La figura 5 muestra la gráfica del integrando en el ejemplo 7 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

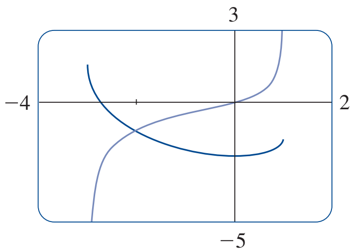


FIGURA 5

Ahora sustituya $u = 2 \operatorname{sen} \theta$ y se obtiene $du = 2\cos\theta\, d\theta$ y $\sqrt{4 - u^2} = 2\cos\theta$; por lo que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2\cos\theta}\, 2\cos\theta\, d\theta \\ &= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1)\, d\theta \\ &= -2\cos\theta - \theta + C \\ &= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\end{aligned}$$

■

7.3 EJERCICIOS

1–3 Evalúe las integrales siguientes utilizando la sustitución trigonométrica indicada. Dibuje y etiquete el triángulo rectángulo asociado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\, dx; \quad x = 3 \sec\theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2}\, dx; \quad x = 3 \operatorname{sen} \theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx; \quad x = 3 \tan\theta$

4–30 Evalúe la integral.

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4}\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}, \quad a > 0$

8. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - 16}}$

9. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$

10. $\displaystyle\int_0^{2/3} \sqrt{4 - 9x^2}\, dx$

11. $\displaystyle\int_0^{1/2} x\sqrt{1 - 4x^2}\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{4 + t^2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\, dx$

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

24. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$

25. $\displaystyle\int x^2\sqrt{3 + 2x - x^2}\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}}\, dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{1 - x^4}\, dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}\, dt$

31. (a) Utilice una sustitución trigonométrica para demostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

(b) Utilice la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para demostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Estas fórmulas están conectadas con la fórmula 3.11.3.

32. Evalúe

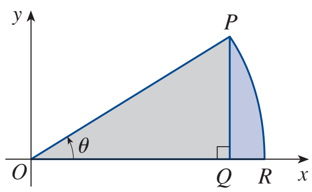
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\, dx$$

(a) por sustitución trigonométrica.
(b) por la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Determine el área de la región acotada por la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

35. Demuestre la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para el área de un sector de un círculo de radio r y ángulo central θ. [*Sugerencia*: suponga que $0 < \theta < \pi/2$ y coloque el centro del círculo en el origen de manera que se ocupe la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces A es la suma del área del triángulo POQ y el área de la región PQR en la figura.]



36. Evalúe la integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

Trace la gráfica del integrando y su integral indefinida en la misma pantalla y verifique que su respuesta sea razonable.

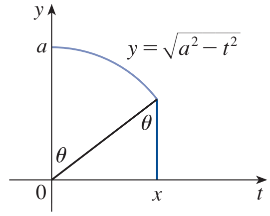
37. Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor del eje x la región acotada por las curvas $y = 9/(x^2 + 9)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

38. Determine el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor de la recta $x = 1$, la región bajo la curva $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

39. (a) Utilice una sustitución trigonométrica para verificar que

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

(b) Utilice la figura para dar una interpretación trigonométrica de ambos términos del lado derecho de la ecuación del inciso (a).



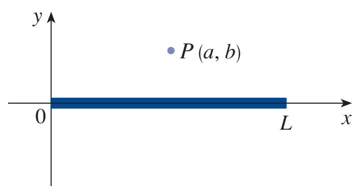
40. La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide el disco $x^2 + y^2 \leqslant 8$ en dos partes. Encuentre las áreas de ambas partes.

41. Un toro se genera al rotar la circunferencia $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ alrededor del eje x. Encuentre el volumen encerrado por el toro.

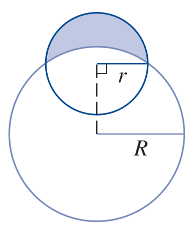
42. Una varilla cargada de longitud L produce un campo eléctrico en un punto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

donde λ es la densidad de carga por unidad de longitud de la varilla y ε_0 es la permitividad del espacio libre (véase la figura). Evalúe la integral para determinar una expresión para el campo eléctrico $E(P)$.



43. Encuentre el área de la región sombreada (llamada luna) acotada por los arcos de circunferencia de radios r y R (véase la figura).



44. Un tanque de almacenamiento de agua tiene la forma de un cilindro de 10 m de diámetro. Está montado de manera que las secciones transversales circulares quedan verticales. Si la profundidad del agua es de 7 m, ¿qué porcentaje de la capacidad total se está utilizando?