como $h(x)$ tiendan a 0. Para hacer esto, se utiliza lo que se sabe de la función seno. Ya que el seno de cualquier número está entre -1 y 1, se puede escribir

$$\boxed{4} \qquad -1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$$

Cualquier desigualdad permanece válida cuando se multiplica por un número positivo. Se sabe que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, así multiplicando cada lado de la desigualdad en (4) por x^2, se obtiene

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

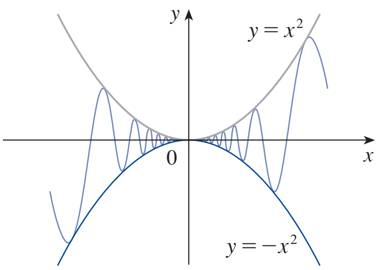


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

como se ilustra en la figura 8. Se sabe que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ del teorema de la compresión, se obtiene

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 \qquad \blacksquare$$

2.3 EJERCICIOS

1. Dado que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 0$$

encuentre los límites que existen. Si el límite no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

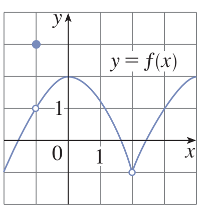
(e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

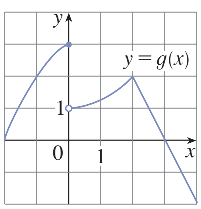
2. Las gráficas de f y g están dadas. Utilícelas para evaluar cada límite si es que existe. Si el límite no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)]$

(c) $\lim_{x \to -1} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} [x^2 f(x)]$ (f) $f(-1) + \lim_{x \to -1} g(x)$





3–9 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las leyes de los límites apropiadas.

3. $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x \to -1} (x^2 + x)(3x^2 + 6)$

5. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 8} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5}\right)^2$

9. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. (a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Usando el inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

11–32 Evalúe cada uno de los límites siguientes si existen.

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12}$

13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12}$

15. $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-27}$

20. $\displaystyle \lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1}$

21. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$

22. $\displaystyle \lim_{u\to 2} \frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$

23. $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$

24. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

25. $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

26. $\displaystyle \lim_{t\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

27. $\displaystyle \lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

28. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^4-3x^2-4}$

29. $\displaystyle \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)$

30. $\displaystyle \lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

32. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

33. (a) Calcule el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

al trazar la gráfica de la función $f(x) = x/\left(\sqrt{1+3x}-1\right)$.

(b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0 e infiera el valor del límite.

(c) Utilice las leyes de los límites para demostrar que su conjetura es correcta.

34. (a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$$

para calcular el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ con dos decimales.

(b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para calcular el límite con cuatro decimales.

(c) Utilice las leyes de los límites para encontrar el valor exacto del límite.

35. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre trazando las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ al trazar la gráfica en la misma pantalla.

36. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{x} = 0$$

Ilústrelo con las gráficas de las funciones f, g y h (en la notación del teorema de la compresión), en la misma pantalla.

37. Si $4x-9 \leqslant f(x) \leqslant x^2-4x+7$ para $x \geqslant 0$, encuentre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

38. Si $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4-x^2+2$ para toda x, evalúe $\lim_{x\to 1} g(x)$.

39. Demuestre que $\displaystyle \lim_{x\to 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0$.

40. Demuestre que $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\mathrm{sen}(\pi/x)} = 0$.

41–46 Encuentre cada uno de los límites siguientes si estos existen. Si el límite no existe, explique por qué.

41. $\displaystyle \lim_{x\to 3} \left(2x+|x-3|\right)$

42. $\displaystyle \lim_{x\to -6} \frac{2x+12}{|x+6|}$

43. $\displaystyle \lim_{x\to 0.5^-} \frac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

44. $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{2-|x|}{2+x}$

45. $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

46. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

47. La función *signum* (o signo), que se denota por sgn, está definida por

$$\mathrm{sgn}\,x = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(a) Trace la gráfica de esta función.

(b) Encuentre cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existen.

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \mathrm{sgn}\,x$ (ii) $\displaystyle \lim_{x\downarrow 0^-} \mathrm{sgn}\,x$

(iii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}\,x$ (iv) $\displaystyle \lim_{x\to 0} |\mathrm{sgn}\,x|$

48. Sea $g(x)= \mathrm{sgn}(\mathrm{sen}\,x)$.

(a) Encuentre cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existen.

