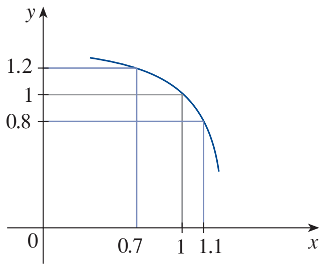
2.4 EJERCICIOS

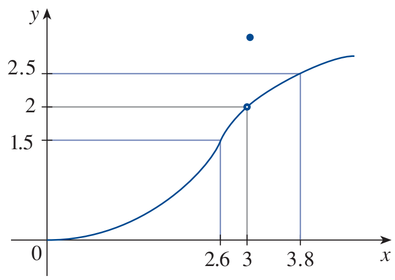
1. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

si $\quad |x - 1| < \delta \quad$ entonces $\quad |f(x) - 1| < 0.2$



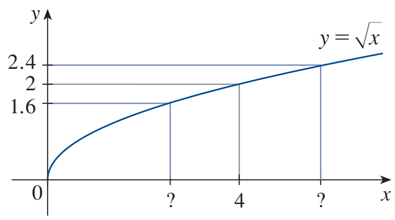
2. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

si $\quad 0 < |x - 3| < \delta \quad$ entonces $\quad |f(x) - 2| < 0.5$



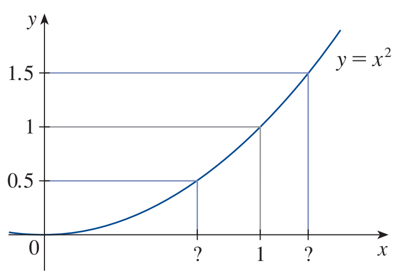
3. Utilice la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número tal δ que

si $\quad |x - 4| < \delta \quad$ entonces $\quad |\sqrt{x} - 2| < 0.4$



4. Utilice la gráfica dada de $f(x) = x^2$ para encontrar un número δ tal que

si $\quad |x - 1| < \delta \quad$ entonces $\quad |x^2 - 1| < \frac{1}{2}$



5. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

si $\quad \left| x - \dfrac{\pi}{4} \right| < \delta \quad$ entonces $\quad |\tan x - 1| < 0.2$

6. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

si $\quad |x - 1| < \delta \quad$ entonces $\quad \left| \dfrac{2x}{x^2 + 4} - 0.4 \right| < 0.1$

7. Para el límite

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 4) = 6$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 0.1$.

8. Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

9. (a) Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

si $\quad 2 < x < 2 + \delta \quad$ entonces $\quad \dfrac{1}{\ln(x - 1)} > 100$

(b) ¿Qué límite sugiere el inciso (a) que es verdadero?

10. Dado que $\lim_{x \to \pi} \csc^2 x = \infty$, ilustre la definición 6, encontrando valores de δ que corresponden a (a) $M = 500$ y (b) $M = 1000$.

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco metálico circular con 1000 cm^2 de área.

(a) ¿Qué radio produce tal disco?

(b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de $\pm 5\ \text{cm}^2$ en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso (a) debe el tornero mantener el radio?

(c) En términos de la definición ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿Qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Un horno de confección de cristales se utiliza en la investigación para determinar la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el idóneo, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la potencia de entrada en watts.

(a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200 °C?

(b) Si se permite una variación de temperatura de 200 °C en ±1 °C, ¿qué intervalo en watts se permite para la potencia de entrada?

(c) De acuerdo con la definición ε, δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

13. (a) Encuentre un número δ tal que si $|x - 3| < \delta$, entonces $|5x - 15| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.

(b) Repita el inciso (a) con $\varepsilon = 0.01$.

14. Dado que $\lim_{x\to 2} (5x - 7) = 3$, ilustre la definición 2 encontrando valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ y $\varepsilon = 0.01$.

15–18 Demuestre cada una de las proposiciones siguientes utilizando la definición ε, δ de límite e ilústrelo con un diagrama como el de la figura 9.

15. $\lim_{x\to 3} \left(1 + \frac{1}{3}x\right) = 2$

16. $\lim_{x\to 4} (2x - 5) = 3$

17. $\lim_{x\to 1} (2x + 3) = 5$

18. $\lim_{x\to -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

19–32 Demuestre cada una de los enunciados siguientes utilizando la definición ε, δ de límite.

19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x\to 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

21. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} = 6$

22. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

23. $\lim_{x\to a} x = a$

24. $\lim_{x\to a} c = c$

25. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x\to -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$

29. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x\to 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$

31. $\lim_{x\to -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que otra posible elección para mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ en el ejemplo 4 es $\delta = \text{mín}\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique con argumentos geométricos que la mayor elección de δ para demostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ es $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

SAC **35.** (a) Para el límite $\lim_{x\to 1} (x^3 + x + 1) = 3$, utilice una gráfica para encontrar un valor que corresponda a $\varepsilon = 0.4$.

(b) Utilizando un sistema algebraico computacional para resolver la ecuación cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, encuentre el mayor valor posible de δ que funciona para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

(c) Ponga $\varepsilon = 0.4$ en su repuesta del inciso (b) y compárela con su respuesta del inciso (a).

36. Demuestre que $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

37. Demuestre $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

$$\left[\textit{Sugerencia:} \text{ utilice } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$$

38. Si H es la función de Heaviside definida en el ejemplo 2.2.6, demuestre, utilizando la definición 2, que $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe. [*Sugerencia*: utilice una demostración indirecta como sigue. Suponga que el límite es L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de límite y trate de llegar a una contradicción.]

39. Si la función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

40. Comparando las definiciones 2, 3 y 4, demuestre el teorema 2.3.1.

41. ¿Qué tan cerca de -3 tiene que tomar x de manera que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10{,}000?$$

42. Demuestre, utilizando la definición 6, que $\lim_{x\to -3} \dfrac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es un número real. Demuestre cada uno de los enunciados siguientes.

(a) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

(b) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \infty \quad$ si $c > 0$

(c) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = -\infty \quad$ si $c < 0$

2.5 Continuidad

En la sección 2.3, se vio que el límite de una función cuando x tiende a a, con frecuencia se obtiene simplemente calculando el valor de la función en a. Las funciones con esta propiedad son llamadas *continuas en a*. Se verá que la definición matemática de continuidad coincide notoriamente con el sentido de *continuidad* que la palabra tiene en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco.)

1 Definición Una función f es **continua en un número a** si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$