6.5 EJERCICIOS

1–8 Determine el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = 3x^2 + 8x, \quad [-1, 2]$

2. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

3. $g(x) = 3 \cos x, \quad [-\pi/2, \pi/2]$

4. $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}, \quad [0, 2]$

5. $f(t) = te^{-t^2}, \quad [0, 5]$

6. $f(x) = x^2/(x^3 + 3)^2, \quad [-1, 1]$

7. $h(x) = \cos^4 x \operatorname{sen} x, \quad [0, \pi]$

8. $h(u) = (\ln u)/u, \quad [1, 5]$

9–12
(a) Calcule el valor promedio de f sobre el intervalo dado.
(b) Encuentre c tal que $f_{\text{prom}} = f(c)$.
(c) Trace la gráfica de f y el rectángulo cuya área es la misma que el área bajo la gráfica de f.

9. $f(x) = (x - 3)^2, \quad [2, 5]$

10. $f(x) = 1/x, \quad [1, 3]$

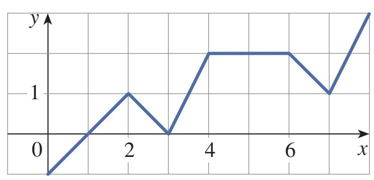
11. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$

12. $f(x) = 2xe^{-x^2}, \quad [0, 2]$

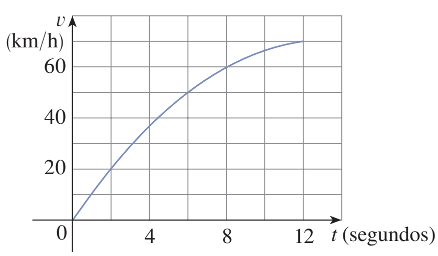
13. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, demuestre que f toma el valor de 4 por lo menos una vez en el intervalo [1, 3].

14. Determine los números b tales que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ es igual a 3.

15. Encuentre el valor promedio de f sobre [0, 8].



16. Se muestra la gráfica de velocidad de un automóvil que acelera.



(a) Utilice la regla del punto medio para estimar la velocidad promedio del automóvil durante los primeros 12 segundos.
(b) ¿En qué momento la velocidad instantánea fue igual a la velocidad promedio?

17. En una cierta ciudad la temperatura (en °C) t horas después de las 9:00 se modeló mediante la función

$$T(t) = 20 + 6 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12}$$

Determine la temperatura promedio durante el período de 9:00 hasta 21:00.

18. La velocidad v de la sangre que fluye en un vaso sanguíneo con radio R y longitud l a una distancia r del eje central es

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre (véase el ejemplo 3.7.7). Encuentre la velocidad promedio (respecto a r) sobre el intervalo $0 \leqslant r \leqslant R$. Compare la velocidad promedio con la velocidad máxima.

19. La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $12/\sqrt{x + 1}$ kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Determine la densidad promedio de la varilla.

20. (a) Una taza de café tiene una temperatura de 95 °C y le toma 30 minutos enfriarse a 61 °C en una habitación con una temperatura de 20 °C. Utilice la ley del enfriamiento de Newton (sección 3.8) para demostrar que la temperatura del café después de t minutos es

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

donde $k \approx 0.02$.
(b) ¿Cuál es la temperatura promedio del café durante la primera media hora?

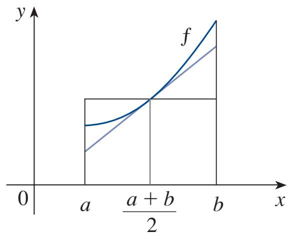
21. En el ejemplo 3.8.1 se modeló la población mundial en la segunda mitad del siglo xx por la ecuación $P(t) = 2560e^{0.017185t}$. Utilice esta ecuación para estimar la población mundial promedio durante este período.

22. Si un cuerpo en caída libre parte del reposo, entonces su desplazamiento está dado por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Sea la velocidad después de un tiempo T sea v_T. Demuestre que si se calcula el promedio de las velocidades respecto a t, se obtiene $v_{\text{prom}} = \frac{1}{2}v_T$; pero si se calcula el promedio de las velocidades respecto a s, se obtiene $v_{\text{prom}} = \frac{2}{3}v_T$.

