En esta versión se dice que si toma una función F, se deriva y luego se integra el resultado, se vuelve a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

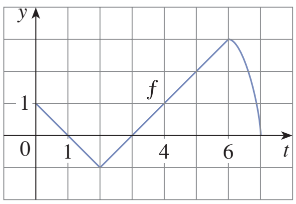
Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de determinar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que solo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en capítulos próximos verá que estos problemas retadores son accesibles para todos.

5.3 EJERCICIOS

1. Explique con exactitud qué se quiere decir con el enunciado: "la derivación y la integración son procesos inversos."

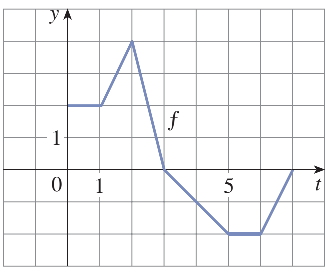
2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

(a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) ¿Dónde g tiene un valor máximo? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.



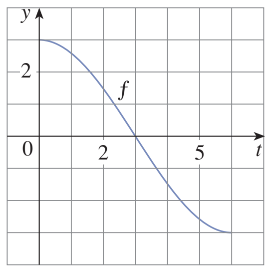
3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

(a) Evalúe $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
(b) ¿En qué intervalo g es creciente?
(c) ¿Dónde tiene g un valor máximo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.



4. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

(a) Evalúe $g(0)$ y $g(6)$.
(b) Estime $g(x)$, para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5.
(c) ¿En qué intervalo es creciente g?
(d) ¿Dónde g tiene un valor máximo?
(e) Trace una gráfica aproximada de g.
(f) Utilice la gráfica del inciso (e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.



5–6 Trace el área representada por $g(x)$. Luego determine $g'(x)$ de dos maneras: (a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y (b) evaluando la integral utilizando la parte 2 y después derivando.

5. $g(x) = \displaystyle\int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \displaystyle\int_0^x (2 + \operatorname{sen} t)\,dt$

7–18 Use la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de cada una de las funciones siguientes.

7. $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t + t^3}\,dt$

8. $g(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(1 + t^2)\,dt$

9. $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$

10. $h(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{\sqrt{t}}{t + 1}\,dt$

11. $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$$\left[\textit{Sugerencia: } \int_x^0 \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_0^x \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$$

12. $R(y) = \displaystyle\int_y^2 t^3 \operatorname{sen} t\,dt$

13. $h(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \ln t\,dt$

14. $G(x) = \displaystyle\int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

15. $y = \int_1^{3x+2} \frac{t}{1+t^3}\,dt$

16. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

17. $y = \int_{\sqrt{x}}^{\pi/4} \theta \tan \theta\,d\theta$

18. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1+u^2}\,du$

19–44 Evalúe cada una de las integrales siguientes.

19. $\int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\,dx$

20. $\int_{-1}^1 x^{100}\,dx$

21. $\int_0^2 \left(\frac{4}{5}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{2}{5}t\right) dt$

22. $\int_0^1 \left(1 - 8v^3 + 16v^7\right) dv$

23. $\int_0^1 x^{4/5}\,dx$

24. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \operatorname{sen} \theta\,d\theta$

26. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta\,d\theta$

27. $\int_0^2 x(2 + x^5)\,dx$

28. $\int_0^1 \left(3 + x\sqrt{x}\right) dx$

29. $\int_1^4 \frac{2 + x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int_{-1}^2 (3u - 2)(u + 1)\,du$

31. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc t \cot t\,dt$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \csc^2 \theta\,d\theta$

33. $\int_0^1 (1 + r)^3\,dr$

34. $\int_0^3 (2 \operatorname{sen} x - e^x)\,dx$

35. $\int_1^2 \frac{v^3 + 3v^6}{v^4}\,dv$

36. $\int_1^{18} \sqrt{\frac{3}{z}}\,dz$

37. $\int_0^1 (x^e + e^x)\,dx$

38. $\int_0^1 \cosh t\,dt$

39. $\int_{-1}^1 e^{u+1}\,du$

40. $\int_1^3 \frac{y^3 - 2y^2 - y}{y^2}\,dy$

41. $\int_0^4 2^s\,ds$

42. $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

43. $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

44. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

45–48 Trace la gráfica de la región encerrada por las curvas dadas y calcule su área.

45. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

46. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$

47. $y = 4 - x^2$, $y = 0$

48. $y = 2x - x^2$, $y = 0$

49–52 Utilice una gráfica para dar una aproximación del área de la región que está bajo la curva dada. Después, encuentre el área exacta.

49. $y = \sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 27$

50. $y = x^{-4}$, $1 \leqslant x \leqslant 6$

51. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$

52. $y = \sec^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

53–54 Evalúe la integral e interprétela como una diferencia de áreas. Ilustre con un trazo.

53. $\int_{-1}^2 x^3\,dx$

54. $\int_{\pi/6}^{2\pi} \cos x\,dx$

55–58 ¿Qué está mal en la ecuación?

55. $\int_{-2}^1 x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

56. $\int_{-1}^2 \frac{4}{x^3}\,dx = \left.-\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

57. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec \theta \tan \theta\,d\theta = \sec \theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

58. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi} = 0$

59–63 Determine la derivada de cada una de las funciones siguientes.

59. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du$

$\left[\textit{Sugerencia}: \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_0^{3x} f(u)\,du\right]$

60. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \operatorname{sen} t\,dt$

61. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$

62. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\,dt$

63. $y = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \ln(1 + 2v)\,dv$

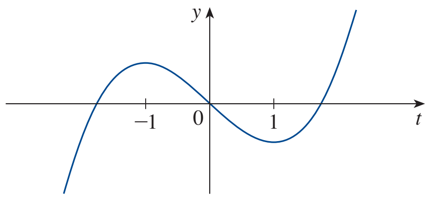
64. Si $f(x) = \int_0^x (1 - t^2)e^{t^2}\,dt$, ¿en qué intervalos es creciente f?

65. ¿En qué intervalo la curva

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2}\,dt$$

es cóncava hacia abajo?

66. Sea $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra. ¿Dónde es F cóncava hacia abajo?



67. Sea $F(x) = \int_2^x e^{t^2}\,dt$. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = F(x)$ en punto cuya coordenada x es 2.

68. Si $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\,dt$ y $g(y) = \int_3^y f(x)\,dx$, determine $g''(\pi/6)$.

69. Si $f(1) = 12$, f' es continua y $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, ¿cuál es el valor de $f(4)$?

70. La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.

(a) Demuestre que $\int_a^b e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

71. La función S de Fresnel se definió en el ejemplo 3, y en las figuras 7 y 8 se trazaron sus gráficas.

(a) ¿Para qué valores de x esta función tiene valores máximos locales?

(b) ¿Para qué intervalos esta función es cóncava hacia arriba?

SAC (c) Utilice una gráfica para resolver la ecuación redondeada a dos decimales.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0.2$$

SAC **72.** La **función integral sinusoidal**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

es importante en la ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero se sabe que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que se define $f(0) = 1$, y esto convierte a f en una función continua en todo su dominio].

(a) Trace la gráfica de Si.

(b) ¿Para qué valores de x tiene esta función valores máximos locales?

(c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

(d) ¿Esta función tiene asíntotas horizontales?

(e) Resuelva la ecuación siguiente redondeada a un decimal.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 1$$

73–74 Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

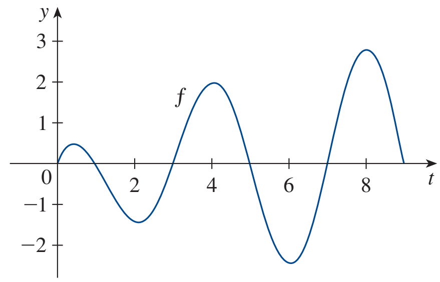
(a) ¿En qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?

(b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?

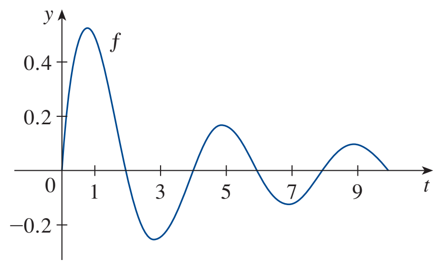
(c) ¿En qué intervalos g es cóncava hacia abajo?

(d) Trace la gráfica de g.

73.



74.



75–76 Evalúe el límite reconociéndolo primero como una suma de Riemann para una función definida en [0, 1].

75. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^4}{n^5} + \frac{i}{n^2} \right)$

76. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$

77. Justifique (3) para el caso $h < 0$.

78. Si f es continua y g y h son funciones derivables, determine una fórmula para

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

79. (a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leqslant 1.25$.

80. (a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduzca que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

81. Demuestre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0.1$$

comparando el integrando con una función más simple.

82. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

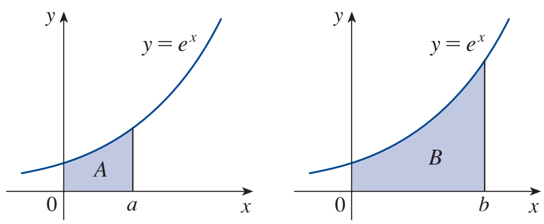
y $$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la correspondiente a $f(x)$.
(b) Trace las gráficas de f y g.
(c) ¿Dónde es derivable f? ¿Dónde es derivable g?

83. Determine una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para toda } x > 0$$

84. El área B es tres veces el área A. Exprese b en términos de a.



85. Una compañía manufacturera tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a una tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Ya que cada vez que la máquina se somete a una reparación se incurre en un costo fijo A, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones.

(a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\,ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación.
(b) Sea $C = C(t)$ dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

¿Qué representa C y por qué desearía la compañía minimizar C?
(c) Demuestre que C tiene un valor mínimo en los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

86. Una compañía de alta tecnología compra un nuevo sistema de computación cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará a una tasa $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento a razón de $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.

(a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.
(b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y $$g(t) = \frac{Vt^2}{12{,}900} \qquad t > 0$$

Determine la duración del tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ equivalga al valor inicial V.
(c) Determine el valor mínimo absoluto de C sobre $[0, T]$.
(d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado del inciso (a) en este caso.

5.4 Integrales indefinidas y el teorema del cambio neto

Ya se vio en la sección 5.3 que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si se supone que puede encontrarse una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, se replantearon el TFC2, de una manera que facilita más la aplicación a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

Integrales indefinidas

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que, si f es continua, entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ puede determinarse evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Se necesita una notación conveniente para las antiderivadas que nos facilite el trabajo con ellas. Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas