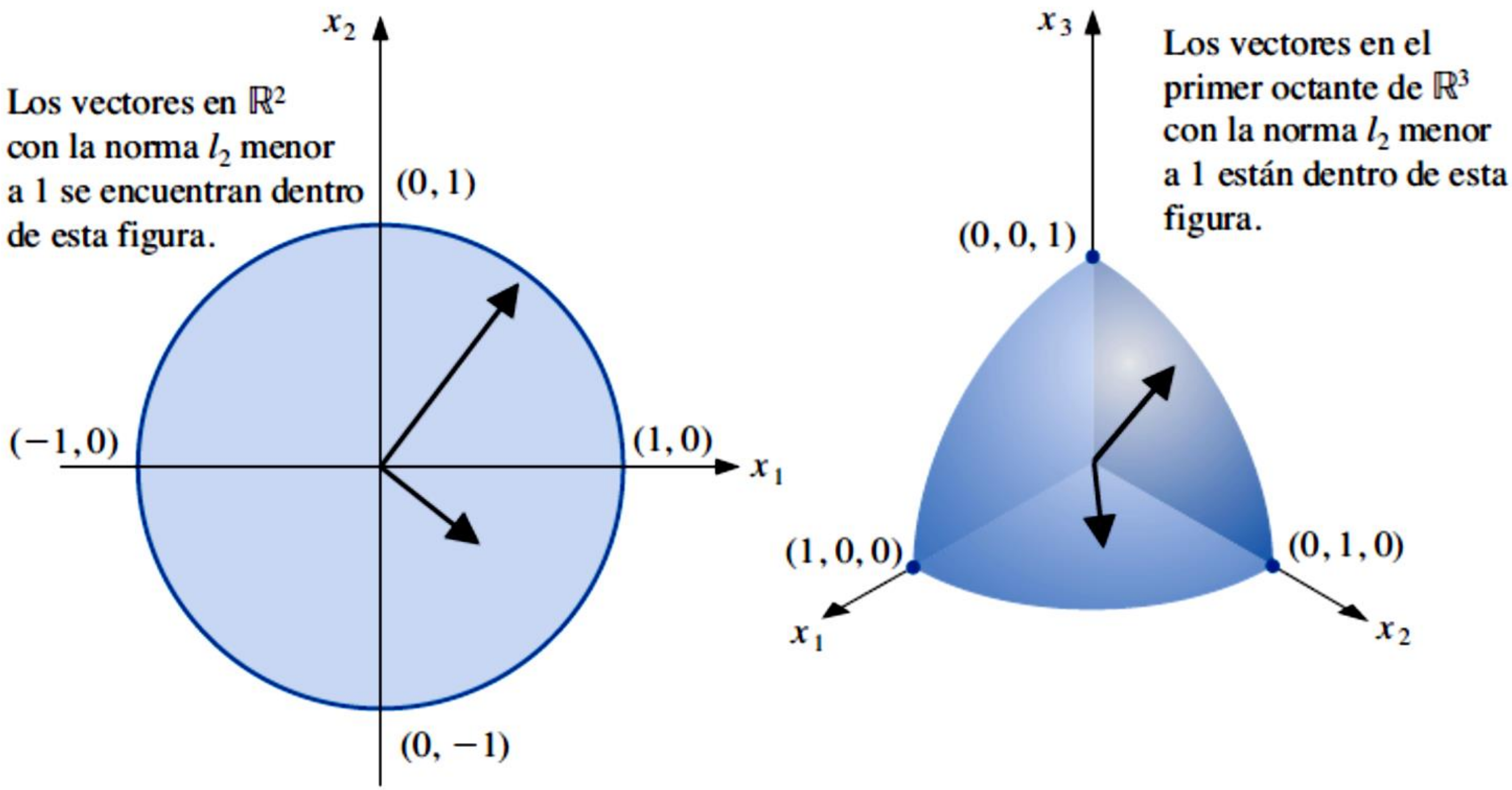
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

se escribirá $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

Normas Vectoriales

Las normas l_2 y l_∞ para el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ se definen mediante

