Se puede interpretar físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Es un nombre apropiado porque un gran jerk significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

El proceso de derivación puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, se escribe

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 se encuentra que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y así, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Por tanto f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. Por tanto, para todos los valores de x,

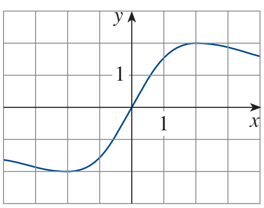
$$f^{(4)}(x) = 0$$ ■

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' da información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 se verá cómo la segunda derivada y las derivadas superiores nos permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

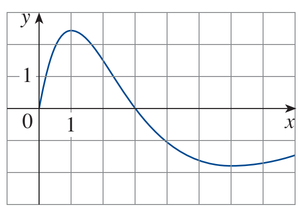
2.8 EJERCICIOS

1–2 Utilice la gráfica que se proporciona para calcular el valor de cada derivada. Luego trace la gráfica de f'.

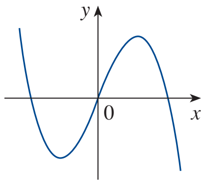
1. (a) $f'(-3)$ (b) $f'(-2)$ (c) $f'(-1)$ (d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$ (f) $f'(2)$ (g) $f'(3)$

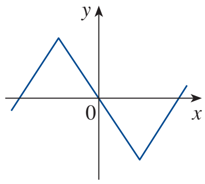


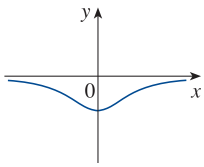
2. (a) $f'(0)$ (b) $f'(1)$ (c) $f'(2)$ (d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$ (f) $f'(5)$ (g) $f'(6)$ (h) $f'(7)$

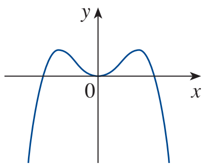


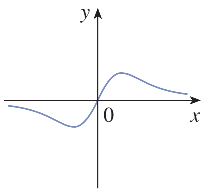
3. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I-IV. Dé las razones para sus selecciones.

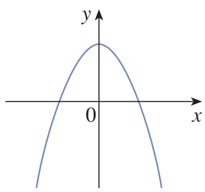
(a)


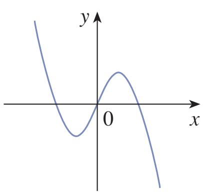
(b)


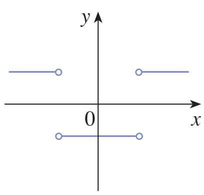
(c)


(d)


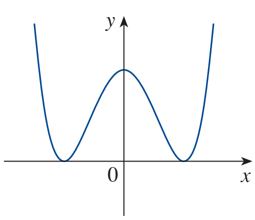
I


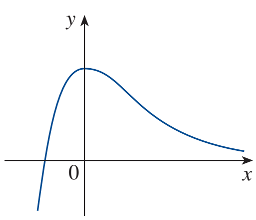
II


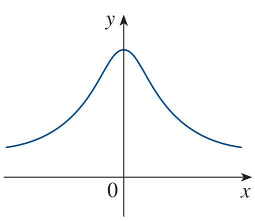
III


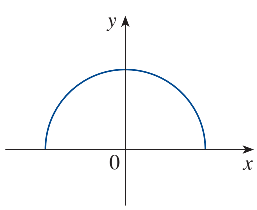
IV


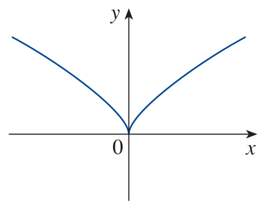
4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de esta.

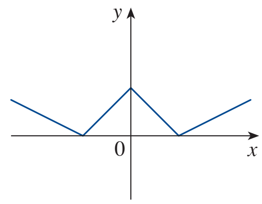
4.


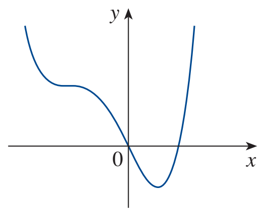
5.


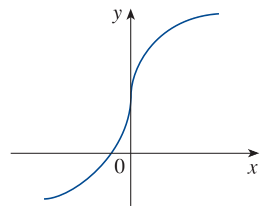
6.


7.


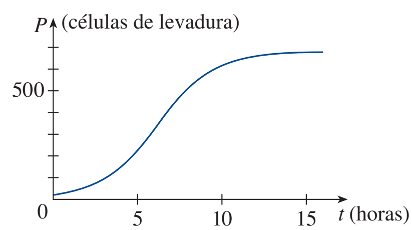
8.


