Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Derivadas y la Gráfica de una Función

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

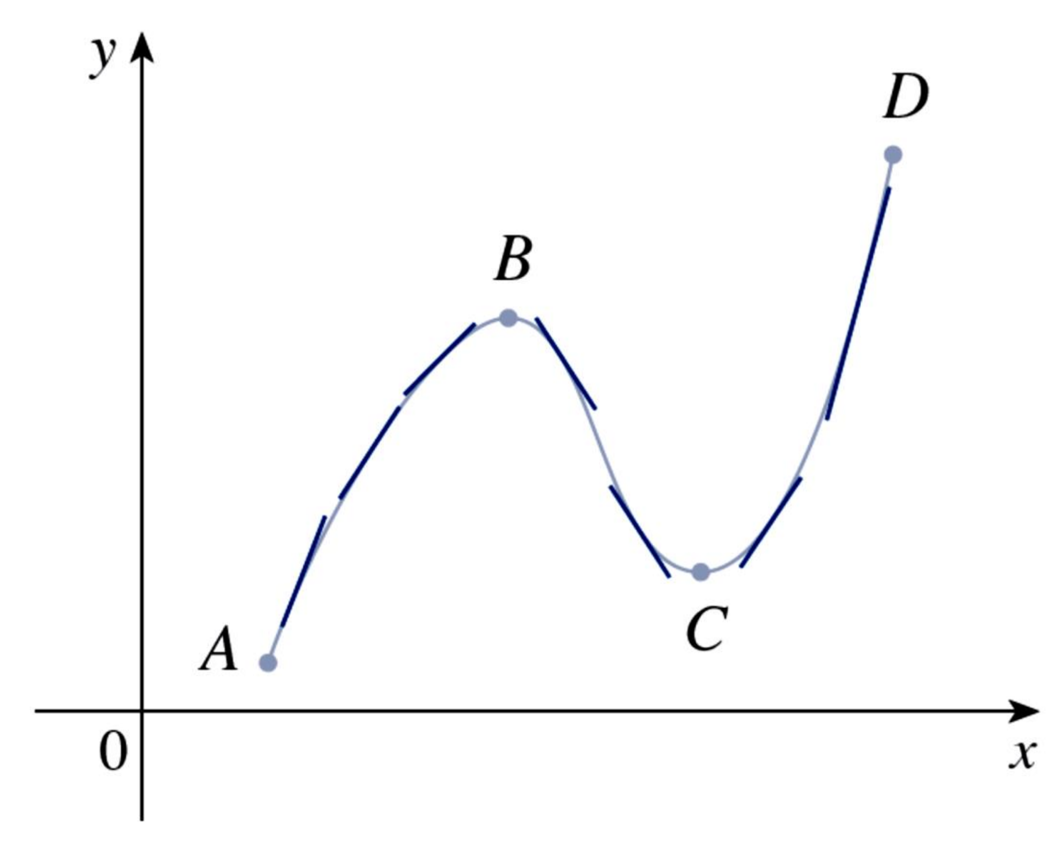
Objetivo

Aprender a analizar el comportamiento de funciones reales de una variable

- Relación entre derivadas y la forma de la gráfica
- Guía para el análisis de funciones
- Trazo de curvas

Relación entre Derivadas y la forma de la Gráfica

Muchas de las aplicaciones del cálculo dependen de nuestra capacidad para deducir hechos acerca de una función f a partir de la información que se obtiene de sus derivadas. Ya que $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, indica la dirección de la curva en cada punto. Así, es razonable esperar que la información relacionada con $f'(x)$ proporcione información asociada con $f(x)$.

