Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Introducción al Cálculo Integral

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Introducir los Conceptos del Cálculo Integral de funciones reales de una variable real

- Antiderivadas
- La integral definida
- Propiedades de las Integrales
- Teorema fundamental del cálculo
- Integrales Indefinidas

Antiderivadas

Un físico que conoce la velocidad de una partícula podría desear conocer su posición en un instante dado. Un ingeniero que puede medir la tasa variable a la cual se fuga el agua de un tanque quiere conocer la cantidad que se ha fugado durante cierto período. Un biólogo que conoce la rapidez a la que crece una población de bacterias puede interesarse en deducir el tamaño de la población en algún momento futuro. En cada caso, el problema es encontrar una función F cuya derivada es la función conocida f. Si esta función F existe, se llama *antiderivada* de f.

Definición Una función F recibe el nombre de **antiderivada** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Antiderivadas

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1 + x^2}$	$\tan^{-1} x$
b^x	$\dfrac{b^x}{\ln b}$	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$

1 Teorema Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f sobre I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Antiderivadas

Ejemplo:

Encuentre la antiderivada más general de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

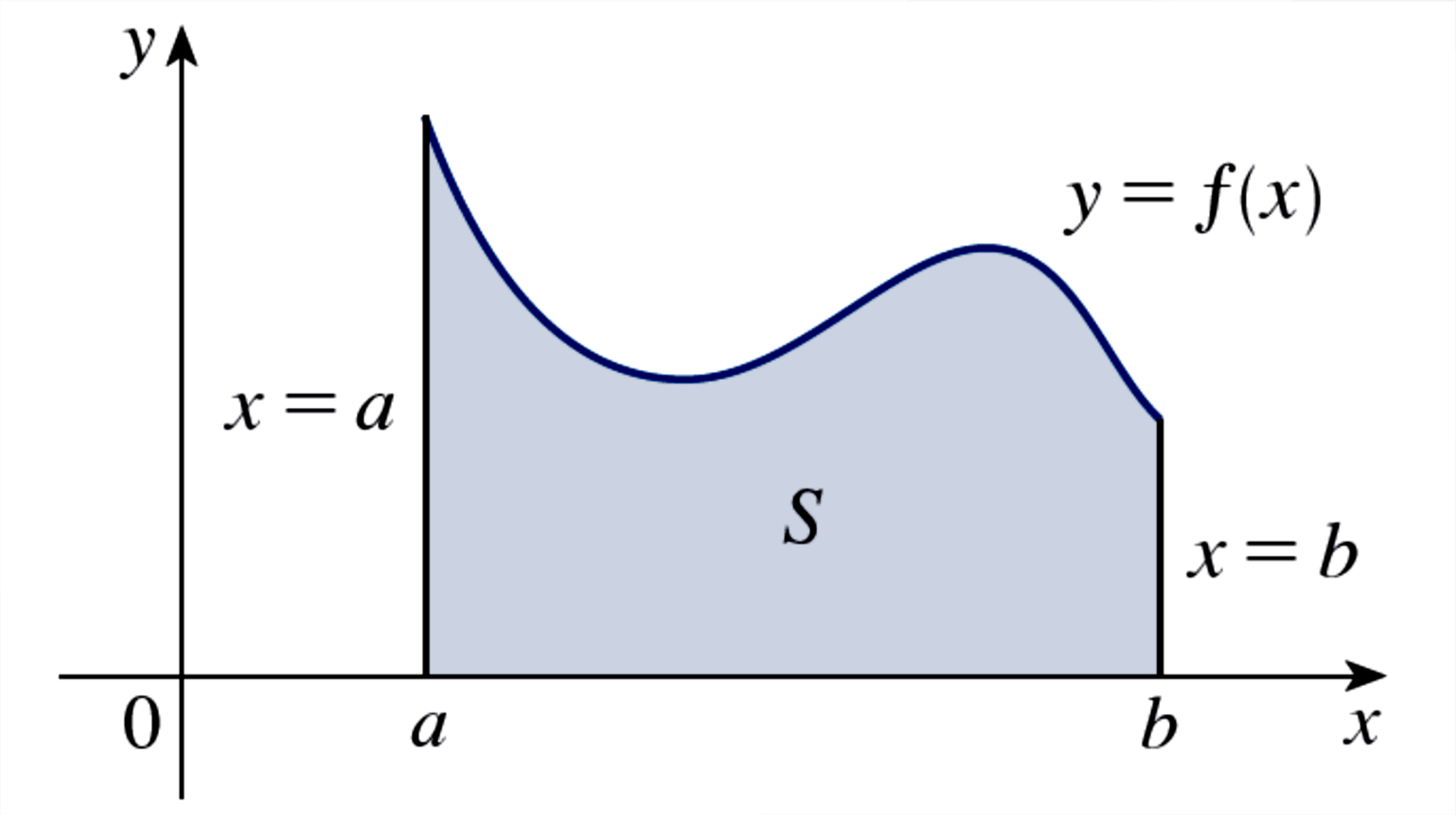
b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^n, n \neq -1$

