EJERCICIOS DE EXAMEN

2014 - 2015

1. Determine si existe el límite de las siguientes funciones e indique su valor:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x-4}{\sqrt{x+2}-2} \qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\ln(x^2-1)} \qquad d)\ \lim_{x\to 1}\frac{1+x^{\frac{1}{x-1}}}{x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-1)}{x^2-2x+1} \qquad f)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4} \qquad g)\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3-1}{x^3+1} \qquad h)\ \lim_{x\to -1^-}\frac{x^3-1}{x^3+1}$$

2. Calcule f'(x) y f''(x) de las siguientes funciones:

$$a)\ y=\frac{2x}{1-x^3} \qquad b)\ y=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3\sqrt[2]{x}}}$$

$$c)\ y=\frac{1+x^2}{x^4}\sqrt{x^3}+\ln\frac{1+\sqrt{x^3}}{x} \qquad d)\ y=\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$$

$$e)\ y=\ln\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}} \qquad f)\ y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$$

3. De la función $f(x)=\frac{x^2}{\ln x^2}$
   a) Determine los extremos locales e indique si es un máximo o un mínimo en cada caso
   b) Encuentre, si existen, los puntos de inflexión de la función
   c) Encuentre las asíntotas de la función
   d) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función f(x) en los puntos x = - 2 y x = 2

4. Determine si existe el límite de las siguientes funciones e indique su valor:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\sqrt{x+2}-2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{\ln(x^2-1)} \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1+x^{\frac{1}{x-1}}}{x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-1)}{x^2-2x+1} \qquad f)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4} \qquad g)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+1}{x^3-1} \qquad h)\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+1}{x^3-1}$$

5. Calcule f'(x) y f''(x) de las siguientes funciones:

$$a)\ \mathrm{y} = \frac{2x}{1-x^2} \qquad b)\ y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}}$$

$$c)\ \mathrm{y} = \frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2} + 3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad d)\ y = \sqrt{x+1} - \ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$$

$$e)\ y = \ln\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}} \qquad f)\ y = \arctan e^x - \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$$

6. De la función $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$

   a) Determine los extremos locales e indique si es un máximo o un mínimo en cada caso
   b) Obtenga los puntos de inflexión de la función
   c) Encuentre las asíntotas de la función
   d) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función f(x) en los puntos x = - 2 y x = 1

7. Encuentre la familia de primitivas de las siguientes funciones:

$$a)\int \frac{2x-4}{\sqrt{x+2}}dx \qquad b)\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad c)\int \sqrt[4]{x^3}\ln(2x)\,dx \qquad d)\int \operatorname{arcsen} 2x\,dx$$

$$e)\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx \qquad f)\int \frac{xe^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad g)\int e^{2\mathrm{x}}\operatorname{sen} 3x\,dx \qquad h)\int x\ln^2(x)\,dx$$

8. Resuelva las siguientes integrales definidas:

$$a)\int_0^{\pi} e^x\operatorname{sen} x\,dx \qquad b)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$c)\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^3)^2}dx \qquad d)\int_0^1 \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}dx$$

9. Dada la función de demanda $d(x) = 799 - 0.01x^2$

   a) Determine el Superávit de los consumidores una vez se hayan vendido 100 productos.

b) Si se conoce que la función oferta es $p(x) = 50\sqrt{x}$, Determine el Superávit de los Consumidores y el Superávit de los Productores.[1]

10. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$;

a) Determine su dominio

b) Encuentre todas sus asíntotas

c) Determine los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales.

d) Determine los puntos de inflexión.

e) Esboce la gráfica de la función.

11. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ a & \mathrm{x} = 0 \\ -e^{x^2} + b & x > 0 \end{cases}$;

a) Encuentre los valores de a y b de forma tal que la función sea continua.

b) Analice si la función es derivable en x = 0.

c) Analice si la función f(x) presenta algún extremo local en el intervalo [-1, 1].

12. Dada la ecuación general de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, demuestre, aplicando los conceptos de integral definida, que el área de una región con frontera elíptica es:

$$A = \pi ab.$$

13. Dada la función $f(x) = -\frac{x^4}{x^3+1}$;

a) Determine su dominio.

b) Encuentre todas sus asíntotas.

c) Determine los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales.

d) Determine los puntos de inflexión.

e) Esboce la gráfica de la función.

---

[1] Los ejercicios del 1 al 9 del curso 2014 – 2015 fueron de examen de laboratorio con Geogebra

14. Utilizando los conceptos de integral definida, demuestre que el área del círculo delimitado por una circunferencia de radio r es: $A_C = \pi r^2$

2015 - 2016

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{1}{e} & x < -1 \\ (x-a)^2 + b & -1 \leq x \leq 1 \\ e^x - e & x > 1 \end{cases}$;

   a) Calcule los valores de a y b para que f(x) sea continua en -1 y 1.

   b) Analice, si la función f(x) es derivable en x = -1 y x = 1.

   c) Se puede aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo [-1, 1]. En caso afirmativo determine el punto donde se anula la derivada.

   d) Utilice el teorema de Lagrange para calcular de forma aproximada f(2).

