58. (a) ¿Cuáles son los valores de $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$?
(b) Use su calculadora para evaluar $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$. ¿Qué observa? ¿Puede explicar por qué la calculadora tiene problemas?

SAC **59.** Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es inyectiva. Luego utilice un sistema de algebraico computacional para encontrar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (El SAC produce tres posibles expresiones. Explique por qué dos de ellas son irrelevantes en este contexto.)

SAC **60.** (a) Si $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$, utilice un sistema de algebraico computacional para encontrar una expresión para $g^{-1}(x)$.
(b) Utilice la expresión del inciso (a) para graficar $y = g(x)$, $y = x$ y $y = g^{-1}(x)$, en la misma pantalla.

61. Si una población de bacterias comienza con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, entonces el número de bacterias después de t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$.
(a) Determine la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuándo la población alcanzará 50 000 bacterias?

62. Cuando el flash de una cámara se apaga, las baterías comienzan a recargar de inmediato el condensador del flash, que almacena una carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La capacidad de carga máxima es Q_0, y t se mide en segundos.)
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuánto tiempo se tarda en recargar el condensador a 90% de la capacidad si $a = 2$?

63–68 Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

63. (a) $\cos^{-1}(-1)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(0.5)$

64. (a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\arctan(-1)$

65. (a) $\csc^{-1}\sqrt{2}$ (b) arcsen 1

66. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(-1/\sqrt{2})$ (b) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$

67. (a) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

68. (a) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(5\pi/4))$ (b) $\cos\left(2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

69. Pruebe que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

70–72 Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

70. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **71.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$ **72.** $\operatorname{sen}(2 \arccos x)$

73-74 Trace la gráfica de las funciones dadas, en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

73. $y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$; $y = \operatorname{sen}^{-1}x$; $y = x$

74. $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$; $y = \tan^{-1}x$; $y = x$

75. Encuentre el dominio y el rango de la función

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

76. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$ y explique la apariencia de la gráfica.
(b) Trace la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. ¿Cómo se explica la apariencia de esta gráfica?

77. (a) Si desplaza la curva a la izquierda, ¿qué sucede con su reflexión a través de la recta $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$, donde f es una función inyectiva.
(b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

1 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una función? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
(b) ¿Qué es la gráfica de una función?
(c) ¿Cómo se puede saber si una curva dada es la gráfica de una función?

2. Analice cuatro maneras de representar una función. Ilustre la discusión con ejemplos.

3. (a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede saber si una función es par observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función par.
(b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede saber si una función es impar observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función impar.

4. ¿Qué es una función creciente?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

6. Dé un ejemplo de cada tipo de función
(a) lineal (b) potencia
(c) exponencial (d) cuadrática
(e) polinomial de grado 5 (f) racional

7. Trace a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las funciones siguientes.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Trace a mano un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = \text{sen}\, x$ (b) $y = \tan x$ (c) $y = e^x$
(d) $y = \ln x$ (e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \tan^{-1}x$

9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
(a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
(b) ¿Cuál es el dominio de fg?
(c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

11. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de f de la siguiente manera.
(a) Desplazar 2 unidades hacia arriba.
(b) Desplazar 2 unidades hacia abajo.
(c) Desplazar 2 unidades a la derecha.
(d) Desplazar 2 unidades a la izquierda.
(e) Reflejar a través del eje x.
(f) Reflejar a través del eje y.
(g) Alargar verticalmente por un factor de 2.
(h) Contraer verticalmente por un factor de 2.
(i) Alargar horizontalmente por un factor de 2.
(j) Contraer horizontalmente por un factor de 2.

12. (a) ¿Qué es una función inyectiva? ¿Cómo puede saber si una función es inyectiva observando su gráfica?
(b) Si f es una función inyectiva, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo se obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

13. (a) ¿Cómo se define la función seno inverso $f(x) = \text{sen}^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
(b) ¿Cómo se define la función coseno inverso $f(x) = \cos^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?
(c) ¿Cómo se define la función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.

3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.

4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Una recta vertical interseca la gráfica de una función a lo más una vez.

6. Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.

7. Si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

8. Siempre puede dividirse entre e^x.

9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.

10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

11. Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

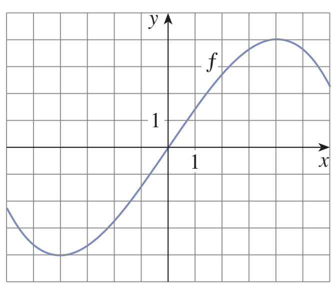
12. $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$.

