EJEMPLO 7 En la figura 4 se muestra el consumo de energía eléctrica (potencia) en la ciudad de San Francisco un día del mes de septiembre (P se mide en megawatts y t en horas, a partir de la medianoche). Estime la energía que se utilizó ese día.

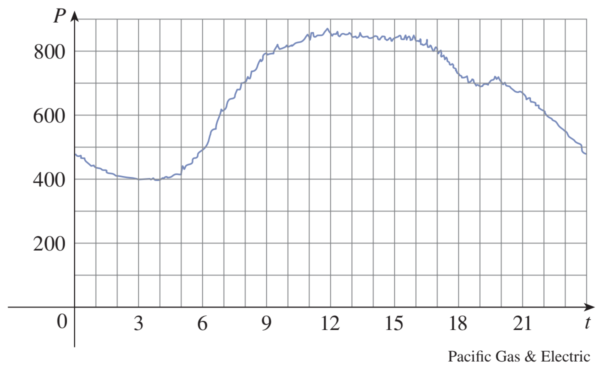


FIGURA 4

SOLUCIÓN La potencia es la razón de cambio de la energía: $P(t) = E'(t)$. De modo que, por el teorema del cambio neto,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía que se usó ese día. Haga una aproximación de la integral con la regla del punto medio con 12 subintervalos y $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t\\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850\\ &\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)\\ &= 15{,}840\end{aligned}$$

La energía usada fue aproximadamente de 15 840 megawatts-horas. ■

Una nota acerca de unidades

¿Cómo supo qué unidades usar para la energía en el ejemplo 7? La integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ se define como el límite de las sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\Delta t$. Ahora $P(t_i^*)$ se mide en megawatts y Δt en horas, de modo que su producto se mide en megawatts-horas. Lo mismo es verdadero para el límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.4 EJERCICIOS

1–4 Verifique mediante derivación que cada una de las fórmulas siguientes es correcta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

3. $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$

4. $\displaystyle\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^2}(3bx - 2a)(a+bx)^{3/2} + C$

5–18 Obtenga las integrales indefinidas generales.

5. $\displaystyle\int (x^{1.3} + 7x^{2.5})\,dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^5}\,dx$

7. $\int \left(5 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^3\right) dx$

8. $\int \left(u^6 - 2u^5 - u^3 + \frac{2}{7}\right) du$

9. $\int v(v^2 + 2)^2\, dv$ **10.** $\int \sqrt{t}\,(t^2 + 3t + 2)\, dt$

11. $\int \frac{1 + \sqrt{x} + x}{x}\, dx$

12. $\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$

13. $\int (\csc^2 t - 2e^t)\, dt$ **14.** $\int \left(\frac{1 + r}{r}\right)^2 dr$

15. $\int (2 + \tan^2\theta)\, d\theta$ **16.** $\int \sec t\,(\sec t + \tan t)\, dt$

17. $\int 2^t(1 + 5^t)\, dt$ **18.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

19–20 Determine la integral indefinida general. Ilustre mediante una gráfica de varios miembros de la familia en la misma pantalla.

19. $\int \left(\cos x + \frac{1}{2}x\right) dx$ **20.** $\int (e^x - 2x^2)\, dx$

21–46 Evalúe cada una de las integrales siguientes.

21. $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\, dx$ **22.** $\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\, dx$

23. $\int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}t^3 - t\right) dt$

24. $\int_0^3 (1 + 6w^2 - 10w^4)\, dw$

25. $\int_0^2 (2x - 3)(4x^2 + 1)\, dx$ **26.** $\int_{-1}^1 t(1 - t)^2\, dt$

27. $\int_0^\pi (5e^x + 3 \operatorname{sen} x)\, dx$ **28.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$

29. $\int_1^4 \left(\frac{4 + 6u}{\sqrt{u}}\right) du$ **30.** $\int_0^1 \frac{4}{1 + p^2}\, dp$

31. $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$ **32.** $\int_1^4 \frac{\sqrt{y} - y}{y^2}\, dy$

33. $\int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx$ **34.** $\int_0^1 (5x - 5^x)\, dx$

35. $\int_0^1 (x^{10} + 10^x)\, dx$ **36.** $\int_0^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

37. $\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

38. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \tan^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

39. $\int_1^8 \frac{2 + t}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt$ **40.** $\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\operatorname{senh} x + \cosh x}\, dx$

41. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}$ **42.** $\int_1^2 \frac{(x - 1)^3}{x^2}\, dx$

