

# MATEMÁTICAS

## Métodos de Integración I

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Estudiar técnicas de integración de funciones reales de una variable real



- Integración por sustitución
- Integración mediante tablas
- Integración por partes

# Integración por Sustitución

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

Debido a la existencia del teorema fundamental, es importante disponer de técnicas para hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no indican cómo evaluar integrales como

$$\boxed{1} \quad \int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx$$

$$\boxed{2} \quad \int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx = \int \sqrt{1+x^2} \, 2x \, dx = \int \sqrt{u} \, du \\ = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

**4 Regla de sustitución** Si  $u = g(x)$  es una función derivable cuyo rango es un intervalo  $I$  y  $f$  es continua sobre  $I$ , entonces

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$$

# Integración por Sustitución

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## **Ejemplo:**

Encuentre  $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$

Encuentre  $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Encuentre  $\int \tan x dx$

# Integración por Sustitución

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

**6 Regla de sustitución para integrales definidas** Si  $g'$  es continua sobre  $[a, b]$  y  $f$  es continua sobre el rango de  $u = g(x)$ , entonces

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

**7 Integrales de funciones simétricas** Suponga que  $f$  es continua en  $[-a, a]$ .

(a) Si es par [ $f(-x) = f(x)$ ], entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

(b) Si es impar [ $f(-x) = -f(x)$ ], entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

# Integración por Sustitución

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Ejemplo:

Calcule  $\int_1^{e^{\ln x}} \frac{\ln x}{x} dx$

Calcule  $\int_{-2}^2 (x^6 + 1) dx$

# Integración mediante Tablas

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## ■ Tablas de integrales

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando se aborda una integral difícil de determinar a mano y no se tiene acceso a un sistema algebraico computacional.

Dispondremos de 120 fórmulas para resolver integrales de distintas formas:

- Formas básicas
- Formas que involucran  $\sqrt{a^2 + u^2}, a > 0$
- Formas que involucran  $\sqrt{a^2 - u^2}, a > 0$
- Formas que involucran  $\sqrt{u^2 - a^2}, a > 0$
- Formas que involucran  $a + bu$
- Formas trigonométricas
- Formas trigonométricas inversas
- Formas exponenciales y logarítmicas
- Formas hiperbólicas
- Formas que involucran  $\sqrt{2au - u^2}, a > 0$

Normalmente será necesario utilizar la regla de sustitución o manipulaciones algebraicas para transformar una integral dada en una de las formas de la tabla.

# Integración mediante Tablas

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Ejemplo:

Utilice la tabla de integrales para encontrar  $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}} dx$



# Integración por Partes

Cada regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente. Por ejemplo, a la regla de sustitución para la integración, le corresponde la regla de la cadena para la derivación. La regla de integración que le corresponde a la derivación de un producto se llama *integración por partes*.

1

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$$

La fórmula 1 se llama **fórmula para la integración por partes**. Tal vez sea más fácil recordarla en la notación siguiente: sea  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$ . Entonces, las diferenciales son  $du = f'(x)dx$  y  $dv = g'(x)dx$ , así que, por la regla de sustitución, la fórmula para la integración por partes será

2

$$\int u dv = uv - \int v du$$

# Integración por Partes

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Ejemplo:

Encuentre  $\int x \sen x \, dx$

Encuentre  $\int t^2 e^t \, dt$

# Integración por Partes

Si combina la fórmula para la integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, se pueden evaluar integrales definidas por partes. Evaluando ambos lados de la fórmula 1 entre  $a$  y  $b$ , suponiendo que  $f'$  y  $g'$  son continuas, y utilizando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

**6**

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx$$

**Ejemplo:**

Calcule  $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$



Universidad  
Europea  
del Atlántico

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)