57. ¿En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1?

58. Investigue la familia de funciones

$$f_n(x) = \tanh(n \operatorname{sen} x)$$

donde n es un entero positivo. Describa qué pasa con la gráfica de f_n cuando n es muy grande.

59. Demuestre que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces existen números α y β tales que $ae^x + be^{-x}$ es igual

$$\alpha \operatorname{senh}(x + \beta) \quad \text{o} \quad \alpha \cosh(x + \beta)$$

En otras palabras, casi toda función de la forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ es una función seno hiperbólico o coseno hiperbólico desplazada o estirada.

3 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Exprese cada una de las reglas de derivación siguientes, tanto en símbolos como en palabras.
(a) Regla de la potencia (b) Regla del múltiplo constante
(c) Regla de la suma (d) Regla de la diferencia
(e) Regla del producto (f) Regla del cociente
(g) Regla de la cadena

2. Obtenga las derivadas de cada una de las funciones siguientes.
(a) $y = x^n$ (b) $y = e^x$ (c) $y = b^x$
(d) $y = \ln x$ (e) $y = \log_b x$ (f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$ (h) $y = \tan x$ (i) $y = \csc x$
(j) $y = \sec x$ (k) $y = \cot x$ (l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
(m) $y = \cos^{-1} x$ (n) $y = \tan^{-1} x$ (o) $y = \operatorname{senh} x$
(p) $y = \cosh x$ (q) $y = \tanh x$ (r) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
(s) $y = \cosh^{-1} x$ (t) $y = \tanh^{-1} x$

3. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) Exprese e como un límite.
(c) ¿Por qué en cálculo se usa la función exponencial natural, $y = e^x$, con más frecuencia que las demás funciones exponenciales, $y = b^x$?
(d) ¿Por qué en cálculo se usa la función logarítmica natural, $y = \ln x$, más que las demás funciones logarítmicas, $y = \log_b x$?

4. (a) Explique cómo funciona la derivación implícita.
(b) Explique cómo funciona la derivación logarítmica.

5. Dé varios ejemplos de cómo se puede interpretar la derivada como una razón de cambio en física, química, biología, economía y otras ciencias.

6. (a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de crecimiento natural.
(b) ¿En qué circunstancias es un modelo adecuado para el crecimiento de la población?
(c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

7. (a) Escriba una expresión para la linealización de f en a.
(b) Si $y = f(x)$, escriba una expresión para la diferencial dy.
(c) Si $dx = \Delta x$, dibuje un esquema para mostrar el significado geométrico de Δy y dy.

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}f\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Si $y = e^2$, entonces $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. La derivada de un polinomio es un polinomio.

12. Si $f(x) = (x^6 - x^4)^5$, entonces $f^{(31)}(x) = 0$.

13. La derivada de una función racional es una función racional.

14. La ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en $(-2, 4)$ es $y - 4 = 2x(x + 2)$.

15. Si $g(x) = x^5$, entonces $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

EJERCICIOS

1–50 Calcule y' en cada una de las funciones siguientes.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$
2. $y = \cos(\tan x)$
3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$
4. $y = \dfrac{\tan x}{1 + \cos x}$
5. $y = x^2 \operatorname{sen} \pi x$
6. $y = x \cos^{-1} x$
7. $y = \dfrac{t^4 - 1}{t^4 + 1}$
8. $xe^y = y \operatorname{sen} x$
9. $y = \ln(x \ln x)$
10. $y = e^{mx} \cos nx$
11. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$
12. $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2$
13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$
14. $y = \ln \sec x$
15. $y + x \cos y = x^2 y$
16. $y = \left(\dfrac{u - 1}{u^2 + u + 1}\right)^4$
17. $y = \sqrt{\arctan x}$
18. $y = \cot(\csc x)$
19. $y = \tan\left(\dfrac{t}{1 + t^2}\right)$
20. $y = e^{x \sec x}$
21. $y = 3^{x \ln x}$
22. $y = \sec(1 + x^2)$
23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$
24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$
25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$
26. $y = \sqrt{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$
27. $y = \log_5(1 + 2x)$
28. $y = (\cos x)^x$
29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$
30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$
31. $y = x \tan^{-1}(4x)$
32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$
33. $y = \ln|\sec 5x + \tan 5x|$
34. $y = 10^{\tan \pi\theta}$
35. $y = \cot(3x^2 + 5)$
36. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$
37. $y = \operatorname{sen}\left(\tan \sqrt{1 + x^3}\right)$
38. $y = \arctan\left(\operatorname{arcsen} \sqrt{x}\right)$
39. $y = \tan^2(\operatorname{sen} \theta)$
40. $xe^y = y - 1$
41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}\,(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$
42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$
43. $y = x \operatorname{senh}(x^2)$
44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$
45. $y = \ln(\cosh 3x)$
46. $y = \ln \left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$
47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$
48. $y = x \tanh^{-1}\sqrt{x}$
49. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$
50. $y = \operatorname{sen}^2\left(\cos\sqrt{\operatorname{sen} \pi x}\right)$

51. Si $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, encuentre $f''(2)$.

52. Si $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, determine $g''(\pi/6)$.

53. Encuentre y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

54. Determine $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Utilice inducción matemática (página 72) para demostrar que si $f(x) = xe^x$, entonces $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Evalúe $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^3}{\tan^3(2t)}$.