2. Dada la función $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-1} & x \leq 0 \\ \ln(x^2+1) & x > 0 \end{cases}$;

   a) Determine su dominio.

   b) Encuentre todas sus asíntotas.

   c) Determine los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales.

   d) Determine los puntos de inflexión.

   e) Esboce la gráfica de la función.

3. Esboce la gráfica de una función que tenga un máximo local en 0 y no sea derivable en 0.

4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ a & \mathrm{x} = 0 \\ -e^{x^2} + b & x > 0 \end{cases}$;

   a) Encuentre los valores de a y b de forma tal que la función sea continua.

   b) Analice si la función es derivable en x = 0.

   c) Analice si la función f(x) presenta algún extremo local en el intervalo [-1, 1].

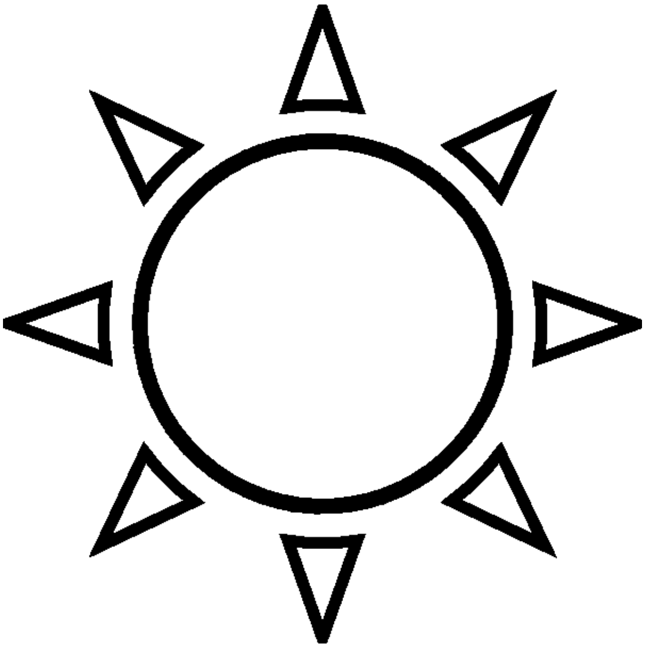
5. Si conoce que la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$,

   a) Determine, aplicando los conceptos de la integral definida, el volumen de nieve necesario para construir el muñeco de la figura, considerando que, antes de deformarse por su propio peso, se emplearon tres bolas esféricas de nieve para construirlo. La esfera de la base tiene un radio de 40 cm, la esfera del tronco tiene un radio de 30 cm y la esfera de la cabeza tiene un radio de 20 cm.

   b) Si la proyección de la sombra de una esfera iluminada sobre el suelo es una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, deduzca, aplicando los conceptos de la integral definida, la fórmula para calcular el área de la región elíptica delimitada por la elipse.

6. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$; Esboce la gráfica de la función aplicando para ello el procedimiento necesario (dominio, intersecciones, simetría, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales, puntos de inflexión).

7. Demuestre, aplicando los conceptos de integral definida, que el área de una circunferencia es $A = \pi r^2$ y el área de un triángulo es $A = \frac{bh}{2}$ y utilícelas para calcular el área del sol de la figura si se conoce que el radio del sol es de 3 cm, la base de los triángulos es de 1,0 cm y la altura de los triángulos es de 1,5 cm.



2016 – 2017

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x^4} & x \neq [-1; 1] \end{cases}$;

   a) Determine el dominio de la función.

   b) Analice, si la función f(x) es derivable en x = -1 y x = 1.

   c) Se puede aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo [-1, 1].

   d) Encuentre todas las asíntotas de f(x).

   e) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos locales de f(x).

   f) Encuentre los puntos de inflexión de f(x).

