Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

# MATEMÁTICAS

## Límites de Funciones Reales I

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

# Objetivo



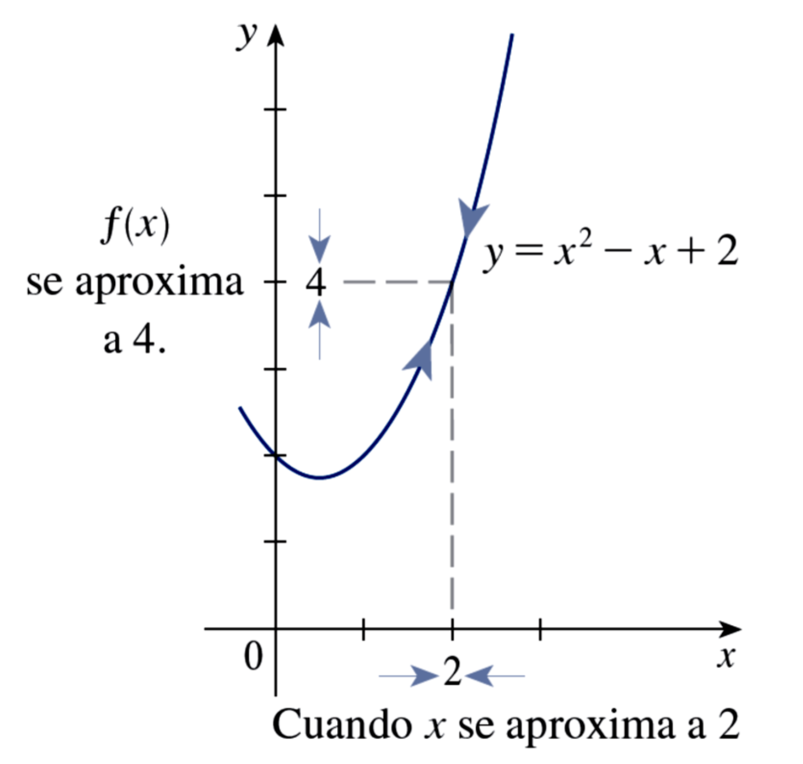
Iniciar el estudio de los Límites de funciones reales de una variable

- Definición intuitiva de límite
- Límites laterales
- Límites Infinitos
- Leyes de los Límites

# Definición Intuitiva de Límite



Investigue el comportamiento de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos a 2.




| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1.0 | 2.000000 | 3.0 | 8.000000 |
| 1.5 | 2.750000 | 2.5 | 5.750000 |
| 1.8 | 3.440000 | 2.2 | 4.640000 |
| 1.9 | 3.710000 | 2.1 | 4.310000 |
| 1.95 | 3.852500 | 2.05 | 4.152500 |
| 1.99 | 3.970100 | 2.01 | 4.030100 |
| 1.995 | 3.985025 | 2.005 | 4.015025 |
| 1.999 | 3.997001 | 2.001 | 4.003001 |

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

# Definición Intuitiva de Límite



**1 Definición intuitiva de un límite** Suponga que $f(x)$ está definida cuando $x$ está cerca del número $a$. (Esto significa que $f$ está definida en algún intervalo abierto que contiene a $a$, excepto posiblemente en $a$ misma.) Entonces se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se dice que "el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $a$, es igual a $L$"

si se puede hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a $L$ (tan cercanos a $L$ como se quiera), tomando valores de $x$ suficientemente cerca de $a$ (por ambos lados de $a$), pero no iguales a $a$.

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a $L$ cuando $x$ tiende a $a$".