57–59 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

57. $y = 4 \operatorname{sen}^2 x$, $(\pi/6, 1)$
58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $(0, -1)$
59. $y = \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen} x}$, $(0, 1)$

60–61 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las curvas siguientes en el punto que se especifica.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13$, $(2, 1)$
61. $y = (2 + x)e^{-x}$, $(0, 2)$

62. Si $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, determine $f'(x)$. Trace la gráfica de f y f' en la misma pantalla y haga comentarios.

63. (a) Si $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, determine $f'(x)$.
(b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x\sqrt{5 - x}$ en los puntos $(1, 2)$ y $(4, 4)$.
(c) Ilustre el inciso (b) trazando la gráfica de la curva y las rectas tangentes, en la misma pantalla.
(d) Verifique si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

64. (a) Si $f(x) = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encuentre f' y f''.
(b) Verifique si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f, f' y f''.

65. ¿En qué puntos de la curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, la tangente es una recta horizontal?

66. Encuentre los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde la recta tangente tiene pendiente 1.

67. Si $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, demuestre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

68. (a) Al derivar la fórmula del coseno del doble del ángulo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

obtenga la fórmula del doble del ángulo para la función seno.

(b) Al derivar la fórmula de la adición

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

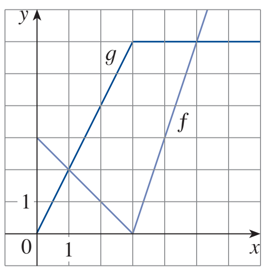
obtenga la fórmula de la adición para la función coseno.

69. Suponga que

$$f(1) = 2 \quad f'(1) = 3 \quad f(2) = 1 \quad f'(2) = 2$$
$$g(1) = 3 \quad g'(1) = 1 \quad g(2) = 1 \quad g'(2) = 4$$

(a) Si $S(x) = f(x) + g(x)$, determine $S'(1)$.
(b) Si $P(x) = f(x)g(x)$, determine $P'(2)$.
(c) Si $Q(x) = f(x)/g(x)$, determine $Q'(1)$.
(d) Si $C(x) = f(g(x))$, determine $C'(2)$.

70. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sea $P(x) = f(x)\,g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ y $C(x) = f(g(x))$. Encuentre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ y (c) $C'(2)$.



71–78 Encuentre f' en términos de g'.

71. $f(x) = x^2 g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln|g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79–81 Determine h' en términos de f' y g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} 4x))$

82. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ en el rectángulo de vista $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) ¿Sobre qué intervalo es más grande la razón promedio de cambio: $[1, 2]$ o $[2, 3]$?
(c) ¿En qué valor de x es más grande la razón de cambio instantáneo: $x = 2$ o $x = 5$?
(d) Compruebe sus estimaciones visuales del inciso (c) calculando $f'(x)$ y comparando los valores numéricos de $f'(2)$ y $f'(5)$.

83. ¿En qué punto sobre la curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ es horizontal la recta tangente?

84. (a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$, que es paralela a la recta $x - 4y = 1$.
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ que pase por el origen.

85. Determine la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto $(1, 4)$ y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 5$ tienen pendientes 6 y -2, respectivamente.

86. La función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$, se usa para modelar la concentración en el instante t de un medicamento que se inyecta en el torrente sanguíneo.
(a) Demuestre que $\lim_{t \to \infty} C(t) = 0$.
(b) Encuentre $C'(t)$, la rapidez con la que cambia la concentración del medicamento durante la circulación.
(c) ¿Cuándo esta rapidez es igual a 0?

87. Una ecuación de movimiento en la forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa la oscilación amortiguada de un objeto. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto.

88. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal por lo que su coordenada en el instante t es $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geqslant 0$, donde b y c son constantes positivas.
(a) Encuentre las funciones velocidad y aceleración.
(b) Demuestre que la partícula siempre se desplaza en dirección positiva.

89. Una partícula se desplaza sobre una recta vertical de manera que su coordenada en el instante t es $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geqslant 0$.
(a) Encuentre las funciones velocidad y aceleración.
(b) ¿Cuándo se mueve hacia arriba la partícula y cuándo se mueve hacia abajo?
(c) Determine la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant 3$.
(d) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 3$.
(e) ¿Cuándo la partícula aumenta su rapidez? ¿Cuándo disminuye su rapidez?

