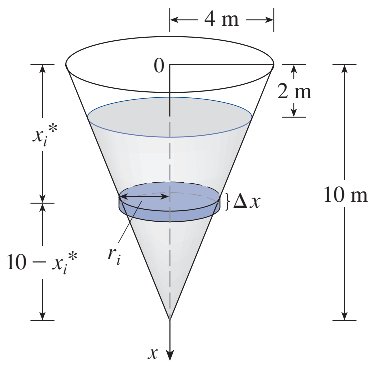



**FIGURA 3**

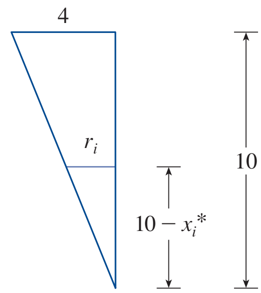



**FIGURA 4**

**SOLUCIÓN** Se miden profundidades desde la parte superior del recipiente introduciendo una recta vertical de coordenadas como en la figura 3. El agua se extiende desde una profundidad de 2 m hasta una profundidad de 10 m y de esta manera se divide el intervalo [2, 10] en $n$ subintervalos con extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y se elige $x_i^*$ en el $i$-ésimo subintervalo. De este modo el agua se divide en $n$ capas. La $i$-ésima capa es aproximadamente un cilindro circular de radio $r_i$ y altura $\Delta x$. Se puede calcular $r_i$ a partir de triángulos semejantes, usando la figura 4 como se indica a continuación:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

Por lo que un volumen aproximado de la $i$-ésima capa de agua es

$$V_i \approx \pi r_i^2 \,\Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

y así su masa es

$$\begin{aligned} m_i &= \text{densidad} \times \text{volumen} \\ &\approx 1000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x \end{aligned}$$

La fuerza necesaria para subir esta capa debe superar a la fuerza de gravedad, y así

$$\begin{aligned} F_i &= m_i g \approx (9.8)160\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x \\ &= 1568\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x \end{aligned}$$

Cada partícula en la capa debe viajar una distancia de aproximadamente $x_i^*$. El trabajo $W_i$ realizado para subir esta capa hasta lo alto del depósito es aproximadamente el producto de la fuerza $F_i$ por la distancia $x_i^*$:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

Para encontrar el trabajo total en el vaciado del tanque, se suman las contribuciones de cada una de las $n$ capas y después se toma el límite cuando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x = \int_2^{10} 1568\pi x(10 - x)^2 \,dx \\ &= 1568\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\,dx = 1568\pi \left[ 50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_2^{10} \\ &= 1568\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3.4 \times 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

■

## 6.4 EJERCICIOS

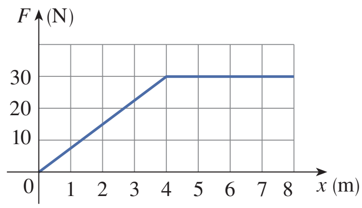
**1.** Un gorila de 360 lb trepa a un árbol a una altura de 20 pies. Encuentre el trabajo realizado si el gorila alcanza esa altura en
(a) 10 segundos (b) 5 segundos

**2.** ¿Cuánto trabajo se realiza cuando un elevador levanta una roca de 200 kg a una altura de 3 m?

**3.** Una fuerza variable de $10/(1 + x)^2$ libras mueve una partícula desde el origen a un punto que está a $x$ pies. Calcule el trabajo realizado para mover la partícula desde el origen a una distancia de 9 pies.

**4.** Cuando una partícula se localiza a una distancia de $x$ metros desde el origen, una fuerza de $\cos(\pi x/3)$ newtons actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover la partícula desde $x = 1$ hasta $x = 2$? Interprete su respuesta considerando el trabajo realizado desde $x = 1$ hasta $x = 1.5$ y desde $x = 1.5$ hasta $x = 2$.

**5.** Se muestra la gráfica de una función fuerza (en newtons) que se incrementa a su máximo valor y luego permanece constante. ¿Cuánto trabajo hace la fuerza al mover un objeto a una distancia de 8 m?




**6.** La tabla muestra los valores de una función fuerza $f(x)$, donde $x$ se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Aplique la regla del punto medio para estimar el trabajo que realiza la fuerza al mover un objeto desde $x = 4$ hasta $x = 20$.

| $x$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 5.8 | 7.0 | 8.8 | 9.6 | 8.2 | 6.7 | 5.2 | 4.1 |

**7.** Se requiere una fuerza de 10 lb para mantener estirado un resorte 4 pulg más de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta 6 pulg más de su longitud natural?

**8.** Un resorte tiene una longitud natural de 40 cm. Si se requiere una fuerza de 60 N para mantenerlo comprimido una longitud de 10 cm, ¿cuánto trabajo se requiere para comprimirlo a una longitud de 25 cm?

