Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Álgebra Lineal e Inversión de Matriz

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Aprender a Resolver Operaciones Matriciales

- Aritmética de Matrices
- Producto Matriz-Vector y Matriz-Matriz
- Matriz Cuadradas
- Matriz Inversa
- Matriz Traspuesta

Aritmética de Matrices

Dos matrices A y B son **iguales** si tienen el mismo número de filas y columnas, digamos, $n \times m$, y sí $a_{ij} = b_{ij}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

Dos operaciones importantes en matrices son la suma de dos matrices y la multiplicación de una matriz por un número real.

Si A y B son matrices, ambas de $n \times m$, la suma de A y B, denotada $A + B$, es la matriz $n \times m$ cuyas entradas son $a_{ij} + b_{ij}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

Si A es una matriz $n \times m$ y λ es un número real, entonces la multiplicación escalar de λ y A, denotada λA, es la matriz $n \times m$ cuyas entradas son λa_{ij}, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

Aritmética de Matrices

Ejemplo:

Determine $A + B$ y λA, cuando:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{y } \lambda = -2.$$

Aritmética de Matrices

Propiedades:

Si A, B y C son matrices $n \times m$ y λ y μ son números reales. Se cumplen las siguientes propiedades de suma y multiplicación escalar:

i) $A + B = B + A$,

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

iii) $A + O = O + A = A$,

iv) $A + (-A) = -A + A = O$,

v) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

vi) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

vii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,

viii) $1A = A$.

Todas estas propiedades siguen resultados similares respecto a los números complejos. ■

Producto Matriz-Vector

El producto de matrices también se puede definir en ciertas instancias. Primero consideraremos el producto de una matriz $n \times m$ y un vector columna $m \times 1$.

Sea A una matriz $n \times m$ y $\mathbf{b}$ un vector columna m-dimensional. El **producto matriz-vector** de A y $\mathbf{b}$, denotado $A\mathbf{b}$, es un vector columna n-dimensional dado por

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{1i} b_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{2i} b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ni} b_i \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Para definir este producto, el número de columnas de la matriz A debe concordar con el número de filas del vector $\mathbf{b}$ y el resultado es otro vector columna con el número de filas que concuerda con el número de filas en la matriz.

Producto Matriz-Vector

Ejemplo:

Determine el producto $A\mathbf{b}$ si:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Producto Matriz-Matriz

Podemos utilizar la multiplicación matriz-vector para definir la multiplicación general matriz-matriz.

Si A es una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times p$. El **producto de la matriz** de A y B, denotado AB es una matriz C $n \times p$ cuyas entradas c_{ij} son

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj},$$

para cada $i = 1, 2, \ldots n$, y $j = 1, 2, \ldots, p$. ■

Producto Matriz-Matriz

Ejemplo:

Determine todos los productos posibles de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Producto Matriz-Matriz

Propiedades:

Si A es una matriz $n \times m$, B es una matriz $m \times k$, C es una matriz $k \times p$, D es una matriz $m \times k$ y λ es un número real. Las siguientes propiedades se mantienen:

a) $A(BC) = (AB)C$; **b)** $A(B + D) = AB + AD$; **c)** $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Matriz Cuadrada

Las matrices que tienen el mismo número de filas como columnas son especialmente importantes en aplicaciones.

i) Una matriz cuadrada tiene el mismo número de filas que de columnas.

ii) Una matriz diagonal $D = [d_{ij}]$ es una matriz cuadrada con $d_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$.

iii) La matriz identidad de orden n, $I_n = [\delta_{ij}]$, es una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son todas 1. Cuando el tamaño de I_n es claro, en general, la matriz se escribe simplemente como I. ■

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz Cuadrada

Una matriz $n \times n$ **triangular superior** $U = [u_{ij}]$ tiene, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, las entradas

$$u_{ij} = 0, \quad \text{para cada } i = j+1, j+2, \ldots, n;$$

y una matriz **triangular inferior** $L = [l_{ij}]$ tiene, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ las entradas

$$l_{ij} = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, j-1. \qquad \blacksquare$$

Una matriz diagonal, entonces, es tanto triangular superior como triangular inferior debido a que sus entradas diferentes de cero deben estar en la diagonal principal.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz Inversa

La **inversa de una matriz** está relacionada con los sistemas lineales.

Se dice que una matriz A $n \times n$ **es no singular** (o *invertible*) si existe una matriz A^{-1} $n \times n$ con $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. La matriz A^{-1} recibe el nombre de **inversa** de A. Una matriz que no tenga inversa recibe el nombre de **singular** (o *no invertible*). ■

Propiedades:

Para cualquier matriz $n \times n$ no singular A:

i) A^{-1} es única.

ii) A^{-1} es no singular y $(A^{-1})^{-1} = A$.

iii) Si B también es una matriz no singular $n \times n$, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

Matriz Inversa

Ejemplo:

Demuestre que $B = A^{-1}$ y que la solución del sistema de ecuaciones lineales descrito puede resolverse como $B\mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ es el vector columna de los términos independientes del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 3, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \end{aligned}$$

Matriz Inversa

Para calcular la inversa de una matriz no singular se utiliza el Método de Gauss-Jordan, según los siguientes pasos:

1. Aumentar la matriz no singular con una matriz identidad.
2. Aplicar el método de Gauss-Jordan sobre la matriz aumentada hasta convertir la matriz no singular en una matriz identidad.
3. la matriz resultante a la derecha es la inversa de la matriz original.

Ejemplo:

Calcule A^{-1} si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Traspuesta

Otra matriz importante relacionada con una matriz dada A es su *transpuesta*, denotada A^t.

La **transpuesta** de una matriz $A = [a_{ij}]$ $n \times m$ es la matriz $A^t = [a_{ij}]$, $m \times n$, donde para cada i, la i-ésima columna de A^t es la misma que la i-ésima fila de A. Una matriz cuadrada A recibe el nombre de simétrica si $A = A^t$. ■

Propiedades:

Las siguientes operaciones relacionadas con la transpuesta de una matriz se mantienen siempre que la operación sea posible

i) $(A^t)^t = A$,

ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$,

iii) $(AB)^t = B^t A^t$,

iv) si A^{-1} existe, entonces $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$. ■

Matriz Traspuesta

Ilustración:

Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tienen transpuestas

$$A^t = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^t = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz C es simétrica porque $C^t = C$. Las matrices A y B no son simétricas. ■

Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es