# Definición Intuitiva de Límite

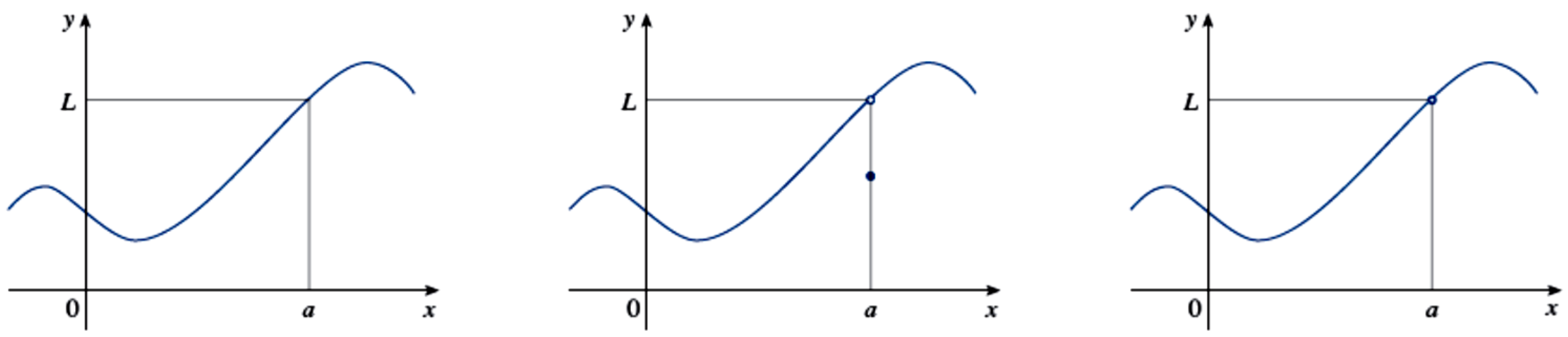


**1 Definición intuitiva de un límite** Suponga que $f(x)$ está definida cuando $x$ está cerca del número $a$. (Esto significa que $f$ está definida en algún intervalo abierto que contiene a $a$, excepto posiblemente en $a$ misma.) Entonces se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se dice que "el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $a$, es igual a $L$"

si se puede hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a $L$ (tan cercanos a $L$ como se quiera), tomando valores de $x$ suficientemente cerca de $a$ (por ambos lados de $a$), pero no iguales a $a$.