**9.** Suponga que se necesitan 2 J de trabajo para estirar un resorte desde su longitud natural de 30 cm hasta una longitud de 42 cm.
(a) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 35 hasta 40 cm?
(b) ¿Cuánto más allá de su longitud natural, mantendrá una fuerza de 30 N al resorte estirado?

**10.** Si el trabajo que se requiere para estirar un resorte 1 pie más de su longitud natural es 12 pies-lb, ¿cuánto trabajo se requiere para estirar el resorte 9 pulg más de su longitud natural?

**11.** Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Compare el trabajo $W_1$ hecho al estirar un resorte desde 20 hasta 30 cm con el trabajo $W_2$ hecho en estirarlo desde 30 hasta 40 cm. ¿Cómo se relacionan $W_2$ y $W_1$?

**12.** Si se necesitan 6 J de trabajo para estirar un resorte de 10 a 12 cm y otros 10 J para estirarlo de 12 a 14 cm, ¿cuál es la longitud natural del resorte?

**13–22** Muestre cómo obtener un valor aproximado del trabajo requerido mediante una suma de Riemann. Luego exprese el trabajo como una integral y evalúela.

**13.** Una pesada soga de 50 pies de largo pesa 0.5 lb/pie y está colgando por un lado de un edificio de 120 pies de altura.
(a) ¿Cuánto trabajo se hace al jalar la soga por la parte superior del edificio?
(b) ¿Cuánto trabajo se realiza al jalar la mitad de la soga a la parte superior del edificio?

**14.** Un cable grueso de 60 pies de largo que pesa 180 lb, cuelga de un malacate en una grúa. Calcule de dos formas diferentes el trabajo hecho si el malacate recoge 25 pies de cable.
(a) Siga el método del ejemplo 4.
(b) Escriba una función para el peso del cable restante después de que el malacate ha levantado $x$ pies. Calcule la cantidad de trabajo hecho cuando el malacate levanta $\Delta x$ pies de cable.

**15.** Un cable que pesa 2 lb/pies se utiliza para levantar 800 libras de carbón arriba del pozo de una mina de 500 pies de profundidad. Determine el trabajo realizado.

**16.** Una cadena que está en el suelo mide 10 m de largo y su masa es de 80 kg. ¿Cuánto trabajo se efectúa para subir un extremo de la cadena a una altura de 6 m?

**17.** Un cubo de 10 kg, con un agujero, se sube desde el suelo hasta una altura de 12 m con rapidez constante por medio de una soga que pesa 0.8 kg/m. Al principio, el cubo contiene 36 kg de agua, pero el agua se sale con rapidez constante y termina de salirse justo cuando el cubo llega a los 12 m de altura. ¿Cuánto trabajo se realizó?

**18.** Un cubo que pesa 4 lb y una soga de peso despreciable se usan para extraer agua de un pozo de 80 pies de profundidad. El cubo se llena con 40 lb de agua y se jala hacia arriba con una rapidez de 2 pies/s, pero el agua se sale por un agujero que tiene el cubo, con una rapidez de 0.2 lb/s. Calcule el trabajo hecho al jalar el cubo hasta la boca del pozo.

**19.** Una cadena de 10 pies de largo pesa 25 lb y cuelga de un techo. Calcule el trabajo hecho al subir el extremo inferior de la cadena al techo de modo que esté al mismo nivel que el extremo superior.

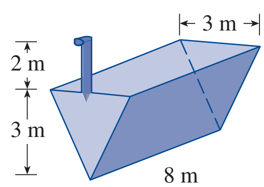
**20.** Una piscina circular tiene un diámetro de 10 m, los lados miden 1.5 m de altura y la profundidad del agua es de 1.2 m. ¿Cuánto trabajo se requiere para sacar por bombeo toda el agua por uno de los lados?

**21.** Un acuario que mide 2 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de profundidad está lleno con agua. Determine el trabajo que se requiere para sacar por bombeo la mitad del agua de dicho acuario. (Utilice el hecho de que la densidad del agua es de 1000 kg/m$^3$.)

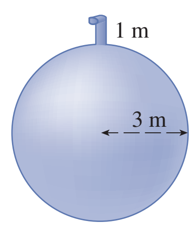
**22.** Un tanque esférico de agua, de 24 pies de diámetro, se coloca encima de una torre de 60 pies. El tanque se llena con una manguera en la parte inferior de la esfera. Si se utiliza una bomba de 1.5 caballos de fuerza para llevar el agua hasta el tanque, ¿cuánto se tarda en llenar el depósito? (Un caballo de fuerza = 550 pies-lb de trabajo por segundo.)

**23–26** Un tanque está lleno de agua. Determine el trabajo necesario para que, mediante bombeo, el agua salga por el tubo de descarga. En los ejercicios 25 y 26 utilice el hecho de que el peso del agua es de 62.5 lb/pies$^3$.

