



Universidad  
Europea  
del Atlántico

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

# MATEMÁTICAS

## Funciones Reales de Variable Real

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

## Iniciar el estudio de las funciones reales de una variable

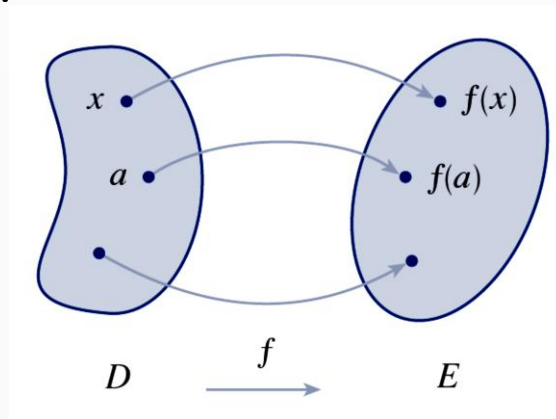


- Funciones reales de una variable real
- Funciones definidas por partes
- Funciones crecientes y decrecientes
- Funciones básicas
- Funciones nuevas a partir de funciones previas
- Función inversa

# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

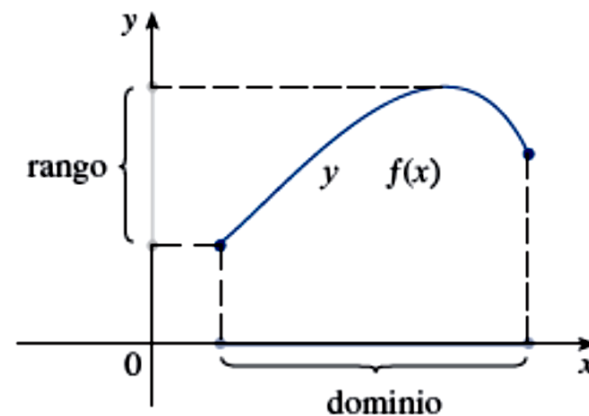
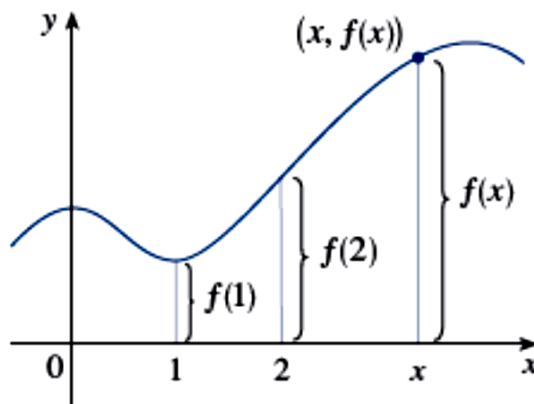
Sean  $D$  y  $E$  dos conjuntos cualesquiera. Una función  $f$  definida sobre  $D$  es una regla de asociación que asigna a cada elemento  $x \in D$  un único elemento  $y \in E$  al que se denomina *imagen* de  $x$  mediante  $f$ , y se escribe  $y = f(x)$ .