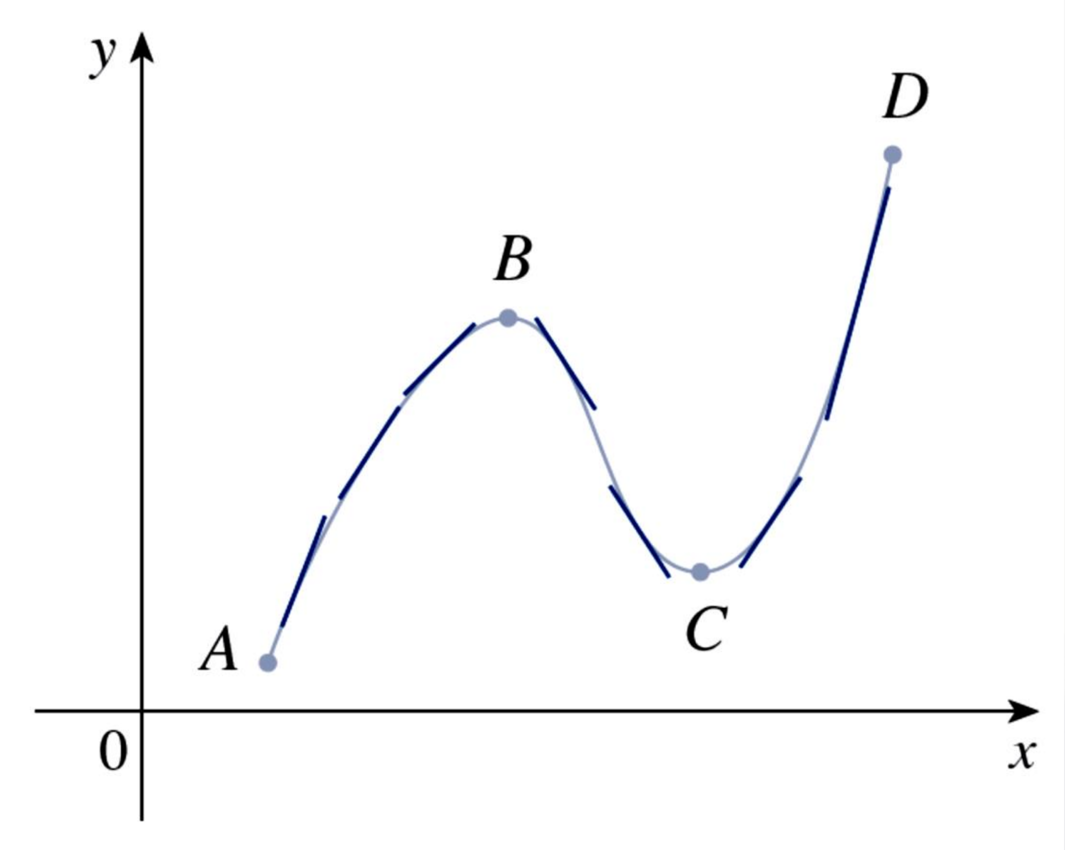


Relación entre Derivadas y la forma de la Gráfica

Prueba creciente/decreciente

(a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

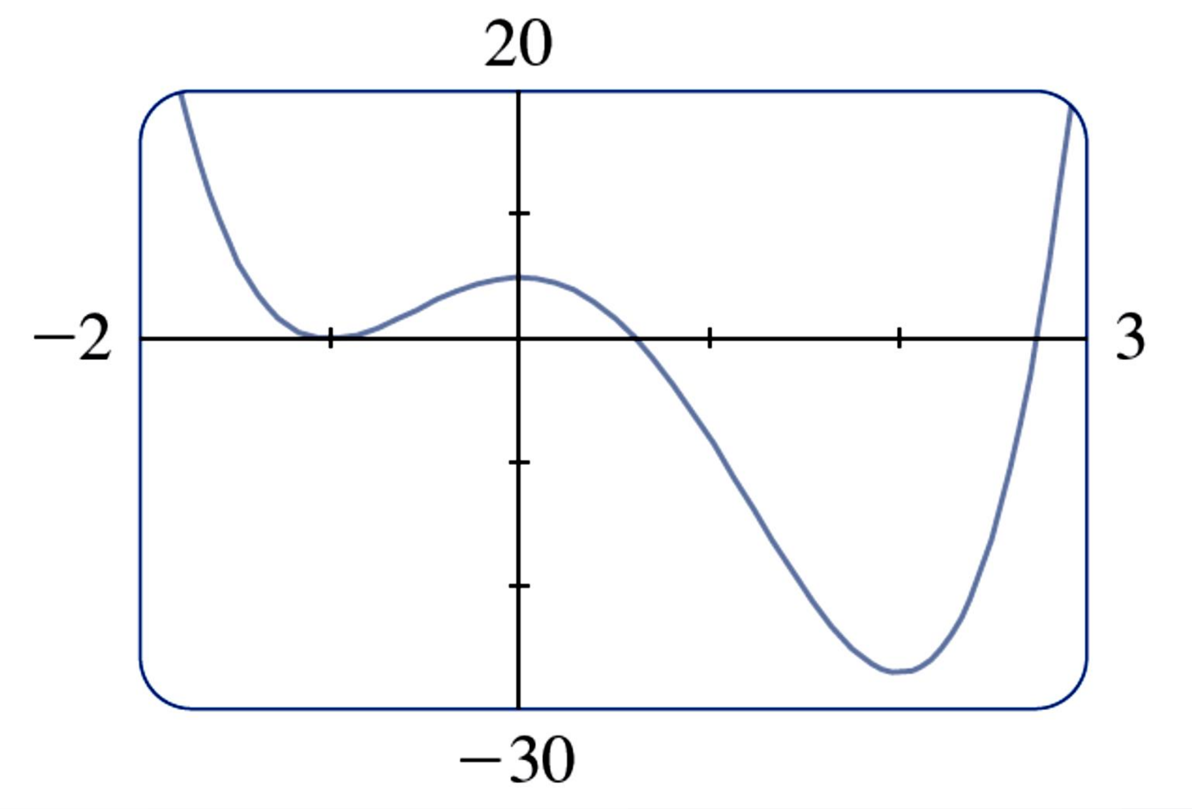
(b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.



