b. Resuelva el sistema lineal

$$(1-2i)(x_1+iy_1)+(3+2i)(x_2+iy_2)=5+2i,$$
$$(2+i)(x_1+iy_1)+(4+3i)(x_2+iy_2)=4-i.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La declaración "todas las matrices diagonales son cuadradas" es verdadera o falsa? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Todas las matrices cuadradas tienen una inversa? ¿Por qué sí o por qué no?
3. ¿Una alteración muy pequeña en una matriz cuadrada singular puede crear una matriz no singular? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.4

1. Utilice la definición 6.15 para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. Utilice la definición 6.15 para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. Repita el ejercicio 1 usando el método del ejemplo 2.
4. Repita el ejercicio 2 usando el método del ejemplo 2.
5. Encuentre los valores de α que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

6. Encuentre los valores de α que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Encuentre los valores de α de tal forma que el siguiente sistema lineal no tenga soluciones.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

8. Encuentre los valores de α de tal forma que el siguiente sistema lineal tenga un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

EJERCICIOS APLICADOS

9. La matriz de rotación

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

aplicada al vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

tiene el efecto geométrico de rotar **x** en el sentido contrario a las manecillas del reloj, un ángulo de θ radianes.

a. Sea $\mathbf{y} = R_\theta \mathbf{x}$. Verifique que **y** es **x** rotado por θ. [*Sugerencia*: Utilice la relación $x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}$, donde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y $\alpha = \tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})$. Muestre que $y = y_1 + iy_2 = re^{i(\theta+\alpha)}$.]

b. Encuentre R_θ^{-1} de dos formas diferentes [*Sugerencia:* Considere una rotación en la dirección de las manecillas del reloj.]

c. Sean $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$. Encuentre la rotación de **x** dada por un ángulo θ tanto en el sentido de las manecillas del reloj como en sentido contrario al utilizar R_θ y R_θ^{-1}.

d. Encuentre el determinante tanto de R_θ como de R_θ^{-1}.

10. La matriz de rotación para una rotación en 3 dimensiones, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por un ángulo θ sobre el vector **u** está determinada por

$$R_{\mathbf{u},\theta} = \begin{bmatrix} u_1^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_1u_2(1-\cos\theta)-u_3\operatorname{sen}\theta & u_1u_3(1-\cos\theta)+u_2\operatorname{sen}\theta \\ u_1u_2(1-\cos\theta)+u_3\operatorname{sen}\theta & u_2^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_2u_3(1-\cos\theta)-u_1\operatorname{sen}\theta \\ u_1u_3(1-\cos\theta)-u_2\operatorname{sen}\theta & u_2u_3(1-\cos\theta)+u_1\operatorname{sen}\theta & u_3^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$.

a. Rote el vector $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$ alrededor del vector $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})$ con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

b. Encuentre la matriz para "deshacer" la rotación en la parte a).

c. Calcule los determinantes de las matrices en las partes a) y b).

d. ¿Las partes b) y c) se pueden generalizar?

11. La fórmula química

$$x_1[Ca(OH)_2] + x_2[HNO_3] \to x_3[CA(NO_3)_2] + x_4[H_2O]$$

indica que x_1 moléculas de hidróxido de calcio $Ca(OH)_2$ se combinan con x_2 moléculas de ácido nítrico HNO_3 para producir x_3 moléculas de nitrato de calcio $CA(NO_3)_2$ y x_4 moléculas de agua H_2O. Para determinar x_1, x_2, x_3 y x_4, establecemos ecuaciones para átomos de calcio Ca, oxígeno O, hidrógeno H y nitrógeno N.

Puesto que los átomos no se destruyen en esta reacción química, una reacción equilibrada requiere que para calcio $x_1 = x_3$, para oxígeno $2x_1 + 3x_2 = 6x_3 + x_4$, para hidrógeno $2x_1 + x_2 = 2x_4$, y para nitrógeno $x_2 = 2x_3$. El sistema lineal resultante $A\mathbf{x} = 0$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a. Calcule el determinante de A.

b. ¿Por qué la parte a) da este resultado?

c. Encuentre x_1, x_2, x_3 y x_4, para equilibrar la ecuación química.

d. ¿La respuesta en la parte c) es única?

EJERCICIOS TEÓRICOS

12. Use inducción matemática para mostrar que cuando $n > 1$, la evaluación del determinante de una matriz $n \times n$ usando la definición requiere

$$n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \text{ multiplicaciones/divisiones} \quad \text{y} \quad n! - 1 \text{ sumas/restas.}$$

13. Si A es una matriz 3×3. Muestre que si $\tilde{A}$ es la matriz obtenida a partir de A mediante cualquiera de las operaciones

$$(E_1) \leftrightarrow (E_2), \quad (E_1) \leftrightarrow (E_3), \quad \text{o} \quad (E_2) \leftrightarrow (E_3),$$

entonces $\det \tilde{A} = -\det A$.

14. Pruebe que $\boldsymbol{AB}$ es no singular si y sólo si tanto A como B son no singulares.

15. La solución mediante la **regla de Cramer** para el sistema lineal es

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

es

$$x_1 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_2}{D},$$

y

$$x_3 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{D_3}{D}, \quad \text{donde} \quad D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

a. Encuentre la solución para el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10, \end{aligned}$$

mediante la regla de Cramer.

b. Muestre que el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 9, \end{aligned}$$

no tiene solución. Calcule D_1, D_2 y D_3.

c. Muestre que el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10, \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones. Calcule D_1, D_2 y D_3.

d. Pruebe que si un sistema lineal 3×3 con $D = 0$ tiene soluciones, entonces $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

e. Determine el número de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas requeridas para la regla de Cramer en un sistema 3×3.

16. **a.** Generalice la regla de Cramer para un sistema lineal $n \times n$.

b. Utilice el resultado en el ejercicio 12 para determinar el número de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas requerido para la regla de Cramer en un sistema $n \times n$.