SOLUCIÓN Sea

$$u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Entonces

$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x \cos x\, dx \qquad v = -\cos x$$

así al integrar por partes se obtiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x \cos^2 x\, dx$$

Dado que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

Como en el ejemplo 4, resuelva esta ecuación para la integral deseada tomando el último término del lado derecho y pasándolo al lado izquierdo. Por lo que se tiene

$$n\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx$$

o

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx \qquad \blacksquare$$

La fórmula de reducción (7) es útil porque, al utilizarla repetidamente, puede expresar $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\, dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\, dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 EJERCICIOS

1–2 Evalúe las integrales siguientes utilizando integración por partes con las elecciones de u y dv indicadas.

1. $\int xe^{2x}\, dx; \quad u = x,\ dv = e^{2x}\, dx$

2. $\int \sqrt{x}\ln x\, dx; \quad u = \ln x,\ dv = \sqrt{x}\, dx$

3–36 Evalúe la integral.

3. $\int x\cos 5x\, dx$

4. $\int ye^{0.2y}\, dy$

5. $\int re^{r/2}\, dr$

6. $\int t \operatorname{sen} 2t\, dt$

7. $\int (x^2 + 2x)\cos x\, dx$

8. $\int t\sec^2 2t\ dt$

9. $\int \cos^{-1}x\, dx$

10. $\int \ln\sqrt{x}\ dx$

11. $\int t^4 \ln t\, dt$

12. $\int \tan^{-1} 2y\, dy$

13. $\int t\csc^2 t\, dt$

14. $\int x\cosh ax\, dx$

15. $\int \ln\sqrt[3]{x}\, dx$

16. $\int \frac{z}{10^z}\, dz$

17. $\int \arctan 4t\, dt$

18. $\int s\, 2^s\, ds$

19. $\int z^3 e^z\, dz$

20. $\int x\tan^2 x\, dx$

21. $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\, dx$

22. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\, dx$

23. $\int_0^{1/2} x\cos \pi x\, dx$

24. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\, dx$

25. $\int_0^2 y\operatorname{senh} y\, dy$

26. $\int_1^2 w^2 \ln w\, dw$

27. $\int_1^5 \frac{\ln R}{R^2}\, dR$

28. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\, dy$

29. $\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\cos x\, dx$

30. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\, dx$

31. $\displaystyle\int_1^5 \frac{M}{e^M}\,dM$

32. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

35. $\displaystyle\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\,ds$

37–42 Primero haga una sustitución y después utilice integración por partes para evaluar las integrales siguientes.

37. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

38. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

39. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\,d\theta$

40. $\displaystyle\int_0^\pi e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\,dt$

41. $\displaystyle\int x\ln(1+x)\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}(\ln x)}{x}\,dx$

43–46 Evalúe las integrales indefinidas siguientes. Ilustre y verifique que su respuesta sea razonable, al trazar la gráfica de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$).

43. $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$

44. $\displaystyle\int x^{3/2}\ln x\,dx$

45. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

46. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

47. (a) Utilice la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Utilice el inciso (a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

48. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

(b) Utilice el inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x\,dx$.
(c) Use los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x\,dx$.

49. (a) Utilice la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.
(b) Utilice el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$.
(c) Utilice el inciso (a) para demostrar que, para potencias impares del seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

50. Demuestre que, para potencias pares del seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

51–54 Utilice la integración por partes para demostrar las fórmulas de reducción siguientes.

51. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

52. $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

53. $\displaystyle\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

54. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

55. Utilice el ejercicio 51 para encontrar $\int (\ln x)^3\,dx$.

56. Use el ejercicio 52 para encontrar $\int x^4 e^x\,dx$.

57–58 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas.

57. $y = x^2\ln x, \quad y = 4\ln x$

58. $y = x^2e^{-x}, \quad y = xe^{-x}$

59–60 Utilice una gráfica para aproximar la coordenada x de los puntos de intersección de las curvas dadas. Después encuentre (en forma aproximada) el área de la región acotada por las curvas.

59. $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}x\right), \quad y = 2 - x^2$

60. $y = x\ln(x+1), \quad y = 3x - x^2$

61–64 Utilice el método de los cascarones cilíndricos para encontrar el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas dadas alrededor de los ejes dados.

61. $y = \cos(\pi x/2),\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$ alrededor del eje y

62. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1;$ alrededor del eje y

63. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0;$ alrededor de $x = 1$

64. $y = e^x,\ x = 0,\ y = 3;$ alrededor del eje x

65. Calcule el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = 2$ alrededor de cada eje.
(a) el eje y (b) el eje x

66. Calcule el valor promedio de $f(x) = x\sec^2 x$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.

67. La función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)dt$ se discutió en el ejemplo 5.3.3 y se usa en forma extensa en la teoría de la óptica. Encuentre $\int S(x)\,dx$. [Su respuesta involucrará a $S(x)$.]

68. Un cohete acelera al quemar su combustible, de manera que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial del cohete al despegar (incluyendo su combustible) es m, el combustible se consume con una rapidez r y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t está dado por la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s y $v_e = 3\,000$ m/s, encuentre la altura del cohete un minuto después del despegue.

69. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta a una velocidad $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué tan lejos llegará después de t segundos?

70. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, demuestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

71. Suponga que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 x f''(x)\,dx$.

72. (a) Utilice integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

(b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

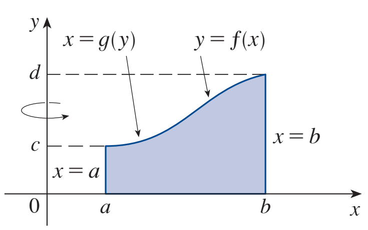
$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugerencia*: utilice el inciso (a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]

(c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, trace un diagrama para dar una interpretación geométrica del inciso (b).

(d) Utilice el inciso (b) para evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$.

73. Utilizando cascarones cilíndricos, se obtuvo la fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, pero ahora puede utilizar integración por partes para demostrarla por medio del método de las



rebanadas de la sección 6.2, al menos para el caso en el que f es inyectiva y, por tanto, tiene una función inversa g. Utilice la figura para demostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi [g(y)]^2\,dy$$

Haga la sustitución $y = f(x)$ y después utilice integración por partes sobre la integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

74. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Demuestre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Utilice el ejercicio 50 para demostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use los incisos (a) y (b) para demostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Utilice el inciso (c) y los ejercicios 49 y 50 para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Usualmente, esta fórmula se expresa como el producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

y se conoce como el *producto de Wallis*.

(e) Construya rectángulos como los siguientes: empiece con un cuadrado de área 1 y adjunte alternativamente rectángulos de área 1 junto al rectángulo anterior o encima de este (véase la figura). Encuentre el límite de las razones del ancho y la altura de estos rectángulos.