Capítulo 6

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.1

1. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.

a. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6. \end{aligned}$ **c.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0. \end{aligned}$ **d.** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -1, \\ 4x_1 + 2x_2 &= -2, \\ x_1 - 3x_2 &= 5. \end{aligned}$

2. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales, obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.

a. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0, \\ x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ -2x_1 - 4x_2 &= 6. \end{aligned}$ **c.** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -1, \\ x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 - 3x_2 &= 5. \end{aligned}$ **d.** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1. \end{aligned}$

3. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta para cada sistema es $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.).

a. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9. \end{aligned}$

4. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta para cada sistema es $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.)

a. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8, \\ \tfrac{5}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5, \\ \tfrac{1}{9}x_1 + \tfrac{1}{9}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 &= -1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 9. \end{aligned}$

5. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila:

a. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -x_1 + 2x_3 &= 3, \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 &= 1. \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 2x_1 &= 3, \\ x_1 + 1.5x_2 &= 4.5, \\ - 3x_2 + 0.5x_3 &= -6.6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8. \end{aligned}$ **d.** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$

6. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila:

a. $\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - x_3 &= 2. \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 2, \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$

c. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ x_4 &= 5, \\ x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

7. Use el algoritmo 6.1 y la aritmética computacional de precisión única para resolver los siguientes sistemas lineales.

a. $$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 &= 9, \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 8, \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913, \\ 2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 &= 28.544, \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 &= \tfrac{1}{6}, \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 &= \tfrac{1}{7}, \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 &= \tfrac{1}{8}, \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 + \tfrac{1}{7}x_4 &= \tfrac{1}{9}. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 7, \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2, \\ - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \phantom{{}+x_4} + 5x_5 &= 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3. \end{aligned}$$

8. Use el algoritmo 6.1 y aritmética computacional de precisión única para resolver los siguientes sistemas lineales.

a. $$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{1}{8}x_3 &= 0, \\ \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{1}{9}x_3 &= 1, \\ \tfrac{1}{7}x_1 + \tfrac{1}{7}x_2 + \tfrac{1}{10}x_3 &= 2. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 2.71x_1 + x_2 + 1032x_3 &= 12, \\ 4.12x_1 - x_2 + 500x_3 &= 11.49, \\ 3.33x_1 + 2x_2 - 200x_3 &= 41. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ ex_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 8, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 16, \\ 16x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 32. \end{aligned}$$

9. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6\alpha x_2 &= 3, \\ 3\alpha x_1 - x_2 &= \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

a. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema no tiene soluciones.
b. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.
c. Suponga que existe una única solución para una α determinada, encuentre la solución.

10. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \alpha x_3 &= -2, \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3, \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

a. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema no tiene soluciones.
b. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.
c. Suponga que existe una única solución para una α determinada, encuentre la solución.

EJERCICIOS APLICADOS

11. Suponga que en un sistema biológico existen n especies de animales y m fuentes de alimento. Si x_j representa la población de las j-ésimas especies, para cada $j = 1, \ldots, n$; b_i representa el suministro diario disponible del i-ésimo alimento y a_{ij} representa la cantidad del i-ésimo alimento consumido en promedio por un miembro de las j-ésima especie. El sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

representa un equilibrio donde existe un suministro diario de alimento para cumplir con precisión con el promedio diario de consumo de cada especie.

a. Si

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} = (x_j) = [1000, 500, 350, 400]$, y $\mathbf{b} = (b_i) = [3500, 2700, 900]$. ¿Existe suficiente alimento para satisfacer el consumo promedio diario?

b. ¿Cuál es el número máximo de animales de cada especie que se podría agregar de forma individual al sistema con el suministro de alimento que cumpla con el consumo?

c. Si la especie 1 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

d. Si la especie 2 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

12. La ecuación integral de Fredholm de segunda clase es una ecuación de la forma

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)\,dt,$$

donde a y b y las funciones f y K están dadas. Para aproximar la función u en el intervalo $[a, b]$, se selecciona una partición $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ y las ecuaciones

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b K(x_i, t)u(t)\,dt, \quad \text{para cada } i = 0, \ldots, m,$$

se resuelven para $u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_m)$. Las integrales se aproximan mediante fórmulas de cuadratura con base en los nodos $x_0, \ldots, x_m$. En nuestro problema, $a = 0, b = 1, f(x) = x^2$, y $K(x, t) = e^{|x-t|}$.

a. Muestre que el sistema lineal

$$\begin{aligned} u(0) &= f(0) + \frac{1}{2}[K(0, 0)u(0) + K(0, 1)u(1)], \\ u(1) &= f(1) + \frac{1}{2}[K(1, 0)u(0) + K(1, 1)u(1)] \end{aligned}$$

se resuelve cuando se utiliza la regla de trapecio.

b. Formule y resuelva el sistema lineal que resulta cuando se utiliza la regla de trapecio con $n = 4$.

c. Repita la parte (b) mediante la regla compuesta Simpson.

EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Muestre que las operaciones

a. $(\lambda E_i) \to (E_i)$ **b.** $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$ **c.** $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

no cambian la solución establecida de un sistema lineal.

14. Método Gauss-Jordan: Este método se describe de acuerdo con lo siguiente. Utilice la i-ésima ecuación para eliminar x_i no sólo a partir de las ecuaciones $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$, como con el método de eliminación gaussiana, sino también a partir de $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. Al reducir $[A, b]$ a

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)}) & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right],$$

la solución se obtiene al establecer

$$x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}},$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Este procedimiento elude la sustitución hacia atrás en la eliminación gaussiana. Construya un algoritmo para el procedimiento Gauss-Jordan a partir del algoritmo 6.1.