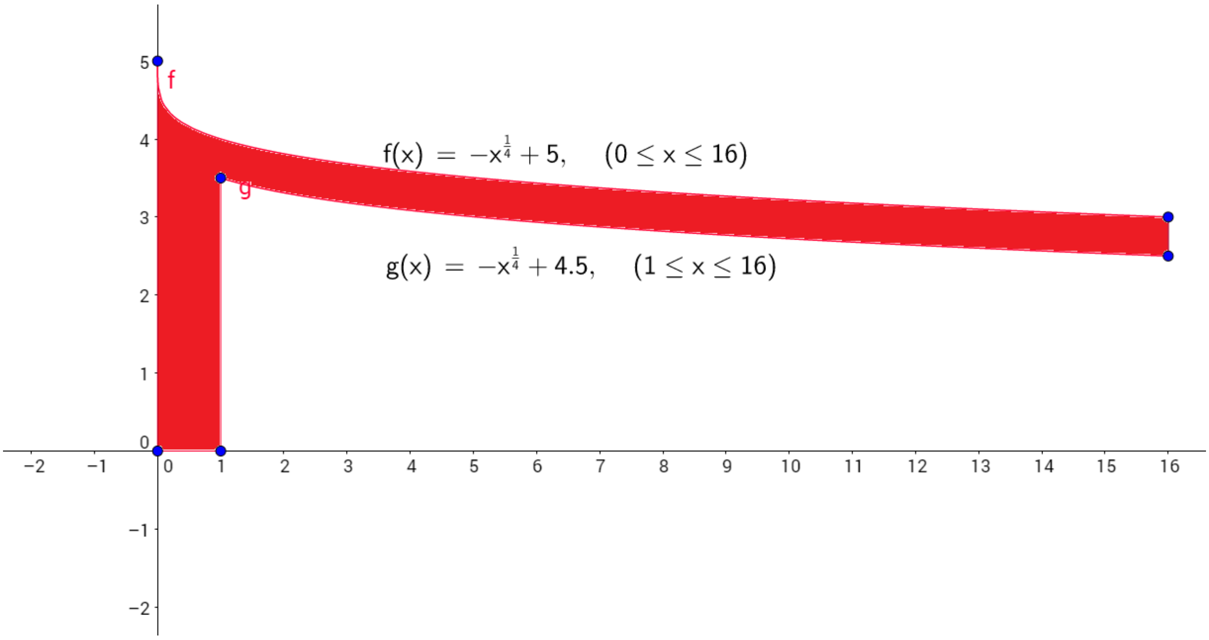
   g) Esboce la gráfica de la función f(x).

2. Se ha obtenido un jarrón de vidrio mediante revolución, alrededor del eje “x”, de la sección que se muestra en la figura a continuación. Si se conocen que las ecuaciones que delimitan la sección son:

Ecuación de la Pared exterior de la sección:	$y = -\sqrt[4]{x} + 5$	$0 \leq x \leq 16$
Ecuación de la Pared interior de la sección:	$y = -\sqrt[4]{x} + 4,5$	$1 \leq x \leq 16$
Ecuación del Fondo exterior de la sección:	$x = 0$	
Ecuación del Fondo interior de la sección:	$x = 1$	
Ecuación del Borde de la sección:	$x = 16$	

a) Determine el área de la sección de vidrio

b) Calcule el volumen de vidrio necesario para fabricar el jarrón.



3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^3}{x^2-1} & x \neq [-1; 1] \end{cases}$;

a) Determine el dominio de la función.

b) Analice, si la función f(x) es derivable en x = -1 y x = 1.

c) Se puede aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo [-1, 1].

d) Encuentre todas las asíntotas de f(x).

e) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos locales de f(x).

f) Encuentre los puntos de inflexión de f(x).

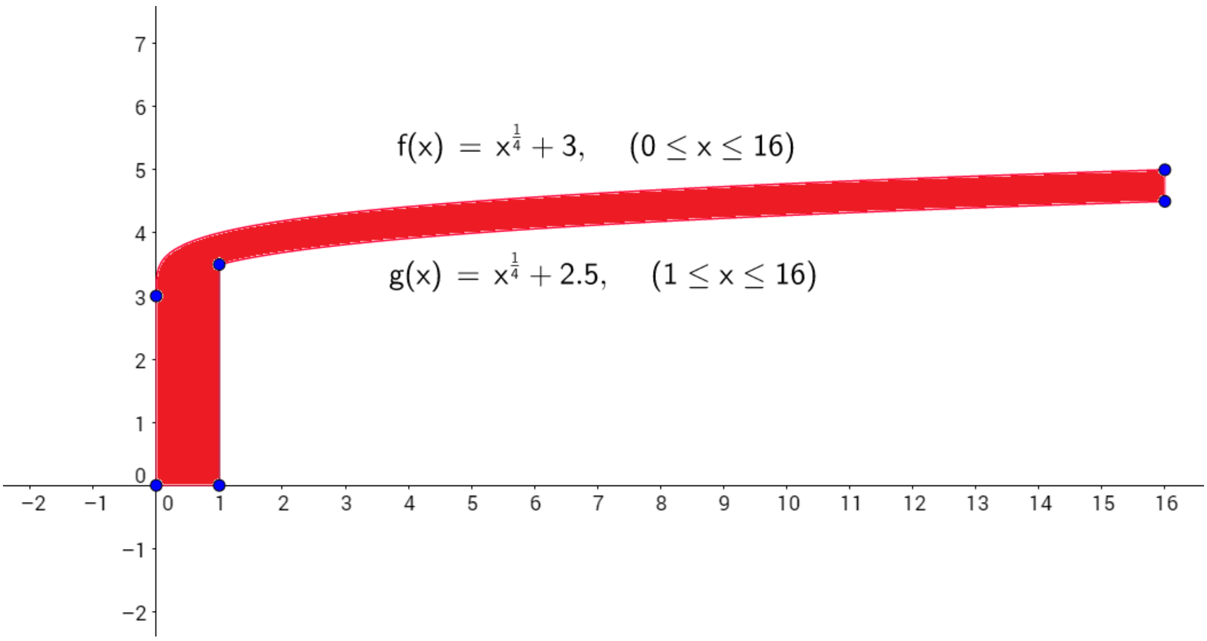
g) Esboce la gráfica de la función f(x).

