EX VERITATE LUX

EX LABORE VIRTUS

Universidad
Europea
del Atlántico

Loyda Leticia Alas Castaneda
loyda.alas@uneatlantico.es

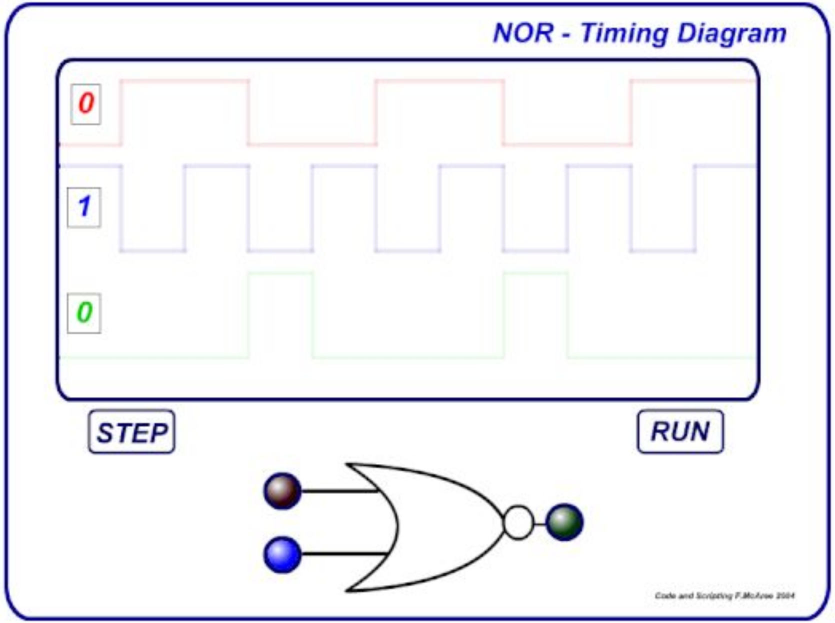
Tecnología y Estructura de Ordenadores

Tema 5

Lógica binaria y Álgebra de Boole

Circuitos Lógicos

Circuitos Combinacionales y Secuenciales



Circuitos Combinacionales:

- El valor de la salida depende del estado de las entradas, es decir de la combinación de las entradas.

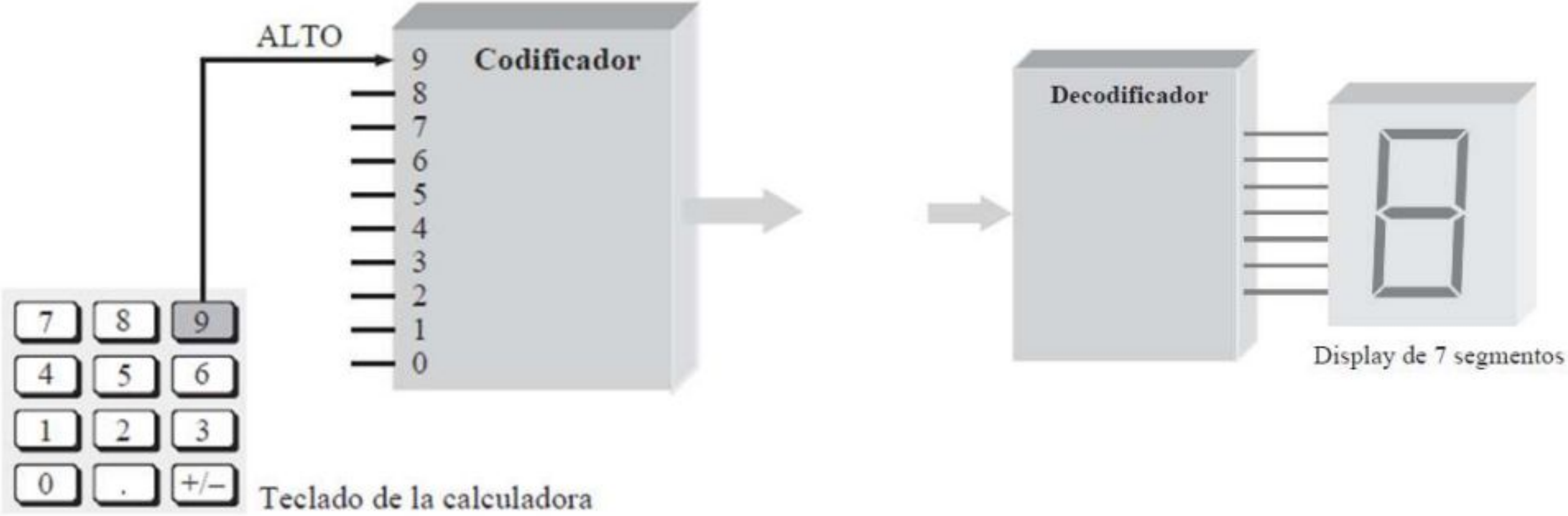
- Estos circuitos se dividen en circuitos combinacionales **uniterminales** (una salida) y circuitos combinacionales **multiterminales** (varias salidas).

Circuitos Secuenciales:

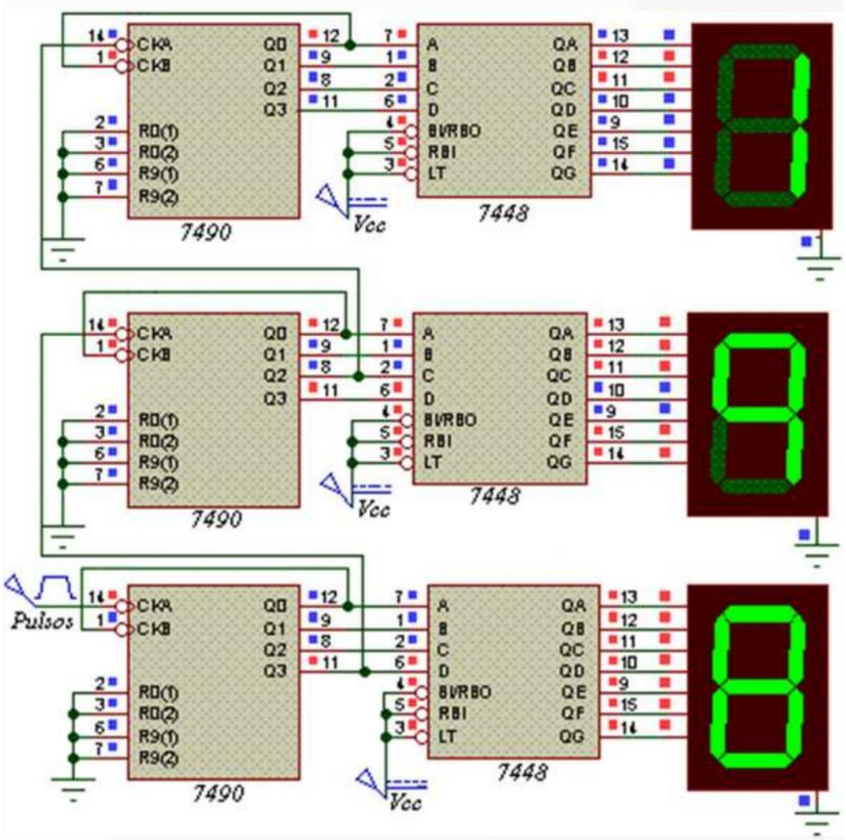
- El valor de la salida depende del estado de las entradas y del estado anterior de la propia salida, es decir de la secuencia por la que haya pasado la salida.

- Se dividen en circuitos secuenciales **sincrónicos** y circuitos secuenciales **asincrónicos**.

