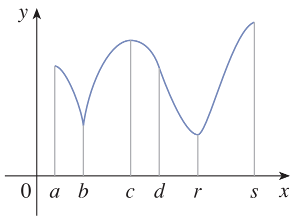
4.1 EJERCICIOS

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

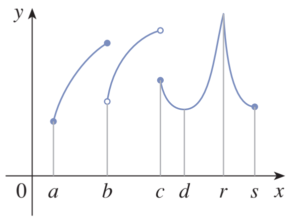
2. Suponga que f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.
(a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto de f?
(b) ¿Qué pasos daría para encontrar los valores máximo y mínimo?

3–4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r y s, indique si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo locales, o ni un máximo ni un mínimo.

3.

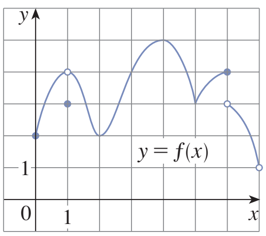


4.

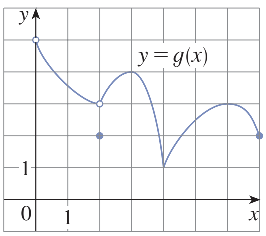


5–6 Utilice la gráfica para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5.



6.



7–10 Trace la gráfica de una función f que es continua sobre $[1, 5]$ y tiene las propiedades dadas.

7. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimos locales en 2 y 4

8. Máximo absoluto en 4, mínimo absoluto en 5, máximo local en 2, mínimo local en 3

9. Mínimo absoluto en 3, máximo absoluto en 4, máximo local en 2

10. Máximo absoluto en 2, mínimo absoluto en 5, 4 es un número crítico pero no hay máximo o mínimo local.

11. (a) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es derivable en 2.
(b) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es continua, pero no derivable, en 2.
(c) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y no es continua en 2.

12. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no máximo local.
(b) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo local, pero no máximo absoluto.

13. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que es discontinua, pero que no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto.

14. (a) Trace la gráfica de una función que tiene dos máximos locales, un mínimo local y no tiene mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función que tiene tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15–28 Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$

17. $f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$

18. $f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$

20. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$

22. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2 - 3x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 4 - 2x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

29–44 Determine los números críticos de la función.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

32. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

33. $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

43. $f(x) = x^2e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2}\ln x$

45–46 Se da una fórmula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47–62 Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f en el intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$

51. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$

52. $f(t) = (t^2 - 4)^3, \quad [-2, 3]$

53. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

55. $f(t) = t - \sqrt[3]{t}, \quad [-1, 4]$

56. $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + t^2}, \quad [0, 2]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = x^{-2}\ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

60. $f(x) = xe^{x/2}, \quad [-3, 1]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = x - 2\tan^{-1}x, \quad [0, 4]$

63. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Utilice una gráfica para calcular los números críticos de $f(x) = |1 + 5x - x^3|$ redondeados a un decimal.

65–68
(a) Utilice una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo redondeados a dos decimales.
(b) Por medio del cálculo encuentre los valores máximo y mínimo.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^x + e^{-2x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Después de consumir una bebida alcohólica, la concentración de alcohol en sangre (BAC, por sus siglas en inglés) surge conforme se absorbe el alcohol, seguido por un descenso gradual conforme se metaboliza el alcohol. La función

$$C(t) = 1.35te^{-2.802t}$$

modela la BAC promedio, medido en mg/mL, de un grupo de ocho sujetos masculinos después de t horas del consumo rápido de 15 mL de etanol (correspondiente a una bebida alcohólica). ¿Cuál es la BAC promedio máxima durante las primeras 3 horas? ¿Cuándo ocurre?

Fuente: Adaptado de P. Wilkinson et al., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State", *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics 5* (1977): 207–224.

70. Después de que se toma una tableta de antibiótico, la concentración del antibiótico en el torrente sanguíneo se modela por la función

$$C(t) = 8(e^{-0.4t} - e^{-0.6t})$$

donde el tiempo t se mide en horas y C se mide en μg/mL. ¿Cuál es la concentración máxima de antibiótico durante las primeras 12 horas?

71. Entre 0 °C y 30 °C, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T está dado aproximadamente por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

72. Un objeto con masa m se arrastra a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a través de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva llamado el *coeficiente de fricción* y donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F es minimizada cuando $\tan\theta = \mu$.

73. Un modelo para el precio promedio en Estados Unidos de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003 está dado por la función

$$S(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t se mide en años desde agosto de 1993. Estime los años cuando el azúcar era más barata y más cara durante el período 1993-2003.

74. El 7 de mayo de 1992 el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo de un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.
(a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para encontrar el polinomio cúbico que modele de la mejor

manera la velocidad del transbordador para el intervalo de tiempo $t \in [0, 125]$. Luego, dibuje esta función polinomial.

(b) Encuentre un modelo para la aceleración del transbordador y utilícelo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 segundos.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de maniobra de giro	10	56.4
Fin de maniobra de giro	15	97.2
Acelerador al 89%	20	136.2
Acelerador al 67%	32	226.2
Acelerador al 104%	59	403.9
Presión dinámica máxima	62	440.4
Separación de los cohetes auxiliares de combustible sólido	125	1265.2

75. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento en la presión de los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo que se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, este debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más ancho. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un espasmo de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad v de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se pone rígida bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\tfrac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).

(a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\tfrac{1}{2}r_0, r_0\right]$ en el cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se compara esto con la evidencia experimental?

(b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v sobre el intervalo?

(c) Trace la gráfica de v sobre el intervalo $[0, r_0]$.

76. Demuestre que 5 es un número crítico de la función

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

pero g no tiene un valor extremo local en 5.

77. Demuestre que la función

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

no tiene ni máximo local ni mínimo local.

78. Si f tiene un valor mínimo local en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ tiene un valor mínimo local en c.

79. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en que f tiene un mínimo local en c.

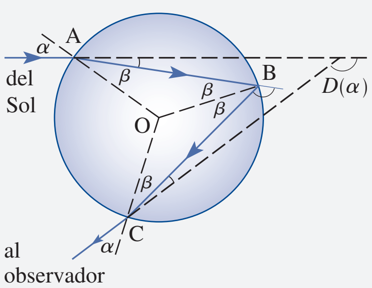
80. Una función cúbica es una función polinomial de tercer grado; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

(a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos, uno o no tener números críticos. Proporcione ejemplos y trazos para ilustrar las tres posibilidades.

(b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

PROYECTO DE APLICACIÓN EL CÁLCULO DE LOS ARCOÍRIS

Los arcoíris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto se siguen las ideas de Descartes y de Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcoíris.



Formación del arcoíris primario

1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que atraviesa una gota esférica de lluvia en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Observe que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell dice que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \tfrac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja; pero, por el momento, hay más interés en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Observe que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por tanto,

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.