15. Use el método Gauss-Jordan y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los sistemas en el ejercicio 3.

16. Repita el ejercicio 7 con el método Gauss-Jordan.

17. **a.** Muestre que el método Gauss-Jordan requiere

$$\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2} \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{sumas/restas.}$$

b. Haga una tabla en la que compare las operaciones requeridas para los métodos Gauss-Jordan y de eliminación gaussiana para $n = 3, 10, 50, 100$. ¿Qué método requiere menos cálculos?

18. Considere el siguiente método híbrido Gauss-Jordan-eliminación-gaussiana para resolver el sistema (6.4). Primero, aplique la técnica de eliminación gaussiana para reducir el sistema a una forma triangular. A continuación, utilice la enésima ecuación para eliminar los coeficientes de x_n en cada una de las primeras $n - 1$ filas. Después de completar esto utilice la $(n - 1)$-ésima ecuación para eliminar los coeficientes x_{n-1} en las primeras $n - 2$ columnas y así sucesivamente. Al final, el sistema aparecerá como el sistema reducido en el ejercicio 12.

a. Muestre que este método requiere

$$\frac{n^3}{3} + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \quad \text{sumas/restas.}$$

b. Haga una tabla en la que compare las operaciones requeridas para los métodos Gauss-Jordan, de eliminación gaussiana e híbrido para $n = 3, 10, 50, 100$.

19. Use el método híbrido descrito en el ejercicio 16 y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los sistemas en el ejercicio 3.

20. Repita el ejercicio 7 con el método descrito en el ejercicio 16.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Una técnica similar a la eliminación gaussiana apareció por primera vez en “Nine Chapters on the Mathematical Art” (“Nueve capítulos sobre el arte matemático”). Lea el artículo corto “Jiu Zhang Suan Shu and the Gauss Algorithm for Linear Equations” (Jiu Zhang Suan Shu y el algoritmo Gauss para ecuaciones lineales) de Ya-xiang Yuan que puede encontrar en http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-ismp/10 yuan-yaxiang.pdf. Compare la técnica con la que se presenta en este capítulo.

2. A principios de 1700, Newton desarrolló un método similar a la eliminación gaussiana. Compare ese método con el que se presenta en este capítulo.

3. Los pasos 5 y 6 del algoritmo de eliminación gaussiana requiere $\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$ multiplicaciones y divisiones y $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$ sumas y restas para reducir un sistema completo en el punto en el que se puede utilizar sustitución hacia atrás. Considere el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &= 4,\\ 2x_1+x_2+3x_3 &= 5,\\ 3x_3+x_4 &= -1. \end{aligned}$$

¿Cuántas operaciones se requieren para reducir el sistema unido por debajo de ese mismo punto?

4. El texto describe las tres operaciones utilizadas para crear una secuencia de sistemas lineales equivalentes con la misma solución que el sistema original y cada uno resuelto con mayor facilidad que el último. ¿Cómo afecta esta sucesión de sistemas el costo de encontrar la solución? ¿Se forma error generado con cada sucesión?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.2

1. Encuentre intercambios de fila requeridos para resolver los siguientes sistemas lineales mediante el algoritmo 6.1.

a. $$\begin{aligned} x_1-5x_2+x_3&=7,\\ 10x_1+20x_3&=6,\\ 5x_1-x_3&=4. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=1,\\ x_1+x_2+4x_3&=2,\\ 2x_1-x_2+2x_3&=3. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3&=5,\\ -4x_1+2x_2-6x_3&=14,\\ 2x_1+2x_2+4x_3&=8. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_2+x_3&=6,\\ x_1-2x_2-x_3&=4,\\ x_1-x_2+x_3&=5. \end{aligned}$$

2. Encuentre intercambios de fila requeridos para resolver los siguientes sistemas lineales mediante el algoritmo 6.1.

a. $$\begin{aligned} 13x_1+17x_2+x_3&=5,\\ x_2+19x_3&=1,\\ 12x_2-x_3&=0. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0,\\ 12x_2-x_3&=4,\\ 2x_1+x_2+x_3&=5. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 5x_1+x_2-6x_3&=7,\\ 2x_1+x_2-x_3&=8,\\ 6x_1+12x_2+x_3&=9. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=5,\\ 7x_1+5x_2-x_3&=8,\\ 2x_1+x_2+x_3&=7. \end{aligned}$$

3. Repita el ejercicio 1 usando el algoritmo 6.2.

4. Repita el ejercicio 2 usando el algoritmo 6.2.

5. Repita el ejercicio 1 usando el algoritmo 6.3.

6. Repita el ejercicio 2 usando el algoritmo 6.3.

7. Repita el ejercicio 1 usando pivoteo completo.

8. Repita el ejercicio 2 usando pivoteo completo.

9. Utilice eliminación gaussiana y aritmética de corte de tres dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales y compare las aproximaciones con la solución real.

a. $$\begin{aligned} 0.03x_1+58.9x_2&=59.2,\\ 5.31x_1-6.10x_2&=47.0. \end{aligned}$$

Solición real $[10, 1]$.

b. $$\begin{aligned} 3.03x_1-12.1x_2+14x_3&=-119,\\ -3.03x_1+12.1x_2-7x_3&=120,\\ 6.11x_1-14.2x_2+21x_3&=-139. \end{aligned}$$

Solución real $[0, 10, \frac{1}{7}]$.