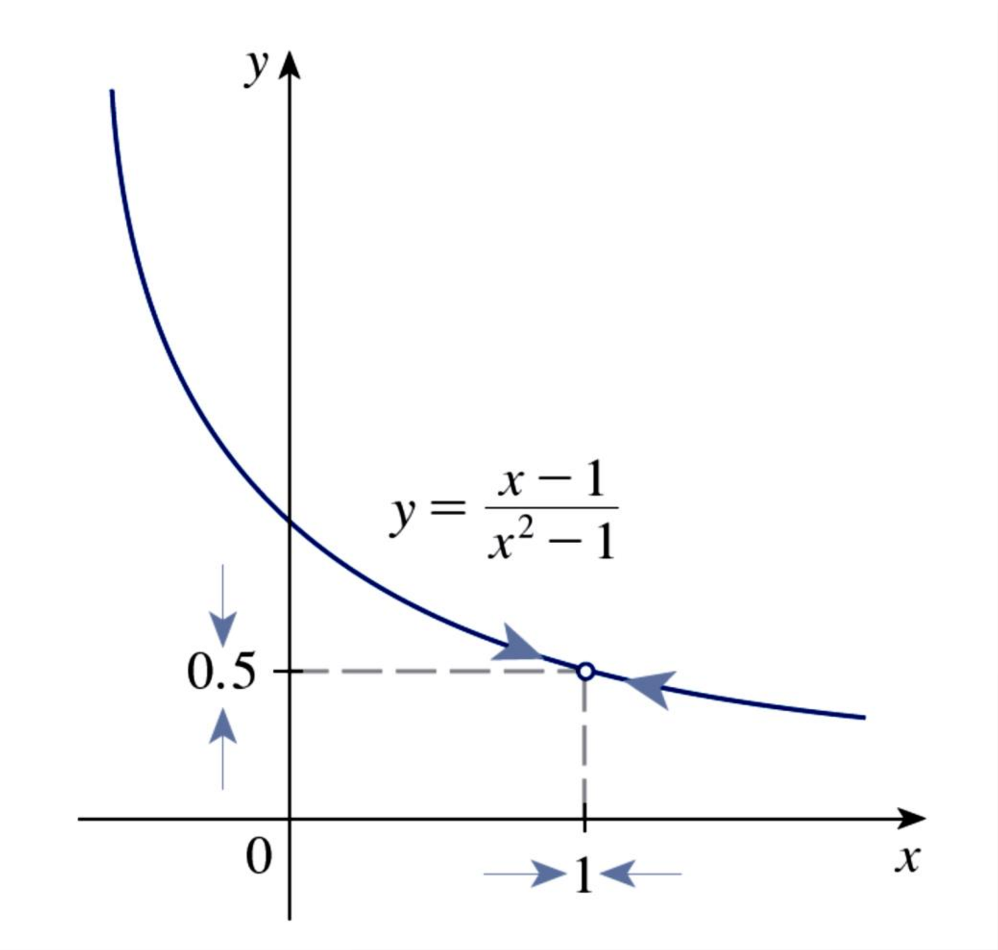

(a) (b) (c)

# Definición Intuitiva de Límite



**Ejemplo:**

Infiera el valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$




| $x < 1$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.666667 |
| 0.9 | 0.526316 |
| 0.99 | 0.502513 |
| 0.999 | 0.500250 |
| 0.9999 | 0.500025 |

| $x > 1$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1.5 | 0.400000 |
| 1.1 | 0.476190 |
| 1.01 | 0.497512 |
| 1.001 | 0.499750 |
| 1.0001 | 0.499975 |

1 0.5

# Definición Intuitiva de Límite



**Ejemplo:**

Calcule el valor de $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

| $t$ | $\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ |
|---|---|
| $\pm 1.0$ | $0.162277\ldots$ |
| $\pm 0.5$ | $0.165525\ldots$ |
| $\pm 0.1$ | $0.166620\ldots$ |
| $\pm 0.05$ | $0.166655\ldots$ |
| $\pm 0.01$ | $0.166666\ldots$ |

| $t$ | $\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ |
|---|---|
| $\pm 0.001$ | $0.166667$ |
| $\pm 0.0001$ | $0.166670$ |
| $\pm 0.00001$ | $0.167000$ |
| $\pm 0.000001$ | $0.000000$ |

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{1}{6}$$

# Definición Intuitiva de Límite



**Ejemplo:**

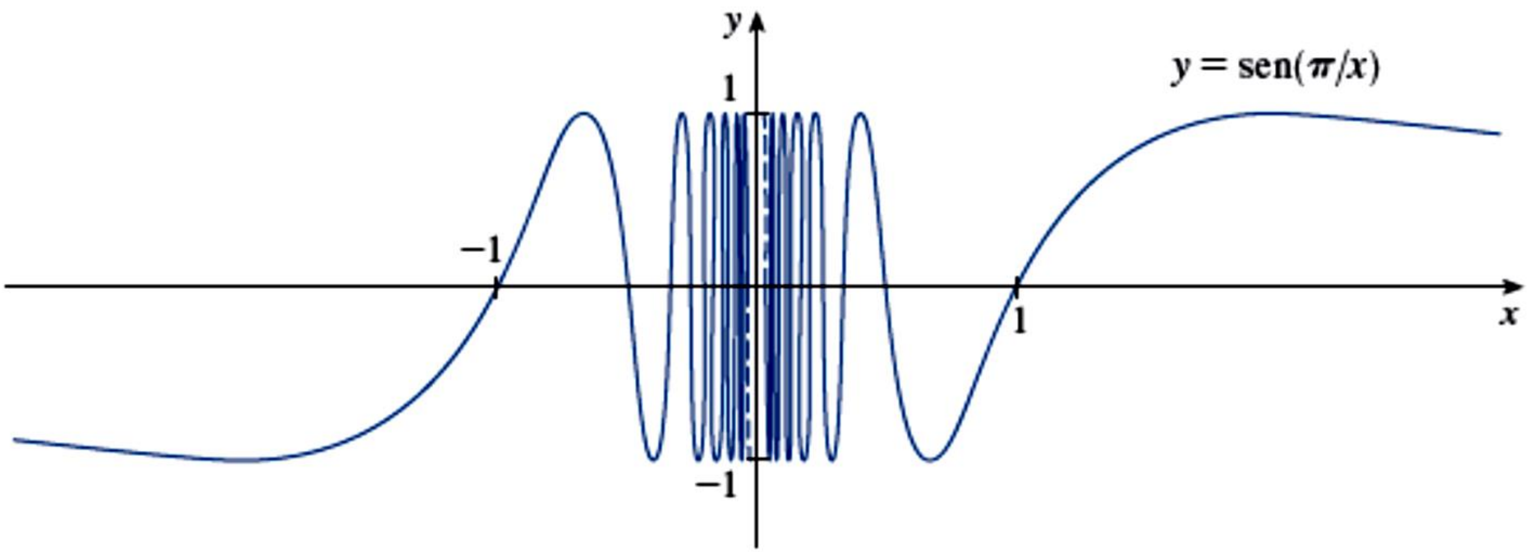
Calcule el valor de $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