$$f: D \rightarrow E$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}$$

El método más común para visualizar una función es mediante su gráfica



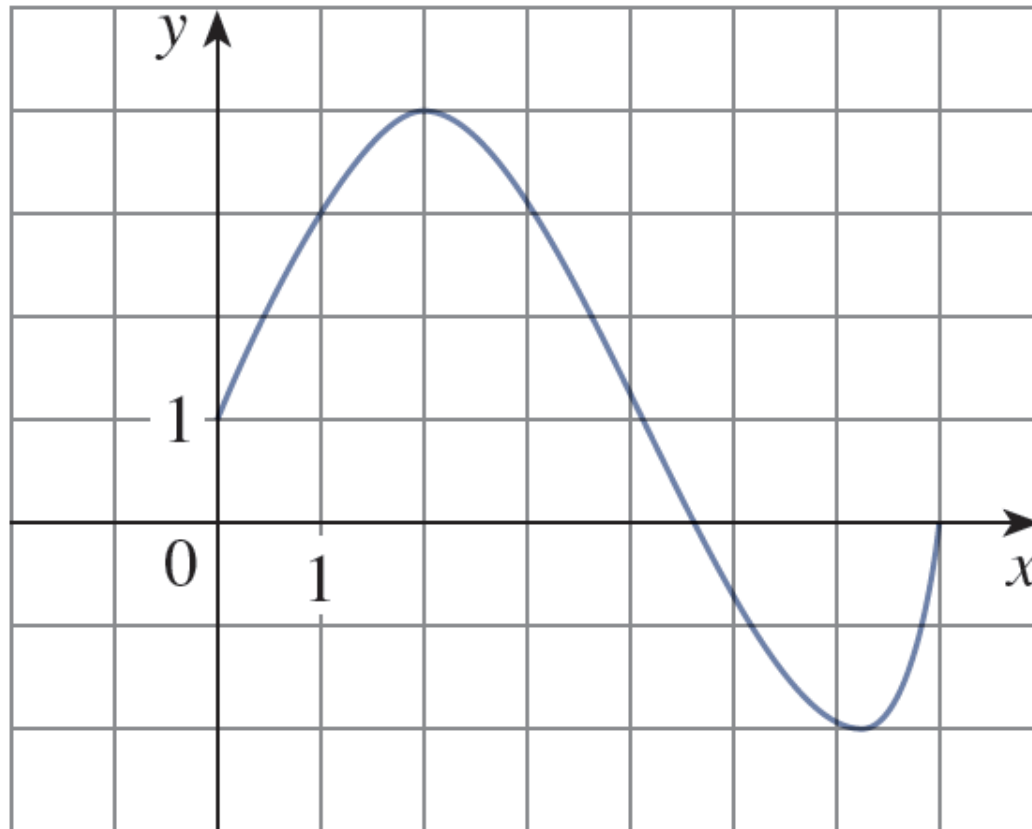
# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Ejemplo:

La gráfica de una función  $f$  se muestra en la figura a continuación:

- a) Encuentre los valores de  $f(1)$  y  $f(5)$ .
- b) ¿Cuál es el dominio y el rango de  $f$ ?



# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Ejemplo:

Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

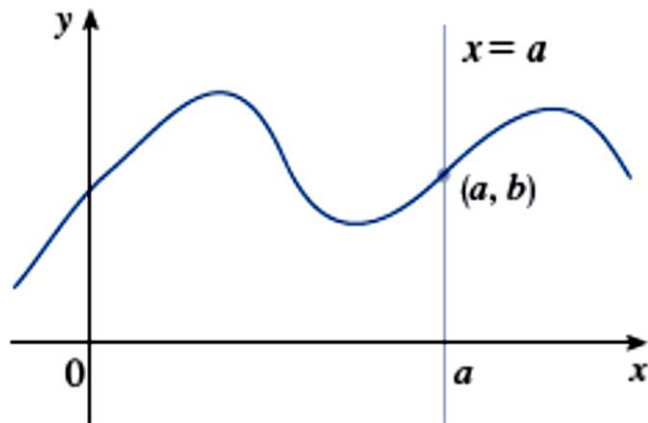
$$a) \quad f(x) = \sqrt{x+2}$$

$$b) \quad g(x) = \frac{1}{x^2-x}$$

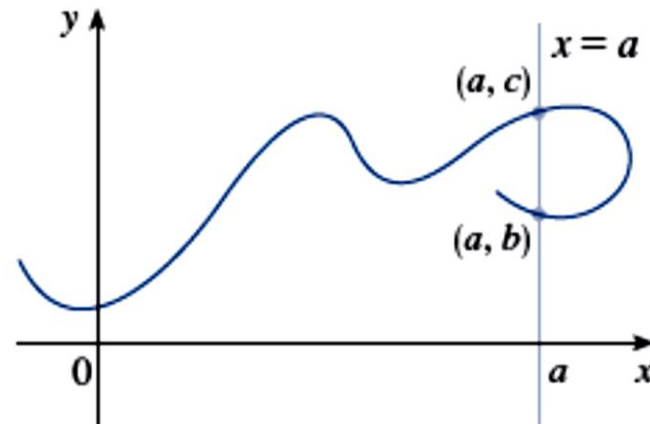
# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

No todas las curvas que se pueden trazar en el plano  $xy$  son gráficas de funciones.