9.


10.


11.


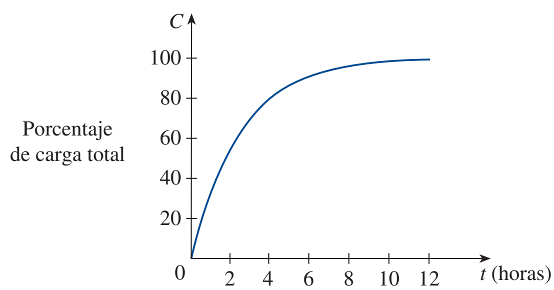
12. Se muestra la gráfica de la función población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?



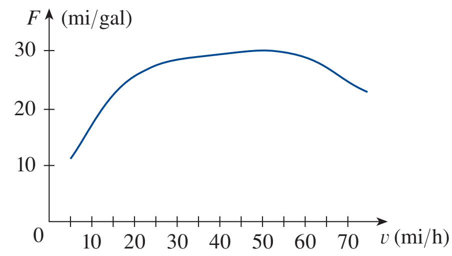
13. Una batería recargable se conecta con un cargador. La gráfica muestra $C(t)$, el porcentaje de capacidad que la batería alcanza como una función del tiempo t transcurrido (en horas).

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $C'(t)$?

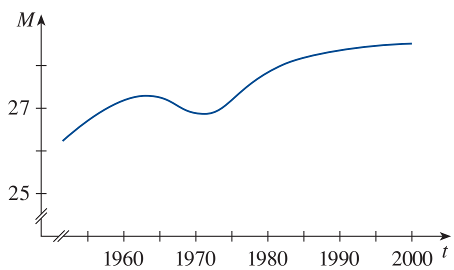
(b) Trace la gráfica de $C'(t)$. ¿Qué le indica la gráfica?



14. La gráfica (del Departamento de Energía de EE. UU.) muestra cómo afecta la rapidez de manejo el consumo de combustible. La economía F se mide en millas por galón, y la rapidez v se mide en millas por hora.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $F'(v)$?
(b) Trace la gráfica de la derivada de $F'(v)$.
(c) ¿A qué rapidez debería manejar si quiere ahorrar combustible?



15. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo XX. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



16–18 Trace una gráfica cuidadosa de f y debajo de esta la gráfica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4-11. ¿Puede intuir una fórmula para $f(x)$ a partir de su gráfica?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **17.** $f(x) = e^x$ **18.** $f(x) = \ln x$

---

19. Sea $f(x) = x^2$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(1)$ y $f'(2)$ usando un dispositivo de graficación para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Utilice la simetría para deducir los valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
(c) Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
(d) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso (c) es correcta.

20. Sea $f(x) = x^3$.
(a) Calcule los valores de $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ usando un dispositivo de graficación para hacer un acercamiento de la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
(c) Utilice los valores de los incisos (a) y (b) para trazar la gráfica de f'.
(d) Infiera una fórmula para $f'(x)$.
(e) Aplique la definición de derivada para demostrar que su propuesta del inciso (d) es correcta.

21–31 Encuentre la derivada de cada una de las funciones siguientes usando la definición de derivada. Indique los dominios de la función y de su derivada.

21. $f(x) = 3x - 8$ **22.** $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 2.5t^2 + 6t$ **24.** $f(x) = 4 + 8x - 5x^2$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **26.** $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$ **28.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$ **30.** $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

---

32. (a) Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ comenzando con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para trazar la gráfica de f'.
(c) Aplique la definición de derivada para encontrar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
(d) Utilice un dispositivo de graficación para trazar la grafica de f' y compárela con su trazo del inciso (b).

33. (a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

34. (a) Si $f(x) = x + 1/x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

35. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla da el porcentaje de desempleo en la fuerza laboral australiana medida a medio año de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8.1	2000	6.2
1996	8.0	2001	6.9
1997	8.2	2002	6.5
1998	7.9	2003	6.2
1999	6.7	2004	5.6

(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores estimados para $U'(t)$.

36. Sea $P(t)$ el porcentaje de población de Filipinas arriba de 60 años de edad en el instante t. La tabla da las proyecciones de los valores de esta función de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5.2	2010	6.7
2000	5.5	2015	7.7
2005	6.1	2020	8.9

(a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $P'(t)$.
(c) Trace la gráfica de P y P'.

