Por tanto, tomando $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el teorema de comparación, se ve que $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente, por lo que se sigue que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. ■

En el ejemplo 9 se demuestra que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente sin calcular su valor. En el ejercicio 72 se indica cómo demostrar que su valor es aproximadamente 0.8862. En la teoría de probabilidad es importante conocer el valor exacto de esta integral impropia, como se verá en la sección 8.5; utilizando los métodos del cálculo multivariable puede demostrarse que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$. La tabla 1 ilustra la definición de una integral impropia mostrando cómo los valores (generados por computadora) de $\int_0^t e^{-x^2}\,dx$ tienden a $\sqrt{\pi}/2$ cuando t es muy grande. De hecho, estos valores convergen muy rápido porque $e^{-x^2} \to 0$ muy rápidamente cuando $x \to \infty$.

Tabla 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

EJEMPLO 10 La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente por el teorema de comparación porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

y $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente por el ejemplo 1 [o por (2) con $p = 1$]. ■

La tabla 2 ilustra la divergencia de la integral en el ejemplo 10. Al parecer, los valores no tienden a un número fijo.

Tabla 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1000	7.1271392134
10 000	9.4297243064

7.8 EJERCICIOS

1. Explique por qué cada una de las integrales siguientes es impropia.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cot x\,dx$

2. ¿Cuáles de las integrales siguientes son impropias? ¿Por qué?

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \tan x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$

3. Encuentre el área bajo la curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ y evalúela para $t = 10$, 100 y 1000. Después encuentre el área total bajo esta curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Trace la gráfica de las funciones $f(x) = 1/x^{1.1}$ y $g(x) = 1/x^{0.9}$ en los rectángulos de vista $[0, 10]$ por $[0, 1]$ y $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
(b) Encuentre las áreas bajo las gráficas de f y g desde $x = 1$ hasta $x = t$ y evalúelas para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10} y 10^{20}.
(c) Encuentre el área total bajo cada curva para $x \geqslant 1$, si esta existe.

5–40 Determine si cada una de las integrales siguientes es convergente o divergente. Evalúe las que sean convergentes.

5. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx$

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

9. $\displaystyle\int_2^\infty e^{-5p}\,dp$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 2^r\,dr$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (y^3 - 3y^2)\,dy$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}^2\alpha\,d\alpha$

16. $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}\,d\theta$

17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$

18. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}$

19. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{z}{z^4+4}\,dz$

24. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{y}}\,dy$

26. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$

34. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x\, dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta\, d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$

37. $\displaystyle\int_0^1 r \ln r\, dr$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\, d\theta$

39. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

40. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

41–46 Trace cada una de las regiones siguientes y encuentre su área (si el área es finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x}\}$

42. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{x}\}$

43. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/(x^3 + x)\}$

44. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant xe^{-x}\}$

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$

46. $S = \left\{(x, y) \mid -2 < x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x + 2}\right\}$

47. (a) Si $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, utilice su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\, dx$, para $t = 2, 5, 10, 100, 1000$ y $10\,000$. ¿Parece que $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente?

(b) Utilice el teorema de comparación con $f(x) = 1/x^2$ para demostrar que $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente.

(c) Ilustre el inciso (b) al trazar la gráfica de f y g sobre la misma pantalla para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Utilice su gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente.

48. (a) Si $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, utilice su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\, dx$ para $t = 5, 10, 100, 1000$ y $10\,000$. ¿Parece que $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es convergente o divergente?

(b) Utilice el teorema de comparación con $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para demostrar que $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es divergente.

(c) Ilustre el inciso (b) graficando f y g sobre la misma pantalla para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Utilice su gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es divergente.

49–54 Utilice el teorema de comparación para determinar si cada una de las integrales siguientes es convergente o divergente.

49. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1}\, dx$

50. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{\sqrt{x^4 - x}}\, dx$

52. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2 + e^x}\, dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\, dx$

54. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$

55. La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\, dx$$

es impropia por dos razones: el intervalo $[0, \infty)$ es infinito, y el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0. Evalúela expresándola como una suma de integrales impropias de tipo 2 y tipo 1 como sigue:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\, dx$$

56. Evalúe

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$$

por el mismo método que en el ejercicio 55.

57–59 Encuentre los valores de p para los cuales la integral converge y evalúe la integral para esos valores de p.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$

58. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\, dx$

60. (a) Evalúe la integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ para $n = 0, 1, 2$ y 3.

(b) Infiera el valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ cuando n es un entero positivo arbitrario.

(c) Demuestre su suposición usando inducción matemática.

61. (a) Demuestre que $\int_{-\infty}^\infty x\, dx$ es divergente.

