Pero la división larga da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Esta ecuación sugiere $y = x$ es una asíntota oblicua. En efecto

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty$$

Por lo que la recta $y = x$ es una asíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Ya que $f'(x) > 0$ para toda x (excepto 0), f es creciente en $(-\infty, \infty)$.

F. Aunque $f'(0) = 0$, f' no cambia de signo en $x = 0$, por lo que no hay máximo ni mínimo local.

G. $$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(4x^3+6x) - (x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Ya que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$, se puede hacer la tabla siguiente:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CA en $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB en $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CA en $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB en $(\sqrt{3}, \infty)$

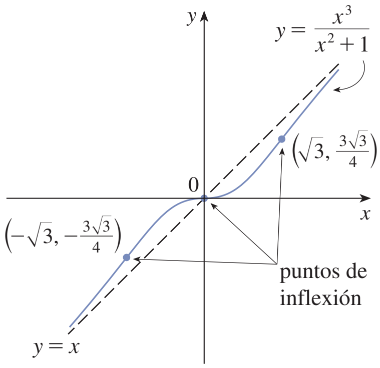


FIGURA 13

Los puntos de inflexión son $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

H. La gráfica de f se muestra en la figura 13. ■

4.5 EJERCICIOS

1–54 Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las curvas siguientes:

1. $y = x^3 + 3x^2$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x(x-4)^3$

6. $y = x^5 - 5x$

7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

10. $y = \dfrac{x^2 + 5x}{25 - x^2}$

11. $y = \dfrac{x - x^2}{2 - 3x + x^2}$

12. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

13. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

14. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

15. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

16. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$

17. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$

18. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

19. $y = \dfrac{x^3}{x^3 + 1}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x - 2}$

21. $y = 2\sqrt{x} - x$

22. $y = (x - 4)\sqrt[3]{x}$

23. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

26. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

27. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $y = x - 3x^{1/3}$

30. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

31. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

32. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

33. $y = \operatorname{sen}^3 x$

34. $y = x + \cos x$

35. $y = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

36. $y = 2x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

37. $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

38. $y = \csc x - 2\operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi$

39. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

40. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

41. $y = \arctan(e^x)$

42. $y = (1 - x)e^x$

43. $y = 1/(1 + e^{-x})$

44. $y = e^{-x}\operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

45. $y = \dfrac{1}{x} + \ln x$

46. $y = x - \ln x$

47. $y = (1 + e^x)^{-2}$

48. $y = e^x/x^2$

49. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

50. $y = \ln(1 + x^3)$

51. $y = xe^{-1/x}$

52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

53. $y = e^{\arctan x}$

54. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

---

55. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, m es la masa cuando la partícula se mueve con rapidez v con respecto al observador y c es la rapidez de la luz. Trace la gráfica de m como una función de v.

56. En la teoría de la relatividad, la energía de una partícula es

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, λ es la longitud de onda y h es la constante de Planck. Trace la gráfica de E como una función de λ. ¿Qué indica la gráfica en relación con la energía?

57. Un modelo para la divulgación de un rumor está dado por la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que sabe del rumor en el tiempo t, y a y k son constantes positivas.
(a) ¿Cuándo habrá oído el rumor la mitad de la población?
(b) ¿Cuándo es mayor la rapidez de divulgación del rumor?
(c) Trace la gráfica de p.

58. Un modelo para la concentración en tiempo t de un medicamento inyectado en el torrente sanguíneo es

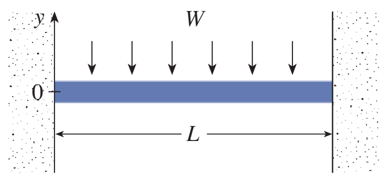
$$C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$$

donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$. Trace la gráfica de la función de concentración. ¿Qué indica la gráfica en relación con la variación de la concentración al transcurrir el tiempo?

59. La figura muestra una viga de longitud L incrustada en muros de hormigón. Si una carga constante W se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud, la viga toma la forma de la curva de deflexión

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

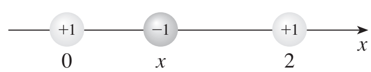
donde E e I son constantes positivas. (E es el módulo de Young de elasticidad e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga). Trace la gráfica de la curva de deflexión.



