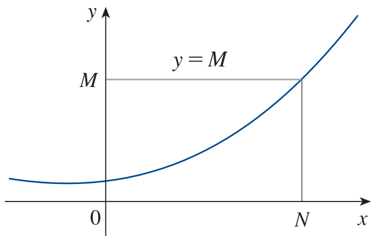


FIGURA 19
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Por último, observe que un límite infinito al infinito puede definirse como sigue. En la figura 19 se muestra una ilustración geométrica.

9 Definición de un límite infinito al infinito Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un correspondiente número positivo N tal que

$$\text{si} \quad x > N \qquad \text{entonces} \qquad f(x) > M$$

Definiciones similares se aplican cuando el símbolo ∞ se reemplaza por $-\infty$. (Véase el ejercicio 80.)

2.6 EJERCICIOS

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada uno de los límites siguientes

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. (a) ¿Puede la gráfica de $y = f(x)$ intersecar una asíntota vertical? ¿Puede intersecar una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.

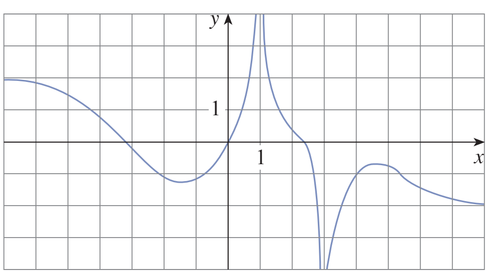
(b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas que muestren las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica está dada, determine lo siguiente:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

(e) Las ecuaciones de las asíntotas

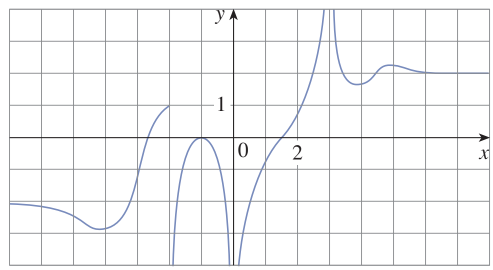


4. Para la función g cuya gráfica está dada, determine lo siguiente.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to3} g(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x)$ (f) Las ecuaciones de las asíntotas



5–10 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

5. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$

6. $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty,$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad f(0) = 0$

7. $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0,$
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty, \quad f$ es impar

9. $f(0) = 3, \quad \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 4, \quad \underset{x\to0^+}{\text{lií}}\, f(x) = 2,$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \infty,$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2, \quad f(0) = 0, \quad f$ es par

11. Conjeture el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. Después, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

12. (a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para calcular el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con una aproximación de dos cifras decimales.

(b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para calcular el límite con cuatro cifras decimales.

13–14 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 7}{5x^2 + x - 3}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{9x^3 + 8x - 4}{3 - 5x + x^3}}$

15–42 Encuentre el límite o demuestre que no existe.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x + 3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^6}}{2 - x^3}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^6}}{2 - x^3}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + 3x^2}}{4x - 1}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + 3x^2}{4x - 1}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

28. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x} + 2x\right)$

29. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

30. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

31. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

33. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x^7)$

34. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan(e^x)$

36. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

40. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

41. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\ln(1 + x^2) - \ln(1 + x)]$

42. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\ln(2 + x) - \ln(1 + x)]$

43. (a) Para $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ determine cada uno de los límites siguientes.

(i) $\lim_{x\to0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to1^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to1^+} f(x)$

(b) Utilice una tabla de valores para calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(c) Utilice la información de los incisos (a) y (b) para hacer un trazo de la gráfica de f.

44. Para $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\ln x}$ determine cada uno de los límites siguientes.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (b) $\lim_{x\to0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to1^-} f(x)$ (d) $\lim_{x\to1^+} f(x)$

(e) Utilice la información de los incisos (a)-(d) para hacer un trazo de la gráfica de f.

45. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

al trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para inferir el valor del límite.

(c) Demuestre que su estimación es correcta.

46. (a) Utilice una gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Para obtener el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con un decimal de precisión.

(b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para calcular el límite con cuatro decimales de precisión.

(c) Encuentre el valor exacto del límite.