Relación entre Derivadas y la forma de la Gráfica

Ejemplo:

Encuentre dónde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y dónde es decreciente.



Relación entre Derivadas y la forma de la Gráfica

Prueba de la primera derivada Suponga que c es un número crítico de una función continua f.

(a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

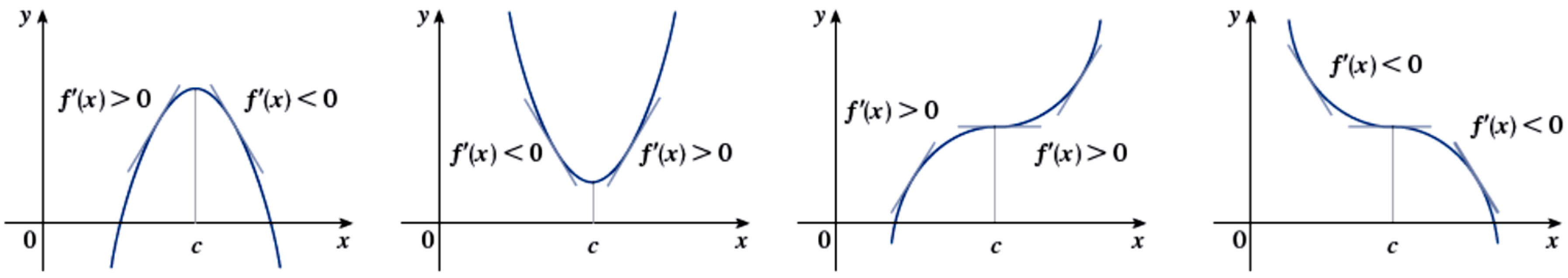
(b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

(c) Si f' es positiva por ambos lados de c, o negativa por ambos lados de c, entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

Prueba de la segunda derivada Suponga que f'' es continua cerca de c.

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

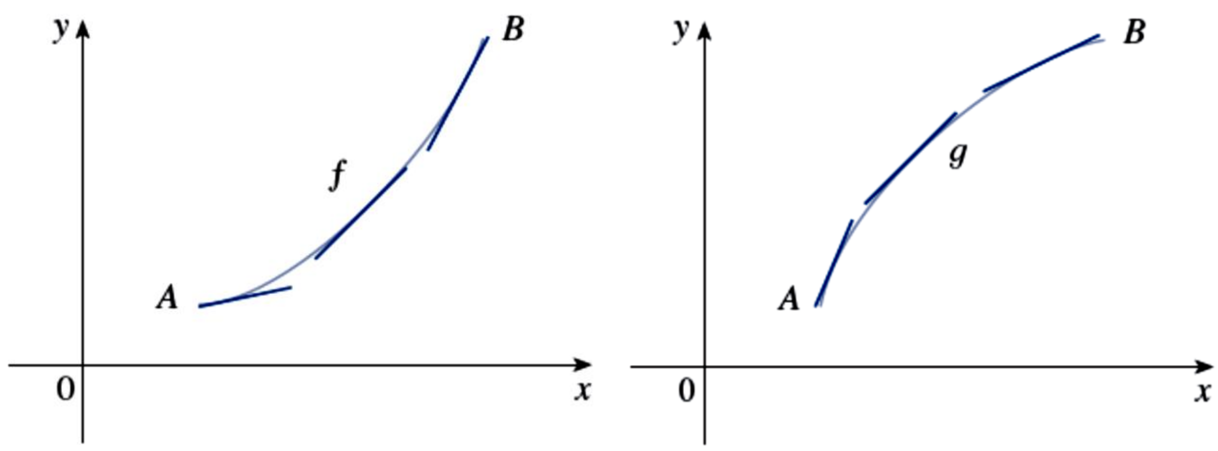
(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Sin máximos ni mínimos (d) Sin máximos ni mínimos

Relación entre Derivadas y la forma de la Gráfica

Definición Si la gráfica de f se encuentra arriba de todas sus rectas tangentes en un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** en I. Si la gráfica de f se encuentra abajo de todas sus rectas tangentes en I, se dice que es **cóncava hacia abajo** en I.