4. Se ha obtenido un vaso de vidrio mediante revolución, alrededor del eje “x”, de la sección que se muestra en la figura a continuación. Si se conocen que las ecuaciones que delimitan la sección son:

Ecuación de la Pared exterior de la sección:	$y = \sqrt[4]{x} + 3$	$0 \leq x \leq 16$
Ecuación de la Pared interior de la sección:	$y = \sqrt[4]{x} + 2,5$	$1 \leq x \leq 16$
Ecuación del Fondo exterior de la sección:	$x = 0$	
Ecuación del Fondo interior de la sección:	$x = 1$	
Ecuación del Borde de la sección:	$x = 16$	

a) Determine el área de la sección de vidrio

b) Si llenamos el vaso de agua hasta el borde: Calcule el volumen de agua contenida en el interior del vaso.



5. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x^4} & x \neq [-1;1] \end{cases}$; cuya gráfica se muestra a continuación:

a) Determine el dominio de la función.

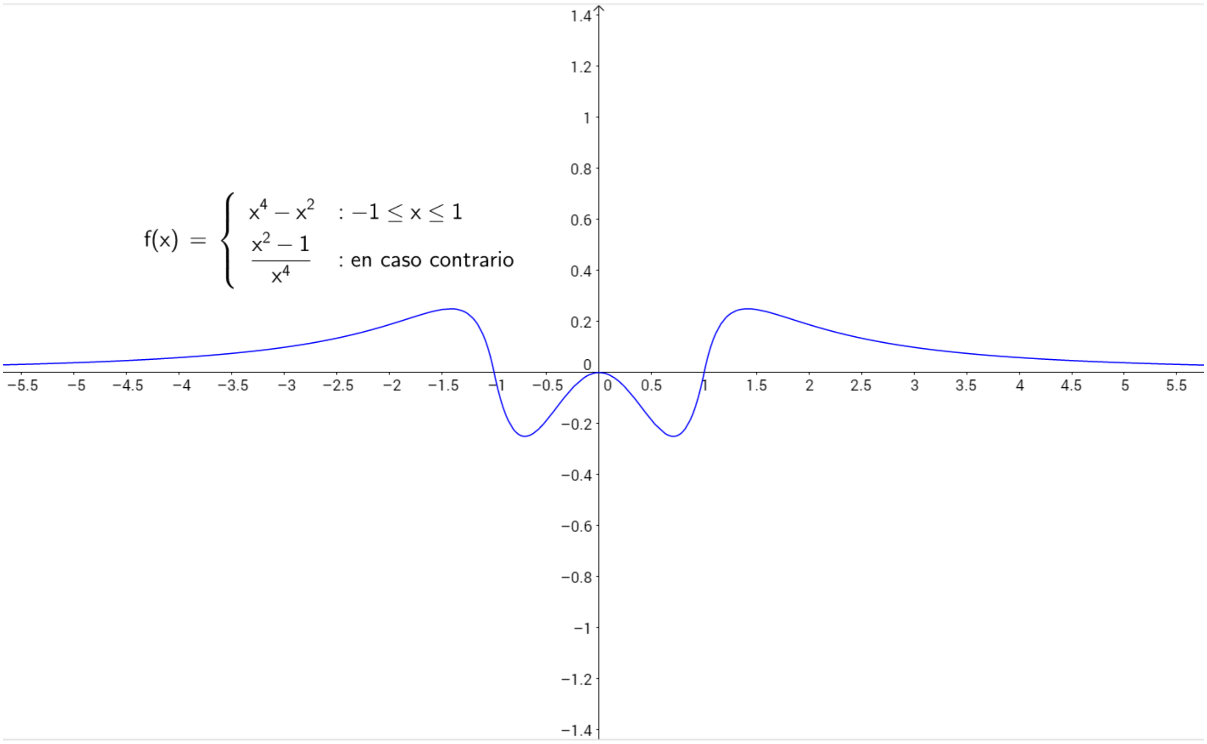
b) Analice, si la función f(x) es derivable en x = -1 y x = 1.

c) Se puede aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo [-1, 1].

d) Encuentre todas las asíntotas de f(x).

e) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos locales de f(x).

f) Encuentre los puntos de inflexión de f(x).