90. El volumen de un cono recto circular es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.
(a) Determine la razón de cambio del volumen respecto a la altura si el radio es constante.

(b) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto al radio si la altura es constante.

91. La masa de una parte de un alambre es $x(1 + \sqrt{x})$ kilogramos, donde x se mide en metros desde uno de los extremos del alambre. Encuentre la densidad lineal del alambre cuando $x = 4$ m.

92. El costo, en dólares, de producir x unidades de un cierto artículo es

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal.
(b) Determine $C'(100)$ y explique su significado.
(c) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

93. Inicialmente, un cultivo de bacterias contiene 200 células y crecen con una razón proporcional a su tamaño. Después de media hora la población se ha incrementado a 360 células.
(a) Encuentre el número de bacterias después de t horas.
(b) Calcule el número de bacterias después de 4 horas.
(c) Encuentre la rapidez de crecimiento después de 4 horas.
(d) ¿Cuándo la población alcanza 10 000?

94. El cobalto-60 tiene una vida media de 5.24 años.
(a) Determine la masa que queda de una muestra de 100 mg después de 20 años.
(b) ¿Cuánto tardaría la masa en decaer a 1 mg?

95. Sea $C(t)$ la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo. Cuando el cuerpo elimina el medicamento, $C(t)$ disminuye con una rapidez que es proporcional a la cantidad de medicamento que está presente en el tiempo t. En estos términos $C'(t) = -kC(t)$, donde k es un número positivo denominado *constante de eliminación* del medicamento.
(a) Si C_0 es la concentración en el tiempo $t = 0$, determine la concentración en el tiempo t.
(b) Si el cuerpo elimina la mitad del medicamento en 30 horas, ¿cuánto tiempo le toma eliminar 90% del medicamento?

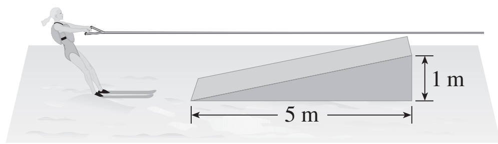
96. Una taza con chocolate caliente tiene una temperatura de 80 °C en una habitación que se mantiene en 20 ºC. Después de media hora, el chocolate caliente se enfría a 60 °C.
(a) ¿Cuál es la temperatura del chocolate después de otra media hora?
(b) ¿Cuándo se enfriará el chocolate a 40 °C?

97. El volumen de un cubo se incrementa a razón de 10 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa el área superficial cuando la longitud de un lado es de 30 cm?

98. Un vaso de papel tiene la forma de un cono de altura igual a 10 cm y radio de 3 cm (en la parte superior). Si el agua se vierte en el vaso a razón de 2 cm^3/s, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando tiene 5 cm de profundidad?

99. Un globo asciende con rapidez constante de 2 m/s. Un niño va en bicicleta por un camino recto a una rapidez de 5 m/s. Cuando pasa bajo el globo, este se halla a 15 m arriba de él. ¿Qué tan rápido se incrementa la distancia entre el niño y el globo 3 s más tarde?

100. Una esquiadora pasa encima de una rampa, como la que se ilustra en la figura, con una rapidez de 10 m/s. ¿Qué tan rápido se eleva cuando abandona la rampa?



101. El ángulo de elevación del sol decrece a razón de 0.25 rad/h. ¿Qué tan rápido se incrementa la sombra de un edificio de 400 pies de altura cuando el ángulo de elevación del sol es $\pi/6$?

102. (a) Encuentre la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ cerca de 3.
(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de f y la aproximación lineal.
(c) ¿Para qué valores de x es exacta la aproximación lineal dentro de 0.1?

103. (a) Determine la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Establezca la aproximación lineal correspondiente y utilícela para proporcionar un valor aproximado para $\sqrt[3]{1.03}$.
(b) Determine los valores de x para los que la aproximación lineal dada en el inciso (a) sea exacta con una diferencia menor que 0.1.

104. Evalúe dy si $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ y $dx = 0.2$.

105. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm, con un posible error de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el máximo error posible al calcular el área de la ventana.

106–108 Exprese el límite como una derivada en cada una de las funciones siguientes y evalúelo.

106. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\displaystyle \lim_{\theta \to \pi/3} \frac{\cos\theta - 0.5}{\theta - \pi/3}$

---

109. Evalúe $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

110. Suponga que f es una función derivable tal que $f(g(x)) = x$ y $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Demuestre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

112. Demuestre que la longitud de la porción de cualquier recta tangente al astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cortada por los ejes de coordenadas es constante.