Ejemplo:

Encuentre f si $f''(x) = 12x^2 + 6x + 4$, $f(0) = 4, f(1) = 1$

La Integral Definida

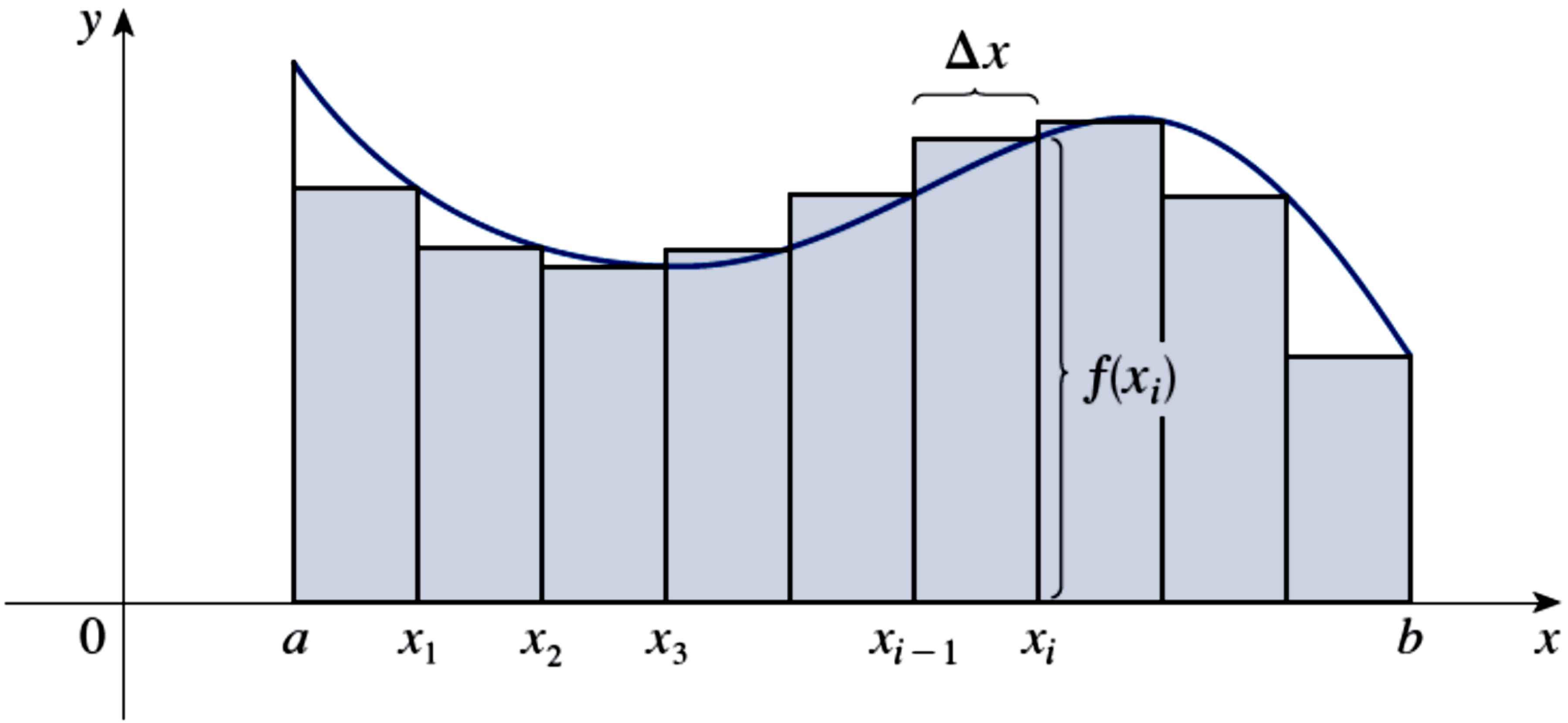


Ejemplo:

Calcule el Área de la región S

La Integral Definida

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

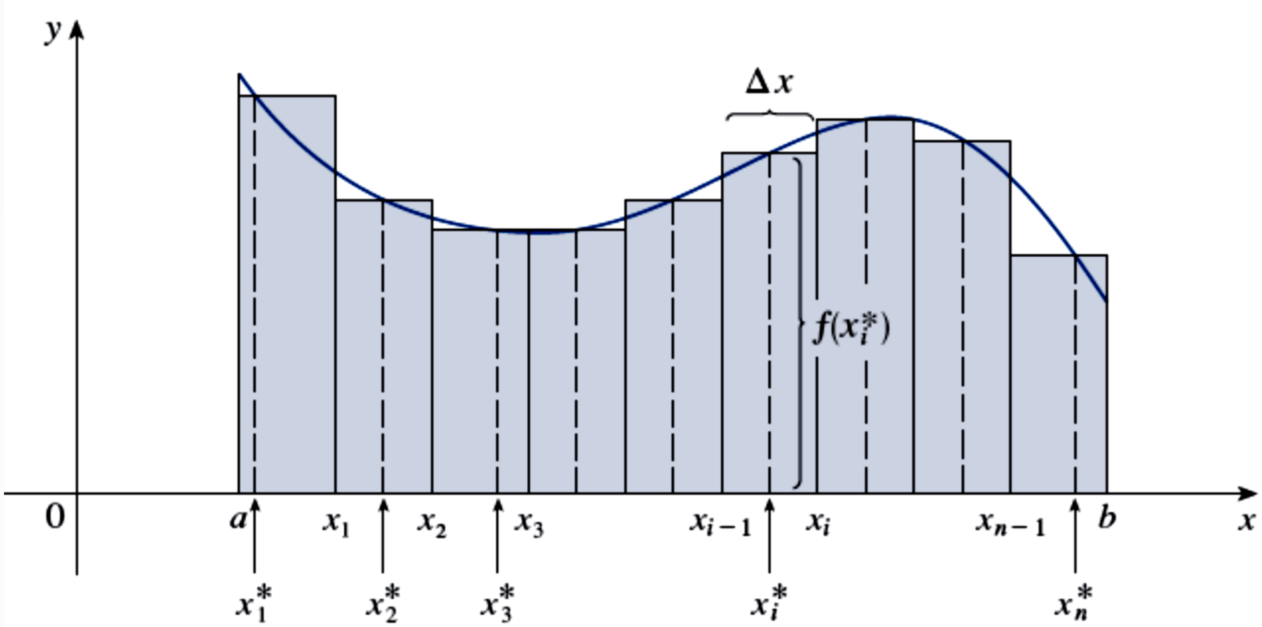


La Integral Definida

2 Definición El **área** A de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$



La Integral Definida

2 Definición de la integral definida Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean x_0 $(= a)$, x_1, x_2, . . . , x_n $(= b)$ los puntos finales de estos subintervalos y sean x_1^*1 , x_2^*, . . . , x_n^* los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, de a a b**, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todas las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, se dice que f es **integrable** en $[a, b]$.