6. Dadas las funciones:

Función de demanda: $y = \sqrt{1000^2 - x^2}$

Función de oferta: $y = 0{,}5x + 200$

a) Calcule el Superávit de los Consumidores y de los Productores en el precio de equilibrio de mercado.

b) Calcule el Superávit de los consumidores tras la venta de 400 unidades. (Nota: Calcule el precio redondeando al céntimo más cercano).

7. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{x^2-1} & x \neq [-1; 1] \end{cases}$; cuya gráfica se muestra a continuación:

a) Determine el dominio de la función.

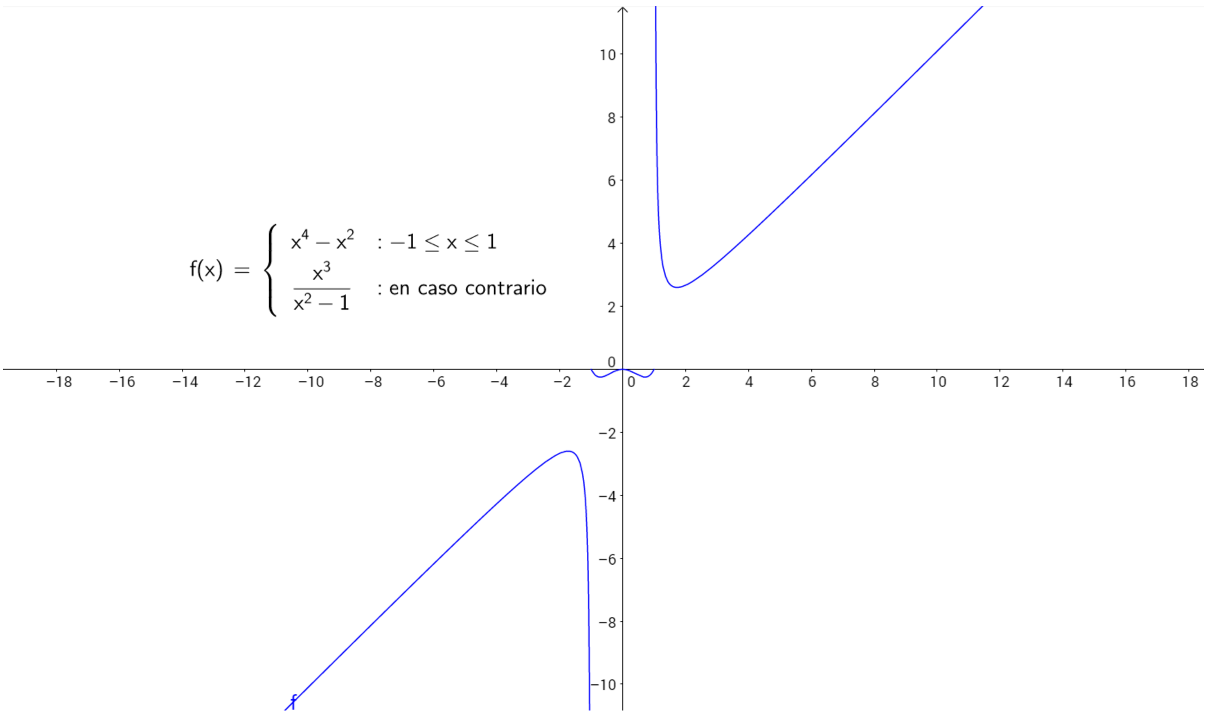
b) Analice, si la función f(x) es derivable en x = -1 y x = 1.

c) Se puede aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo [-1, 1].

d) Encuentre todas las asíntotas de f(x).

e) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos locales de f(x).

f) Encuentre los puntos de inflexión de f(x).



