Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Autovalores y Autovectores

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Aprender a Calcular Eigenvalores y Eigenvectores

- Autovalores y Autovectores
- Radio Espectral
- Matrices Convergentes

Autovalores y Autovectores

Si A es una matriz cuadrada, el **polinomio característico** de A está definido por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Si p es el polinomio característico de la matriz A, los ceros de p reciben el nombre de **eigenvalores**, o valores característicos, de la matriz A. Si λ es un eigenvalor de A y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ satisface $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}$ es un **eigenvector**, o vector característico, de A correspondiente al eigenvalor λ.

Para determinar los eigenvalores de una matriz, podemos utilizar el hecho de que

- λ es un eigenvalor de A si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$.

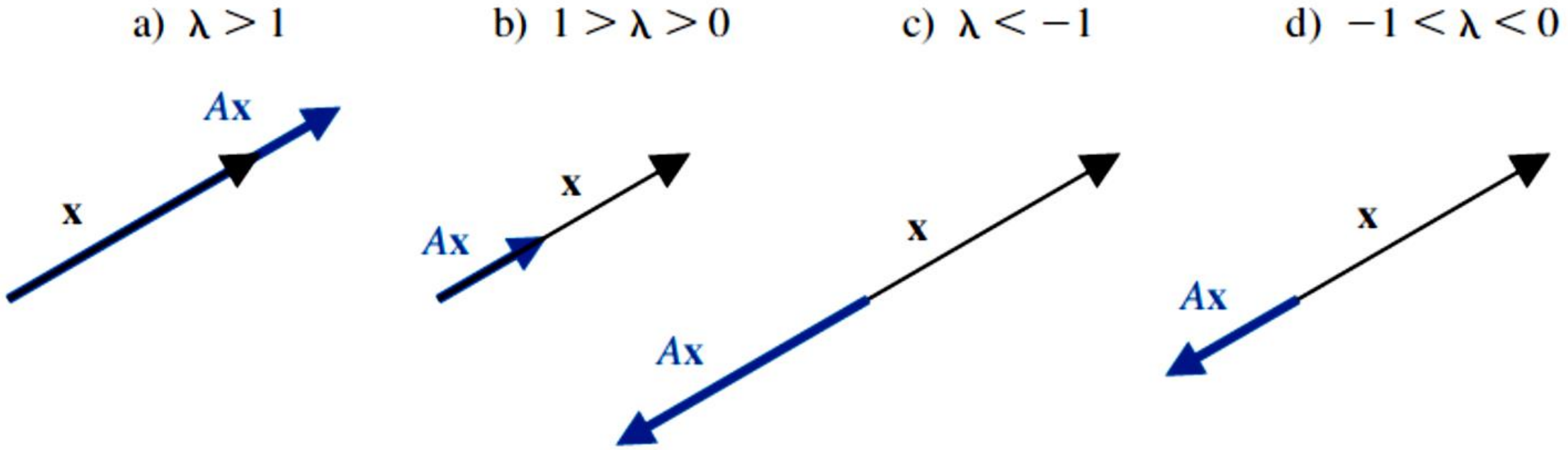
Una vez que se ha encontrado el eigenvalor λ, un eigenvector correspondiente $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se determina al resolver el sistema

- $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Autovalores y Autovectores

Si $\mathbf{x}$ es un eigenvector asociado con el eigenvalor real λ, entonces $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, por lo que la matriz A transforma el vector $\mathbf{x}$ en un múltiplo escalar de sí mismo.

- Si λ es real y $\lambda > 1$, entonces A tiene el efecto de expandir $\mathbf{x}$ en un factor de λ, como se ilustra en la figura 7.6 a).
- Si $0 < \lambda < 1$, entonces A comprime $\mathbf{x}$ en un factor de λ (consulte la figura 7.6 b)).
- Si $\lambda < 0$, los efectos son similares (consulte la figura 7.6 c) y d)), a pesar de que la dirección de $A\mathbf{x}$ está invertida.



$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

Autovalores y Autovectores

www.uneatlantico.es

Ejemplo:

Determine los autovalores y los autovectores para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Radio Espectral

El **radio espectral** $\rho(A)$ de una matriz A está definido por

$$\rho(A) = \text{máx } |\lambda|, \text{ donde } \lambda \text{ es un eigenvalor de } A.$$

(Para $\lambda = \alpha + \beta i$, complejo, definimos $|\lambda| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$.) ■

Si A es una matriz $n \times n$, entonces

i) $\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{1/2}$,

ii) $\rho(A) \leq \|A\|$, para cualquier norma natural $\|\cdot\|$.

Radio Espectral

Ejemplo:

Determine la norma l_2 para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrices Convergentes

Llamamos **convergente** a una matriz A $n \times n$ si

$$\lim_{k\to\infty} (A^k)_{ij} = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n \text{ y } j = 1, 2, \ldots, n. \quad \blacksquare$$

Ejemplo:

Muestre que A es una matriz convergente.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es