23. Utilice el resultado del ejercicio 5.5.83 para calcular el volumen promedio de aire inhalado en los pulmones en un ciclo respiratorio.

24. Utilice el diagrama para mostrar que si f es cóncava hacia arriba sobre $[a, b]$, entonces

$$f_{\text{prom}} > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



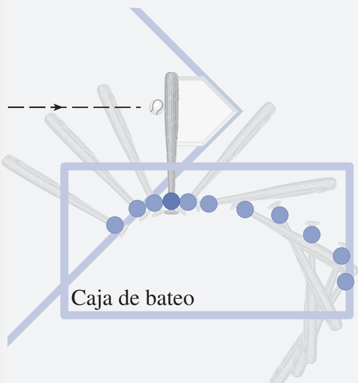
25. Demuestre el teorema del valor medio para integrales aplicando el teorema del valor medio para derivadas (véase la sección 4.2) a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

26. Si $f_{\text{prom}}[a, b]$ denota el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, demuestre que

$$f_{\text{prom}}[a, b] = \left(\frac{c-a}{b-a}\right) f_{\text{prom}}[a, c] + \left(\frac{b-c}{b-a}\right) f_{\text{prom}}[c, b]$$

PROYECTO DE APLICACIÓN EL CÁLCULO Y EL BÉISBOL

En este proyecto se exploran tres de las muchas aplicaciones del cálculo al béisbol. Las interacciones físicas del juego, especialmente la colisión de la pelota y el bate, son bastante complejas, y sus modelos se examinan en detalle en un libro de Robert Adair, *The Physics of Baseball*, 3a. ed. (Nueva York, 2002).



Vista aérea de la posición de un bate de béisbol, que se muestra cada quincuagésimo de segundo durante un bateo típico. (Adaptado de *The Physics of Baseball*)

1. Puede sorprenderle saber que el contacto durante la colisión de una pelota de béisbol y el bate dura solo aproximadamente una milésima de segundo. Aquí se estima la fuerza promedio sobre el bate durante esta colisión, calculando primero el cambio de la cantidad de movimiento de la bola.

La *cantidad de movimiento* p de un objeto es el producto de su masa m y su velocidad v, es decir, $p = mv$. Suponga que sobre un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta, actúa una fuerza $F = F(t)$ que es una función continua del tiempo.

(a) Demuestre que el cambio de la cantidad de movimiento durante un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es igual a la integral de F de t_0 a t_1; es decir, demuestre que

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$$

Esta integral se llama *impulso* de la fuerza en el intervalo de tiempo.

(b) Un lanzador lanza una bola rápida a 90 millas/h a un bateador que conecta un *hit* en línea directamente de regreso hacia el lanzador. La pelota está en contacto con el bate 0.001 s y abandona el bate con una velocidad 110 millas/h. Una pelota de béisbol pesa 5 oz y, en el sistema de unidades de Estados Unidos, su masa se mide en slugs: $m = w/g$, donde $g = 32$ pies/s^2.

(i) Encuentre el cambio en la cantidad de movimiento de la bola.

(ii) Determine la fuerza promedio sobre el bate.

2. En este problema se calcula el trabajo necesario para que un lanzador arroje una bola rápida a 90 millas/h, considerando primero la energía cinética.

La *energía cinética EC* de un objeto de masa m y velocidad v está dada por $EC = \frac{1}{2}mv^2$. Suponga que un objeto de masa m se está moviendo en línea recta, y actúa sobre él una fuerza $F = F(s)$ que depende de su posición s. De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$F(s) = ma = m\,\frac{dv}{dt}$$

donde a y v denotan la aceleración y la velocidad del objeto.

(a) Demuestre que el trabajo de mover el objeto desde una posición s_0 a una posición s_1 es igual al cambio de energía cinética del objeto; es decir, demuestre que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$