(a) Esta curva representa una función.



(b) Esta curva no representa una función.

**La prueba de la recta vertical** Una curva en el plano  $xy$  es la gráfica de una función de  $x$  si y solo si no hay recta vertical que se interseque con la curva más de una vez.

# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones definidas por partes

Una función  $f$  se dice definida por partes cuando existe más de una regla de asociación (dependiente de  $x$ ) que asigna a cada elemento  $x \in D$  un único elemento  $y \in E$  al que se denomina *imagen* de  $x$  mediante  $f$ .

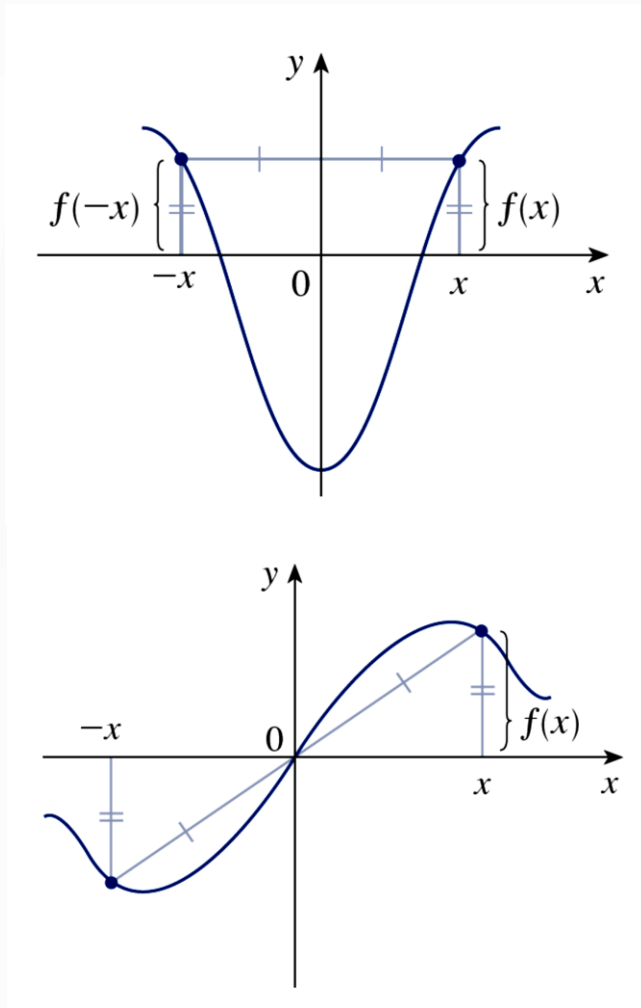
### Ejemplo:

Escriba la operación matemática valor absoluto de un número  $a$  como función.

# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Simetría



Si una función  $f$  satisface  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$  en su dominio, entonces  $f$  es una **función par**.

Si una función  $f$  satisface  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  en su dominio, entonces  $f$  es una **función impar**.



# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Simetría

### Ejemplo:

Determine si cada una de las funciones siguientes es par, impar o ninguna de las dos