47–52 Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo de graficación, verifique su trabajo al trazar la gráfica de la curva y determinando las asíntotas.

47. $y = \dfrac{5 + 4x}{x + 3}$

48. $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x^2 + 2x - 1}$

49. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

50. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

51. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

52. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

53. Calcule la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

al hacer gráfica de f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Después obtenga la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explica la discrepancia?

54. (a) Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Utilice la gráfica para estimar el valor de los límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calcule algunos valores de $f(x)$ y proporcione estimaciones numéricas de los límites del inciso (a).

(c) Calcule los valores exactos de los límites en el inciso (a). ¿Obtiene el mismo valor o valores diferentes de esos dos límites? [De acuerdo con su respuesta al inciso (a), tendrá que verificar su cálculo para el segundo límite.]

55. Sea P y Q polinomios. Determine

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es (a) menor que el grado de Q y (b) mayor que el grado de Q.

56. Realice un trazo de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los cinco casos siguientes:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n impar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n impar
(v) $n < 0$, n par

Luego use estos trazos para encontrar los límites siguientes.

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x \to 0^-} x^n$
(c) $\lim_{x \to \infty} x^n$ (d) $\lim_{x \to -\infty} x^n$

57. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

58. Determine una fórmula para una función que tiene asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

59. Una función f es un cociente de funciones cuadráticas y tiene una asíntota vertical $x = 4$ y una intersección con el eje x en $x = 1$. Se sabe que f tiene una discontinuidad removible en $x = -1$ y $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$. Evalúe

(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

60–64 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para trazar la gráfica como en el ejemplo 12.

60. $y = 2x^3 - x^4$

61. $y = x^4 - x^6$

62. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

63. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

64. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

65. (a) Utilice el teorema de la compresión para evaluar $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(b) Trace la gráfica de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. ¿Cuántas veces cruza la gráfica la asíntota?

66. Por el *comportamiento en los extremos* de una función se entiende una descripción de lo que sucede con sus valores $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

(a) Describa y compare el *comportamiento en los extremos* de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

al trazar la gráfica de las dos funciones en los rectángulos de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$.

(b) Se dice que dos funciones tienen el *mismo comportamiento en los extremos* si su cociente tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento final en los extremos.

67. Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

68. (a) Un depósito contiene 5000 l de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito a una rapidez de 25 l/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $x \to \infty$?

69. En el capítulo 9 se demostrará que, bajo ciertas hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t, es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad terminal* de la gota de lluvia.

(a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

(b) Trace la gráfica de $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s y $g = 9.8$ m/s². ¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance 99% de su velocidad terminal?

70. (a) Al trazar la gráfica de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.
(b) ¿Puede resolver el inciso (a) sin un dispositivo de graficación?

71. Utilice una gráfica para determinar un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

72. Para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -3$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.05$.

73. Para el límite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 3$$

ilustre la definición 8 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.05$.

74. Para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x \ln x} = \infty$$

ilustre la definición 9 mediante la determinación de un valor de N que corresponda a $M = 100$.

75. (a) ¿Qué tan grande se tiene que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?
(b) Tomando $r = 2$ en el teorema 5, se tiene el enunciado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrelo directamente utilizando la definición 7.

76. (a) ¿Qué tan grande se debe tomar x de manera que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ en el teorema 5, se tiene el enunciado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrelo directamente utilizando la definición 7.

77. Utilice la definición 8 para demostrar que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

78. Demuestre, utilizando la definición 9, que $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

79. Utilice la definición 9 para demostrar que $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$.

80. Formule una definición precisa de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Luego utilice su definición para demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

81. (a) Demuestre que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

si estos límites existen.
(b) Utilice el inciso (a) y el ejercicio 65 para encontrar

$$\lim_{x \to 0^+} x \text{ sen } \frac{1}{x}$$

2.7 Derivadas y razones de cambio

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto implican encontrar el mismo tipo de límite, como se vio en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y se puede interpretar como una razón de cambio en las ciencias naturales o sociales y en ingeniería.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y uno quiere encontrar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Luego, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces se define la *tangente t* como la recta que pasa por P con pendiente m.