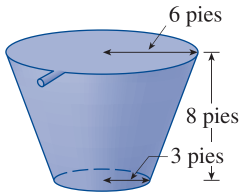
**23.**




**24.**

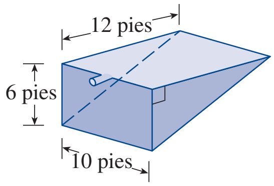


**25.**




cono truncado

**26.**

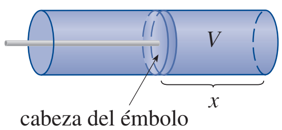



**27.** Suponga que en el caso del depósito del ejercicio 23, la bomba se descompone después de que se ha realizado un trabajo de $4.7 \times 10^5$ J. ¿Cuál es la profundidad del agua que queda en el depósito?

**28.** Resuelva el ejercicio 24 suponiendo que el tanque está lleno a la mitad de aceite con densidad de $900 \text{ kg/m}^3$.

**29.** Cuando el gas se expande en un cilindro de radio $r$, la presión en cualquier momento dado es una función del volumen: $P = P(V)$. La fuerza que ejerce el gas sobre el émbolo (véase la figura) es el producto de la presión por el área: $F = \pi r^2 P$. Demuestre que el trabajo que realiza el gas cuando el volumen se expande desde el volumen $V_1$ al volumen $V_2$ es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$




**30.** En un motor de vapor, la presión $P$ y el volumen $V$ del vapor cumplen con la ecuación $PV^{1.4} = k$, donde $k$ es una constante. (Esto es válido en el caso de la expansión adiabática, es decir, la expansión en la cual no hay transferencia de calor entre el cilindro y sus alrededores.) Utilice el ejercicio 29 para calcular el trabajo realizado por el motor durante un ciclo cuando el vapor inicia a una presión de $160 \text{ lb/pulg}^2$ y un volumen de $100 \text{ pulg}^3$ y se expande a un volumen de $800 \text{ pulg}^3$.

**31.** La energía cinética EC de un objeto de masa en movimiento con velocidad $v$ se define como $\text{EC} = \frac{1}{2}mv^2$. Si una fuerza $f(x)$ actúa sobre el objeto, moviéndolo a lo largo del eje $x$ de $x_1$ a $x_2$, el *teorema del trabajo y la energía* establece que el trabajo neto es igual al cambio en energía cinética: $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$, donde $v_1$ es la velocidad en $x_1$ y $v_2$ es la velocidad en $x_2$.

(a) Sean $x = s(t)$ la función de posición del objeto al tiempo $t$, $v(t)$ y $a(t)$ las funciones velocidad y aceleración, respectivamente. Demuestre el teorema del trabajo y la energía al utilizar primero la regla de sustitución para integrales definidas (5.5.6) para demostrar que

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(s(t))\, v(t)\, dt$$

Luego utilice la segunda ley de movimiento de Newton (fuerza = masa × aceleración) y la sustitución $u = v(t)$ para evaluar la integral.

(b) ¿Cuánto trabajo (en pies-lb) se necesita para lanzar una bola de boliche de 12 lb a 20 millas/h? (*Nota*: divida el peso en libras entre $32 \text{ pies/s}^2$ de la aceleración de la gravedad, para encontrar la masa, medida en slugs.)

**32.** Suponga que cuando arranca un carro de 800 kg de una montaña rusa, un sistema de propulsión electromagnética ejerce una fuerza de $5.7x^2 + 1.5x$ newtons sobre el carro en una distancia de $x$ metros de distancia a lo largo de la pista. Utilice el ejercicio 31(a) para encontrar la velocidad del carro cuando ha viajado 60 metros.

**33.** (a) La ley de gravitación de Newton establece que dos cuerpos con masas $m_1$ y $m_2$ se atraen entre sí con una fuerza

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde $r$ es la distancia entre los cuerpos y $G$ es la constante gravitacional. Si uno de los cuerpos está fijo, determine el trabajo necesario para llevar al otro desde $r = a$ hasta $r = b$.

(b) Calcule el trabajo requerido para lanzar un satélite de 1000 kg en dirección vertical hasta una órbita a 1000 km de altura. Puede suponer que la masa de la Tierra es de $5.98 \times 10^{24}$ kg y está concentrada en su centro. Tome el radio de la Tierra como $6.37 \times 10^6$ m y $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

**34.** La gran pirámide del rey Keops fue construida de piedra caliza en Egipto durante un período de 20 años, desde 2580 a. C. a 2560 a. C. Su base es un cuadrado con una longitud del lado de 756 pies, y su altura cuando se construyó fue de 481 pies. (Fue la estructura hecha por el hombre más alta del mundo por más de 3800 años.) La densidad de la piedra caliza es aproximadamente $150 \text{ lb/pies}^3$.

(a) Estime el trabajo total realizado en la construcción de la pirámide.

(b) Si cada obrero trabajó 10 horas al día durante 20 años, 340 días al año, e hizo 200 pies-lb/h de trabajo al levantar los bloques de piedra caliza de su lugar, aproximadamente, ¿cuántos obreros se necesitaron para construir la pirámide?