



Universidad  
Europea  
del Atlántico

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

# MATEMÁTICAS

## Límites y Continuidad

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

## Relacionar los Límites con la Continuidad de funciones reales de una variable

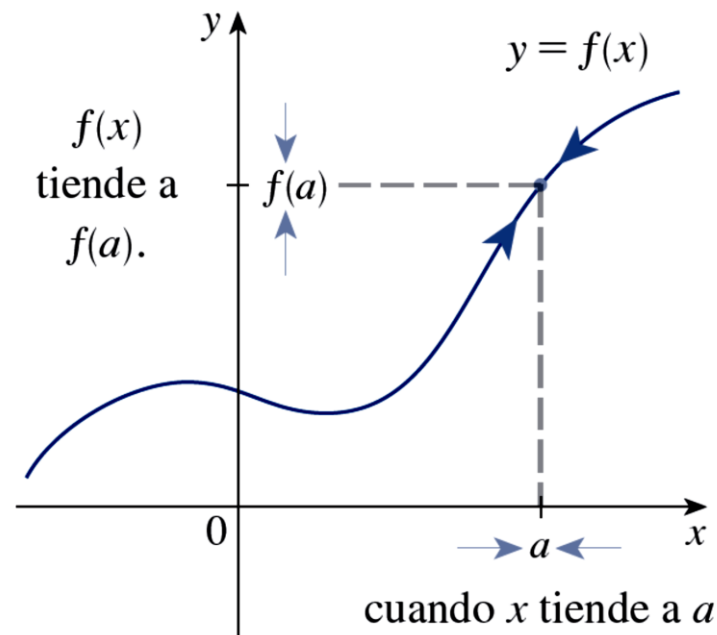


- Continuidad en un punto
- Continuidad por intervalos
- Teoremas
- Clasificación de discontinuidades

# Continuidad en un Punto

**1 Definición** Una función  $f$  es **continua en un número  $a$**  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

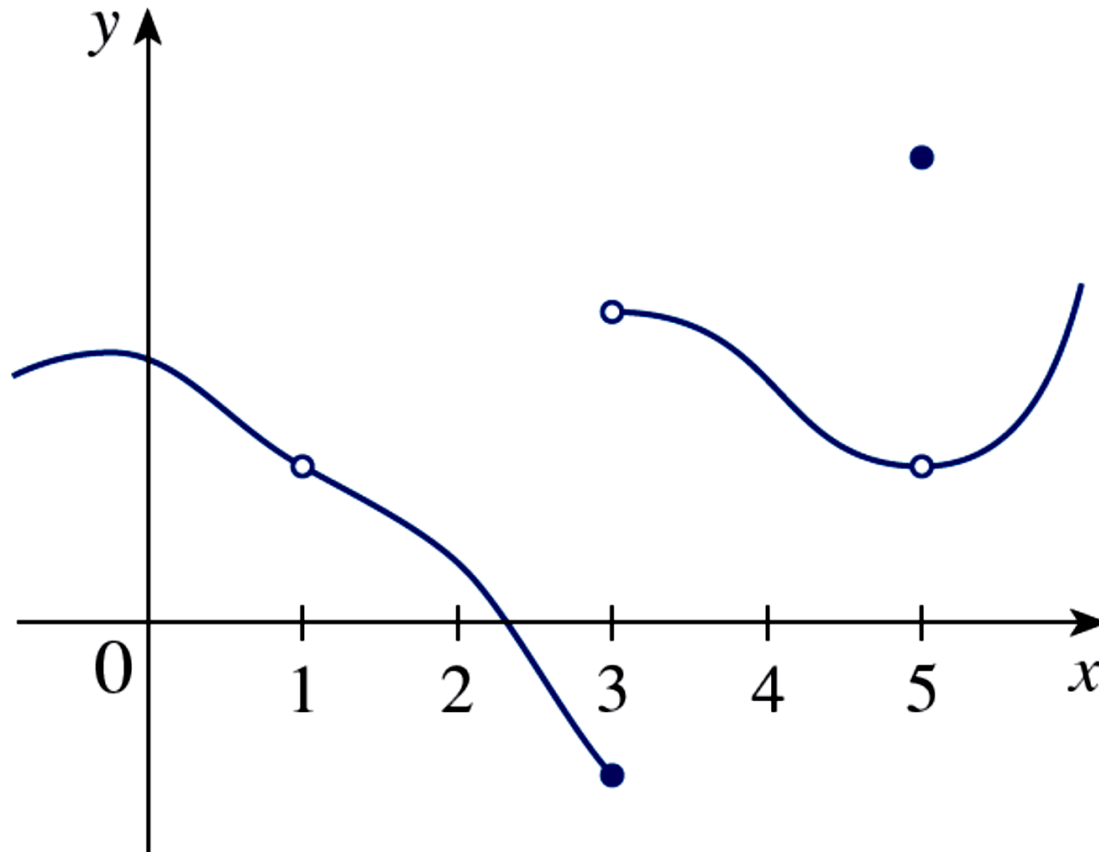


1.  $f(a)$  está definida (esto es,  $a$  está en el dominio de  $f$ )
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

# Continuidad en un Punto

## Ejemplo:

¿Para que valores de  $x$  la función que se muestra es discontinua?



