Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Derivadas y Razón de Cambio

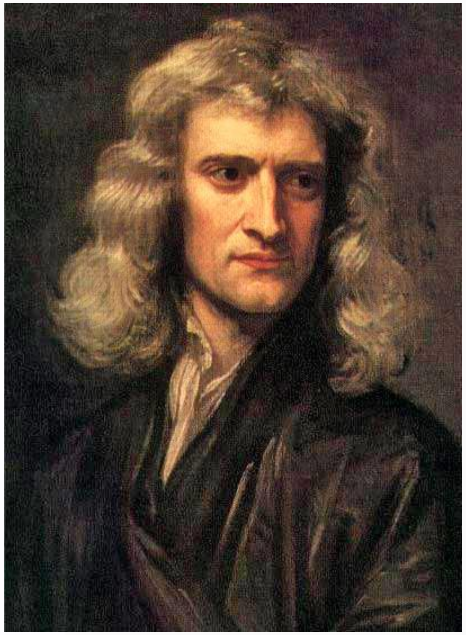
Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Comenzar el estudio de la derivada de funciones reales de una variable

- Razones de cambio
- Derivadas
- La derivada como función
- Derivabilidad
- Derivadas de orden superior

Razones de Cambio



En general no es sencillo hallar la pendiente de la tangente a una curva en un punto dado $P_0(x_0, y_0)$ pues la fórmula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

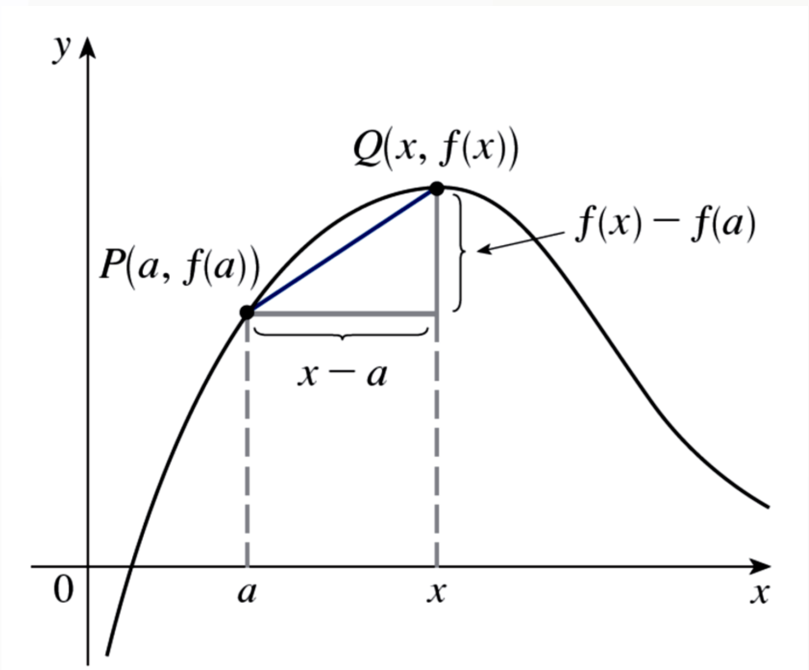
Requiere que se conozca otro punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta distinto al de tangencia.

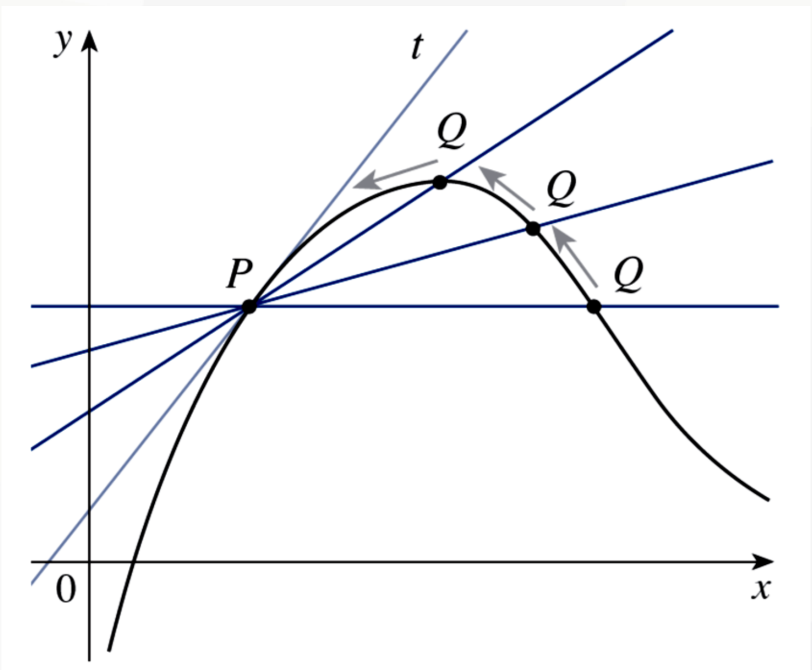
Isaac Newton desarrolló un procedimiento basado en el Método de Pierre de Fermat para hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado, lo que condujo a la definición de la derivada.