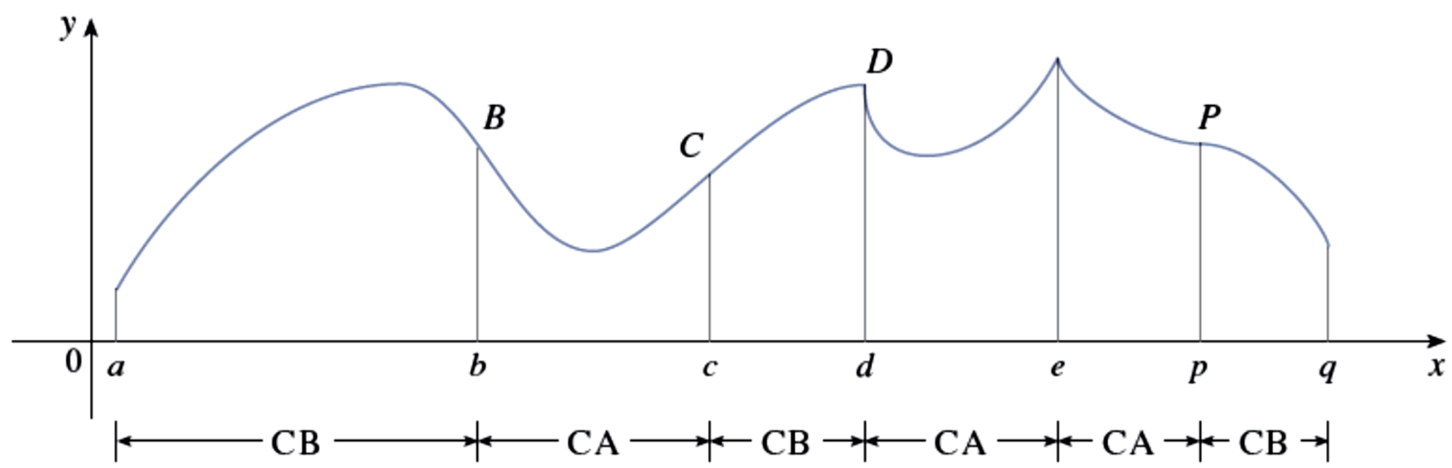
(a) Cóncava hacia arriba (b) Cóncava hacia abajo

