Por tanto

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$ ■

4.4 EJERCICIOS

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

¿cuáles de los límites siguientes son formas indeterminadas? Para aquellos que no tienen forma indeterminada, evalúe el límite donde sea posible.

1. (a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim\limits_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim\limits_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

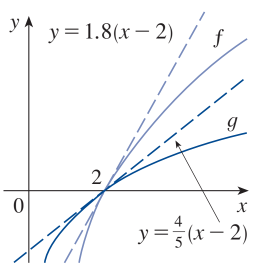
4. (a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$ (d) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$

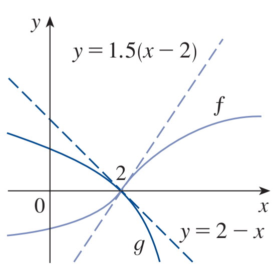
(e) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–6 Utilice las gráficas de f y g y sus rectas tangentes en (2, 0) para encontrar $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

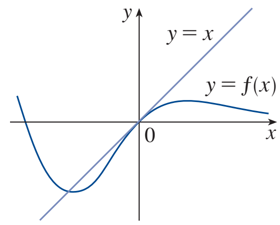
5.



6.



7. Se muestran la gráfica de una función f y su recta tangente en 0. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{e^x - 1}$?



8–68 Encuentre el límite. Utilice la regla de L'Hôpital donde sea apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de usarlo. Si no aplica la regla de L'Hôpital, explique por qué.

8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

9. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$ **10.** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{4x^2 + 16x - 9}$

13. $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

15. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{2t} - 1}{\operatorname{sen} t}$ **16.** $\lim\limits_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\csc \theta}$

17. $\lim\limits_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \cos 2\theta}$ **18.** $\lim\limits_{\theta\to \pi} \dfrac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **20.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$ **22.** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

23. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$ **24.** $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$ **26.** $\lim\limits_{u\to \infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ **28.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{\tan x}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x3^x}{3^x - 1}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x \operatorname{sen}(x - 1)}{2x^2 - x - 1}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(2x)}{\ln x}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}, \quad b \neq 0$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

42. $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

45. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 5x \csc 3x$

46 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

47. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

48. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{3/2} \operatorname{sen}(1/x)$

49. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln x \tan(\pi x/2)$

50. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} \cos x \sec 5x$

51. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

52. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

53. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

54. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan^{-1} x}\right)$

55. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (x - \ln x)$

56. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} [\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

57. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

58. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\tan 2x)^x$

59. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

60. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$

61. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

62. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

63. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

64. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{e^{-x}}$

65. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

66. $\displaystyle\lim_{x\to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$

67. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 3x)^{1/x}$

68. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 5}\right)^{2x+1}$

69–70 Utilice una gráfica para estimar el valor del límite. Después utilice la regla de L'Hôpital para encontrar el valor exacto.

69. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

70. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

71–72 Ilustre la regla de L'Hôpital trazando la gráfica de $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$ para ver que estas razones tienen el mismo límite cuando $x \to 0$. También, calcule el valor exacto del límite.

71. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

72. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

73. Demuestre que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier entero positivo n. Esto demuestra que la función exponencial tiende al infinito más rápido que cualquier potencia de x.

74. Demuestre que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica tiende a infinito más lentamente que cualquier potencia de x.

75–76 ¿Qué sucede si intenta usted utilizar la regla del L'Hôpital para obtener el límite? Evalúe el límite utilizando cualquier otro método.

75. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

76. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\tan x}$

77. Investigue la familia de curvas $f(x) = e^x — cx$. En particular, encuentre los límites cuando $x \to \pm\infty$ y determine los valores de c para los cuales f tiene un mínimo absoluto. ¿Qué pasa con los puntos mínimos conforme c crece?

78. Si un objeto con masa m se deja caer a partir del reposo, un modelo para su rapidez v después de t segundos, que considera la resistencia del aire es

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y c es una constante positiva. (En el capítulo 9 se podrá deducir esta ecuación a partir de la suposición de que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, c es la constante de proporcionalidad.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. ¿Cuál es el significado de este límite?