$$\cancel{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0}$$



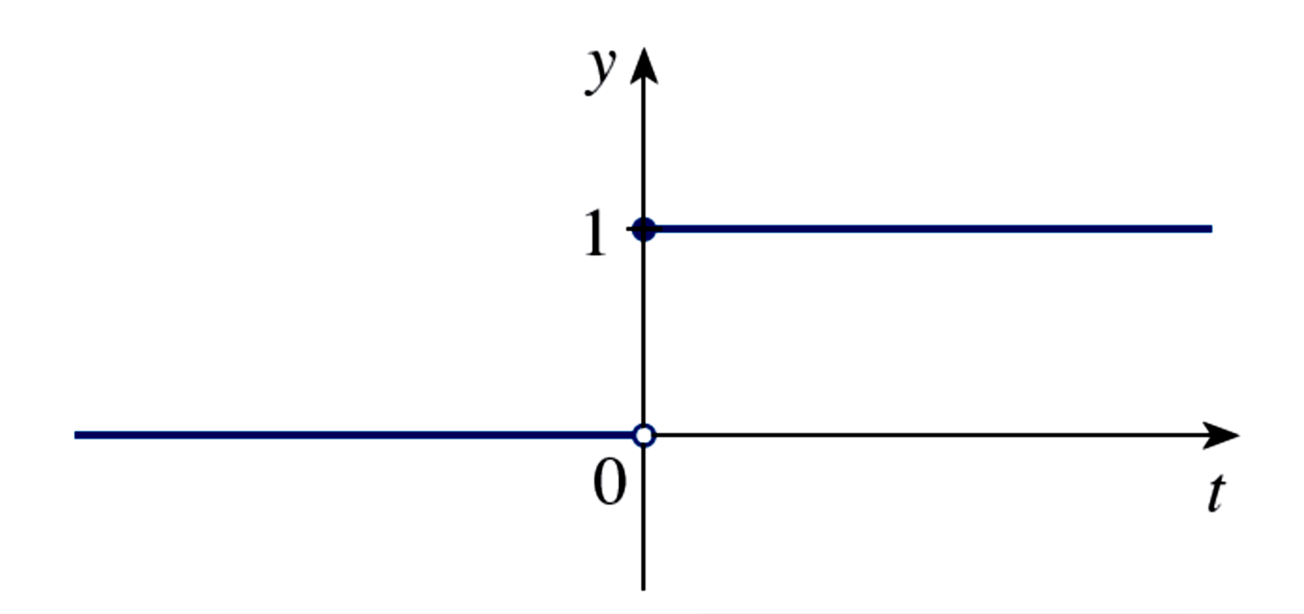
# Límites Laterales



**Ejemplo:**

La función de Heaviside *H* se define por:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$