Relación entre Derivadas y la forma de la Gráfica

Prueba de concavidad

(a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

(b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

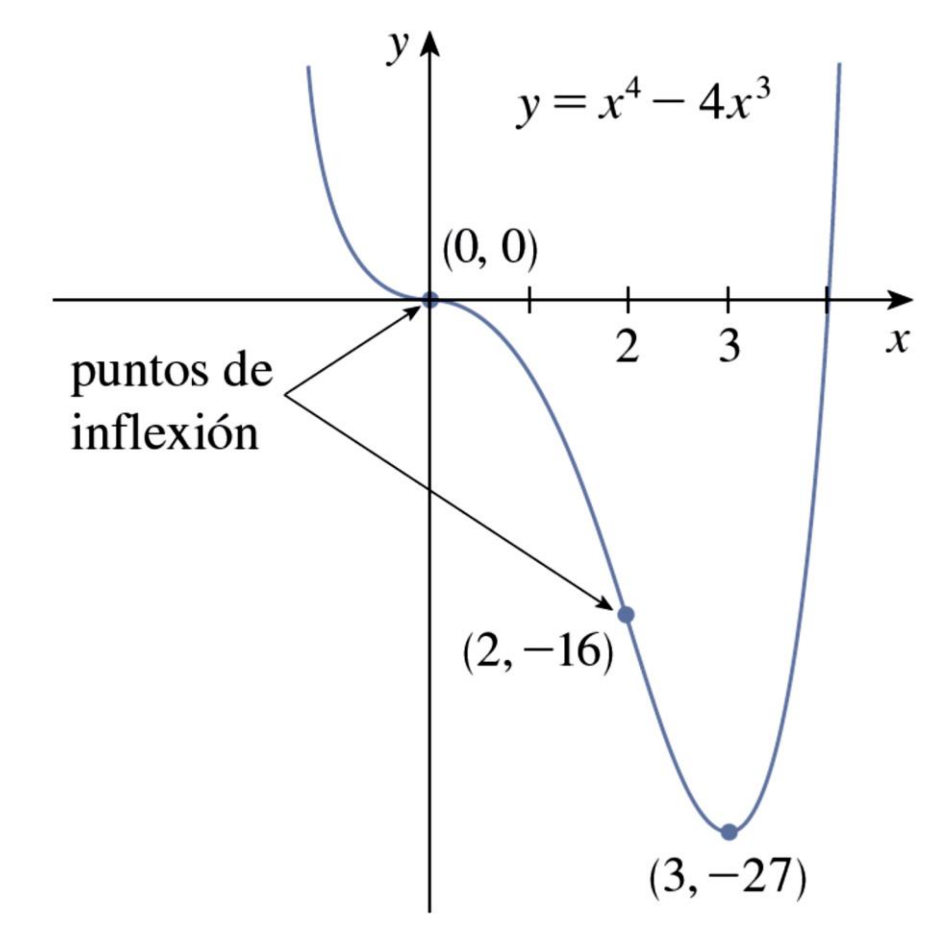


Definición Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama **punto de inflexión** si f es continua ahí y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Relación entre Derivadas y la forma de la Gráfica

Ejemplo:

Analice la función $f(x) = x^4 - 4x^3$ respecto a la concavidad, puntos de inflexión, máximo y mínimo local.



Guía para el Trazo de Curvas

A. Dominio A menudo resulta útil comenzar por determinar el dominio D de f, es decir, el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ está definida.

B. Intersección La intersección en y es $f(0)$ y esto indica dónde la curva cruza con el eje y. Para encontrar las intersecciones con el eje x, se hace $y = 0$ y se resuelve para x. (Se puede omitir este paso si la ecuación es difícil de resolver.)

C. Simetría

(i) Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en D, es decir, la ecuación de la curva no se modifica cuando x se sustituye por $-x$, entonces f es una **función par** y la curva es simétrica respecto al eje y. Esto significa que este trabajo se reduce a la mitad.

(ii) Si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D, entonces f es una **función impar** y la curva es simétrica respecto al origen. Una vez más, se puede obtener la curva completa si se conoce la parte de la curva donde $x \geqslant 0$.

(iii) Si $f(x + p) = f(x)$ para toda x en D, donde p es una constante positiva, entonces f se llama **función periódica** y el número p más pequeño se llama **período**. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tiene período 2π y $y = \tan x$ tiene período π. Si se sabe cómo es la gráfica en un intervalo de longitud p, entonces se puede utilizar una traslación para trazar toda la gráfica (véase la figura 4).

D. Asíntotas

(i) *Asíntotas horizontales*. Recuerde de la sección 2.6 que si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$. Si resulta que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no se tiene una asíntota a la derecha, pero sigue siendo información útil para trazar la curva.

(ii) *Asíntotas verticales*. Recuerde de la sección 2.2 que la recta $x = a$ es una asíntota vertical si al menos uno de los enunciados siguientes es verdadero:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para funciones racionales puede usted localizar las asíntotas verticales igualando el denominador a 0 después de eliminar los factores comunes. Pero para otras funciones no se aplica este método.) Además, en el trazo de la curva es muy útil saber exactamente cuál de los enunciados en (1) es verdadero. Si f(a) no está definida, pero a es un punto final del dominio de f, entonces debe calcular $\lim_{x \to a^-} f(x)$ o $\lim_{x \to a^+} f(x)$, sea este límite infinito o no.

(iii) *Asíntotas inclinadas*.

Guía para el Trazo de Curvas

E. Intervalos de crecimiento o decrecimiento Utilice la prueba C/D. Calcule $f'(x)$ y encuentre los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva (f es creciente) y los intervalos en los que $f'(x)$ es negativa (f es decreciente).

F. Valores mínimo y máximo locales Encuentre los números críticos de f [los números c donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existen]. Después utilice la prueba de la primera derivada. Si f' cambia de positiva a negativa en un número crítico c, entonces $f(c)$ es un máximo local. Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local. Aunque es generalmente preferible utilizar la prueba de la primera derivada, puede utilizar la prueba de la segunda derivada si $f'(c) = 0$ y $f''(\mathrm{c}) \neq 0$. Entonces $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ es un mínimo local, mientras que $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ es un máximo local.

G. Concavidad y puntos de inflexión Calcule $f''(x)$ y utilice la prueba de la concavidad. La curva es cóncava hacia arriba donde $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo donde $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión se localizan donde cambia de dirección la concavidad.

Trazo de Curvas

Ejemplo:

a) Utilice la guía para trazar la gráfica de $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

b) Trace la gráfica de $y = xe^x$

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es