8. Dadas las funciones:

   Función de demanda: $y = \sqrt{1000^2 - x^2}$

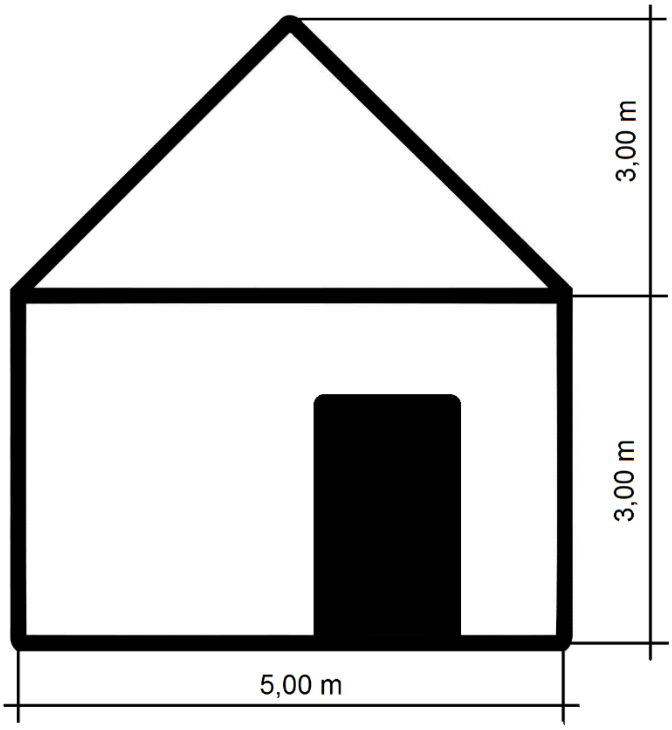
   Función de oferta: $y = x + 200$

   a) Calcule el Superávit de los Consumidores y de los Productores en el precio de equilibrio de mercado.

   b) Calcule el Superávit de los consumidores tras la venta de 500 unidades. (Nota: Calcule el precio redondeando al céntimo más cercano).

9. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$; Esboce la gráfica de la función aplicando para ello el procedimiento necesario (dominio, intersecciones, simetría, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales, puntos de inflexión).

10. Demuestre, aplicando los conceptos de integral definida, que el área de un rectángulo es $A = bh$ y el área de un triángulo es $A = \frac{bh}{2}$ y utilícelas para calcular el área frontal de la casita de la figura. Nota (No tenga la puerta en consideración)



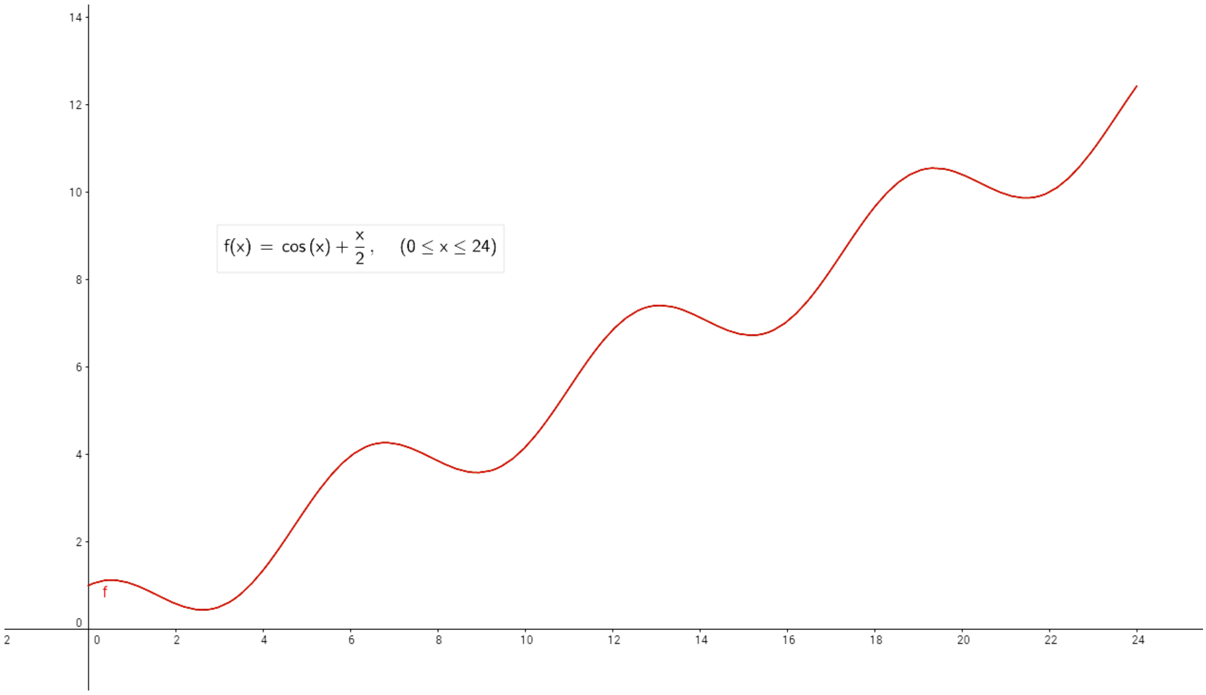
11. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 + 2x & x < 2 \\ x^3 - Cx & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de C para que la función sea continua en $x = 2$

b) Analice si la función es derivable en $x = 2$

12. Dada la función $f(x) = \cos(x) + \frac{x}{2}\ ; 0 \leq x \leq 24$, que representa la previsión de ventas (en miles de unidades) de una tienda online durante los próximos 24 meses, determine aplicando los conocimientos de derivadas:



a) Todos los instantes de tiempo donde se prevea que las ventas alcanzarán máximos

