2.2 EJERCICIOS

1. Explique el significado de la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla con este enunciado aunque $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique qué significa decir que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

En esta situación, ¿es posible que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$? Explique.

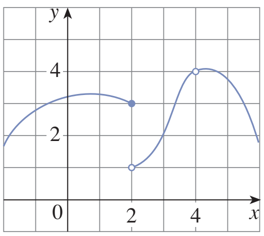
3. Explique el significado de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $\lim_{x \to -5} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

4. Utilice la gráfica de f para establecer el valor de cada cantidad si esta existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

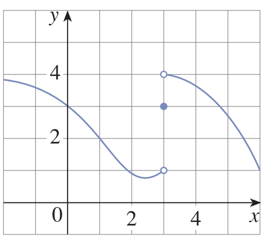
(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ (f) $f(4)$



5. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las cantidades siguientes. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



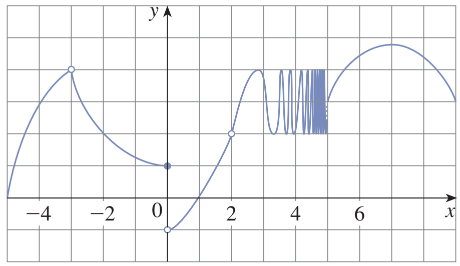
6. Para la función h cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las cantidades siguientes. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

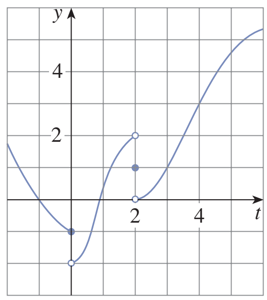


7. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las cantidades siguientes si existe. Si no, explique por qué.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

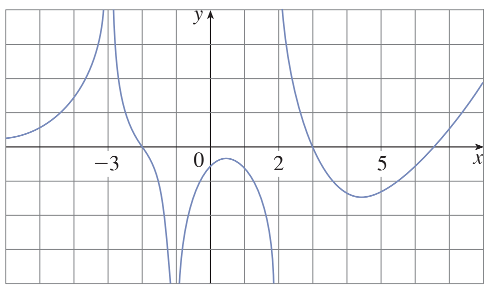


8. Para la función A cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim_{x \to -3} A(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^-} A(x)$

(c) $\lim_{x \to 2^+} A(x)$ (d) $\lim_{x \to -1} A(x)$

(e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.

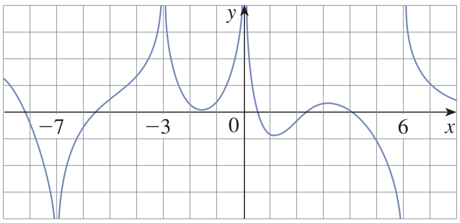


9. Para la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim_{x \to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 6^+} f(x)$

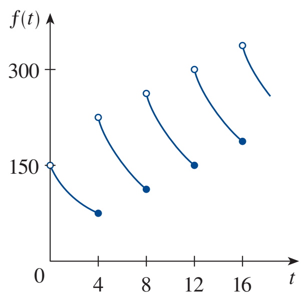
(f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre

$$\lim_{t \to 12^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11–12 Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes y utilícela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

13–14 Utilice la gráfica de la función f para establecer el valor de cada uno de los límites siguientes, si es que existen. Si no, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15–18 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

15. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$

16. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 0,$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0)$ es indefinido

17. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to -2} f(x) = 2,$
$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

18. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 4^-} f(x) = 3,$
$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

19–22 Conjeture el valor de cada uno de los límites siguientes (si existen) evaluando la función dada en los números propuestos (con una precisión de seis decimales).

19. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9},$
$x = 3.1, 3.05, 3.01, 3.001, 3.0001,$
$2.9, 2.95, 2.99, 2.999, 2.9999$

20. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9},$
$x = -2.5, -2.9, -2.95, -2.99, -2.999, -2.9999,$
$-3.5, -3.1, -3.05, -3.01, -3.001, -3.0001$

21. $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t}, \quad t = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

22. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^3 - 64}{h},$
$h = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

23–28 Utilice una tabla de valores para calcular el valor de cada uno de los límites siguientes. Si dispone usted de una calculadora o computadora, utilícela para confirmar gráficamente su resultado.

