están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (llamada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la razón de cambio de la población de una colonia de bacterias respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería, e incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio son derivadas y por tanto se pueden interpretar como pendientes de rectas tangentes. Esto le da un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que usted resuelve problemas en que intervienen rectas tangentes, no solo resuelve un problema de geometría. También se está resolviendo en forma implícita gran variedad de problemas de ciencias y de ingeniería, que implican razones de cambio.

2.7 EJERCICIOS

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
(a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
(b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Trace la curva $y = e^x$ en los rectángulos de vista $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué nota acerca de la curva cuando hace un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Trace la gráfica de la parábola y la recta tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la recta tangente sean indistinguibles.

4. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Trace la curva y la recta tangente en rectángulos de vista cada vez más pequeños centrados en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5–8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2, \quad (2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1, \quad (2, 3)$

7. $y = \sqrt{x}, \quad (1, 1)$

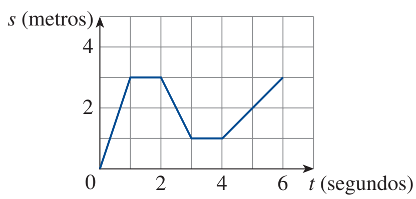
8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}, \quad (1, 1)$

---

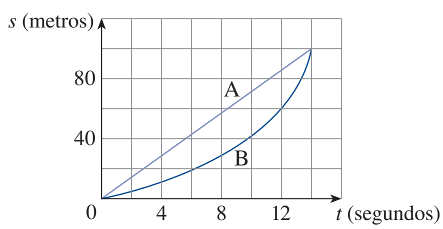
9. (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x + 3$ en el punto donde $x = a$.
(b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
(c) Trace la gráfica de la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

10. (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
(b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Trace la gráfica de la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

11. (a) Una partícula empieza moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra enseguida. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?
(b) Trace una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones posición de dos corredoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



(a) Describa y compare cómo desarrollaron la carrera las competidoras.
(b) ¿En qué momento hay la mayor distancia entre las competidoras?
(c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) una vez que transcurren t segundos está dada por $y = 10t - 4.9t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

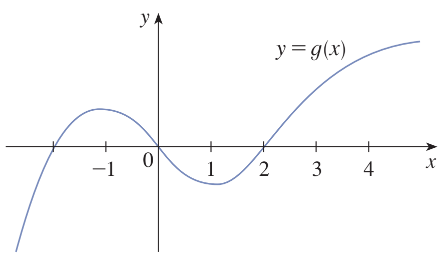
14. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 10t - 1.86t^2$.
(a) Encuentre la velocidad de la roca después de un segundo.
(b) Encuentre la velocidad de la roca cuando $t = a$.
(c) ¿Cuándo caerá la roca a la superficie?
(d) ¿Con qué velocidad chocará la roca contra la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

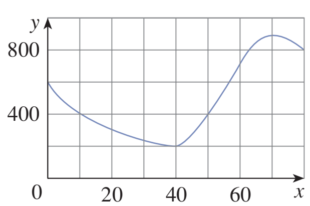
16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo:
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3.5, 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4.5]$
(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
(c) Trace la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio en el inciso (a). Luego, dibuje la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea en el inciso (b).

17. Para la función g cuya gráfica está dada, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



18. Se muestra la gráfica de una función f.
(a) Encuentre la razón de cambio promedio de f en el intervalo [20, 60].
(b) Identifique un intervalo en el que la razón de cambio promedio de f es 0.
(c) ¿Qué intervalo da una mayor razón de cambio, [40, 60] o [40, 70]?
(d) Calcule $\dfrac{f(40) - f(10)}{40 - 10}$ ¿qué representa geométricamente este valor?



19. Para la gráfica de la función f del ejercicio 18:
(a) Calcule el valor $f'(50)$.
(b) ¿Es $f'(10) > f'(30)$?
(c) ¿Es $f'(60) > \dfrac{f(80) - f(40)}{80 - 40}$? Explique su respuesta.

20. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

21. Si una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

22. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en (4, 3) pasa a través del punto (0, 2), encuentre $f(4)$ y $f'(4)$.

23. Trace la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

24. Trace la gráfica de una función g para la cual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

25. Trace la gráfica de una función g que es continua en su dominio $(-5, 5)$ y donde $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$, $g'(-2) = 0$, $\lim_{x\to-5^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to5^-} g(x) = 3$.

26. Trace la gráfica de una función f donde el dominio es $(-2, 2)$, $f'(0) = -2$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$, f es continua en todos los números dentro de su dominio excepto en ±1, y f es impar.

27. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto (1, 2).

28. Si $g(x) = x^4 - 2$ encuentre $g'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto (1, −1).

29. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto (2, 2).
(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

30. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y utilícela para encontrar las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos (2, 8) y (3, 9).
(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

31–36 Encuentre $f'(a)$.

31. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

32. $f(t) = 2t^3 + t$

33. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

34. $f(x) = x^{-2}$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

36. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

37–42 Cada uno de los límites siguientes representa la derivada de alguna función f en algún número a. Establezca una f y una a en cada caso.

37. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{e^{-2+h} - e^{-2}}{h}$

39. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^6 - 64}{x - 2}$

40. $\lim\limits_{x \to 1/4} \dfrac{\dfrac{1}{x} - 4}{x - \frac{1}{4}}$

41. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

42. $\lim\limits_{\theta \to \pi/6} \dfrac{\operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2}}{\theta - \pi/6}$

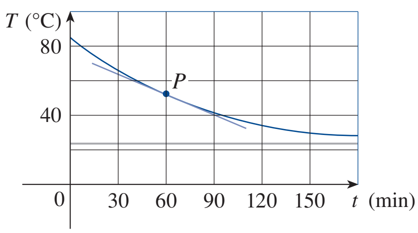
43–44 Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la rapidez cuando $t = 4$.

43. $f(t) = 80t - 6t^2$

44. $f(t) = 10 + \dfrac{45}{t + 1}$

45. Una lata de gaseosa tibia se pone a enfriar en un refrigerador. Trace la gráfica de la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la razón de cambio después de una hora?

46. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 85 °C y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde la temperatura es de 24 °C. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la recta tangente, calcule la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



47. Investigadores midieron la concentración promedio de alcohol en la sangre $C(t)$ de ocho hombres comenzando después de una hora del consumo de 30 ml de etanol (correspondiente a dos bebidas alcohólicas).

t (horas)	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$C(t)$ (mg/mL)	0.33	0.24	0.18	0.12	0.07

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a t para cada intervalo de tiempo:
  (i) $[1.0, 2.0]$ (ii) $[1.5, 2.0]$
  (iii) $[2.0, 2.5]$ (iv) $[2.0, 3.0]$
  En cada caso, incluya las unidades.
(b) Calcule la razón de cambio instantánea en $t = 2$ e interprete su resultado. ¿Cuáles son las unidades?

Fuente: Adaptado de P. Wilkinson *et al*., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State", *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5 (1977): 207–224.

48. En la tabla se proporciona el número N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 1 de octubre.)

Año	2004	2006	2008	2010	2012
N	8569	12,440	16,680	16,858	18,066

(a) Determine la tasa promedio de crecimiento
  (i) de 2006 a 2008
  (ii) de 2008 a 2010
  En cada caso incluya las unidades. ¿Qué concluye?
(b) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2010 considerando el promedio de dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2010 midiendo la pendiente de una recta tangente.

49. La tabla muestra el número de pasajeros P que llegaron a Irlanda por aire, en millones.

Año	2001	2003	2005	2007	2009
P	8.49	9.65	11.78	14.54	12.84

(a) Encuentre la tasa promedio de incremento de P
  (i) de 2001 a 2005 (ii) de 2003 a 2005
  (iii) de 2005 a 2007
  En cada caso, incluya las unidades.
(b) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2005 tomando el promedio de dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?