Ejemplo de Circuito Combinacional



Ejemplo de Circuito Secuencial



Definiciones

Variable:

Es un símbolo que se utiliza para representar magnitudes lógicas. Cualquier variable puede tener un valor de 0 o de 1. Por ejemplo: $A = 1$

Complemento:

El complemento es el inverso de la variable y se indica mediante una barra encima de la misma.Por ejemplo: si $A = 1$; entonces $\bar{A} = 0$

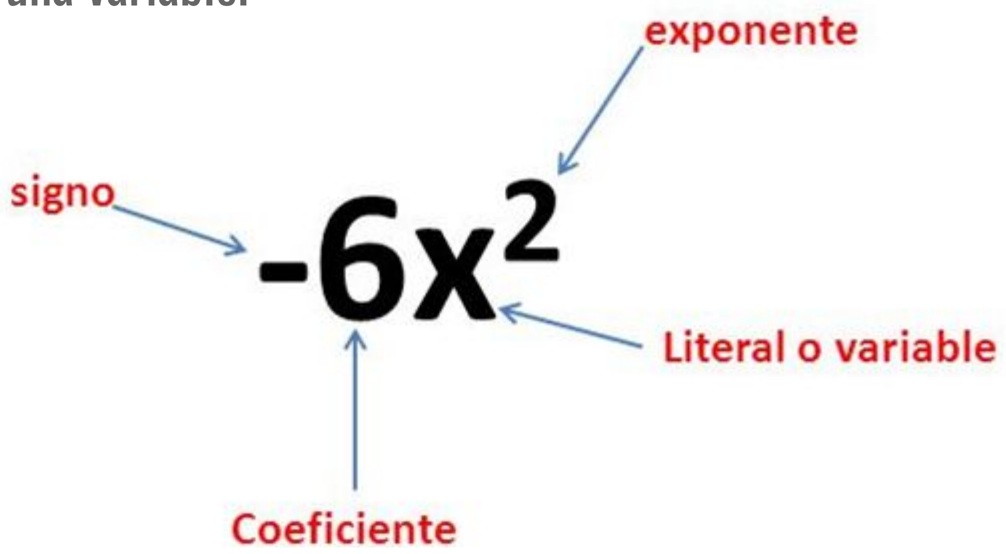
“A” se lee como **“A negada”**

También puede escribirse como **A’**

Definiciones

Literal:

Es una variable o complemento de una variable.



Adición booleana

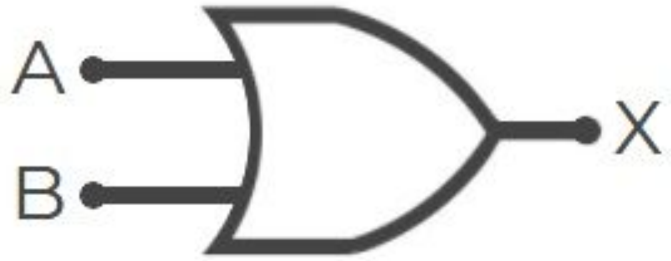
OR (Suma booleana): La combinación OR de dos variables resulta verdadera ó 1 cuando al menos una de ellas es verdadera ó 1.

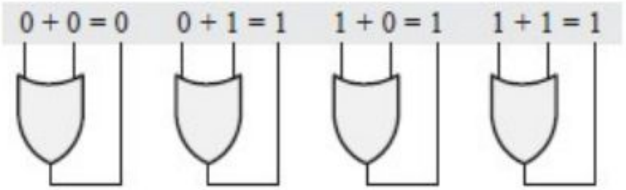
SUMA - OR		
X	Y	**X+Y**
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Operaciones

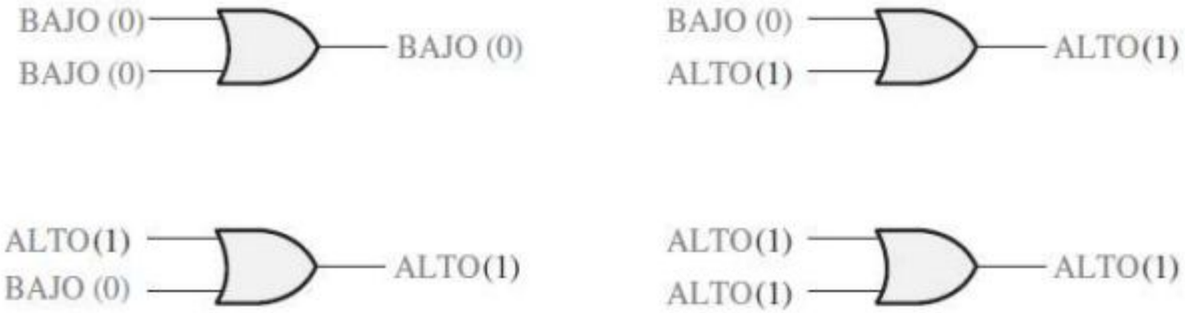
Puerta lógica - **OR** (Suma booleana)

SUMA - OR		
X	Y	**X+Y**
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

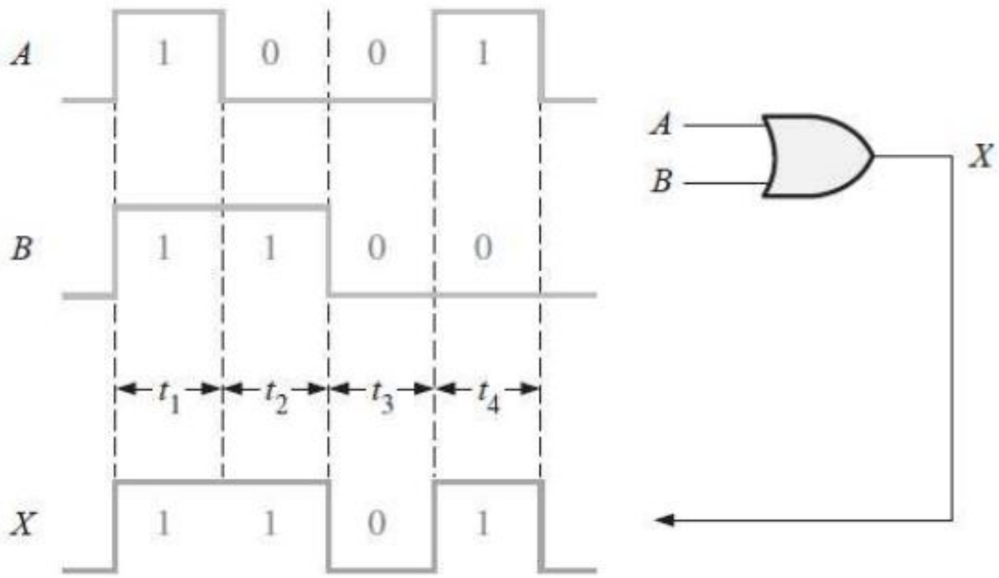




Puerta lógica - **OR**
Funcionamiento



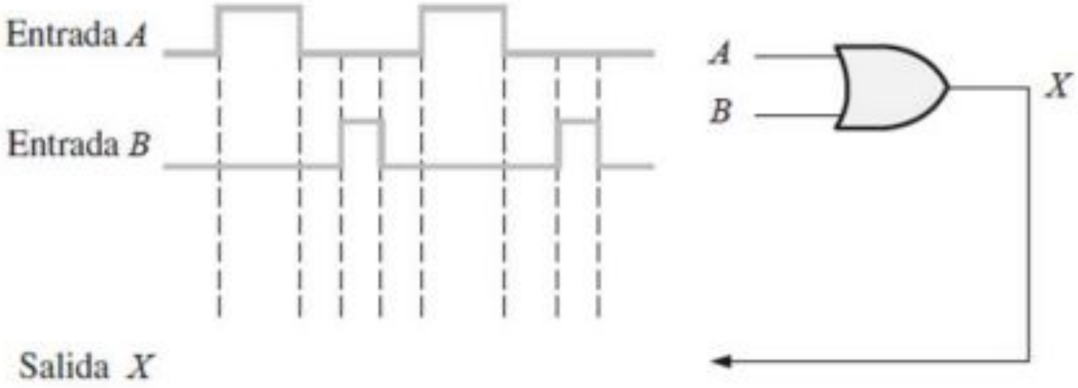
Puerta lógica - **OR**
Funcionamiento con tren de impulsos



