Producto Escalar:

Ejercicio 1

Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$

a) Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ sean perpendiculares.

b) Para m=2, halla el ángulo que forman b y c.

a) $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b} = m(1, -1, 0) - (0, 1, -1) = (m, -m-1, 1)$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \to \vec{a} \cdot \vec{c} = (1, -1, 0) \cdot (m, -m-1, 1) = m + m + 1 = 2m + 1 = 0 \quad \to \quad m = -\frac{1}{2}$$

b) Para $m = 2$, queda $\vec{c}(2, -3, 1)$. Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$, tenemos que:

$$cos\ \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{28}} \approx 0{,}76 \quad \to \quad \alpha = 139^\circ\ 27'\ 51''$$

Ejercicio 2

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ i j sea perpendicular a b y tenga el mismo módulo que a.

$\vec{a}(2, -1, 0) \qquad \vec{b}(1, 2, -1) \qquad \vec{c}(x, y, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c} \perp \vec{b} \quad \to \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \quad \to \quad x + 2y = 0 \\ |\vec{c}| = |\vec{a}| \quad \to \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \quad \to \quad x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2y \\ 4y^2 + y^2 = 5 \end{array}$$

$$5y^2 = 5 \quad \to \quad y^2 = 1 \quad \to \quad \begin{cases} y = -1 \quad \to \quad x = 2 \\ y = 1 \quad \to \quad x = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $x = 2$, $y = -1$, que corresponde a $\vec{c}(2, -1, 0)$.
- $x = -2$, $y = 1$, que corresponde a $\vec{c}(-2, 1, 0)$.

Ejercicio 3

Sean u y v dos vectores que forman un ángulo de 45º y que tienen el mismo módulo, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.

a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u}+\vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u}-\vec{v}$?

b) Demuestra que u+v y u-v son perpendiculares.

a) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|^2+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\left|\vec{v}\right|^2=$

$$=4+2\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)+4=4+8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+4=8+4\sqrt{2}\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{8+4\sqrt{2}}\approx 3{,}70$$

$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left|\vec{u}\right|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left|\vec{v}\right|^2=4-2\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos 45^\circ+4=8-4\sqrt{2}$$

$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\sqrt{8-4\sqrt{2}}\approx 1{,}53$$

b) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2=4-4=0$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\perp\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$$

Ejercicio 4

Dados dos vectores $\vec{u}(1,0,0)$ y $\vec{v}(1,1,0)$

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, así como el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Encuentra un vector (x, y, z) $\neq (0,0,0)$, que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que sea perpendicular a (1, 0, 0).

a) *Proyección de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\rightarrow\quad\alpha=45^\circ$$

b) Un vector que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de la forma $a\vec{u}+b\vec{v}$, es decir:

$$a\vec{u}+b\vec{v}=a(1,0,0)+b(1,1,0)=(a+b,\ b,\ 0)$$

Para que sea perpendicular a (1, 0, 0), su producto escalar ha de ser cero:

$(a+b,\ \ b,\ \ 0)\cdot(1,0,0)=0 \quad\rightarrow\quad a+b=0 \quad\rightarrow\quad b=-a$

Por tanto, cualquier vector de la forma:

$(0,\ b,\ 0)$, con $b\neq 0$ cumple las condiciones exigidas.

<u>Ejercicio 5</u>

Dados dos vectores $\vec{u}(2,-1,3), \vec{v}(4,2,-2)$ y $\vec{w}(1,2,x)$

a) Halla $|\vec{u}|=|\vec{v}|$ y el ángulo que forma u y v.

b) Obtén el valor de x para que $|\vec{u}|$ y $|\vec{w}|$ formen un ángulo de 60º.

a) $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}\approx 3{,}74$

$|\vec{v}|=\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{24}\approx 4{,}90$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{8-2-6}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=0 \quad\rightarrow\quad \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares, es decir, } \alpha=90^\circ.$$

b) Ha de cumplirse que:

$$\cos 60^\circ=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}, \text{ es decir:}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2-2+3x}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5+x^2}} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{3x}{\sqrt{70+14x^2}}$$

$$\sqrt{70+14x^2}=6x \quad\rightarrow\quad 70+14x^2=36x^2 \quad\rightarrow\quad 70=22x^2$$

$$x^2=\frac{70}{22}=\frac{35}{11}\begin{cases} x=-\sqrt{\dfrac{35}{11}} & \text{(no vale, pues } \vec{u}\cdot\vec{v}=3x>0\text{)} \\[2ex] x=\sqrt{\dfrac{35}{11}} \end{cases}$$

Producto Vectorial

Ejercicio 1

Dados dos vectores $\vec{u}(1,3,0)$ y $\vec{v}(2,1,1)$

a) **Halla un vector, w, de módulo 1, que sea perpendicula a $|\vec{u}|$ y a $|\vec{v}|$**

b) **¿Cuál es el área del paralelogramo deerminado por $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$?**

a) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 3, 0) \times (2, 1, 1) = (3, -1, -5)$$

Dividimos por su módulo para conseguir que tenga módulo 1:

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}} \right)$$

Hay dos soluciones: $\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}} \right)$ y $\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right)$

b) $\text{Área} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{35} \approx 5{,}92 \text{ u}^2$