$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

# Límites Laterales

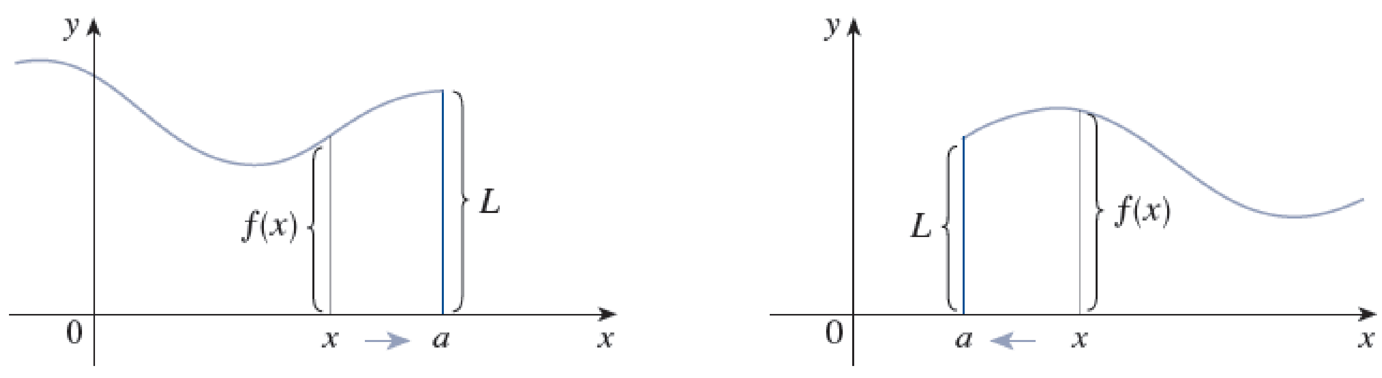


**2** **Definición de límites unilaterales** Cuando se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se expresa que el **límite por la izquierda de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$** [o el **límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ por la izquierda**] es igual a $L$ si se puede hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a $L$, tanto como se quiera, tomando $x$ suficientemente cercanos a $a$, pero *menores que* $a$.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$




(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

**3** $$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

# Límites Laterales

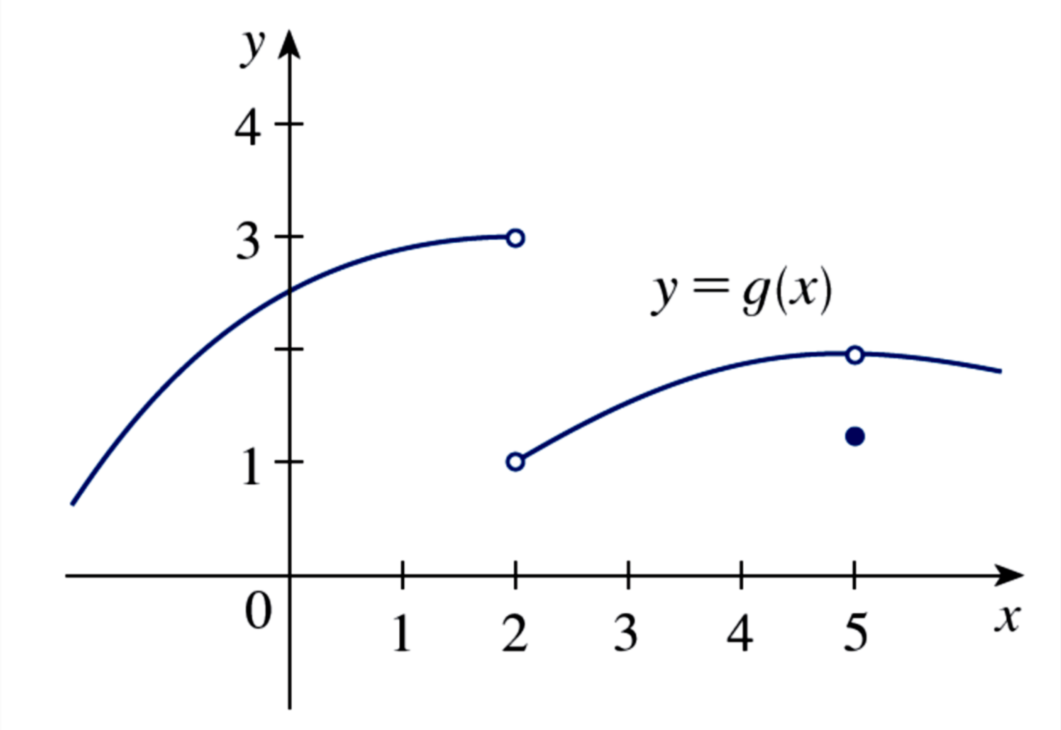


**Ejemplo:**

La gráfica de la función g se muestra a continuación. Utilícela para establecer los valores (si existen) de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$