Puerta lógica - **OR**

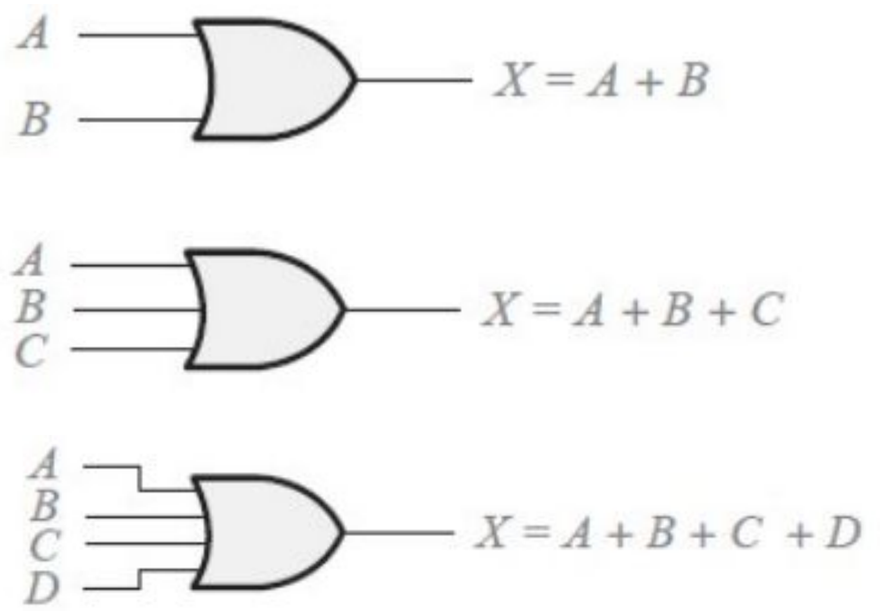
Funcionamiento con tren de impulsos

Si se aplican las dos señales de entrada, A y B, de la Figura a la puerta OR, ¿cuál es la señal de salida resultante?



Puerta lógica - **OR**

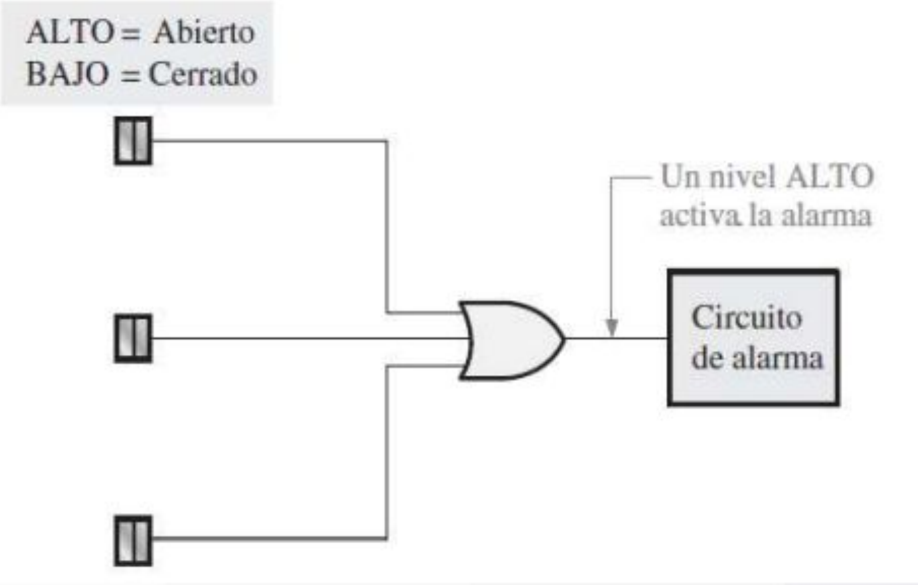
Expresiones booleanas



Puerta lógica - **OR**

Ejemplo práctico

Sistema que detecta las puertas abiertas en un coche.



Operaciones

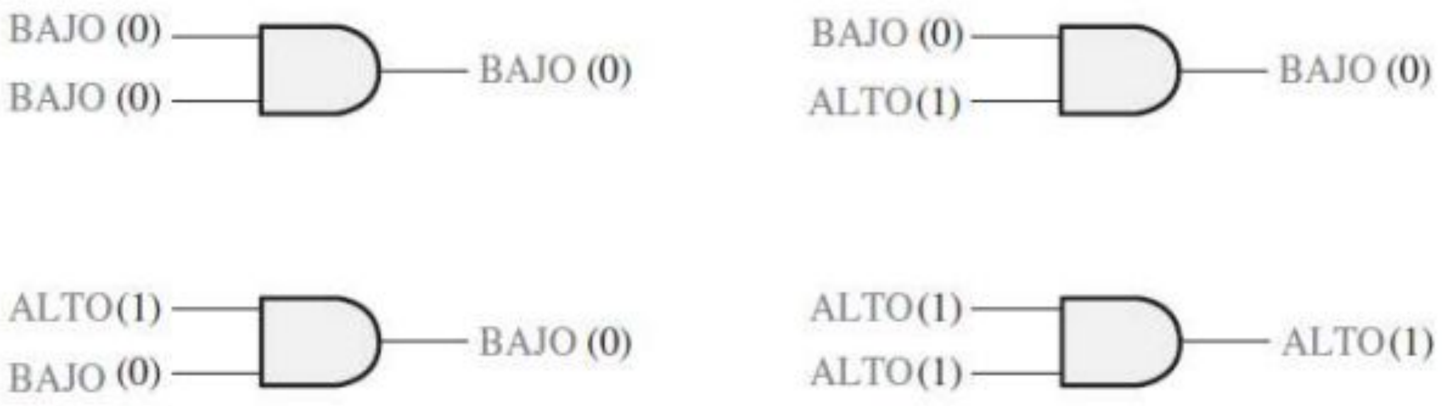
AND (Multiplicación booleana):La combinación AND de dos variables resulta verdadera ó 1 cuando las dos variables son verdaderas ó 1.

MULTIPLICACIÓN - AND		
X	Y	**X . Y**
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Puerta lógica - **AND** (Multiplicación booleana)

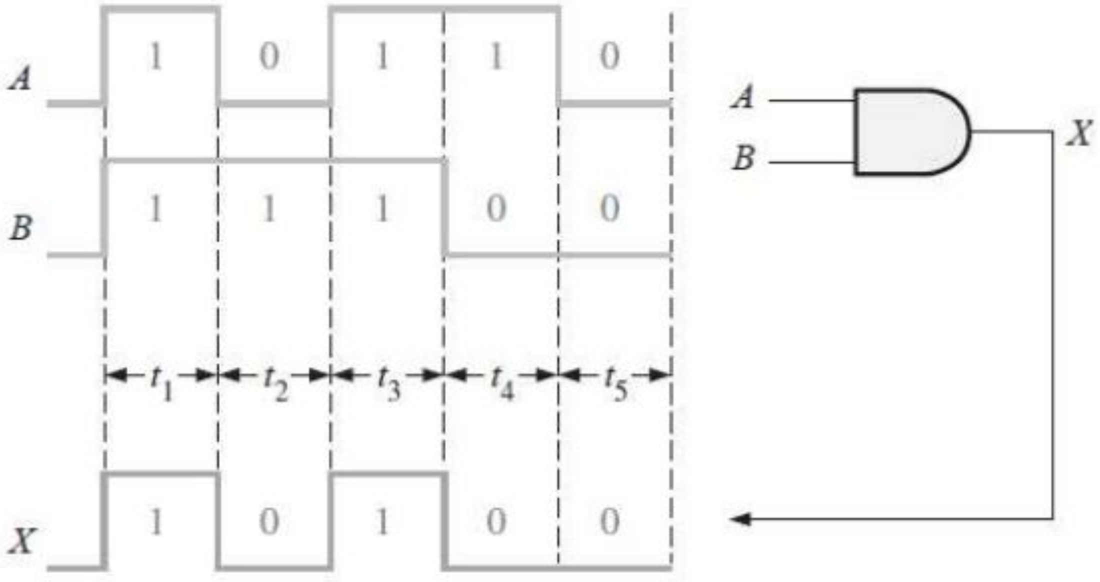
MULTIPLICACIÓN - AND		
X	Y	**X . Y**
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Puerta lógica - **AND**
Funcionamiento



Puerta lógica - **AND**

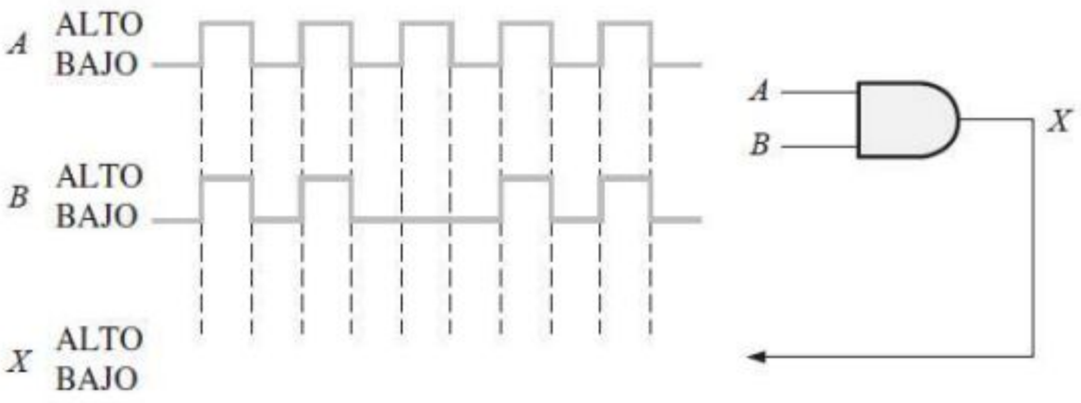
Funcionamiento con tren de impulsos



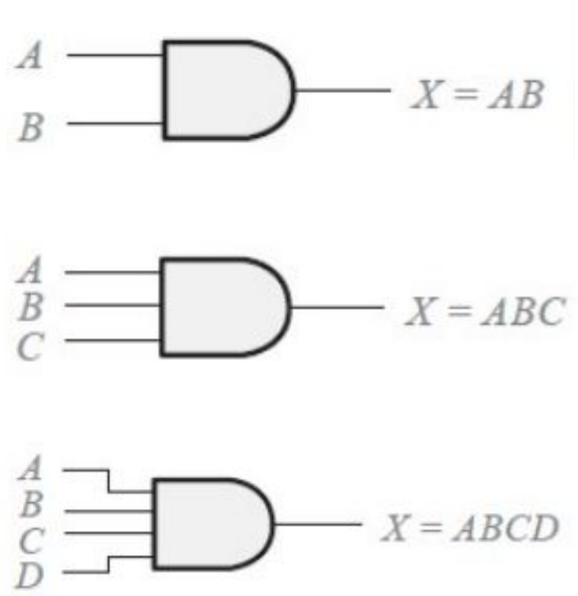
Puerta lógica - **AND**

Funcionamiento con tren de impulsos

Ejercicio: Si se aplican las formas de onda A y B de la figura a las entradas de una puerta AND, ¿cuál es la forma de onda resultante de salida?



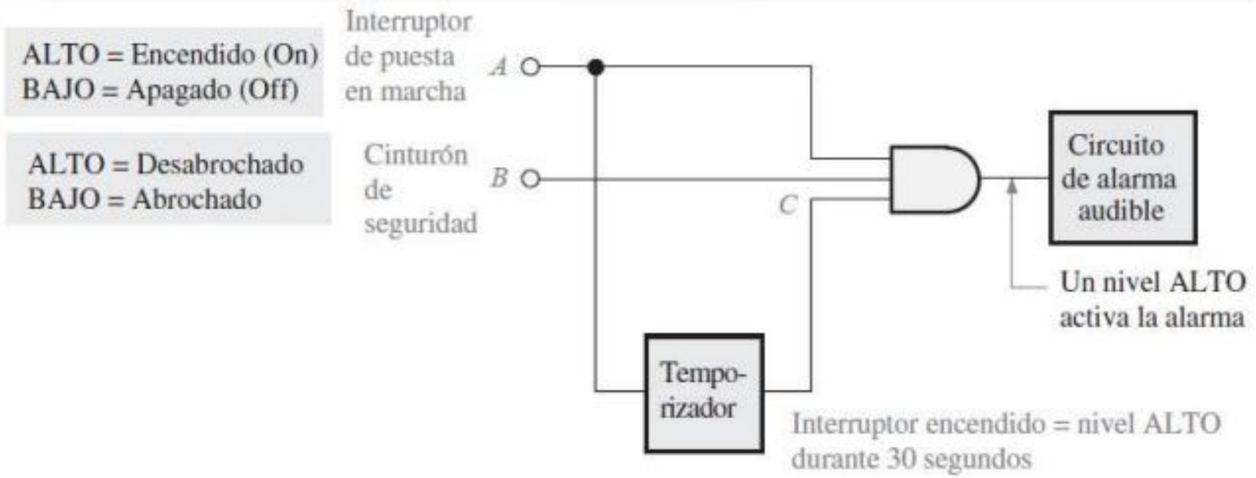
Puerta lógica - **AND**
Expresiones booleanas



Puerta lógica - **AND**

Ejemplo práctico

Sistema que detecta el no abrocharse los cinturones de seguridad en los coches

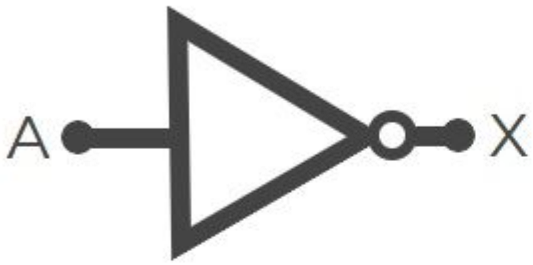


Operaciones

NOT: Negado o complemento de una variable o función

NOT	
X	X'
0	1
1	0

Puerta lógica - **NOT** (El inversor)



NOT	
X	X'
0	1
1	0

Puerta lógica - **NOT** (El inversor)

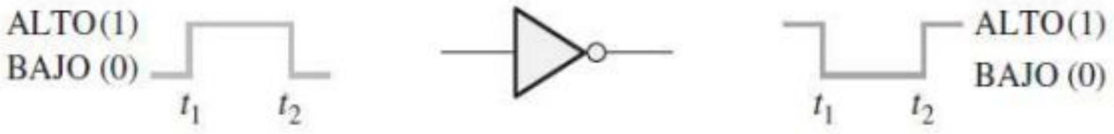
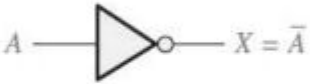


Figura 3.2 Funcionamiento del inversor con un impulso de entrada.