Razones de Cambio

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y uno quiere encontrar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$





Razones de Cambio

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

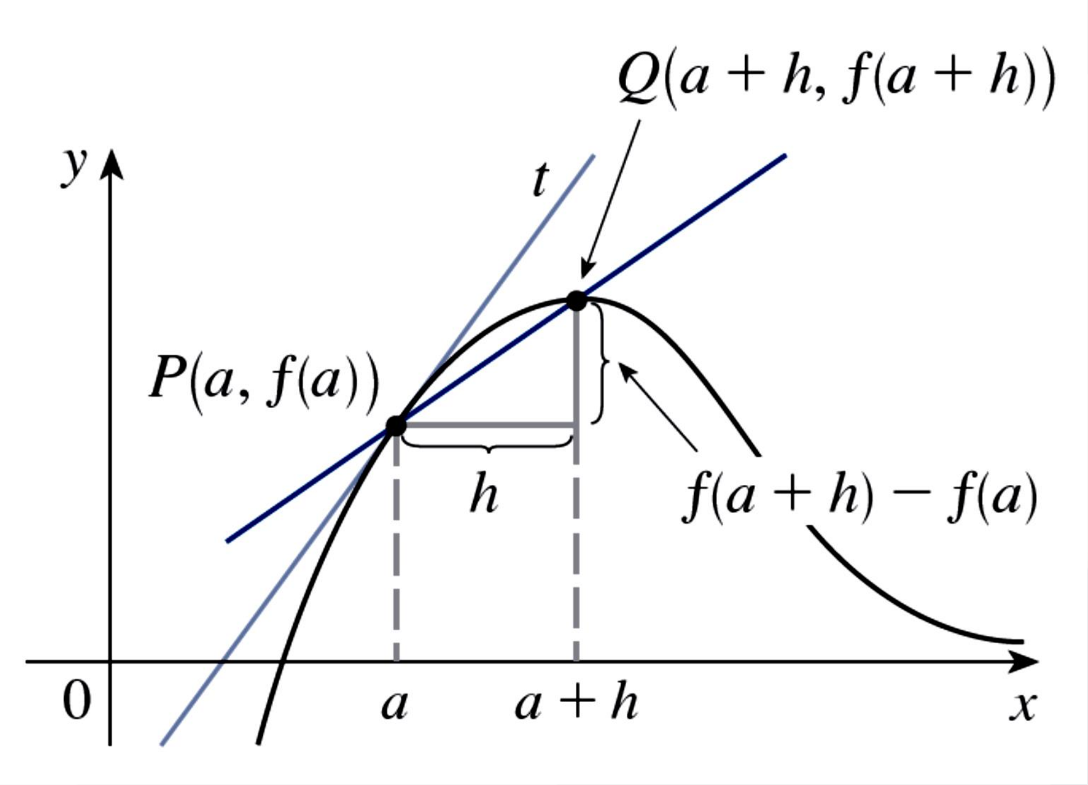
Ejemplo:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto P(1, 1).