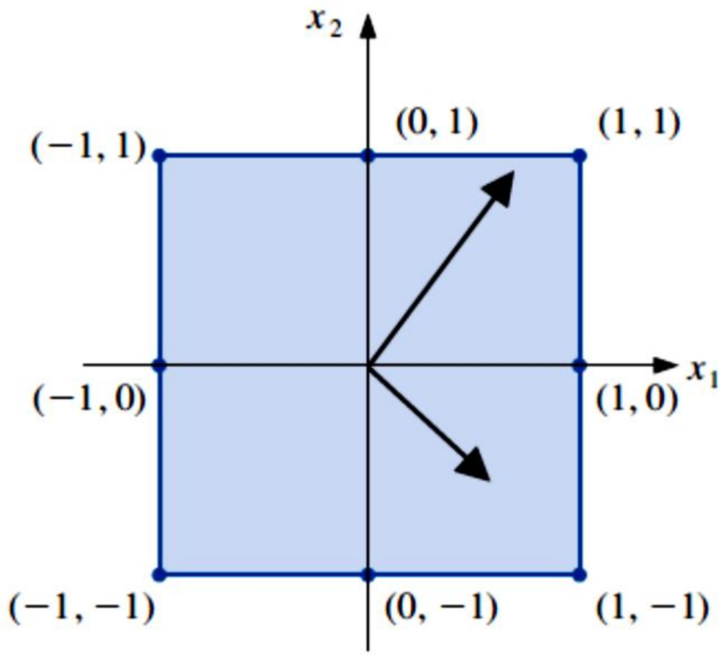
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$



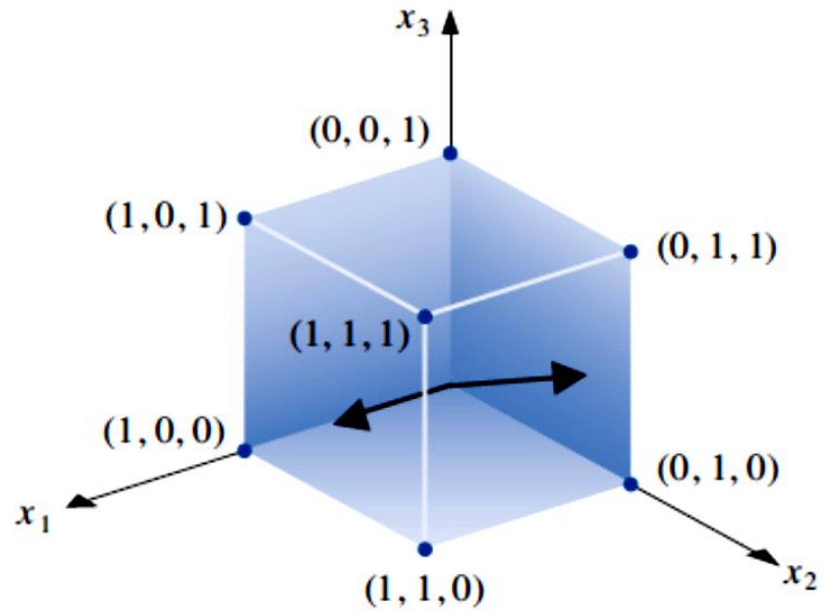
Normas Vectoriales

Las normas l_2 y l_∞ para el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ se definen mediante

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$



Los vectores en $\mathbb{R}^2$ con la norma l_∞ menor a 1 se encuentran dentro de esta figura.



Los vectores en el primer octante de $\mathbb{R}^3$ con la norma l_∞ menor a 1 se encuentran dentro de esta figura.

Normas Vectoriales

Ejemplo:

Determine la norma l_2 y l_∞ del vector $\mathrm{x} = (-1, 1, -2)^t$

Distancia entre Vectores en $\mathbb{R}^n$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, las distancias l_2 y l_∞ entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ se definen mediante

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}^{1/2} \text{ y } \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|. \quad \blacksquare$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\mathrm{x}_1 = (1,1,1)^t$ y $\mathrm{x}_2 = (1{,}2001, 0{,}99991, 0{,}92538)^t$ determine la norma l_2 y l_∞

Normas Matriciales

Una **norma matricial** sobre el conjunto de las matrices $n \times n$ es una función de valor real $\|\cdot\|$, definida en este conjunto, que se cumple para todas las matrices A y B $n \times n$ y todos los números reales α:

i) $\|A\| \geq 0$;

ii) $\|A\| = 0$, si y sólo si A es O, la matriz con todas las entradas 0;

iii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;

iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

v) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

La **distancia entre matrices** A y B $\boldsymbol{n \times n}$ respecto a esta norma matricial es $\|A - B\|$.

Si $\|\cdot\|$, es una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

es una norma matricial.

Normas Matriciales

Las normas de la matriz que consideraremos tienen las formas

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty, \quad \text{la norma } l_\infty,$$

y

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2, \quad \text{la norma } l_2.$$

La norma l_∞ de una matriz se puede calcular fácilmente a partir de las entradas de la matriz.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$, entonces $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Normas Matriciales

Ejemplo:

Determine $\|A\|_\infty$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es