13. $\tan^{-1}x = \dfrac{\text{sen}^{-1}x}{\cos^{-1}x}$

14. Si x es cualquier número real, entonces $\sqrt{x^2} = x$.

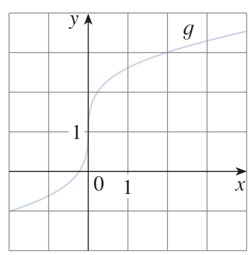
EJERCICIOS

1. Sea f la función cuya gráfica está dada.



(a) Calcule el valor de $f(2)$.
(b) Calcule los valores de x tales que $f(x) = 3$.
(c) Indique el dominio de f.
(d) Establezca el rango de f.
(e) ¿Sobre qué intervalo es creciente f?
(f) ¿Es f inyectiva? Explique.
(g) ¿Es f par, impar, o ninguno de los dos? Explique.

2. La gráfica de g está dada



(a) Obtenga el valor de $g(2)$.
(b) ¿Por qué g es inyectiva?
(c) Calcule el valor de $g^{-1}(2)$.
(d) Calcule el dominio de g^{-1}.
(e) Trace la gráfica de g^{-1}.

3. Si $f(x) = x^2 - 2x + 3$, evalúe el cociente de diferencias

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

4. Dibuje una gráfica aproximada de la producción de un cultivo en función de la cantidad de fertilizante utilizado.

5–8 Encuentre el dominio y rango de cada una de las funciones siguientes. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$ **6.** $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$ **8.** $F(t) = 1 + \operatorname{sen} 2t$

---

9. Suponga que la gráfica de f está dada. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las funciones siguientes a partir de la gráfica de f.

(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$

(c) $y = 1 + 2f(x)$ (d) $y = f(x - 2) - 2$

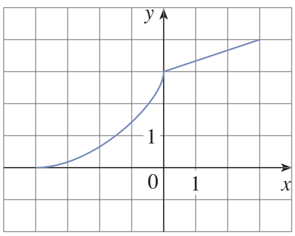
(e) $y = -f(x)$ (f) $y = f^{-1}(x)$

10. La gráfica de f está dada. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = f(x - 8)$ (b) $y = -f(x)$

(c) $y = 2 - f(x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$

(e) $y = f^{-1}(x)$ (f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 Utilice transformaciones para trazar la gráfica de la función.

11. $y = (x - 2)^3$ **12.** $y = 2\sqrt{x}$

13. $y = x^2 - 2x + 2$ **14.** $y = \ln(x + 1)$

15. $f(x) = -\cos 2x$ **16.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

---

17. Determine si f es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$

(b) $f(x) = x^3 - x^7$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$ (d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica consiste en el segmento de recta desde el punto $(-2, 2)$ hasta el punto $(-1, 0)$, junto con la mitad superior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como una composición de tres funciones.

21. La tabla muestra la población de Indonesia (en millones) durante los años 1950-2000. Decida qué tipo de modelo es apropiado y utilice el modelo para estimar la población de Indonesia en 2010.

Año	Población	Año	Población
1950	80	1980	150
1955	86	1985	166
1960	96	1990	182
1965	107	1995	197
1970	120	2000	212
1975	134		

22. Un pequeño fabricante de electrodomésticos encuentra que cuesta \$9000 producir 1000 hornos tostadores a la semana y \$12 000 producir 1500 hornos tostadores a la semana.

(a) Exprese el costo en función del número de hornos tostadores producidos, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

(c) ¿Cuál es la intersección de la gráfica con el eje y y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, determine $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(c) $\tan\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right)$ (d) $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes para x.

(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$

(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\tan^{-1}x = 1$

27. La vida media del paladio-100, ^{100}Pd, es de cuatro días. (Así que la mitad de cualquier cantidad dada de ^{100}Pd se desintegrará en cuatro días.) La masa inicial de una muestra es un gramo.

(a) Encuentre la masa que queda después de 16 días.

(b) Determine la masa $m(t)$ que queda después de t días.

(c) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(d) ¿Cuándo se reducirá la masa a 0.01 g?

28. La población de ciertas especies en un ambiente limitado con una población inicial de 100 y capacidad de carga de 1000 es

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años.

(a) Grafique esta función y estime cuánto tiempo le toma a la población llegar a 900.

(b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(c) Utilice la función inversa para encontrar el tiempo necesario para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso (a).