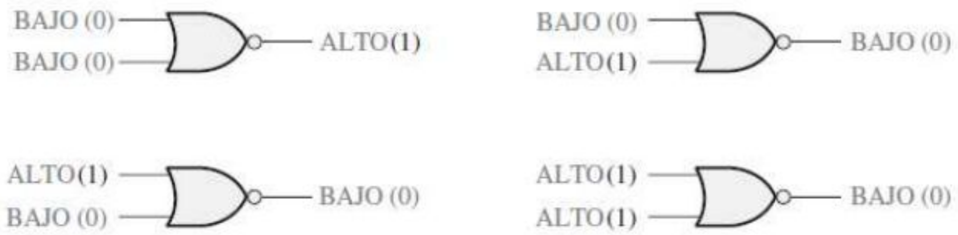
El inversor complementa una variable de entrada.

Puerta lógica - **NAND**

Entradas		Salida
A	B	X
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**
1 = ALTO, 0 = BAJO		

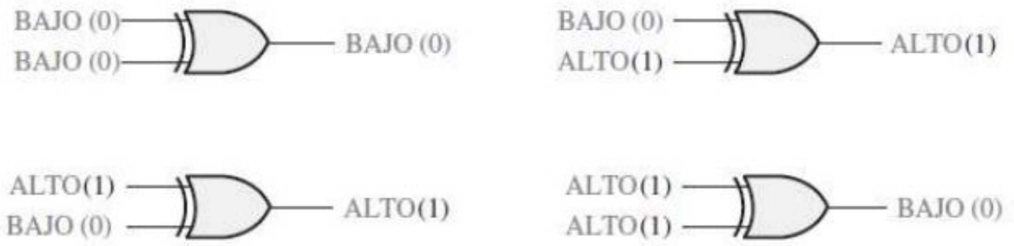
Puerta lógica - **NOR**

Entradas		Salida
A	B	X
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**0**
1 = ALTO, 0 = BAJO		



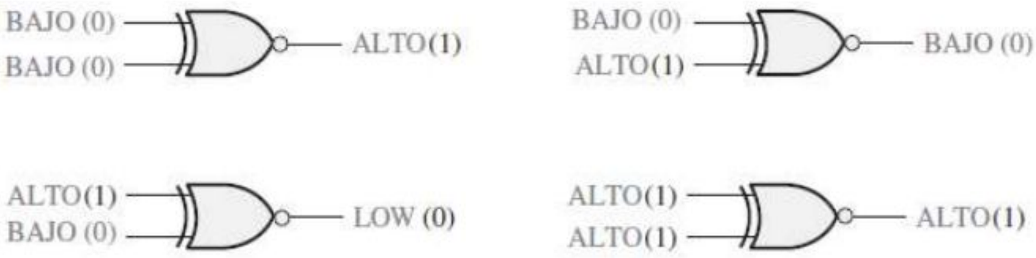
Puerta lógica - OR Exclusiva **XOR**

Entradas		Salida
A	B	X
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

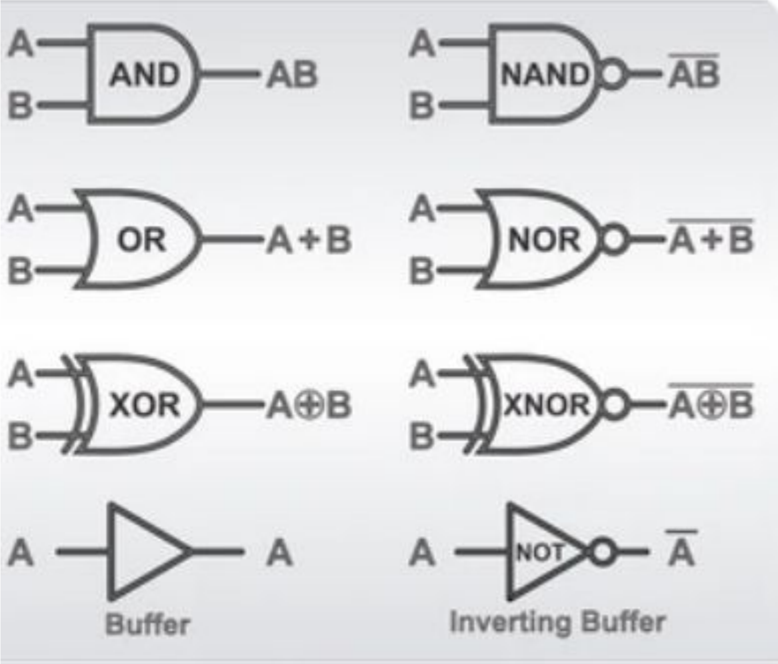


Puerta lógica - NOR Exclusiva **XNOR**

Entradas		Salida
A	B	X
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**



Resumen


A
B
AND
AB
A
B
NAND
$\overline{AB}$
A
B
OR
A+B
A
B
NOR
$\overline{A+B}$
A
B
XOR
A⊕B
A
B
XNOR
$\overline{A \oplus B}$
A
A
Buffer
A
NOT
$\overline{A}$
Inverting Buffer

Operaciones

Función de conmutación:

$$T(X, Y, Z)$$

Una función booleana o de conmutación es una expresión algebraica de variables booleanas con las operaciones +, * y complemento. La prioridad de los operadores, en caso de haber varios, es: paréntesis, complementos, productos y sumas.

Expresiones de conmutación:

$$\overline{X}Z + X\overline{Z} + \overline{Y}\overline{Z}$$

$$T(X, Y, Z) = \overline{X}Z + X\overline{Z} + \overline{Y}\overline{Z}$$

$$T(X,Y,Z) = \overline{X}Z + X\overline{Z} + \overline{Y}\overline{Z}$$

Tabla de verdad:

Representa a una sola función de conmutación, pero esta función puede escribirse con diferentes expresiones equivalentes entre sí.

X	Y	Z	T
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

Álgebra de Boole

1854 → George Boole

- Es considerado como uno de los fundadores del campo de las ciencias de la computación

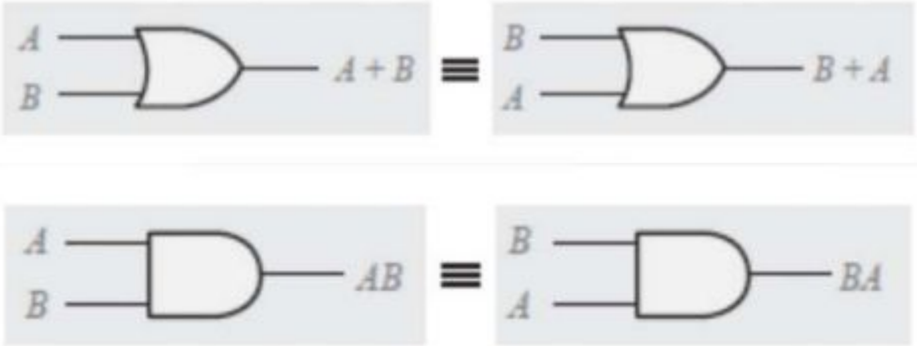
1938 → Sharon (álgebra de conmutación)

- Demostró que se podía utilizar en el análisis y la síntesis de la conmutación y de los circuitos digitales