(b) Para t fijo, utilice la regla de L'Hôpital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. ¿Qué puede concluir acerca de la velocidad de un objeto que cae en el vacío?

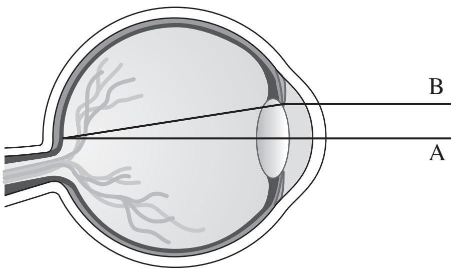
79. Si una cantidad inicial A_0 de dinero es invertida a una tasa de interés r compuesto n veces al año, el valor de la inversión después de t años es

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Si se define que $n \to \infty$, se refiere a la *composición continua* de interés. Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que si el interés es compuesto continuamente, entonces la cantidad después de t años es

$$A = A_0 e^{rt}$$

80. Entra luz en el ojo a través de la pupila y pega en la retina, donde células fotorreceptoras perciben la luz y el color. W. Stanley Stiles y B. H. Crawford estudiaron el fenómeno en el que la medida de la brillantez disminuye cuando entra luz más alejada del centro de la pupila. (Véase la figura).



Un haz de luz A que entra por el centro de pupila mide más brillantez que un rayo B que entra cerca del extremo de la pupila.

En un importante artículo publicado en 1933 se detallan los resultados de este fenómeno, conocido como el *efecto Stiles-Crawford de primera clase*. En particular, observaron que la cantidad de luminosidad detectada *no* es proporcional al área de la pupila como esperaban. El porcentaje P de luminosidad total que entra en una pupila de radio r mm que se detecta en la retina se puede describir mediante

$$P = \frac{1 - 10^{-\rho r^2}}{\rho r^2 \ln 10}$$

donde ρ es una constante determinada de forma experimental, normalmente de 0.05.

(a) ¿Cuál es el porcentaje de luminosidad captada por una pupila de radio 3 mm? Utilice $\rho = 0.05$.
(b) Calcule el porcentaje de luminosidad captada por una pupila de radio 2 mm. ¿Tiene sentido que sea mayor que la respuesta del inciso (a)?
(c) Calcule $\lim\limits_{x \to 0+} P$. ¿Es el resultado que esperaría? ¿Es físicamente posible este resultado?

Fuente: Adaptado de W. Stiles and B. Crawford, "The Luminous Efficiency of Rays Entering the Eye Pupil at Different Points." *Proceedings of the Royal Society of London, Series B: Biological Sciences* 112 (1933): 428–450.

81. Algunas poblaciones al inicio crecen exponencialmente pero al final se nivelan. Ecuaciones de la forma

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

donde M, A, y k son constantes positivas, se llaman *ecuaciones logísticas* y se utilizan con frecuencia para modelar dichas poblaciones. (En el capítulo 9 se investiga con detalle.) Aquí M se llama la *capacidad de carga* y representa el tamaño de la población máxima que se puede soportar, y $A = \dfrac{M - P_0}{P_0}$, donde P_0 es la población inicial.

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} P(t)$. Explique por qué su respuesta es la esperada.
(b) Calcule $\lim_{M\to\infty} P(t)$. (Observe que A se define en términos de M). ¿Qué tipo de función es su resultado?

82. Un cable metálico tiene radio r y está cubierto por un aislante, por lo que la distancia desde el centro del cable hasta el exterior del aislante es R. La velocidad v de un impulso eléctrico en el cable es

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

donde c es una constante positiva. Encuentre los límites siguientes e interprete sus respuestas.