3 Teorema Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene solo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

La Integral Definida

Propiedades de la integral definida

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita se supuso que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Observe que si invierte a y b, entonces Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. Por tanto,

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Si $a = b$, entonces $\Delta x = 0$ y así

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

La Integral Definida

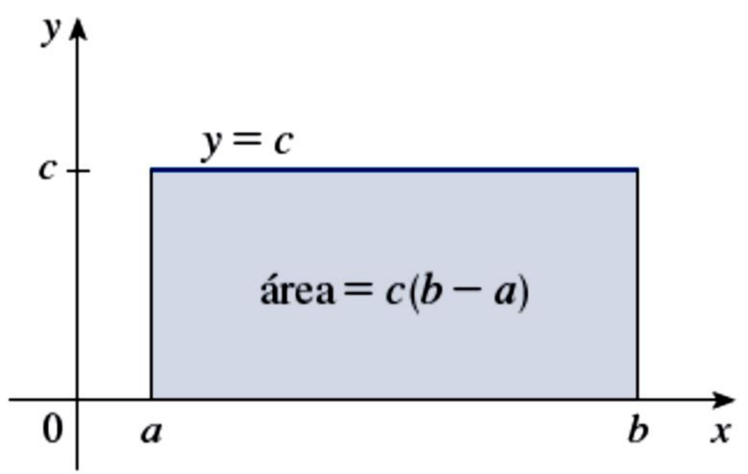
Propiedades de la integral

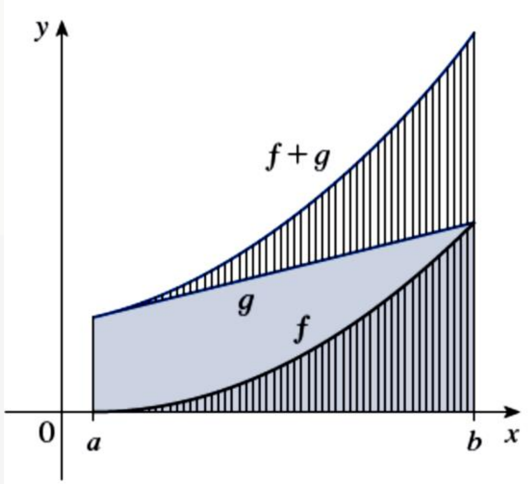
1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, donde c es cualquier constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$





La Integral Definida

Propiedades de la integral

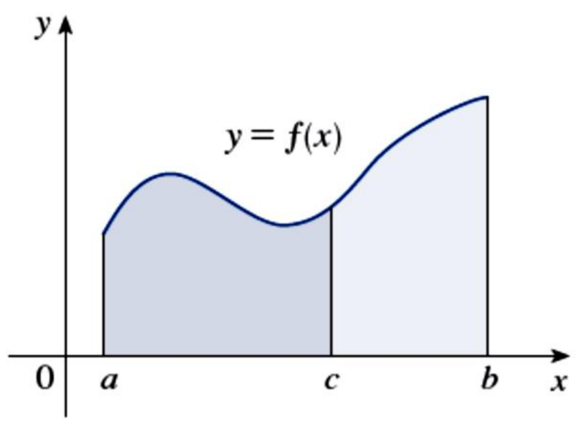
5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

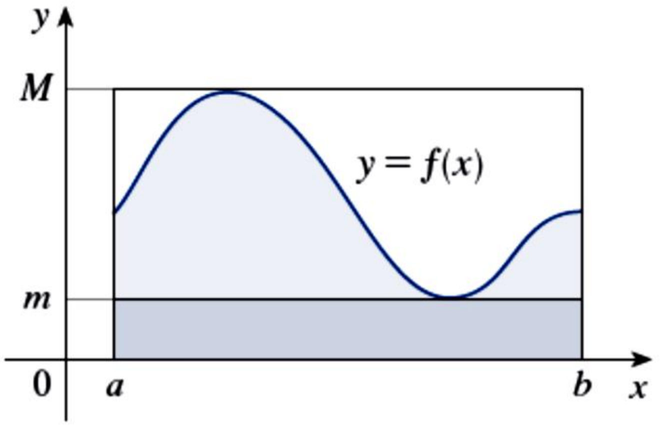
6. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$





Ejemplo:

Si se sabe que $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ y $\int_0^{8} f(x)dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)dx$

Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema fundamental del cálculo, parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en [a, b] y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental del cálculo, parte 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f; es decir, una función tal que $F' = f$.

