Utilizando la fórmula 1 y resolviendo para la integral requerida, obtiene

$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C \qquad \blacksquare$$

Integrales como la del ejemplo anterior podrían parecer muy complejas, pero ocurren con frecuencia en aplicaciones de la integración, como se verá en el capítulo 8. Integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$ se pueden determinar mediante métodos similares utilizando la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

Por último, es posible hacer uso de otro conjunto de identidades trigonométricas:

Estas identidades producto se discuten en el apéndice D.

$\boxed{2}$ Para evaluar las integrales (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx$ o (c) $\int \cos mx \cos nx\,dx$, utilice la identidad correspondiente:

$$\text{(a)}\ \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\text{(b)}\ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\text{(c)}\ \cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

EJEMPLO 9 Evalúe $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría evaluarse utilizando integración por partes, pero es más fácil utilizar la identidad en la ecuación 2(a) como sigue:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx &= \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\right) + C \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

7.2 EJERCICIOS

1–49 Evalúe la integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$

2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\,dx$

3. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7\theta \cos^5\theta\,d\theta$

4. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$

5. $\int \operatorname{sen}^5(2t)\cos^2(2t)\,dt$

6. $\int t\cos^5(t^2)\,dt$

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$

8. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

9. $\int_0^{\pi} \cos^4(2t)\,dt$

10. $\int x \operatorname{sen}^3 x\,dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

12. $\int_0^{\pi/2} (2 - \operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta$

13. $\int \sqrt{\cos\theta}\,\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta$

14. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2(1/t)}{t^2}\,dt$

15. $\int \cot x \cos^2 x\,dx$

16. $\int \tan^2 x \cos^3 x\,dx$

17. $\int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x\,dx$

18. $\int \operatorname{sen} x \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)dx$

19. $\int t \operatorname{sen}^2 t\,dt$

20. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

21. $\int \tan x \sec^3 x\,dx$

22. $\int \tan^2\theta \sec^4\theta\,d\theta$

23. $\int \tan^2 x\,dx$

24. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\,dx$

25. $\int \tan^4 x \sec^6 x\,dx$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^6\theta \tan^6\theta\,d\theta$

27. $\int \tan^3 x \sec x\,dx$

28. $\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx$

29. $\int \tan^3 x \sec^6 x\,dx$

30. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 t\,dt$

31. $\int \tan^5 x\, dx$

32. $\int \tan^2 x \sec x\, dx$

33. $\int x \sec x \tan x\, dx$

34. $\int \frac{\operatorname{sen} \phi}{\cos^3 \phi}\, d\phi$

35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 x\, dx$

36. $\int \csc^4 x \cot^6 x\, dx$

37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^5 \phi \csc^3 \phi\, d\phi$

38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4 \theta \cot^4 \theta\, d\theta$

39. $\int \csc x\, dx$

40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^3 x\, dx$

41. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x\, dx$

42. $\int \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 6\theta\, d\theta$

43. $\int_0^{\pi/2} \cos 5t \cos 10t\, dt$

44. $\int \operatorname{sen} x \sec^5 x\, dx$

45. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$

46. $\int \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$

47. $\int \frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x}\, dx$

48. $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$

49. $\int x \tan^2 x\, dx$

50. Si $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x \sec x\, dx = I$, expresse el valor de $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \sec x\, dx$ en términos de I.

51–54 Evalúe las integrales indefinidas siguientes. Ilustre y verifique que su respuesta es razonable, al trazar la gráfica del integrando y su antiderivada (tome $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2)\, dx$

52. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$

53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x\, dx$

54. $\int \sec^4\left(\tfrac{1}{2}x\right) dx$

55. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Evalúe $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por cuatro métodos:
(a) al sustituir $u = \cos x$
(b) al sustituir $u = \operatorname{sen} x$
(c) con la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
(d) al integrar por partes
Explique las diferencias aparentes en las respuestas.

57–58 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^3 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

58. $y = \tan x, \quad y = \tan^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

59–60 Utilice la gráfica del integrando para intuir el valor de la integral. Después use el método de esta sección para probar que su intuición sea correcta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

60. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

61–64 Encuentre el volumen obtenido al rotar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

61. $y = \operatorname{sen} x, \ y = 0, \ \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor del eje x

62. $y = \operatorname{sen}^2 x, \ y = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor del eje x

63. $y = \operatorname{sen} x, \ y = \cos x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4;$ alrededor de $y = 1$

64. $y = \sec x, \ y = \cos x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3;$ alrededor de $y = -1$

65. Una partícula se mueve sobre una línea recta de acuerdo con la función velocidad $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encuentre su posición $s = f(t)$ si $f(0) = 0$.

66. La electricidad doméstica se suministra en la forma de corriente alterna que varía de 155 V a -155 V con una frecuencia de 60 ciclos por segundo (Hz). El voltaje está dado por la ecuación

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\, \pi t)$$

donde t es el tiempo en segundos. Los voltímetros leen el voltaje RMS, por sus siglas en inglés (raíz media cuadrática), que es la raíz cuadrada del valor promedio de $[E(t)]^2$ sobre un ciclo.
(a) Calcule el voltaje RMS de la corriente doméstica.
(b) Muchas estufas eléctricas requieren un voltaje RMS de 220 V. Encuentre la amplitud A correspondiente necesaria para el voltaje $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demuestre las fórmulas siguientes, donde m y n son enteros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

70. Una *serie finita de Fourier* está dada por la suma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx \\ &= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx \end{aligned}$$

Demuestre que el m-ésimo coeficiente a_m está dado por la fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx$$