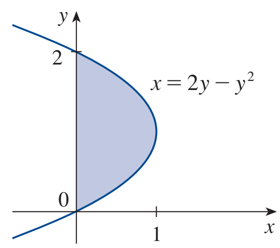
43. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\, dt$ **44.** $\int_0^2 |2x - 1|\, dx$

45. $\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\, dx$ **46.** $\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx$

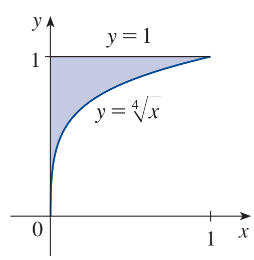
47. Use una gráfica para estimar las intersecciones con el eje x de la curva $y = 1 - 2x - 5x^4$. Luego utilice esta información para estimar el área de la región que se encuentra bajo la curva y arriba del eje x.

48. Repita el ejercicio 47 para la curva $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$.

49. El área de la región que se encuentra a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (el área sombreada de la figura) se expresa con la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$. (Gire su cabeza en sentido de las manecillas del reloj y considere a la región que se encuentra bajo la curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ a $y = 2$.) Encuentre el área de la región.



50. Las fronteras de la región sombreada son el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encuentre el área de esta región escribiendo x como función de y e integrando respecto a esta última (como en el ejercicio 49).



51. Si $w'(t)$ es la rapidez de crecimiento de un niño en kilos por año, ¿que representa $\int_5^{10} w'(t)\, dt$?

52. La corriente en un alambre se define como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Véase el ejemplo 3.7.3.) ¿Qué representa $\int_a^b I(t)\, dt$?

53. Si se fuga aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ galones por minuto en el instante t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\, dt$?

54. Una población de abejas se inicia con 100 ejemplares y se incrementa a razón de $n'(t)$ abejas por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt$?

55. En la sección 4.7 se definió la función ingreso marginal $R'(x)$ como la derivada de la función ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\, dx$?

56. Si $f(x)$ es la pendiente de un sendero a una distancia de x kilómetros del principio de este, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\, dx$?

57. Si x se mide en metros y $f(x)$ en newtons, ¿cuáles son las unidades para $\int_0^{100} f(x)\, dx$?

58. Si las unidades para x son pies y las unidades para $a(x)$ son libras por pie, ¿cuáles son las unidades para da/dx? ¿Qué unidades tiene $\int_2^8 a(x)\, dx$?

59–60 Se da la función velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre (a) el desplazamiento, y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado.

59. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

60. $v(t) = t^2 - 2t - 3, \quad 2 \leqslant t \leqslant 4$

61–62 Se da la función aceleración (en m/s^2) y la velocidad inicial para una partícula que se desplaza a lo largo de una recta. Encuentre (a) la velocidad en el instante t y (b) la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

63. Se da la densidad lineal de una varilla de longitud 4 m mediante $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa total de la varilla.

64. Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua con una rapidez de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.

65. La velocidad de un automóvil se leyó en su velocímetro a intervalos de 10 segundos y se registró en una tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia recorrida por el auto.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

66. Suponga que un volcán hace erupción y en la tabla se dan las lecturas de la cantidad de materiales sólidos expelidos hacia la atmósfera. El tiempo t se mide en segundos y las unidades para $r(t)$ son toneladas métricas por segundo.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dé estimaciones superiores e inferiores para la cantidad $Q(6)$ de materiales expelidos una vez que transcurren seis segundos.

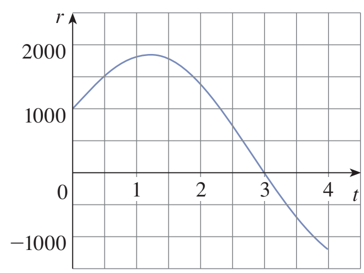
(b) Use la regla del punto medio para estimar $Q(6)$.

67. El costo marginal de fabricar x metros de cierta tela es

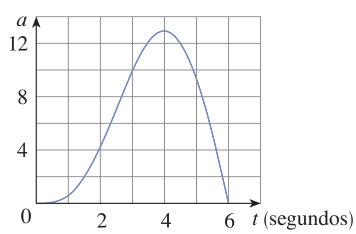
$$C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$$

(en dólares por metro). Encuentre el incremento en el costo si el nivel de producción aumenta de 2000 a 4000 metros.

