Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Factorización de Matrices

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Aprender a Factorizar una Matriz Cuadrada

- Factorización LU
- Matrices de Permutación

Factorización LU

Si la eliminación gaussiana se puede realizar en el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sin intercambios de fila, entonces la matriz A se puede factorizar en el producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U, es decir, $A = LU$, donde $m_{ji} = a_{ji}^{(i)}/a_{ii}^{(i)}$,

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(E_j - m_{j,k}E_k) \to (E_j), \quad \text{para } j = k+1, \ldots, n.$$

Factorización LU

Suponga que A se ha factorizado en la forma triangular $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior. Entonces podemos resolver para $\mathbf{x}$ con mayor facilidad a través de un proceso de dos pasos.

- Primero, hacemos $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ y resolvemos el sistema triangular superior $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ para y. Puesto que L es triangular, determinar $\mathbf{y}$ a partir de esta ecuación sólo requiere $O(n^2)$ operaciones.
- Una vez que conocemos $\mathbf{y}$, el sistema triangular superior $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ solamente requiere una operación $O(n^2)$ adicional para determinar la solución de $\mathbf{x}$.

Factorización LU

Ejemplo:

Determine la factorización LU para la matriz A en el sistema lineal

$$Ax = \mathbf{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Factorización LU

Ejemplo:

Utilice la factorización LU del ejemplo anterior para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad\quad + 3x_4 &= 8, \\
2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 7, \\
3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 14, \\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -7.
\end{aligned}
$$

Matriz de Permutación

Una **matriz $n \times n$ de permutación $P = [p_{ij}]$** es una matriz obtenida al reordenar las filas de I_n, la matriz identidad. Esto produce una matriz con precisamente una entrada diferente a cero en cada fila y en cada columna, y cada entrada diferente a cero es un 1.

Ilustración:

La matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz de permutación 3×3. Para cualquier matriz A 3×3, multiplicar a la izquierda por P tiene el efecto de intercambiar la segunda y tercera filas de A:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

De igual forma, multiplicar A a la derecha por P intercambia la segunda y tercera columnas de A. ■

Matriz de Permutación

Dos propiedades útiles de las matrices de permutación se relacionan con la eliminación gaussiana, la primera de las cuales se ilustra en el ejemplo previo. Suponga que $k_1, \ldots, k_n$ es una permutación de los enteros $1, \ldots, n$ y la matriz de permutación $P = (p_{ij})$ se define mediante

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k_i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

- PA permuta las filas de A; es decir,

$$PA = \begin{bmatrix} a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \cdots & a_{k_1 n} \\ a_{k_2 1} & a_{k_2 2} & \cdots & a_{k_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_n 1} & a_{k_n 2} & \cdots & a_{k_n n} \end{bmatrix}.$$

- P^{-1} existe y $P^{-1} = P^t$.

Matriz de Permutación

Ejemplo:

Dada la matriz A, encuentre una matriz de permutación P que produzca los intercambios de fila $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$ y $(E_2) \leftrightarrow (E_4)$ en ese orden.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriz de Permutación

Si un sistema lineal se conocen los intercambios de fila requeridos para resolver el sistema con eliminación gaussiana, es posible acomodar las ecuaciones originales en un orden que garantice que no se necesiten intercambios de fila.

Esto implica que, para una matriz no singular *A*, existe una matriz de permutación *P* para que el sistema:

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

se puede resolver sin intercambios de fila. Como consecuencia, esta matriz PA se puede factorizar en

$$PA = LU,$$

donde L es triangular inferior y U es triangular superior. Puesto que $P^{-1} = P^t$, esto produce la factorización

$$A = P^{-1}LU = (P^tL)U.$$

La matriz U sigue siendo triangular superior, pero P^tL no es triangular inferior a menos que $P = I$.

Matriz de Permutación

Ejemplo:

Determine una factorización en la forma $A = (P^t L)U$ para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$