(b) Demuestre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t x\, dx = 0$$

Esto demuestra que no se puede definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\, dx$$

62. La *rapidez promedio* de las moléculas de un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\, dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas y v es la rapidez molecular. Demuestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Del ejemplo 1, se sabe que la región $\mathscr{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tiene un área infinita. Demuestre que rotando $\mathscr{R}$ alrededor del eje x se obtiene un sólido con volumen finito.

64. Utilice la información y los datos del ejercicio 6.4.33 para encontrar el trabajo requerido para impulsar un satélite de 1000 kg fuera del campo gravitacional terrestre.

65. Encuentre la *velocidad de escape* v_0 necesaria para impulsar un cohete de masa m fuera del campo gravitacional de un planeta con masa M y radio R. Utilice la ley de la gravitación de Newton (véase el ejercicio 6.4.33) y el hecho de que la energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ suministra el trabajo necesario.

66. Los astrónomos utilizan una técnica llamada *estereografía estelar* para determinar la densidad de las estrellas en un cúmulo estelar a partir de la densidad observada (en dos dimensiones) que puede analizarse en una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R, la densidad de estrellas depende solo de la distancia r desde el centro del cúmulo. Si la densidad estelar percibida está dada por $y(s)$, donde s es la distancia plana observada del centro del cúmulo y $x(r)$ es la densidad real, se puede demostrar que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\, x(r)\, dr$$

Si la densidad real de las estrellas en un cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

67. Un fabricante quiere producir lámparas que duren cerca de 700 horas pero, por supuesto, algunas se queman más rápido que otras. Sea $F(t)$ la fracción de las lámparas de la compañía que se queman antes de t horas, de modo que $F(t)$ yace siempre entre 0 y 1.

(a) Trace una gráfica aproximada de lo que usted piensa que es la forma de la gráfica de F.

(b ¿Cuál es el significado de la derivada $r(t) = F'(t)$?

(c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^\infty r(t)\, dt$? ¿Por qué?

68. Como se vio en la sección 3.8, una sustancia radiactiva decae exponencialmente: la masa en el tiempo t es $m(t) = m(0)e^{kt}$, donde $m(0)$ es la masa inicial y k es una constante negativa. La *vida media* M de un átomo en la sustancia es

$$M = -k \int_0^\infty t e^{kt}\, dt$$

Para el isótopo radiactivo ^{14}C, utilizado en la datación por radiocarbono, el valor de k es -0.000121. Encuentre la vida media de un átomo de ^{14}C.

69. En un estudio de la propagación del consumo de drogas ilegales desde un usuario entusiasta de una población de N usuarios, los autores modelaron el número de nuevos usuarios esperados por la ecuación

$$\gamma = \int_0^\infty \frac{cN(1 - e^{-kt})}{k}\, e^{-\lambda t}\, dt$$

donde c, k y λ son constantes positivas. Evalúe esta integral para expresar γ en términos de c, N, k y λ.

Fuente: F. Hoppensteadt *et al*., "Threshold Analysis of a Drug Use Epidemic Model," *Mathematical Biosciences* 53 (1981): 79-87.

70. El tratamiento de diálisis elimina urea y otros productos de desecho de la sangre de un paciente desviando del flujo de sangre desde el exterior a través de una máquina llamada dializador. La tasa a la que se elimina urea de la sangre (en mg/min) está a menudo bien descrita por la ecuación

$$u(t) = \frac{r}{V} C_0 e^{-rt/V}$$

donde r es la tasa de flujo de sangre a través del dializador (en mL/min), V es el volumen de la sangre del paciente (en mL) y C_0 es la cantidad de urea en la sangre (en mg) al tiempo $t = 0$. Evalúe la integral $\int_0^\infty u(t)$ e interprétela.

71. Determine qué tan grande debe ser el número a para que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0.001$$

72. Estime el valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ expresándolo como la suma de $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$ y $\int_4^\infty e^{-x^2}\, dx$. Aproxime la primera integral utilizando la regla de Simpson con $n = 8$ y demuestre que la segunda integral es más pequeña que $\int_4^\infty e^{-4x}\, dx$, la cual es menor que 0.0000001.

73. Si $f(t)$ es continua para $t \geqslant 0$, la *transformada de Laplace* de f es la función F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

y el dominio de F es el conjunto que consiste en todos los números s para los cuales la integral converge. Encuentre las transformadas de Laplace de las funciones siguientes.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

74. Demuestre que si $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde M y a son constantes, entonces la transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

75. Suponga que $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ y $0 \leqslant f'(t) \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde f' es continua. Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ y la transformada de Laplace de $f'(t)$ es $G(s)$, demuestre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

76. Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ es convergente y a y b son números reales, demuestre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$$

77. Demuestre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

78. Demuestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\; dy$ interpretando las integrales como áreas.

79. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

80. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

81. Suponga que f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. ¿Es posible que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ sea convergente?

82. Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, entonces la integral siguiente es convergente.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$