37. La tabla da la altura conforme pasa el tiempo de un árbol de pino típico de madera en un sitio administrado.

Edad tres (años)	14	21	28	35	42	49
Altura (pies)	41	54	64	72	78	83

Fuente: Arkansas Forestry Commission

Si $H(t)$ es la altura del árbol después de t años, construya una tabla de valores calculados para H' y trace su gráfica.

38. La temperatura del agua afecta la tasa de crecimiento de la trucha de arroyo. La tabla muestra la cantidad de peso ganado por la trucha de arroyo después de 24 días con diferentes temperaturas del agua.

Temperatura (°C)	15.5	17.7	20.0	22.4	24.4
Peso ganado (g)	37.2	31.0	19.8	9.7	−9.8

Si $W(x)$ es la ganancia de peso a la temperatura x, construya una tabla de valores estimados de W' y trace su gráfica. ¿Cuáles son las unidades de $W'(x)$?

Fuente: Adaptado de J. Chadwick Jr., "Temperature Effects on Growth and Stress Physiology of Brook Trout: Implications for Climate Change Impacts on an Iconic Cold-Water Fish." *Masters Theses.* Paper 897. 2012. scholarworks.umass.edu/theses/897.

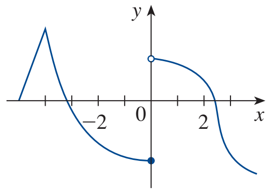
39. Sea P el porcentaje de energía eléctrica de una ciudad que se produce por paneles solares t años después del 1 de enero de 2000.
(a) ¿Qué representa dP/dt en este contexto?
(b) Interprete el enunciado

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=2} = 3.5$$

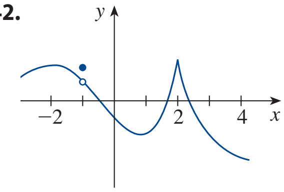
40. Suponga que N es el número de personas en Canadá que viajan en coche a otra provincia para vacacionar este año cuando el precio promedio de gasolina es de p dólares por litro. ¿Espera dN/dp sea positiva o negativa? Explique su respuesta.

41–44 Observe la gráfica de f. Indique, con razones, los números en los que f *no* es derivable.

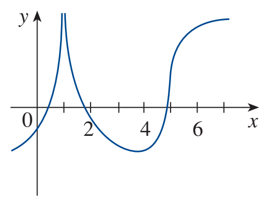
41.



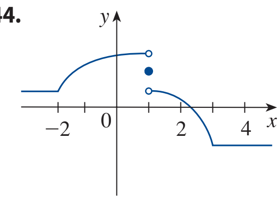
42.



43.



44.

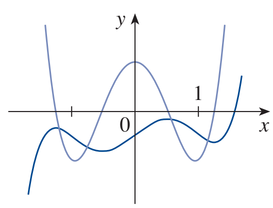


45. Trace la gráfica de la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

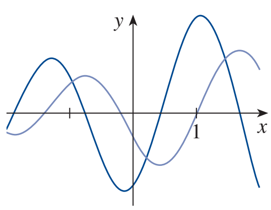
46. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ en la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Qué observa? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

47–48 Se muestran las gráficas de una función f y su derivada f'. ¿Cuál es mayor $f'(-1)$ o $f''(-1)$?

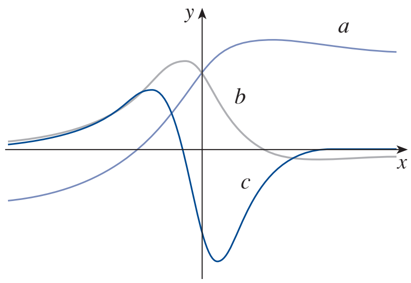
47.



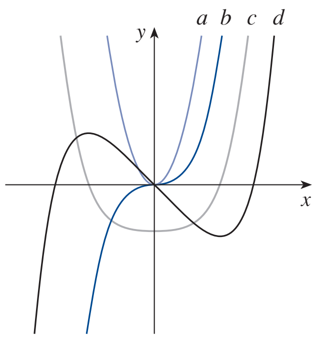
48.



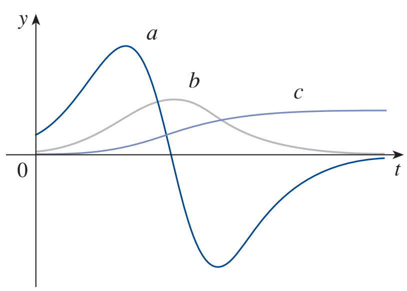
49. La figura muestra las gráficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique el porqué de su elección.