# Continuidad en un Punto

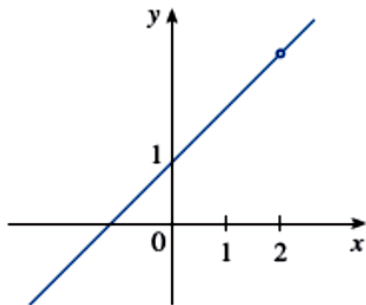
## Ejemplo:

¿Dónde es discontinua cada una de las siguientes funciones?

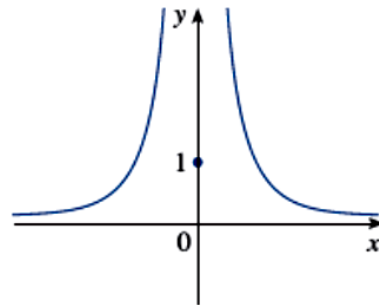
$$(a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$
$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

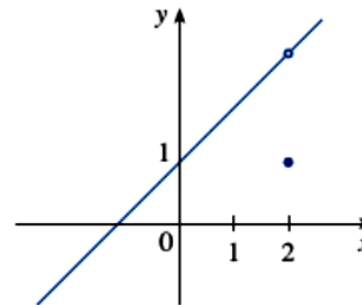
$$(d) f(x) = \llbracket x \rrbracket$$



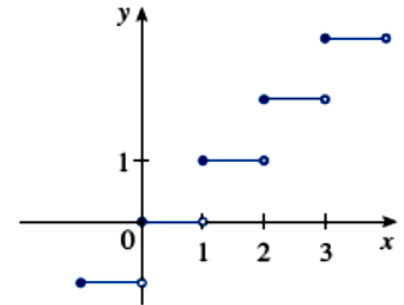
$$(a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$



$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



$$(d) f(x) = \llbracket x \rrbracket$$

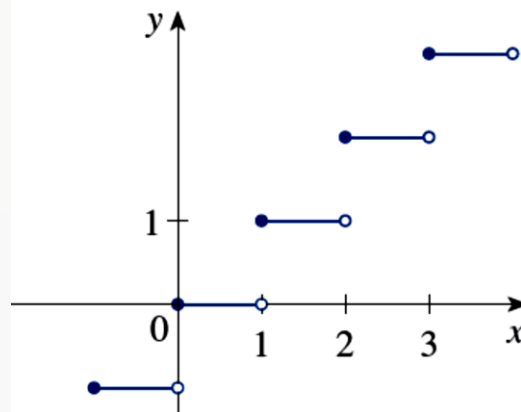
# Continuidad en un Punto

**2 Definición** Una función  $f$  es **continua por la derecha en un número  $a$**  si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

y  $f$  es **continua por la izquierda en  $a$**  si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$



(d)  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

# Continuidad en un Intervalo

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

**3 Definición** Una función  $f$  es **continua en un intervalo** si es continua en cada número en el intervalo. (Si  $f$  está definida solo en un lado de un punto final del intervalo, entienda que *continua* en el punto final significa *continua por la derecha* o *continua por la izquierda*.)

## Ejemplo:

Demuestre que la función  $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$  es continua en el intervalo  $[-1, 1]$ .

# Teoremas

**4 Teorema** Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$  y  $c$  es una constante, entonces las funciones siguientes son también continuas en  $a$ :

1.  $f + g$

2.  $f - g$

3.  $cf$

4.  $fg$

5.  $\frac{f}{g}$  si  $g(a) \neq 0$

**7 Teorema** Los tipos de funciones siguientes son continuos en todo número de sus dominios:

- polinomios
- funciones racionales
- funciones raíz
- funciones trigonométricas
- funciones trigonométricas inversas
- funciones exponenciales
- funciones logarítmicas



# Teoremas

**8 Teorema** Si  $f$  es continua en  $b$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$ .  
En otras palabras,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

**9 Teorema** Si  $g$  es continua en  $a$  y  $f$  es continua en  $g(a)$ , entonces la función compuesta  $f \circ g$  dada por  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  es continua en  $a$ .

**10 Teorema del valor intermedio** Suponga que  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y sea  $N$  cualquier número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , donde  $f(a) \neq f(b)$ . Entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = N$ .

# Clasificación de Discontinuidades

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

Atendiendo a su naturaleza, las discontinuidades de una función pueden clasificarse en:

- **Discontinuidad evitable o removable:** Existe el límite en  $a$  pero no coincide con la imagen de la función en  $a$ , ya sea porque  $f(a)$  no está definida o porque  $f(a) \neq L$ .
- **Discontinuidad inevitable Tipo I de salto:** No existe el límite. Si los límites laterales son finitos se dice que el salto es finito. Si al menos uno de los límites laterales es infinito, se dice que el salto es infinito.
- **Discontinuidad inevitable Tipo II:** No existe el límite. Al menos uno de los límites laterales no existe.



Universidad  
Europea  
del Atlántico

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)