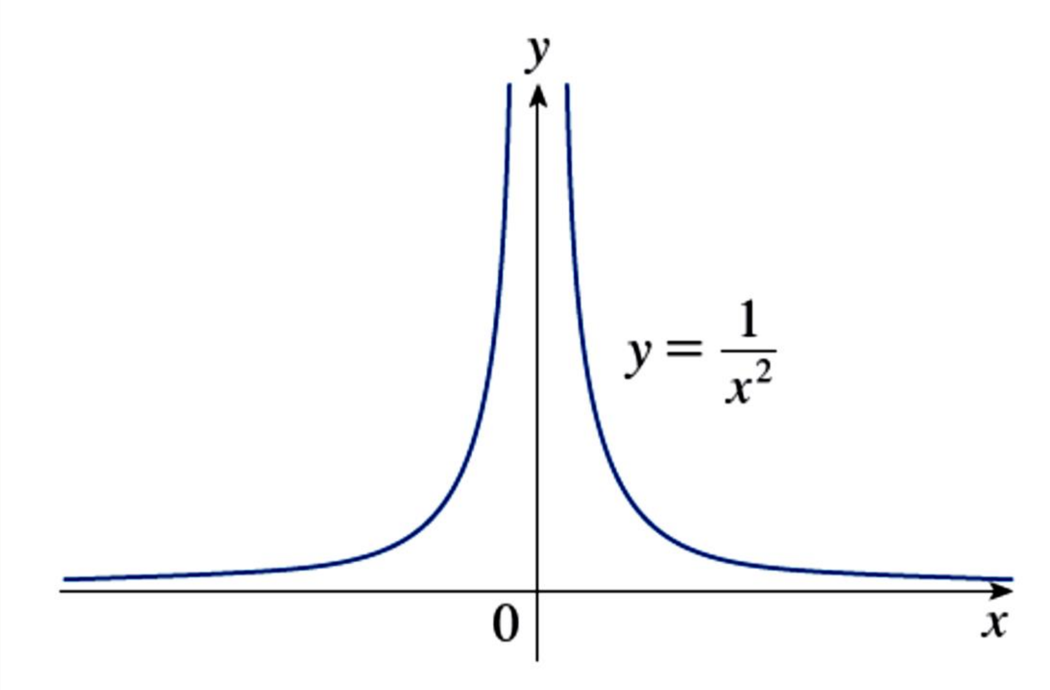
# Límites Infinitos



**Ejemplo:**

Encuentre el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ si es que existe.

| $x$ | $\frac{1}{x^2}$ |
|---|---|
| $\pm 1$ | 1 |
| $\pm 0.5$ | 4 |
| $\pm 0.2$ | 25 |
| $\pm 0.1$ | 100 |
| $\pm 0.05$ | 400 |
| $\pm 0.01$ | 10,000 |
| $\pm 0.001$ | 1,000,000 |




$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

# Límites Infinitos



**4 Definición intuitiva de un límite infinito** Sea $f$ una función definida por ambos lados de $a$, excepto posiblemente en la misma $a$. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera), tomando $x$ suficientemente cerca de $a$, pero no igual a $a$.

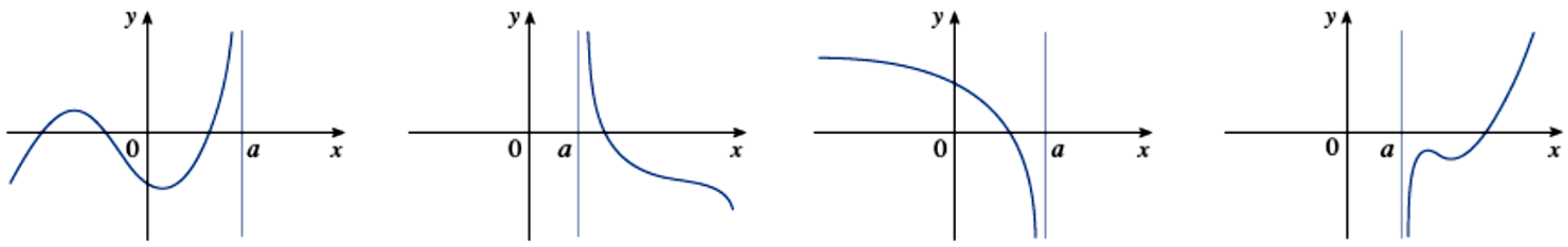
**5 Definición** Sea $f$ definida por ambos lados de $a$, excepto posiblemente en $a$ misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes, tomando $x$ suficientemente cerca de $a$, pero no igual a $a$.