68. Fluye agua hacia adentro y afuera de un tanque de almacenamiento. Se muestra una gráfica de la razón de cambio $r(t)$ del volumen de agua que hay en el tanque, en litros por día. Si la cantidad de agua que contiene el tanque en el instante $t = 0$ es 25 000 L, use la regla del punto medio para estimar la cantidad de agua cuatro días después.



69. Se muestra la gráfica de la aceleración $a(t)$ de un automóvil en m/s^2. Use la regla del punto medio para estimar el incremento en la velocidad del auto durante el intervalo de tiempo de seis segundos.

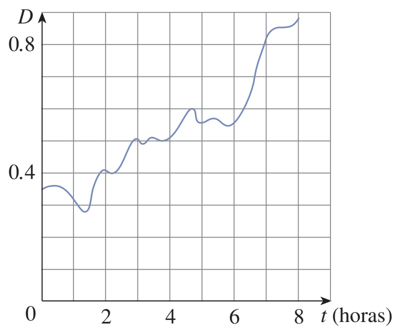


70. El lago Lanier de Georgia, EE. UU., es un embalse creado por la Buford Dam en el río de Chattahoochee. La tabla muestra la tasa de entrada de agua, en pies cúbicos por segundo, medida cada mañana a las 7:30 por el Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los EE. UU. Utilice la regla del punto medio para calcular la cantidad de agua que fluyó en el lago Lanier, del 18 de julio de 2013, a las 7:30 al 26 de julio a las 7:30 AM.

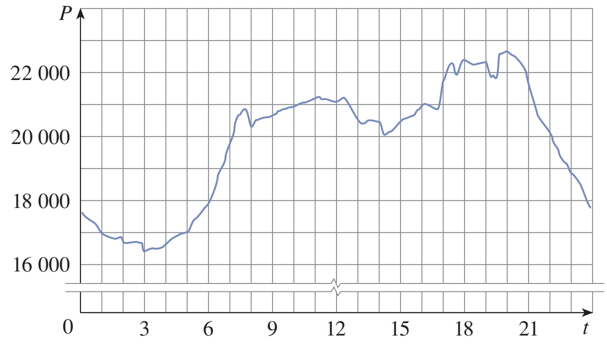
Día	Tasa de entrada (pies^3/s)
Julio 18	5275
Julio 19	6401
Julio 20	2554
Julio 21	4249
Julio 22	3016
Julio 23	3821
Julio 24	2462
Julio 25	2628
Julio 26	3003

71. Una población de bacterias es de 4000 al tiempo $t = 0$ y su rapidez de crecimiento es $1000 \cdot 2^t$ bacterias por hora después de t horas. ¿Cuál es la población después de una hora?

72. La figura siguiente muestra la gráfica del tráfico sobre un proveedor de servicios de internet en línea de datos T1 desde la medianoche hasta las 8:00 AM. D corresponde a los datos transmitidos, medidos en megabits por segundo. Utilice la regla del punto medio para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese período.



73. En la gráfica se muestra el consumo de energía en la provincia de Ontario, Canadá, para el 9 de diciembre de 2004 (P se mide en megawatts; t se mide en horas, comenzando a medianoche). Usando el hecho de que la potencia es la rapidez de cambio de la energía, estime la energía utilizada en ese día.



Independent Electricity Market Operator

74. El 7 de mayo de 1992 el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de tercer grado.

(b) Use el modelo del inciso (a) para estimar la altura alcanzada por el *Endeavour*, 125 segundos después del despegue.

Evento	Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	56.4
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	97.2
Acelerador a 89%	20	136.2
Acelerador a 67%	32	226.2
Acelerador a 104%	59	403.9
Presión dinámica máxima	62	440.4
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	1265.2

PROYECTO DE REDACCIÓN NEWTON, LEIBNIZ Y LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO

Algunas veces se lee que los inventores del cálculo fueron Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero las ideas básicas detrás de la integración fueron investigadas hace 2500 años por los antiguos griegos, como Eudoxo y Arquímedes, y Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow, (1630-1677) y otros fueron los pioneros en hallar rectas tangentes. Barrow, el profesor de Newton en Cambridge, fue el primero en comprender la relación inversa entre la derivación y la integración. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación, en la forma del teorema fundamental del cálculo, para convertir este último en una disciplina matemática sistemática. En este sentido es que se da a Newton y Leibniz el crédito por la invención del cálculo.

Lea acerca de las colaboraciones de estos hombres en una o más de las referencias que se proporcionan en las referencias y escriba un informe sobre uno de los tres temas siguientes.