

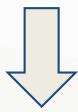
MATEMÁTICAS

Métodos de Integración I

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Estudiar técnicas de integración de funciones reales de una variable real



- Integración por sustitución
- Integración mediante tablas
- Integración por partes

Integración por Sustitución

Debido a la existencia del teorema fundamental, es importante disponer de técnicas para hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivacion no indican cómo evaluar integrales como

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx = \int \sqrt{1+x^2} \, 2x \, dx = \int \sqrt{u} \, du$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

4 Regla de sustitución Si u = g(x) es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

Integración por Sustitución

Ejemplo:

Encuentre
$$\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$$

Encuentre
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

Encuentre
$$\int \tan x \, dx$$

Integración por Sustitución

6 Regla de sustitución para integrales definidas Si g' es continua sobre [a, b] y f es continua sobre el rango de u = g(x), entonces

$$\int_{a}^{b} f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

- **7** Integrales de funciones simétricas Suponga que f es continua en [-a, a].
- (a) Si es par [f(-x) = f(x)], entonces $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_{0}^{a} f(x) dx$.
- (b) Si es impar [f(-x) = -f(x)], entonces $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$.

Integración por Sustitución

Ejemplo:

Calcule
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

Calcule
$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1) dx$$

Integración mediante Tablas

Tablas de integrales

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando se aborda una integral difícil de determinar a mano y no se tiene acceso a un sistema algebraico computacional.

Dispondremos de 120 fórmulas para resolver integrales de distintas formas:

- Formas básicas
- Formas que involucran $\sqrt{a^2 + u^2}$, a > 0
- Formas que involucran $\sqrt{a^2 u^2}$, a > 0
- Formas que involucran $\sqrt{u^2 a^2}$, a > 0
- Formas que involucran a + bu
- Formas trigonométricas
- Formas trigonométricas inversas
- Formas exponenciales y logarítmicas
- Formas hiperbólicas
- Formas que involucran $\sqrt{2au u^2}$, a > 0

Normalmente será necesario utilizar la regla de sustitución o manipulaciones algebraicas para transformar una integral dada en una de las formas de la tabla.

Integración mediante Tablas

www.uneatlantico.es

Ejemplo:

Utilice la tabla de integrales para encontrar $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}} dx$

Integración por Partes

Cada regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente. Por ejemplo, a la regla de sustitución para la integración, le corresponde la regla de la cadena para la derivación. La regla de integración que le corresponde a la derivación de un producto se llama integración por partes.

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$$

La fórmula 1 se llama **fórmula para la integración por partes**. Tal vez sea más fácil recordarla en la notación siguiente: sea u = f(x) y v = g(x). Entonces, las diferenciales son du = f'(x)dx y dv = g'(x)dx, así que, por la regla de sustitución, la fórmula para la integración por partes será

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Integración por Partes

Ejemplo:

Encuentre $\int x \sin x \, dx$

Encuentre $\int t^2 e^t dt$

Integración por Partes

Si combina la fórmula para la integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, se pueden evaluar integrales definidas por partes. Evaluando ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y utilizando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} g(x)f'(x) \, dx$$

Ejemplo:

Calcule $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$