60. La ley de Coulomb establece que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1 ubicadas en las posiciones 0 y 2 sobre una recta de coordenadas y una partícula con carga -1 en una posición x entre ellas. De la ley de Coulomb se deduce que la fuerza neta que actúa sobre la partícula ubicada a la mitad es

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x - 2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

donde k es una constante positiva. Trace la gráfica de la función fuerza neta. ¿Qué indica la gráfica acerca de la fuerza?



61–64 Encuentre la ecuación de la asíntota inclinada en cada una de las funciones dadas. No trace la gráfica de la curva.

61. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

62. $y = \dfrac{4x^3 - 10x^2 - 11x + 1}{x^2 - 3x}$

63. $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{x^2 - x - 2}$

64. $y = \dfrac{-6x^4 + 2x^3 + 3}{2x^3 - x}$

65–70 Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las curvas siguientes. En el apartado D encuentre la ecuación de la asíntota inclinada.

65. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

66. $y = \dfrac{1 + 5x - 2x^2}{x - 2}$

67. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

68. $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$

69. $y = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$

70. $y = 1 - x + e^{1+x/3}$

71. Demuestre que la curva $y = x - \tan^{-1}x$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + \pi/2$ y $y = x - \pi/2$. Utilice este hecho para ayudar a trazar la curva.

72. Demuestre que la curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + 2$ y $y = -x - 2$. Utilice este hecho para trazar la curva.

73. Demuestre que las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ son asíntotas inclinadas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

74. Sea $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Demuestre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Esto demuestra que la gráfica de f se aproxima a la gráfica de $y = x^2$ y se dirá que la curva $y = f(x)$ es *asintótica* a la parábola $y = x^2$. Utilice este hecho para trazar la gráfica de f.

75. Analice el comportamiento asintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ de la misma manera que en el ejercicio 74. Después utilice su resultado para ayudarse en el trazo de la gráfica de f.

76. Utilice el comportamiento asintótico de $f(x) = \operatorname{sen} x + e^{-x}$ para trazar su gráfica sin usar el procedimiento para el trazado de curvas de esta sección.

4.6 Trazo de gráficas con cálculo *y* calculadoras

Se sugiere leer "Graphing Calculators and Computers" en *www.stewartcalculus.com*. En particular, se explica cómo evitar algunos de los inconvenientes de los dispositivos graficadores, eligiendo rectángulos de vista adecuados.

El método que se utilizó para trazar curvas en la sección anterior fue una culminación de gran parte de este estudio del cálculo diferencial. La gráfica fue el objeto final que se ha producido. En esta sección el punto de vista de los autores es completamente diferente. Aquí se *comenzó* con una gráfica producida por una calculadora graficadora o un equipo de cómputo y luego se refinó. Se utilizó el cálculo para asegurar que revelan todos los aspectos importantes de la curva. Y con el uso de dispositivos graficadores se puede abordar curvas que serían demasiado complicadas sin considerar la tecnología. El tema es la *interacción* entre el cálculo y las calculadoras.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función polinomial $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Utilice las gráficas de f' y f'' para estimar todos los puntos máximos y mínimos e intervalos de concavidad.

SOLUCIÓN Si se especifica un dominio, pero no un rango, muchos dispositivos graficadores utilizan un rango adecuado de los valores calculados. La figura 1 muestra el trazo que hace un dispositivo si se especifica que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Aunque este rectángulo de vista es útil para mostrar que el comportamiento asintótico (o comportamiento extremo) es el mismo que para $y = 2x^6$, obviamente está ocultando algún detalle más fino. Por lo que se cambia el rectángulo de vista a $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$ que se muestra en la figura 2.

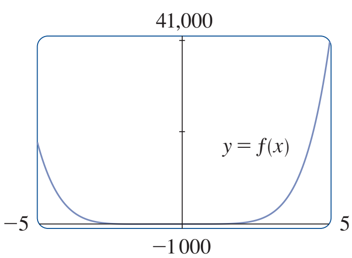


FIGURA 1

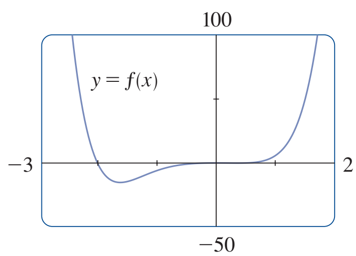


FIGURA 2