Álgebra de Boole

- Leyes conmutativas

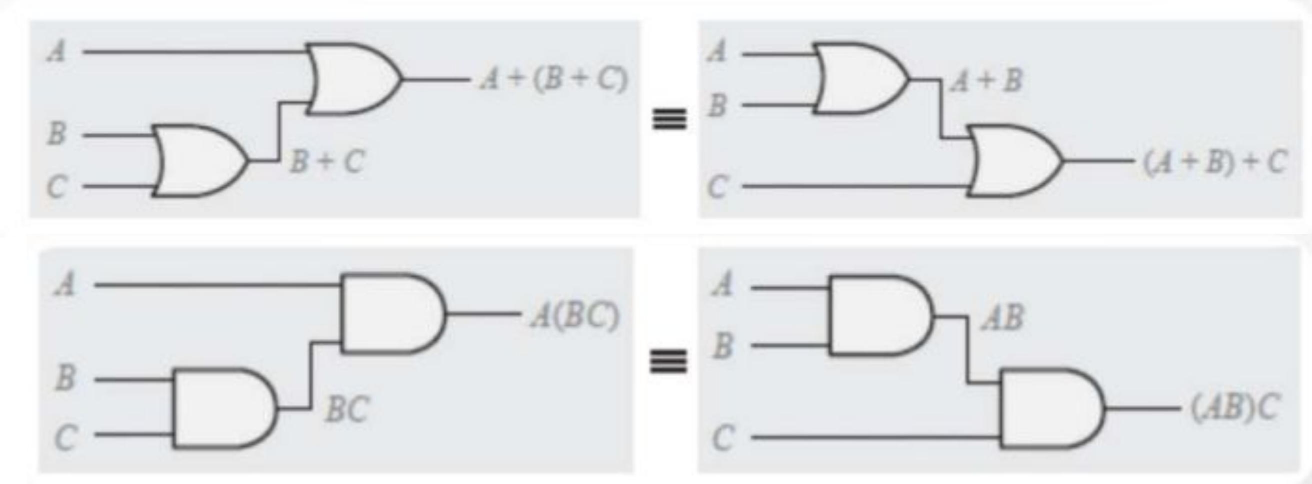
$$\forall\, a, b \in \mathbb{B} \begin{cases} a + b = b + a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{cases}$$



Álgebra de Boole

- Leyes asociativas

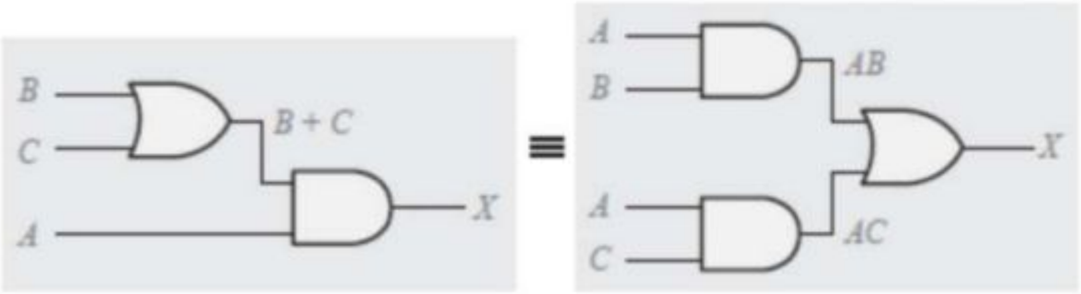
$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{B} \begin{cases} a + (b + c) = (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \end{cases}$$



Álgebra de Boole

- Leyes distributivas

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{B} \begin{cases} a + b \cdot c = (a+b)\cdot(a+c) \\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \end{cases}$$



$X = A(B + C)$

$X = AB + AC$

Álgebra de Boole

- Reglas del álgebra booleana

1. $A + 0 = A$	7. $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	9. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

A, *B* o *C* pueden representar una sola variable o una combinación de variables.

Álgebra de Boole

- Reglas del álgebra booleana

1. $A + 0 = A$

Si aplicamos la operación OR a una variable cualquiera y a 0, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 1, la salida es igual a 1 y, por tanto, igual a A. Si A es 0, la salida es 0 e igualmente idéntica a A.

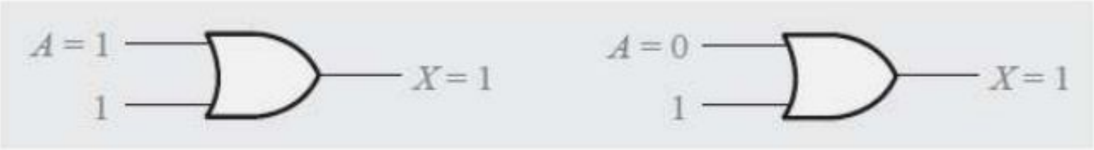
$$X = A + 0 = A$$

Álgebra de Boole

- ## Reglas del álgebra booleana

2. $A + 1 = 1$

Si se aplica la operación OR a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a 1. Un 1 en una entrada de una puerta OR produce siempre un 1 en la salida, independientemente del valor de la otra entrada.



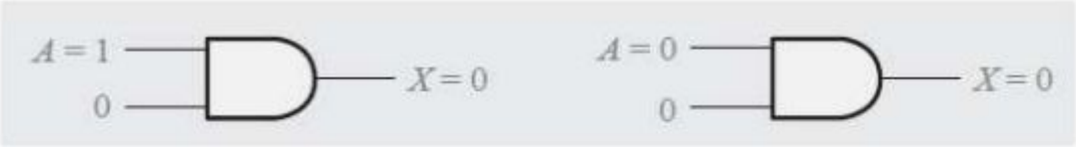
$X = A + 1 = 1$

Álgebra de Boole

- ## Reglas del álgebra booleana

3. $A \cdot 0 = 0$

Si se aplica la operación AND a una variable y a 0, el resultado es siempre igual a 0. Siempre que una de las entradas de una puerta AND sea 0, la salida siempre es 0, independientemente del valor de la otra entrada.



$X = A \cdot 0 = 0$

Álgebra de Boole

- ## Reglas del álgebra booleana

4. $A \cdot 1 = A$

Si se aplica la operación AND a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a la variable. Si la variable A es 0, la salida de la puerta AND será siempre 0, mientras que si A es 1, la salida será 1, dado que las dos entradas son 1.

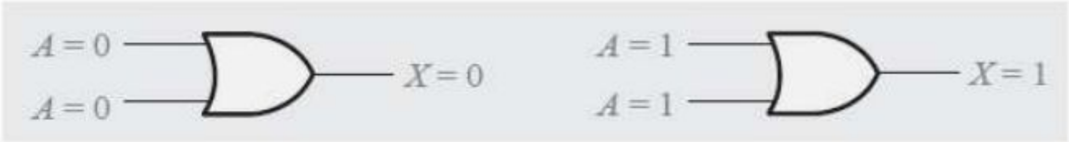
$X = A \cdot 1 = A$

Álgebra de Boole

- ## Reglas del álgebra booleana

5. $A + A = A$

Si se aplica la operación OR a una variable consigo misma, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 0, entonces 0 + 0 = 0, mientras que si A es 1, 1 + 1 =1.



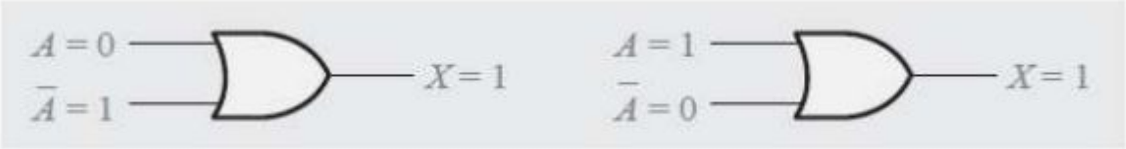
$X = A + A = A$

Álgebra de Boole

- ## Reglas del álgebra booleana

6. $A + A' = 1$

Si se aplica la operación OR a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 1.