Razones de Cambio

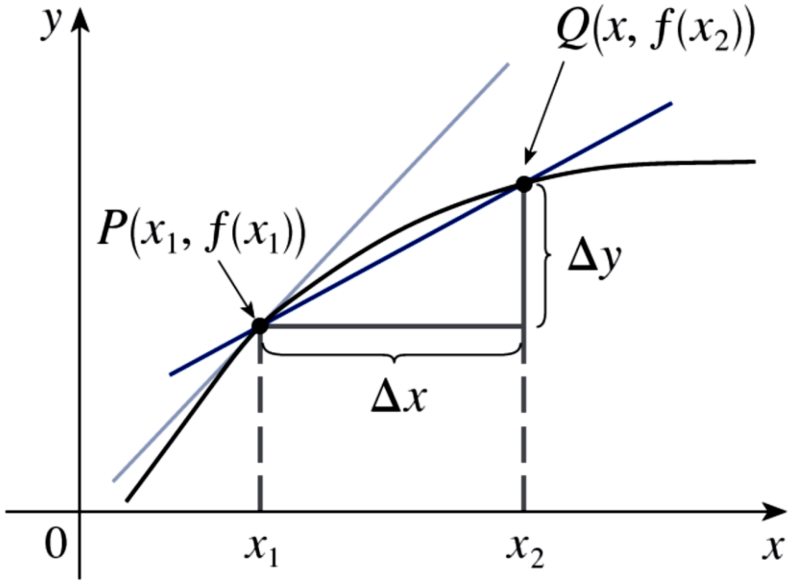
2

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Razones de Cambio

$\boxed{6}$ Razón de cambio instantánea $= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$