# Límites Infinitos






(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

**6 Definición** La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos uno de los enunciados siguientes son verdaderos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

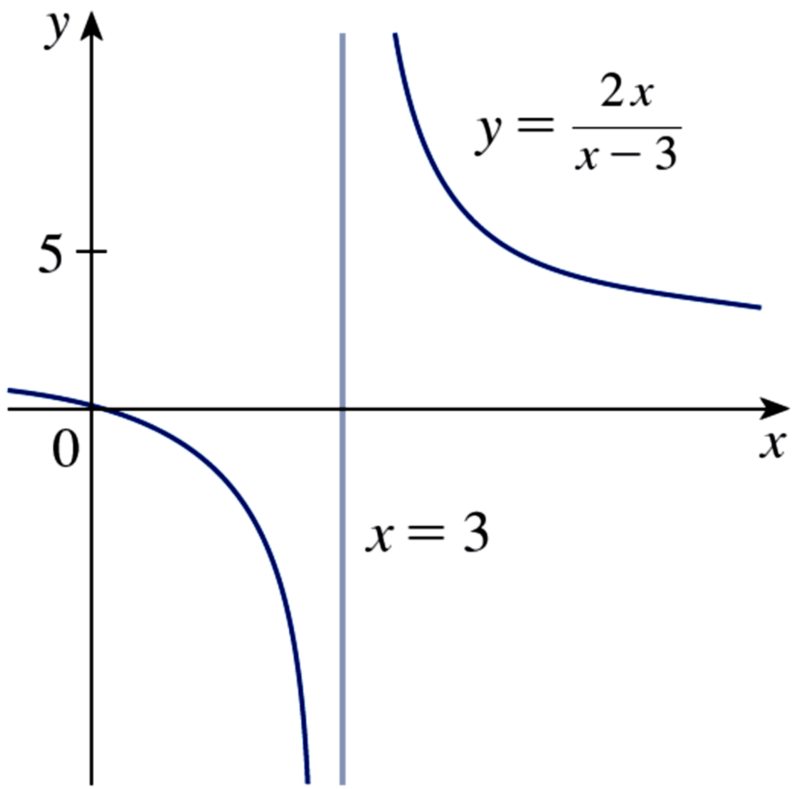
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

# Límites Infinitos



**Ejemplo:**

Encuentre el valor de $\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x-3}$



# Leyes de los Límites



**Leyes de los límites** Suponga que $c$ es una constante y que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

existen. Entonces

**1.** $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

**2.** $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

**3.** $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$

**4.** $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

**5.** $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

# Leyes de los Límites



**Leyes de los límites** Suponga que $c$ es una constante y que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

existen. Entonces

**6.** $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ donde $n$ es un número entero positivo

**7.** $\lim_{x\to a} c = c$

**8.** $\lim_{x\to a} x = a$

**9.** $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ donde $n$ es un entero positivo

**10.** $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde $n$ es un entero positivo

(Si $n$ es par, se supone que $a > 0$.)

**11.** $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ donde $n$ es un entero positivo

$\left[\text{[Si } n \text{ es par, se supone que } \lim_{x\to a} f(x) > 0.\right]$

# Leyes de los Límites



**Propiedad de sustitución directa** Si $f$ es una función polinomial o una función racional y $a$ está en el dominio de $f$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

**Ejemplo:**

Encuentre el valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

# Leyes de los Límites



$\boxed{1}$ **Teorema** $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

$\boxed{2}$ **Teorema** Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ (excepto posiblemente en $a$) y los límites de $f$ y $g$ existen cuando $x$ tiende a $a$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

$\boxed{3}$ **El teorema de la compresión** Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ (excepto posiblemente en $a$) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces $$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

# Leyes de los Límites



**Ejemplo:**

Encuentre el valor de $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

# Leyes de los Límites



**Ejemplo:**

Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es