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} g(x)$ (ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} g(x)$ (iii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} g(x)$

(iv) $\displaystyle \lim_{x\to \pi^+} g(x)$ (v) $\displaystyle \lim_{x\to \pi^-} g(x)$ (vi) $\displaystyle \lim_{x\to \pi} g(x)$

(b) Para qué valores de a ¿no existe $\lim_{x\to a} g(x)$?

(c) Trace la gráfica de g.

49. Sea $g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$.

(a) Encuentre

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} g(x)$ (ii) $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} g(x)$

(b) ¿Existe $\lim_{x\to 2} g(x)$?

(c) Trace la gráfica de g.

50. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Encuentre $\lim_{x\to 1_-} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

(b) ¿Existe $\lim_{x\to \quad 1} f(x)$?

(c) Trace la gráfica de f.

51. Sea

$$B(t) = \begin{cases} 4-\frac{1}{2}t & \text{si } t<2 \\ \sqrt{t+c} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

Determine el valor de c tal que $\lim_{t\to 2} B(t)$ exista.

52. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada una de los límites siguientes si es que existen.

(i) $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(b) Trace la gráfica de g.

53. (a) Si el símbolo $\llbracket\ \rrbracket$ denota la función parte entera definida en el ejemplo 10, evalúe:

(i) $\lim_{x \to -2^+} \llbracket x \rrbracket$ (ii) $\lim_{x \to -2} \llbracket x \rrbracket$ (iii) $\lim_{x \to -2.4} \llbracket x \rrbracket$

(b) Si n es un entero, evalúe

(i) $\lim_{x \to n^-} \llbracket x \rrbracket$ (ii) $\lim_{x \to n^+} \llbracket x \rrbracket$

(c) ¿Para qué valores de a existe el $\lim_{x \to a} \llbracket x \rrbracket$?

54. Sea $f(x) = \llbracket \cos x \rrbracket, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Trace la gráfica de f.

(b) Evalúe cada uno de los límites siguientes si existen.

(i) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to \pi/2} f(x)$

(c) ¿Para qué valores de a existe el $\lim_{x \to a} f(x)$?

55. Si $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket$, muestre que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$.

56. En la teoría de la relatividad, la fórmula de contracción de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario el límite lateral por la izquierda?

57. Si p es una función polinomial, demuestre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

58. Si r es una función racional, utilice el ejercicio 57 para demostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a en el dominio de r.

59. Si $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$ encuentre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

60. Si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$ encuentre cada uno de los límites siguientes.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

61. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

62. Demuestre por medio de un ejemplo que puede existir el $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$, aunque no exista el $\lim_{x \to a} f(x)$ ni el $\lim_{x \to a} g(x)$.

63. Demuestre por medio de un ejemplo que puede existir el $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$, aunque no exista el $\lim_{x \to a} f(x)$ ni el $\lim_{x \to a} g(x)$.

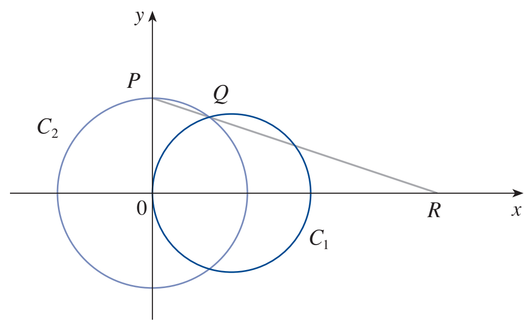
64. Evalúe $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

65. ¿Existe un número a tal que exista el

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}?$$

Si es así, encuentre el valor de a y el valor del límite.

66. La figura muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 con radio r y centro en el origen que se contrae. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de las dos circunferencias y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje de las x. ¿Qué pasa con R cuando C_2 se contrae, esto es, cuando $r \to 0^+$?



2.4 Definición precisa de límite

La definición intuitiva de límite dada en la sección 2.2 es inadecuada para algunos propósitos porque frases como "x es muy cercano a 2" y "$f(x)$ se acerca más y más a L" son muy vagas. Para demostrar convincentemente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0.0001 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

se debe precisar la definición de límite.