$X = A + \overline{A} = 1$

Álgebra de Boole

- ## Reglas del álgebra booleana

7. $A \cdot A = A$

Si se aplica la operación AND a una variable consigo misma, el resultado siempre es igual a la variable. Si A = 0, entonces 0 · 0 = 0, y si A = 1, entonces 1 · 1 = 1

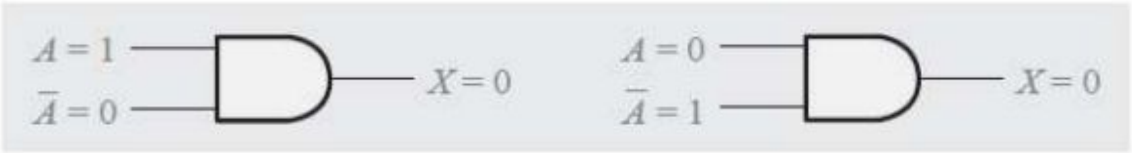
$X = A \cdot A = A$

Álgebra de Boole

- ## Reglas del álgebra booleana

8. $A \cdot A' = 0$

Si se aplica la operación AND a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 0. Esta regla se basa en que siempre A o $\bar{A}$ será 0, y además en que cuando se aplica un 0 a una de las entradas de una puerta AND, la salida siempre es 0



$$X = A \cdot \bar{A} = 0$$

Álgebra de Boole

- ## Reglas del álgebra booleana

9. $A'' = A$

El complemento del complemento de una variable es siempre la propia variable. El complemento de la variable A es $\overline{A}$ y el complemento de $\overline{A}$ será de nuevo A, que es la variable original.

$\overline{\overline{A}} = A$

Álgebra de Boole

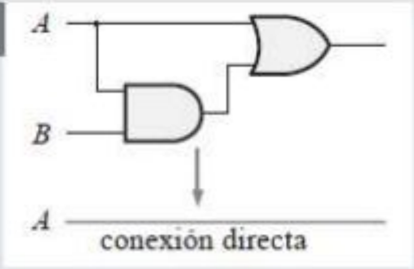
- Reglas del álgebra booleana

10. $A + AB = A$

Esta regla se puede obtener aplicando la ley distributiva y las reglas 2 y 4, de la siguiente forma:

A	B	AB	$A + AB$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

igual



Álgebra de Boole

- Reglas del álgebra booleana

10. $A + AB = A$

Esta regla se puede obtener aplicando la ley distributiva y las reglas 2 y 4, de la siguiente forma:

$A + AB = A(1 + B)$	Sacar factor común (ley distributiva)
$= A \cdot 1$	Regla 2: $(1 + B) = 1$
$= A$	Regla 4: $A \cdot 1 = A$

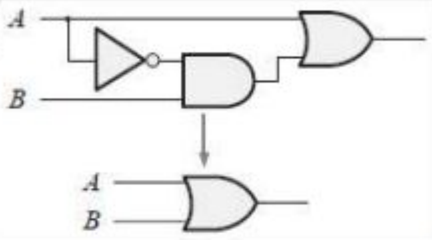
Álgebra de Boole

- Reglas del álgebra booleana

11. $A + A'B = A + B$

A	B	$\overline{A}B$	$A+\overline{A}B$	$A+B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

igual



Álgebra de Boole

- Reglas del álgebra booleana

11. $A + A'B = A+B$

$A+\overline{A}B=(A+AB)+\overline{A}B$	Regla 10: $A=A+AB$
$=(AA+AB)+\overline{A}B$	Regla 7: $A=AA$
$=AA+AB+A\overline{A}+\overline{A}B$	Regla 8: sumar $A\overline{A}=0$
$=(A+\overline{A})(A+B)$	Sacar factor común
$=1\cdot(A+B)$	Regla 6: $A+\overline{A}=1$
$=A+B$	Regla 4: eliminar el 1

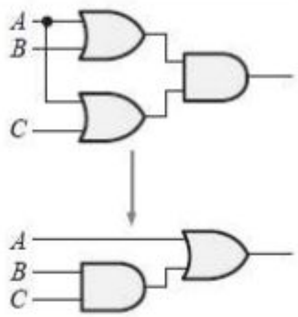
Álgebra de Boole

- Reglas del álgebra booleana

12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

A	B	C	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$	BC	$A+BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

igual



Álgebra de Boole

- Reglas del álgebra booleana

12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

$(A+B)(A+C)$	$=AA+AC+AB+BC$	Ley distributiva
	$=A+AC+AB+BC$	Regla 7: $AA=A$
	$=A(1+C)+AB+BC$	Sacar factor común (ley distributiva)
	$=A\cdot 1+AB+BC$	Regla 2: $1+C=1$
	$=A(1+B)+BC$	Sacar factor común (ley distributiva)
	$=A\cdot 1+BC$	Regla 2: $1+B=1$
	$=A+BC$	Regla 4: $A\cdot 1=A$

Álgebra de Boole

- ## Formas Canónicas

Se llama término canónico de una función lógica a todo producto o suma en el cual aparecen todas las variables (ó sus complementos) de esa función.

A los términos productos se les llama productos canónicos (minterms) y a los términos suma se les llama, sumas canónicas (maxterms).

Álgebra de Boole

- ## Formas Disyuntiva Normal (FDN)

Se basa en la operación OR de los términos o combinaciones que hacen 1 la función. Los términos o combinaciones lo componen el AND de las variables.

X	Y	Z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

X = 1 -> X

X = 0 -> $\overline{X}$

$$F_1 = f(X,Y,Z) = \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + XYZ$$

Mintérminos

$$F_1 = f(X,Y,Z) = \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + XYZ = m_2 + m_4 + m_7 = \sum_m (2, 4,7)$$

Álgebra de Boole

- ## Formas Conjuntiva Normal

Se basa en la operación AND de los términos o combinaciones que hacen 0 la función. Los términos o combinaciones lo componen el OR de las variables. De aquí se deriva el término Suma estándar (SE), que es el OR de todas las variables de la función complementadas o no. Es decir, para representar la función se unen en AND las SE para las cuales la función vale 0