13. Si conoce que el área bajo la función de previsión de venta del ejercicio anterior representa el número de artículos vendidos, calcule:

a) El número total de artículos previstos a ser vendidos durante los 24 meses

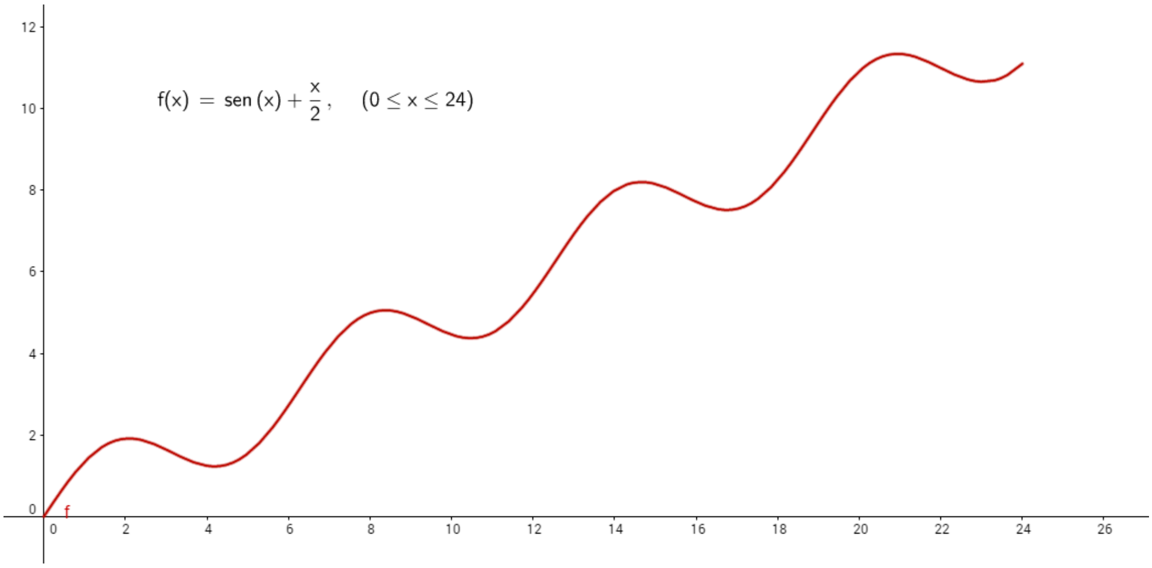
b) El número total de artículos previstos a ser vendidos entre los meses 9 y 18.

14. Dada la función $f(x) = \text{sen}(x) + \frac{x}{2}\ ; 0 \leq x \leq 24$, que representa la previsión de producción (en miles de unidades) de una empresa para los próximos 24 meses y cuya gráfica se presenta a continuación, determine aplicando los conocimientos de derivadas:

a) Todos los instantes de tiempo donde la producción alcanza máximos

b) Todos los instantes de tiempo donde la producción alcanza mínimos

c) Todos los puntos de inflexión



15. Dada la función de demanda $f_D(x) = -x^{\frac{1}{3}} + 50$, y la función de oferta $f_O(x) = x^{\frac{1}{3}}$

a) Determine, el superávit de consumidores y productores en el precio de equilibrio de mercado

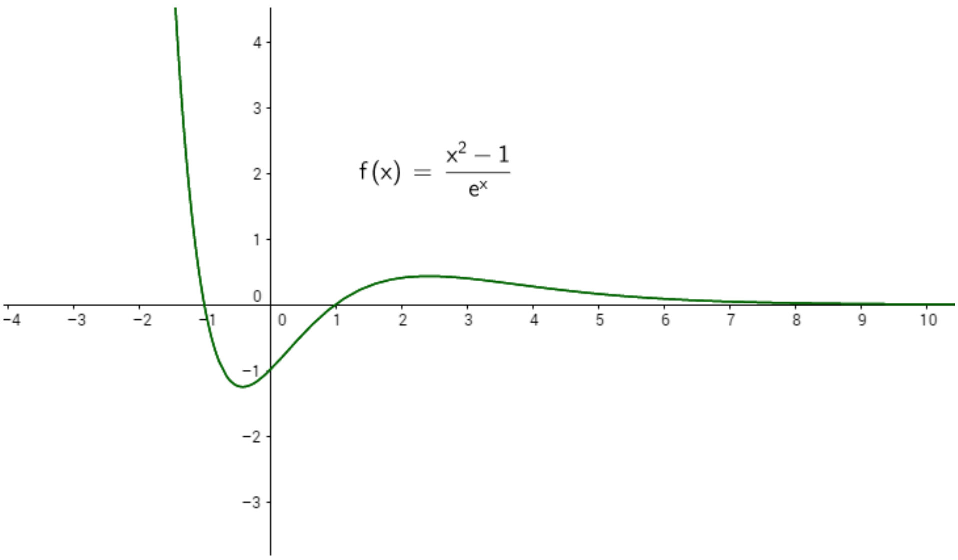
b) Determine el superávit de los consumidores tras la venta de 1000 unidades.

