Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Métodos de Integración II

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Estudiar técnicas de integración de funciones reales de una variable real

- Integración trigonométrica
- Integración por sustitución trigonométrica
- Integrales impropias

Integración Trigonométrica

Existen determinados casos de integrales trigonométricas que no se pueden resolver simplemente aplicando sustitución. En estos casos es necesario aplicar identidades trigonométricas previamente.

Ejemplo:

Evalúe $\int \cos^3 x \ dx$

Evalúe $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx$

Determine $\int \tan^3 x \ dx$

Integración por Sustitución Trigonométrica

En la determinación del área de un círculo o una elipse, surge una integral de la forma $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, donde $a>0$. Si fuese $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, la sustitución $u=a^2-x^2$ sería eficaz; pero, tal como está, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ es más difícil. Si cambia la variable de x a θ por la sustitución $x=a\operatorname{sen}\theta$, entonces la identidad $1-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta$ permite eliminar el signo de la raíz porque

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\left|\cos\theta\right|$$

Tabla de sustituciones trigonométricas

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\operatorname{sen}\theta,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$	$1-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta,\quad 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ o $\pi\leqslant\theta<\frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

Integración por Sustitución Trigonométrica

Ejemplo:

Evalúe $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$

Determine $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

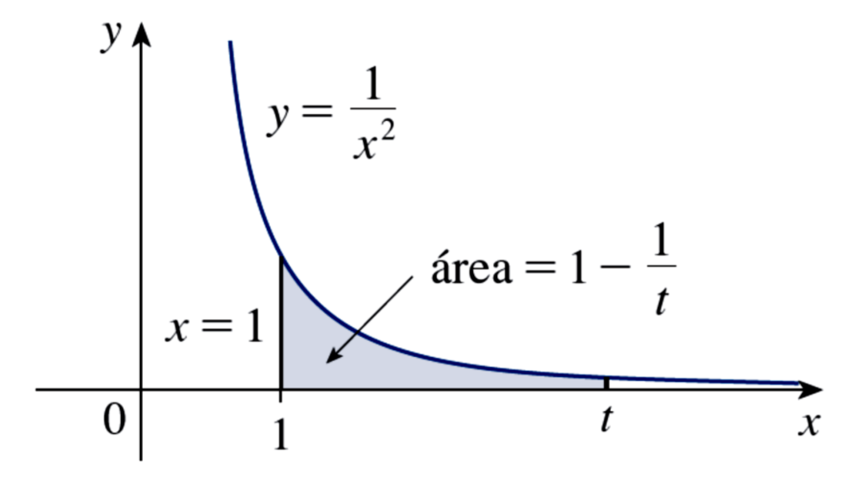
Integrales Impropias

Las integrales impropias extienden el concepto de integral definida al caso donde el intervalo es infinito o donde *f* tiene una discontinuidad infinita dentro del intervalo *[a, b]*.

Tipo 1: intervalos infinitos

Considere la región infinita S que está bajo la curva $y = 1/x^2$, por encima del eje x y a la derecha de la recta $x = 1$. Podría pensarse que, puesto que S se extiende al infinito, su área debe ser infinita, pero vea esto con más detalle. El área de la parte de S que está a la izquierda de la recta $x = t$ (sombreada en la figura 1) es

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$



Integrales Impropias

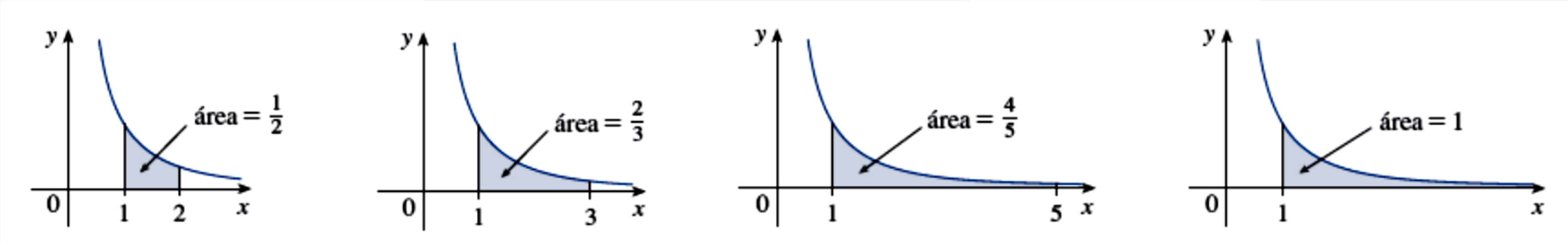
Las integrales impropias extienden el concepto de integral definida al caso donde el intervalo es infinito o donde *f* tiene una discontinuidad infinita dentro del intervalo *[a, b]*.

Tipo 1: intervalos infinitos

Considere la región infinita S que está bajo la curva $y = 1/x^2$, por encima del eje x y a la derecha de la recta $x = 1$. Podría pensarse que, puesto que S se extiende al infinito, su área debe ser infinita, pero vea esto con más detalle. El área de la parte de S que está a la izquierda de la recta $x = t$ (sombreada en la figura 1) es

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$



Integrales Impropias

1 Definición de una integral impropia de tipo 1

(a) Si $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que el límite exista (como un número finito).

(b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que este límite exista (como un número finito).

Las integrales impropias $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si el límite correspondiente existe, y **divergentes** si el límite no existe.

(c) Si ambas $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

En el inciso (c) se puede utilizar cualquier número real a (véase el ejercicio 76).

Integrales Impropias

Ejemplo:

Determine si la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ es convergente o divergente

Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Integrales Impropias

3 Definición de una integral impropia de tipo 2

(a) Si f es continua en $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

(b) Si f es continua sobre $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama **convergente** si existe el límite correspondiente, y **divergente** si el límite no existe.

(c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, y ambas $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Integrales Impropias

Ejemplo:

Encuentre $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

Evalúe $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$ si es posible.

Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es