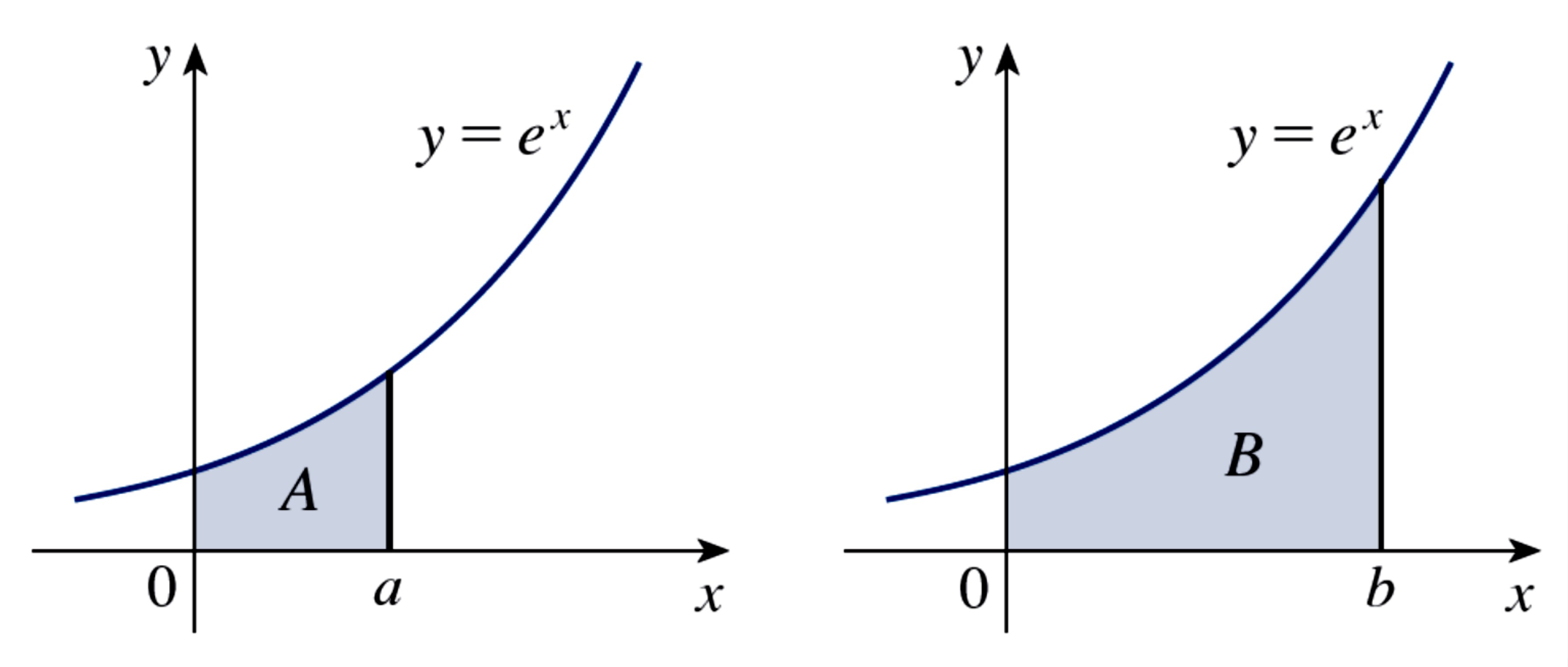
Teorema fundamental del cálculo Suponga que f es continua en $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f; es decir, $F' = f$.

Teorema Fundamental del Cálculo

Ejemplo:

Evalúe la Integral $\int_1^a e^x dx$. ¿Cuál de las dos áreas representa dicho valor?



Integrales Indefinidas

Integrales indefinidas

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que, si f es continua, entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ puede determinarse evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)}$$

De este modo, considere la integral indefinida como la representante de toda una *familia* de funciones (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Distinga con cuidado entre las integrales definidas y las indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, mientras que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o una familia de funciones). La relación entre ellas la proporciona la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \Big]_a^b$$

Integrales Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Integrales Indefinidas

Ejemplo:

Encuentre la Integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)dx$$

Ejemplo:

Evalúe

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta$$

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es