Ejercicio 2

Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ y $|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|$, siendo: u(2,-1,1), v(0,1,-1) y w(1,0,1)

- Calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$:

$$\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v} = (0, 2, 2)$$

$$\vec{b} = \vec{u} \times \vec{w} = (-1, -1, 1)$$

- El área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual al módulo de su producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 2, 2) \times (-1, -1, 1) = (4, -2, 2)$$

$$\text{Área} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} \approx 4{,}90 \text{ u}^2$$

Ejercicio 3

a) **Halla un vector unitario que sea perpendicular a (3,-1-1) y a (1, -2- 0).**

b) **¿Es cierto que (u·v)3W = u·(v·w)? Pon un ejemplo.**

a) Un vector perpendicular a los dos dados es:

$(3, -1, 1) \times (1, -2, 0) = (2, 1, -5)$

Dividiendo por su módulo, tendrá módulo 1:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$$

También cumple las condiciones su opuesto:

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

b) En general, no es cierto. Por ejemplo:

$\vec{u} = (1, 0, 0) \qquad \vec{v} = (1, 0, 0) \qquad \vec{w} = (0, 1, 0)$

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0} \times \vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)\end{array}\right\}$$

Por tanto, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Ejercicio 4

a) **Demuestra que, si $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que: (u-v)·(u+v) = 2(u·v)**

b) **halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2,-1,1)$ y a $\vec{v}(3,0,-1)$**

a) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} \overset{(*)}{=} \vec{0} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{0} = 2(\vec{u} \times \vec{v})$

$(*)$ Tenemos en cuenta que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ y que $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

b) $u \times v = (2, -1, 1) \times (3, 0, -1) = (1, 5, 3)$

Ejercicio 5

Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por u(2,0,1) y v (0,m,1) sea 2.

- El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a $|\vec{u}\times\vec{v}|$.

- Calculamos $\vec{u}\times\vec{v}$ y hallamos su módulo:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (2,\ 0,\ 1)\times(0,\ m,\ 1) = (-m,\ -2,\ 2m)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(-m)^2+(-2)^2+(2m)^2} = \sqrt{m^2+4+4m^2} = \sqrt{5m^2+4}$$

- Igualamos a 2:

$$\acute{A}rea = \sqrt{5m^2+4} = 2 \quad\rightarrow\quad 5m^2+4=4 \quad\rightarrow\quad 5m^2=0 \quad\rightarrow\quad m=0$$

Producto mixto

Ejercicio 1

a) **Demuestra que los vecotres $\vec{u}(k,-3,2)$ y $\vec{v}(k,3,2)$ y $\vec{w}(1,0,0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k.**

b) **¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$??**

a) Tenemos que probar que su producto mixto es distinto de cero, sea cual sea el valor de k.

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ k & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \text{ para todo } k.$$

b) El volumen es igual al valor absoluto de su producto mixto. Por tanto:

$$Volumen = 12\ \text{u}^3$$

Ejercicio 2

a) **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}(2,-1,1), \vec{v}(3,0,-2)$ y $\vec{w}(2,-3,0)$.**

b) **¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?** $[2u, v, w]$; $[u, v, u+v]$

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -17 \rightarrow \mathit{Volumen} = 17\ u^3$$

b) Utilizando las propiedades de los determinantes, tenemos que:

$$[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2 \cdot (-17) = -34$$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}] = 0$ (el tercer vector depende linealmente de los dos primeros).

Ejercicio 3

a) **Halla los valores de m para que los vectores** $\vec{u}(0,1,1), \vec{v}(-2,0,1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.

b) **Estudia si el vector (2,1,0) depende linealmente de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ $\boldsymbol{para\ el\ caso\ m = 3}$.**

a) Para que sean linealmente independientes, su producto mixto debe ser distinto de cero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4$$

Ha de ser $m = 4$.

b) Para $m = 3$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, y forman una base de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, en particular (2, 1, 0), depende linealmente de ellos.

Ejercicio 4

Dados los vectores $\vec{u}(1,2,3), \vec{v}(1,1,1)$ y $\vec{w}(1,\lambda,5)$; halla el valor de λ para que:

a) **Determinen un paralelepípedo de volumen 10**

b) **Sean linealmente dependientes**

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$$

$$Volumen = |2\lambda - 6| = 10 \quad \begin{cases} 2\lambda - 6 = 10 & \rightarrow \quad 2\lambda = 16 & \rightarrow \quad \lambda = 8 \\ 2\lambda - 6 = -10 & \rightarrow \quad 2\lambda = -4 & \rightarrow \quad \lambda = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones : $\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -2$

b) Su producto mixto ha de ser cero:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = 2\lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 3$$

Ejercicio 5

Dados los vectores $\vec{u}(1,0,-1), \vec{v}(0,2,-1)$ y $\vec{w}(2,-2,1) sepide$:

El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.

Halla, si existe, el valor de α para que el vector $(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

a) Es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \rightarrow \quad Volumen = 4\ u^3$$

b) Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ han de ser linealmente dependientes ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes); por tanto, su producto mixto ha de ser cero:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = 3\alpha - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 4$$