50. La tabla muestra valores de la carga viral $V(t)$ en el paciente 303 con VIH, medido en copias de ARN/mL, t días después de que se comenzó con el tratamiento ABT-538.

t	4	8	11	15	22
$V(t)$	53	18	9.4	5.2	3.6

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de V con respecto a t en cada intervalo de tiempo:
  (i) $[4, 11]$ (ii) $[8, 11]$
  (iii) $[11, 15]$ (iv) $[11, 22]$
  ¿Cuáles son las unidades?
(b) Estime e interprete el valor de la derivada $V'(11)$.

Fuente: Adaptada de D. Ho *et al*., "Rapid Turnover of Plasma Virions and CD4 Lymphocytes in HIV-1 Infection", *Nature* 373 (1995): 123–126.

51. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.
(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a x, cuando cambia el nivel de producción:
  (i) de $x = 100$ a $x = 105$
  (ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encuentre la razón de cambio instantáneo de C con respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

52. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 litros de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, entonces la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t)\ 5\ 100000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantáneo de V con respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una frase o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

53. El costo de producir x kilogramos de oro a partir de una reciente mina de oro es $C = f(x)$ dólares.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿Que significa el enunciado $f'(50) = 36$?

(c) ¿Qué piensa usted: los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto plazo? ¿Y a largo plazo? Explique.

54. El número de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Suponga que existe una cantidad de espacio y nutrientes para las bacterias. ¿Cree que es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrientes, ¿afectaría su conclusión? Explique.

55. Sea $H(t)$ el costo diario (en dólares) para acondicionar una oficina de un edificio cuando la temperatura exterior es de t grados Celsius.

(a) ¿Qué significa $H'(15)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿Esperaría que $H'(15)$ fuera positiva o negativa? Explique su respuesta.

56. La cantidad (en kilogramos) de un café en grano gourmet que vende una empresa a un precio de p dólares por kilogramo es $Q = f(p)$.

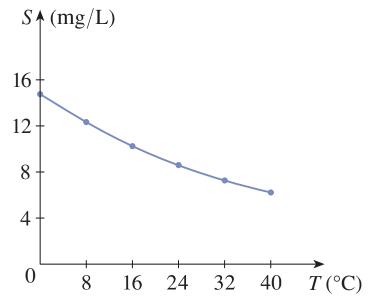
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿Es $f'(8)$ positivo o negativo? Explique su respuesta.

57. La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura de esta. (De esa manera la contaminación térmica influye en el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Calcule e interprete el valor de $S'(16)$.

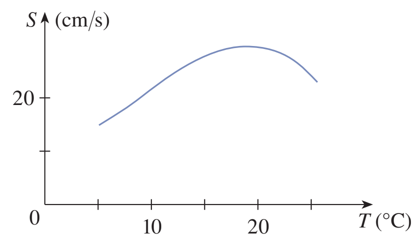


Fuente: C. Kupchella *et al.*, *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2a. ed. (Boston: Allyn and Bacon, 1989).

58. La gráfica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado S del salmón Coho.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Calcule los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



59–60 Determine si $f'(0)$ existe.

59. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

60. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

61. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{1000}\operatorname{sen}(1000x)$ en el rectángulo de vista $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$. ¿Qué pendiente parece que tiene la gráfica en el origen?

(b) Haga un acercamiento para la venta de vista $[-0.4, 0.4]$ por $[-0.25, 0.25]$ y calcule el valor de $f'(0)$. ¿Esto concuerda con la respuesta del inciso (a)?

(c) Ahora haga un acercamiento a la ventana de vista $[-0.008, 0.008]$ por $[-0.005, 0.005]$. ¿Desea revisar su cálculo para $f'(0)$?