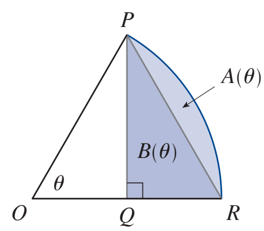
(a) $\lim\limits_{R\to r^+} v$ (b) $\lim\limits_{r\to 0^+} v$

83. La primera aparición impresa de la regla de L'Hôpital fue en el libro *Analyse des Infiniment Petits* publicado en 1696 por el Marqués de L'Hôpital. Este texto fue el primer libro de cálculo publicado, y el ejemplo que utiliza el Marqués en ese libro, para ilustrar esta regla, fue encontrar el límite de la función

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, donde $a > 0$. (En aquel tiempo era común escribir aa en vez de a^2.) Resuelva este problema.

84. La figura muestra un sector de un círculo con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre el $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$



85. Evalúe

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2 \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right].$$

86. Suponga que f es una función positiva. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, demuestre que

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$$

Esto demuestra que 0^∞ no es una forma indeterminada.

87. Si f' es continua, $f(2) = 0$ y $f'(2) = 7$, evalúe

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2+3x) + f(2+5x)}{x}$$

88. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2} \right) = 0$$

89. Si f' es continua, utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Explique el significado de esta ecuación con la ayuda de un diagrama.

90. Si f'' es continua, demuestre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

91. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

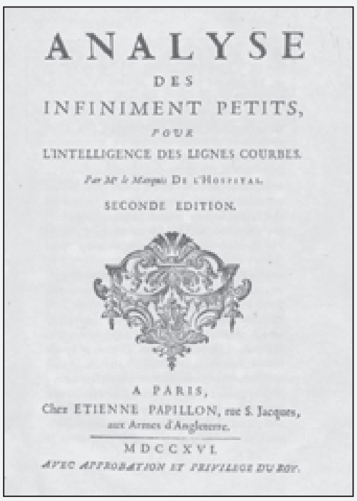
(a) Utilice la definición de derivada para obtener $f'(0)$.
(b) Demuestre que f tiene derivadas de todos los órdenes que están definidas sobre $\mathbb{R}$. [*Sugerencia:* primero demuestre por inducción que existe una función polinomial $p_n(x)$ y un entero no negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

92. Sea

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en $x = 0$.
(b) Investigue gráficamente si f es derivable en 0 haciendo varias veces acercamientos hacia el punto (0, 1) de la gráfica de f.
(c) Demuestre que f no es derivable en 0. ¿Cómo puede usted conciliar este hecho con la apariencia de la gráfica del inciso (b)?

PROYECTO DE REDACCIÓN LOS ORÍGENES DE LA REGLA DE L'HÔPITAL



Thomas Fisher Rare Book Library

La regla de L'Hôpital se publicó por primera vez en 1696, en el libro de texto del marqués de L'Hôpital, *Analyse des Infiniment Petits*, pero la regla fue descubierta en 1694 por el matemático suizo John (Johann) Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el Marqués de L'Hôpital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. Los detalles, incluso una traducción de la carta de L'Hôpital a Bernoulli en la que propone el arreglo, se pueden encontrar en el libro escrito por Eves [1].

Escriba un informe sobre los orígenes históricos y matemáticos de la regla de L'Hôpital. Empiece por dar breves detalles biográficos de los dos hombres (el diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente) y describa el trato negociado entre ellos. Luego mencione el enunciado de la regla de L'Hôpital, que se encuentra en el libro fuente de Struik [4] y, más sintéticamente, en el libro de Katz [3]. Observe que L'Hôpital y Bernoulli formularon la regla geométricamente y dieron la respuesta en términos de diferenciales. Compare el enunciado de ellos con la versión de la regla de L'Hôpital que se dio en la sección 4.4 y demuestre que los dos enunciados son esencialmente los mismos.

1. Howard Eves, *In Mathematical Circles* (*Volume 2: Quadrants III and IV)* (Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969), pp. 20-22.
2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York: Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Johann Bernoulli, por E. A. Fellmann y J. O. Fleckenstein, en el volumen II y el artículo sobre el Marqués de L'Hôpital, por Abraham Robinson, en el volumen VIII.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Nueva York: HarperCollins, 1993), pp. 484.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), pp. 315-316.

www.stewartcalculus.com
El Internet es otra fuente de información para este proyecto. Haga clic en *History of Mathematics* para obtener una lista confiable de sitios web.