

Las funciones tratadas en este libro se llaman **funciones elementales**. Estas funciones son las polinomiales, racionales, potencias (x^n), exponenciales (b^x), logarítmicas, trigonométricas y sus inversas, hiperbólicas y sus inversas, y todas las funciones que pueden obtenerse por las cinco operaciones: suma, resta, multiplicación, división y composición. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\sin 2x}$$

es una función elemental.

Si f es una función elemental, entonces f' es una función elemental, pero $\int f(x) dx$ no necesariamente es una función elemental. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Puesto que f es continua, su integral existe, y si F se define como

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

entonces, se sabe de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo, que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Así, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada F , pero se ha demostrado que F no es una función elemental. Esto significa que no importa el esfuerzo que se haga, ya que nunca se logrará evaluar $\int e^{x^2} dx$ en términos de las funciones que conoce. (Sin embargo, en el capítulo 11, verá cómo expresar $\int e^{x^2} dx$ como una serie infinita.) Lo mismo puede decirse de las integrales siguientes:

$$\begin{array}{lll} \int \frac{e^x}{x} dx & \int \sin(x^2) dx & \int \cos(e^x) dx \\ \int \sqrt{x^3 + 1} dx & \int \frac{1}{\ln x} dx & \int \frac{\sin x}{x} dx \end{array}$$

De hecho, la mayoría de las funciones elementales no tiene antiderivadas elementales. Sin embargo, puede usted estar seguro que todas las integrales en los ejercicios siguientes son funciones elementales.

7.5 EJERCICIOS

1–82 Evalúe la integral.

1. $\int \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx$

2. $\int_0^1 (3x + 1)^{\sqrt{2}} dx$

3. $\int_1^4 \sqrt{y} \ln y dy$

4. $\int \tan^3 \theta d\theta$

5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2} dt$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}} dx$

7. $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2} dy$

8. $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5} dx$

9. $\int_2^4 \frac{x+2}{x^2+3x-4} dx$

10. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^3} dx$

11. $\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-1}} dx$

13. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

15. $\int x \sec x \tan x dx$

17. $\int_0^\pi t \cos^2 t dt$

19. $\int e^{x+e^x} dx$

21. $\int \arctan \sqrt{x} dx$

12. $\int \frac{2x-3}{x^3+3x} dx$

14. $\int \ln(1+x^2) dx$

16. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

18. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$

20. $\int e^2 dx$

22. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}} dx$

23. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 2x - 8} dx$

24. $\int (1 + \tan x)^2 \sec x dx$

59. $\int \frac{dx}{x^4 - 16}$

60. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 - 1}}$

25. $\int_0^1 \frac{1 + 12t}{1 + 3t} dt$

26. $\int_0^1 \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$

61. $\int \frac{d\theta}{1 + \cos \theta}$

62. $\int \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}$

27. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$

28. $\int \sin \sqrt{at} dt$

63. $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$

64. $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}} dx$

29. $\int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$

30. $\int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$

65. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx$

66. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} dx$

31. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

32. $\int_1^3 \frac{e^{3/x}}{x^2} dx$

67. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$

68. $\int \frac{x^2}{x^6 + 3x^3 + 2} dx$

33. $\int \cos 2x \cos 6x dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + 4 \cot x}{4 - \cot x} dx$

69. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$

70. $\int \frac{1}{1 + 2e^x - e^{-x}} dx$

35. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$

36. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$

71. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$

72. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$

37. $\int_0^{\pi/4} \tan^3 \theta \sec^2 \theta d\theta$

38. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^2 \tan x}{1 + \cos^4 x} dx$

73. $\int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

74. $\int \frac{4^x + 10^x}{2^x} dx$

39. $\int \frac{\sec \theta \tan \theta}{\sec^2 \theta - \sec \theta} d\theta$

40. $\int_0^{\pi} \sin 6x \cos 3x dx$

75. $\int \frac{dx}{x \ln x - x}$

76. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

41. $\int \theta \tan^2 \theta d\theta$

42. $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$

77. $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

78. $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} dx$

43. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$

44. $\int \sqrt{1+e^x} dx$

79. $\int x \sin^2 x \cos x dx$

80. $\int \frac{\sec x \cos 2x}{\sin x + \sec x} dx$

45. $\int x^5 e^{-x^3} dx$

46. $\int \frac{(x-1)e^x}{x^2} dx$

81. $\int \sqrt{1 - \sin x} dx$

82. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

47. $\int x^3(x-1)^{-4} dx$

48. $\int_0^1 x \sqrt{2 - \sqrt{1-x^2}} dx$

83. Las funciones $y = e^{x^2}$ y $y = x^2 e^{x^2}$ no tienen antiderivadas elementales, pero sí $y = (2x^2 + 1)e^{x^2}$. Determine $\int (2x^2 + 1)e^{x^2} dx$.

84. Se sabe que $F(x) = \int_0^x e^{e^t} dt$ es una función continua por el FTC1, aunque no es una función elemental. Las funciones

$$\int \frac{e^x}{x} dx \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{\ln x} dx$$

tampoco son elementales, pero se pueden expresar en términos de F . Obtenga las integrales siguientes en términos de F .

$$(a) \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \quad (b) \int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx$$

7.6 Integración utilizando tablas y sistemas algebraicos computacionales

En esta sección se describe cómo utilizar tablas y sistemas algebraicos computacionales para integrar funciones que tienen antiderivadas elementales. Sin embargo, se debe