16. Dada la función $f(x) = \frac{x^2-1}{e^x}$, determine aplicando los conocimientos de derivadas:

a) El y/o máximos de la función

b) El y/o mínimos de la función

c) Todos los puntos de inflexión



17. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ a & \mathrm{x} = 0 \\ -e^{x^2} + b & x > 0 \end{cases}$;

a) Encuentre los valores de a y b de forma tal que la función sea continua.

b) Analice si la función es derivable en x = 0.

18. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1; & x < 0 \\ e^x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$$

a) Analice si la función f(x) es continua en $x = 0$ y $x = 1$

b) Analice si la función es derivable en $x = 0$ y $x = 1$

c) Esboce la gráfica de f(x)

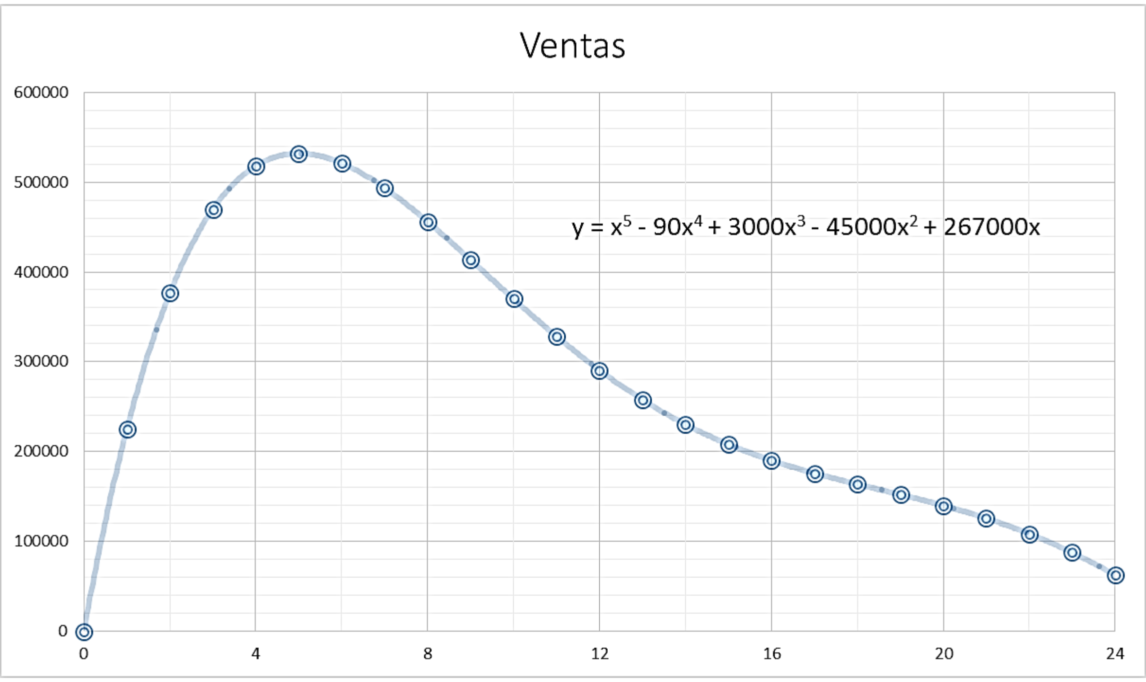
19. La función:

$$f(x) = x^5 - 90x^4 + 3000x^3 - 45000x^2 + 267000\mathrm{x}\,; 0 \leq \mathrm{x} \leq 24$$

Representa el número de teléfonos móviles vendidos de un determinado modelo durante los 24 meses que el producto estuvo en el mercado y cuya gráfica se presenta a continuación. Determine aplicando los conocimientos de derivadas:

a) El instante de tiempo donde el número de ventas es máximo

b) Los puntos de inflexión en las ventas



20. Si conoce que el área bajo la función de venta del ejercicio anterior representa el número de móviles vendidos, calcule:

 a) El número total de móviles vendidos durante los 24 meses

 b) El número total de móviles vendidos en el último año (entre los meses 12 y 24).

 c) ¿Cuántas unidades se vendieron de más en el primer año en relación al segundo

21. Dada la función de demanda $f_D(x) = -x^{\frac{1}{3}} + 50$, y la función de oferta $f_O(x) = x^{\frac{1}{3}}$

 a) Determine, el superávit de consumidores y productores en el precio de equilibrio de mercado

 b) Determine el superávit de los consumidores tras la venta de 1000 unidades.