23. $\lim_{x \to 4} \dfrac{\ln x - \ln 4}{x - 4}$ **24.** $\lim_{p \to -1} \dfrac{1 + p^9}{1 + p^{15}}$

25. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\tan 2\theta}$ **26.** $\lim_{t \to 0} \dfrac{5^t - 1}{t}$

27. $\lim_{x \to 0^+} x^x$ **28.** $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

29. (a) Por medio de la gráfica de la función $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y, calcule el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(b) Verifique su respuesta del inciso (a) mediante la evaluación de $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

30. (a) Calcule el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

al trazar la gráfica de la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Exprese su respuesta con una precisión de dos decimales.
(b) Verifique su respuesta del inciso (a) evaluando $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

31–43 Determine cada uno de los límites infinitos siguientes.

31. $\displaystyle \lim_{x\to 5^+} \frac{x+1}{x-5}$

32. $\displaystyle \lim_{x\to 5^-} \frac{x+1}{x-5}$

33. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$

34. $\displaystyle \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x}}{(x-3)^5}$

35. $\displaystyle \lim_{x\to 5^+} \ln(x^2-25)$

36. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen} x)$

37. $\displaystyle \lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{1}{x}\sec x$

38. $\displaystyle \lim_{x\to \pi^-} \cot x$

39. $\displaystyle \lim_{x\to 2\pi^-} x\csc x$

40. $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

41. $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$

42. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\ln x\right)$

43. $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\ln x^2 - x^{-2})$

---

44. (a) Encuentre las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

(b) Verifique su respuesta al inciso (a) al trazar la gráfica de la función.

45. Determine $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^3-1}$ y $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^3-1}$

(a) evaluando $f(x) = 1/(x^3-1)$ para valores de x que tiendan a 1, por el lado izquierdo y por el lado derecho.
(b) razonando como en el ejemplo 9, y
(c) a partir de la gráfica de f.

46. (a) Por medio de la gráfica de la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y, calcule el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(b) Verifique su respuesta del inciso (a) para evaluar $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

47. (a) Calcule el valor de $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$ con una precisión de cinco decimales. ¿Le parece conocido este número?
(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la función $y = (1+x)^{1/x}$.

48. (a) Trace la gráfica de $f(x) = e^x + \ln|x-4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. ¿Piensa que la gráfica es una representación precisa de f?
(b) ¿Cómo conseguiría una gráfica que represente mejor a f?

49. (a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05 e infiera el valor de

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{2^x}{1000}\right)$$

(b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Infiera otra vez.

50. (a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.
(b) Suponga el valor de $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.
(c) Evalúe $h(x)$ para valores pequeños sucesivos de x hasta que finalmente alcance un valor de 0 para $h(x)$. ¿Aún confía en que su conjetura en el inciso (b) es correcta? Explique por qué finalmente obtuvo valores 0. (En la sección 4.4 se explicará un método para evaluar el límite.)
(d) Trace la gráfica de la función h en un rectángulo de vista $[1, 1]$ por $[0, 1]$. Después haga un acercamiento hacia el punto donde la gráfica interseca el eje y, para calcular el límite de $h(x)$ cuando x tienda a 0. Continúe el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso (c).

51. Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en el rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Después haga acercamientos al origen varias veces. Haga comentarios acerca del comportamiento de esta función.

52. Considere la función $f(x) = \tan \dfrac{1}{x}$.

(a) Demuestre que $f(x) = 0$ para $x = \dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{2\pi}, \dfrac{1}{3\pi}, \ldots$
(b) Demuestre que $f(x) = 1$ para $x = \dfrac{4}{\pi}, \dfrac{4}{5\pi}, \dfrac{4}{9\pi}, \ldots$
(c) ¿Qué puede concluir acerca de $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \tan\frac{1}{x}$?

53. Utilice una gráfica para calcular las ecuaciones de todas las asíntotas de la curva

$$y = \tan(2\operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Luego determine las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

54. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde $m_0 = 0$ es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c^-$?

55. (a) Utilice una evidencia numérica y gráfica para intuir el valor del límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$$

(b) ¿Qué tan cerca de 1 tiene que estar x para garantizar que la función en el inciso (a) esté dentro de una distancia de 0.5 de este límite?