X	Y	Z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

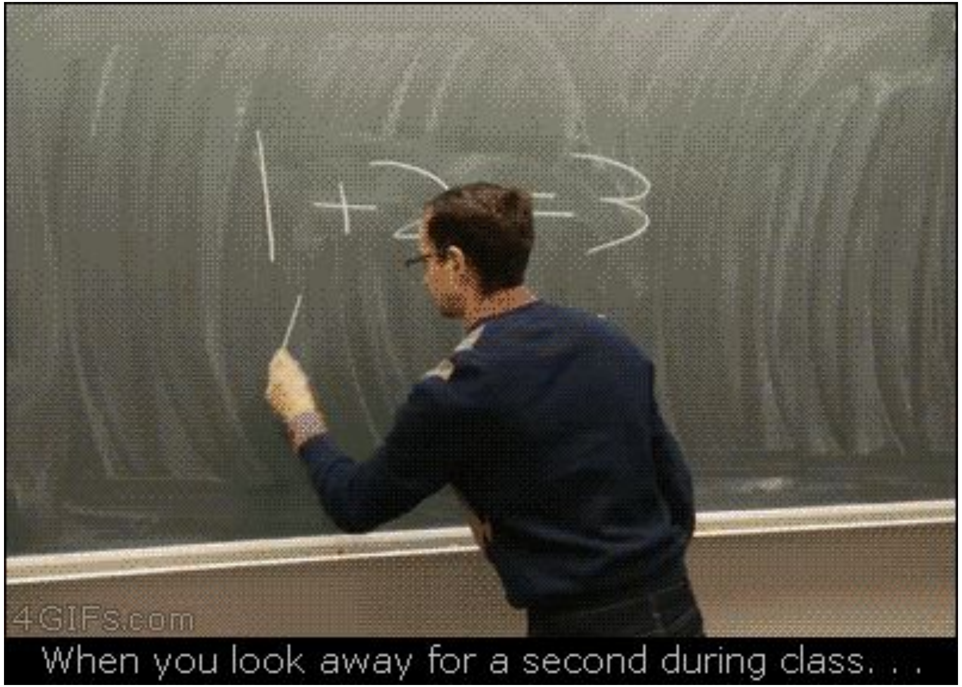
Maxtérminos

$$F_2 = f(X,Y,Z) = (X+Y+Z)*(X+Y+\overline{Z})*(X+\overline{Y}+\overline{Z})*(\overline{X}+Y+\overline{Z})*(\overline{X}+\overline{Y}+Z)$$

$$F_2 = f(X,Y,Z)$$

$$= M_0\ M_1\ M_3\ M_5\ M_6 = \prod\nolimits_M(0, 1, 3, 5, 6)$$

Dudas...



Álgebra de Boole

- Leyes de DeMorgan

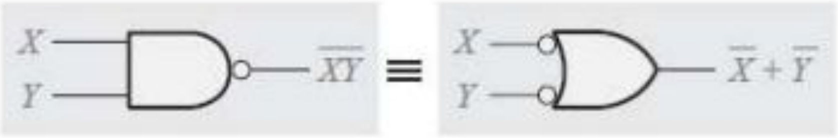
$$\overline{(x+y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x+y$	$x \cdot y$	$\overline{(x+y)}$	$\overline{(x \cdot y)}$	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	$\bar{x} + \bar{y}$
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0

Álgebra de Boole

- Puertas lógicas - NAND - NEGATIVA-OR

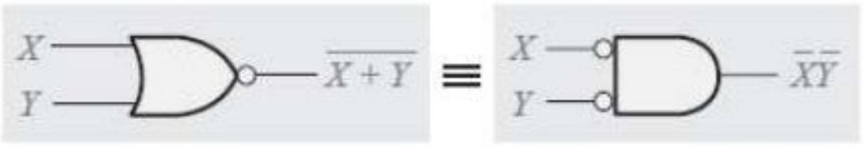


NAND Negativa-OR

Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{XY}$	$\overline{X}+\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Álgebra de Boole

- Puertas lógicas - NOR - NEGATIVA-AND



NOR   Negativa-AND

Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{X+Y}$	$\overline{X}\,\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Álgebra de Boole

- Ejercicios

Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{XYZ}$ y $\overline{X+Y+Z}$.

$$\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{X+Y+Z} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}$.

Álgebra de Boole

- ## Simplificación

A la hora de aplicar el álgebra booleana, hay que reducir una expresión a su forma más simple o cambiarla a una forma más conveniente para conseguir una implementación más eficiente.

Requiere un profundo conocimiento del álgebra booleana y una considerable experiencia en su aplicación, por no mencionar también un poquito de ingenio y destreza.

Álgebra de Boole - Simplificación

Simplificar la siguiente expresión booleana:

$$[A\overline{B}(C+BD)+\overline{A}\overline{B}]C$$

Paso 1. Aplicar la ley distributiva a los términos entre corchetes.

$$(A\overline{B}C+A\overline{B}BD+\overline{A}\overline{B})C$$

Paso 2. Aplicar la regla 8 ($\overline{B}B=0$) al segundo término entre paréntesis.

$$(A\overline{B}C+A\cdot 0\cdot D+\overline{A}\overline{B})C$$

Paso 3. Aplicar la regla 3 ($A\cdot 0\cdot D=0$) al segundo término contenido dentro de los paréntesis.

$$(A\overline{B}C+0+\overline{A}\overline{B})C$$

Álgebra de Boole - Simplificación

Simplificar la siguiente expresión booleana:

$$[A\overline{B}(C+BD)+\overline{A}\,\overline{B}]C$$

Paso 4. Aplicar la regla 1 (quitar el 0) dentro del paréntesis

$$(A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B})C$$

Paso 5. Aplicar la ley distributiva.

$$A\overline{B}CC+\overline{A}\,\overline{B}C$$

Paso 6. Aplicar la regla 7 ($CC=C$) al primer término.

$$A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C$$

Paso 7. Sacar $\overline{B}C$ factor común.

$$\overline{B}C(A+\overline{A})$$

Paso 8. Aplicar la regla 6 $(A+\overline{A}=1)$.

$$\overline{B}C\cdot 1$$

Paso 9. Aplicar la regla 4 (quitar el 1).

$$\overline{B}C$$

Álgebra de Boole

- Ejercicios

Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{WXYZ}$ y $\overline{W+X+Y+Z}$.

$$\overline{WXYZ} = \bar{W} + \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$$
$$\overline{W+X+Y+Z} = \bar{W}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\bar{W}\,\bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z}}$

Álgebra de Boole

- Aplicación de los teoremas de DeMorgan

$$\overline{\overline{A+B\overline{C}}+D(\overline{E+\overline{F}})}$$

Paso 1. Identificamos los términos a los que se pueden aplicar los teorema de DeMorgan y consideramos cada término como una única variable, por lo que establecemos $\overline{A+B\overline{C}} = X$ y $D(\overline{E+\overline{F}}) = Y$.

Paso 2. Dado que $\overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$.

$$\overline{(\overline{A+B\overline{C}})+(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})} = (\overline{\overline{A+B\overline{C}}})(\overline{\overline{D(\overline{E+\overline{F}})}})$$

Paso 3. Utilizamos la regla 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para eliminar la bara doble sobre el término de la izquierda (esto no es parte del teorema de DeMorgan).

$$(\overline{\overline{A+B\overline{C}}})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})}) = (A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})$$

Paso 4. Aplicando el teorema de DeMorgan al segundo término:

$$(A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})}) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}}))$$

Paso 5. Empleamos la regla 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para cancelar las barras dobles sobre la parte $E+\overline{F}$ del término.

$$(A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}})) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+E+\overline{F})$$

Álgebra de Boole - Simplificación

Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del álgebra de Boole:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

Álgebra de Boole - Simplificación

Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del álgebra de Boole:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

El método que se sigue no es necesariamente el único método posible.

Paso 1. Aplicar la ley distributiva al segundo y tercer término del siguiente modo:

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

Paso 2. Aplicar la regla 7 ($BB = B$) al cuarto término.

$$AB + AB + AC + B + BC$$

Paso 3. Aplicar la regla 5 ($AB + AB = AB$) a los dos primeros términos.

$$AB + AC + B + BC$$

Paso 4. Aplicar la regla 10 ($B + BC = B$) a los dos últimos términos.

$$AB + AC + B$$

Paso 5. Aplicar la regla 10 ($AB + B = B$) al primero y tercer término.

$$B + AC$$

En este punto, la expresión ya no puede seguir simplificándose. Según vaya adquiriendo experiencia en la aplicación del álgebra de Boole, podrá combinar muchos de los pasos individuales.

Álgebra de Boole - Simplificación

Simplificar la siguiente expresión booleana:

$$[A\overline{B}(C+BD)+\overline{A}\overline{B}]C$$

Loyda Alas

loyda.alas@uneatlantico.es

www.linkedin.com/in/loyda-alas