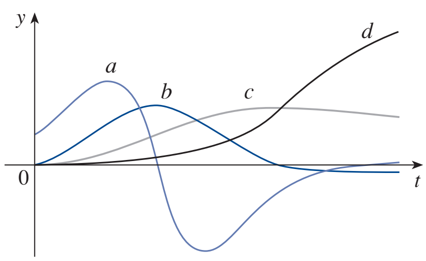
50. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



51. La figura muestra las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



52. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones. Una es la función de posición de un auto, la de velocidad, la de aceleración y la de su jerk. Identifique cada curva y explique los motivos de su elección.



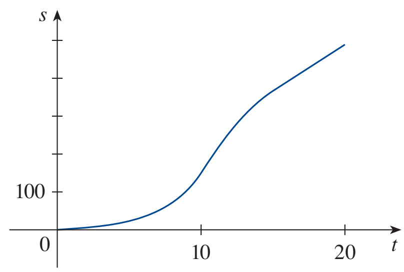
53–54 Utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ y $f''(x)$. Luego, trace la gráfica de f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son razonables.

53. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **54.** $f(x) = x^3 - 3x$

---

55. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$ encuentre $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Trace la gráfica de f, f', f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

56. (a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en metros y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuá1 es la aceleración en $t = 10$ segundos?



(b) Utilice la curva de aceleración del inciso (a) para calcular el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

57. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Si $a \neq 0$, utilice la ecuación 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.
(b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
(c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0). (Recuerde: la forma de la función de f. Véase la figura 1.2.13.)

58. (a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
(b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
(c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0).
(d) Ilustre el inciso (c) al trazar la gráfica de $y = x^{2/3}$.

59. Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

60. ¿Dónde no es derivable la función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$? Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

61. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x|x|$.
(b) ¿Para qué valores de x es f derivable?
(c) Encuentre una fórmula para f'.

62. (a) Trace la gráfica de la función $g(x) = x + |x|$.
(b) ¿Para qué valores de x es g derivable?
(c) Encuentre una fórmula para g'.

63. Recuerde que a una función f se le denomina *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio, e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Demuestre cada uno de los enunciados siguientes.
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

64. Las derivadas **por la izquierda** y **por la derecha** de f en a están definidas por

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

y $$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen. Entonces $f'(a)$ existe si y solo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Determine $f'_{-}(4)$ y $f'_{+}(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Trace la gráfica de f.
(c) ¿Dónde es discontinua f?
(d) ¿Dónde f no es derivable?

65. Nick comienza a correr y corre cada vez más rápido durante 3 minutos, luego camina durante 5 minutos. Se detiene en un cruce por 2 minutos, corre bastante rápido durante 5 minutos y camina durante 4 minutos.
(a) Trace una posible gráfica de la distancia s que Nick ha cubierto después de t minutos.
(b) Trace una gráfica de ds/dt.

66. Cuando abre el grifo del agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
(a) Trace una posible gráfica de T como función del tiempo t transcurrido desde que abrió el grifo.
(b) Describa cómo varía la razón de cambio de T con respecto a t, conforme esta aumenta.
(c) Trace la gráfica de la derivada de T.

67. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ forma con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ redondeado al grado más cercano.

2 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Explique qué significa cada uno de los enunciados siguientes e ilustre con un trazo.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$
(d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con gráficas.

3. Enuncie las leyes de los límites siguientes.
(a) Ley de la suma
(b) Ley de la diferencia
(c) Ley del múltiplo constante
(d) Ley del producto
(e) Ley del cociente
(f) Ley de la potencia
(g) Ley de la raíz

4. ¿Qué establece el teorema de la compresión?

5. (a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
(b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuáles de las curvas siguientes tienen asíntotas verticales? ¿Cuáles tienen asíntotas horizontales?
(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$ (c) $y = \tan x$
(d) $y = \tan^{-1}x$ (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) ¿Qué significa que f sea continua en a?
(b) ¿Qué significa que f sea continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de esta función?

8. (a) Dé ejemplos de funciones que sean continuas en $[-1, 1]$.
(b) Dé un ejemplo de una función que no sea continua en $[0, 1]$.

9. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?

10. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

11. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo se puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

12. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.
(a) La razón promedio de cambio de y con respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) La razón de cambio instantáneo de y con respecto a x en $x = x_1$.

13. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

14. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?