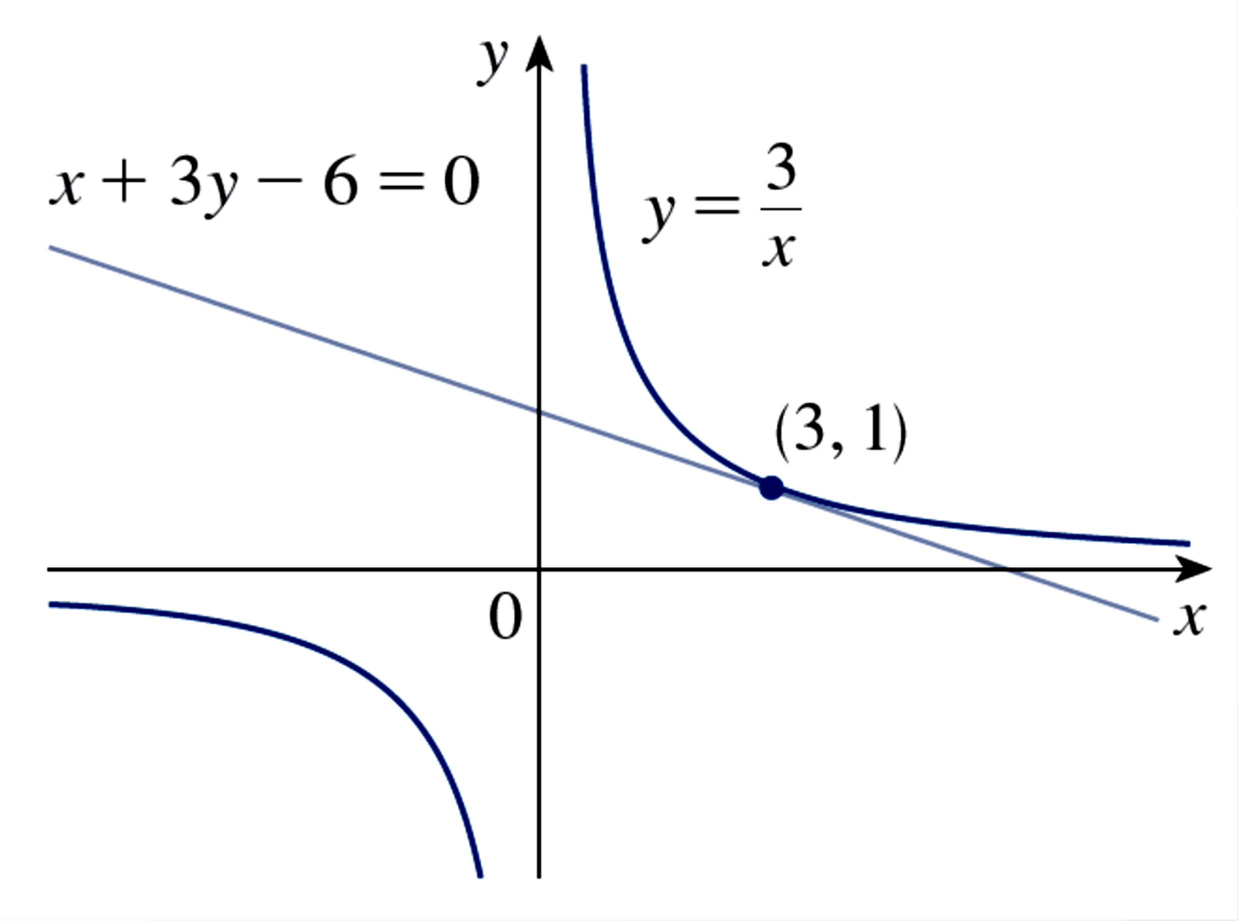
razón de cambio promedio $= m_{PQ}$

razón de cambio instantánea $=$
pendiente de la tangente en P

Razones de Cambio

Ejemplo:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = \frac{3}{x}$ en el punto (3, 1).



Derivadas

4 **Definición** La **derivada de una función *f* en un número *a***, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y solo si x tiende a a. Por consiguiente, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como se vio en la búsqueda de rectas tangentes, es

5

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivadas

Ejemplo:

Encuentre la derivada de la función $\mathrm{f(x)} = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

Derivadas

La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si utiliza la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se puede escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x cuando $x = a$.

Ejemplo:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el punto (3, -6).

La Derivada como Función

1
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ahora se cambiará el punto de vista y hará que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, se obtiene

2
$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Si usa la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

La Derivada como Función

Ejemplo:

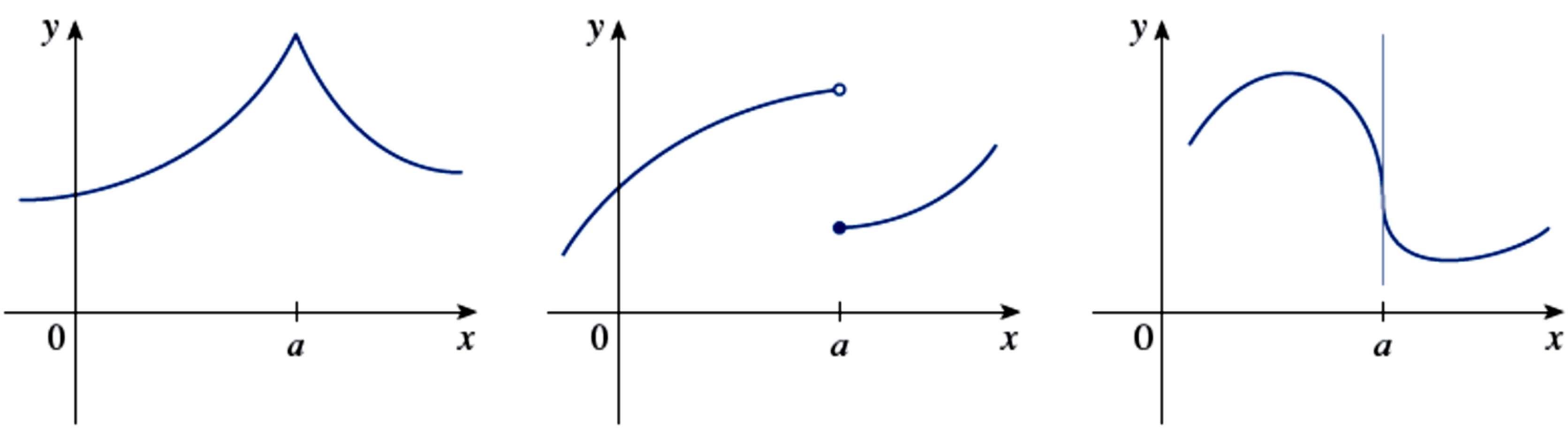
a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre la función $f'(x)$.

b) Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la función $f'(x)$.

Derivabilidad

3 Definición Una función f es **derivable en a** si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

4 Teorema Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.



(a) Una esquina (b) Una discontinuidad (c) Una tangente vertical

Derivadas de Orden Superior

Si f es una función derivable, entonces su derivada f también es una función, por lo que f puede tener una derivada de sí misma, denotada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se llama **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{derivada de}} \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{primera derivada}} = \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segunda derivada}}$$

Ejemplo:

a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre e interprete la función $f''(x)$.

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es