$$(a) f(x) = x^5 + x$$

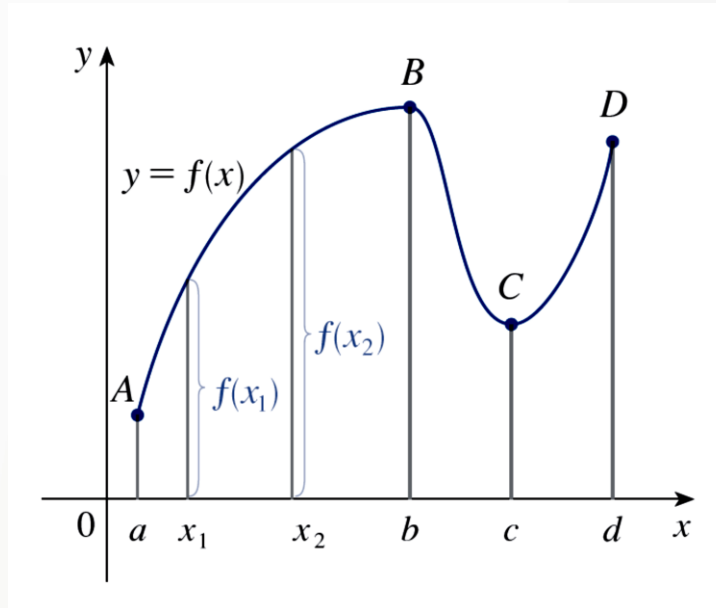
$$(b) g(x) = 1 - x^4$$

$$(c) h(x) = 2x - x^2$$

# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones crecientes y decrecientes



Una función  $f$  se llama **creciente** sobre un intervalo  $I$  si

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

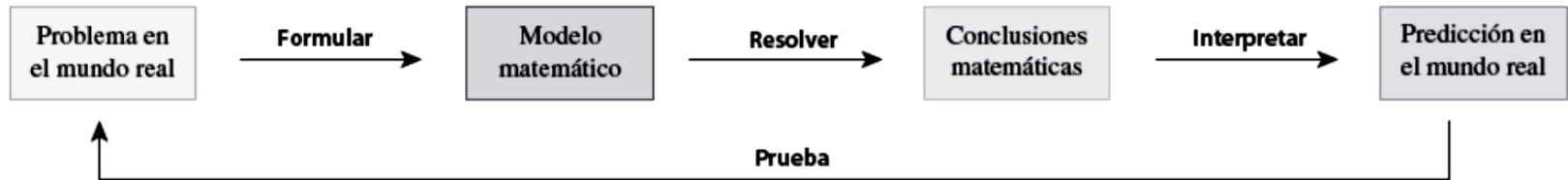
Se llama **decreciente** sobre  $I$  si

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones básicas



Un modelo matemático es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o ecuación de un fenómeno real. El propósito del modelo es comprender el fenómeno y, tal vez, hacer predicciones sobre su comportamiento futuro.

Existen numerosos modelos y funciones básicas:

1. Funciones lineales
2. Funciones polinómicas
3. Funciones potencia
4. Funciones racionales
5. Funciones trigonométricas
6. Funciones exponenciales
7. Funciones logarítmicas

# Funciones Reales de una Variable Real

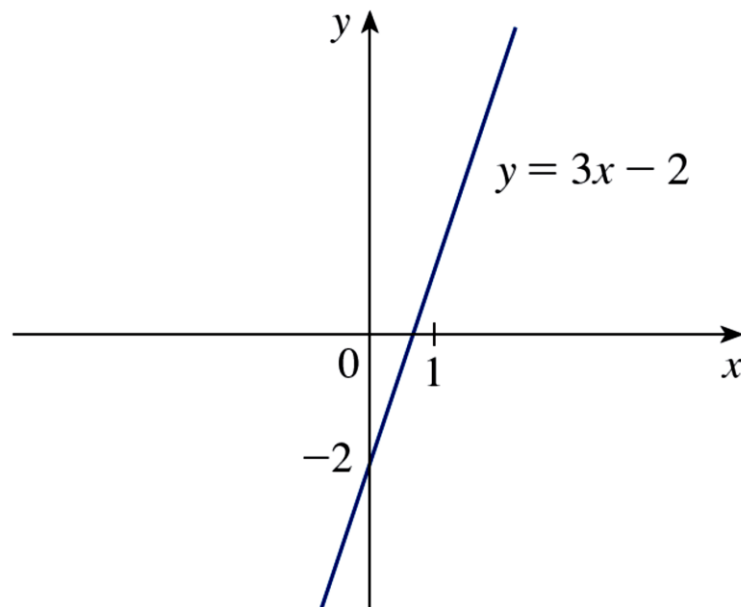
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones lineales

$$y = f(x) = mx + b$$

Donde  $m$  es la pendiente de la recta y  $b$  es la intersección de la recta con el eje  $y$ .

Dominio:  $Dom: \{x \in \mathbb{R}\}$



$x$	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

# Funciones Reales de una Variable Real

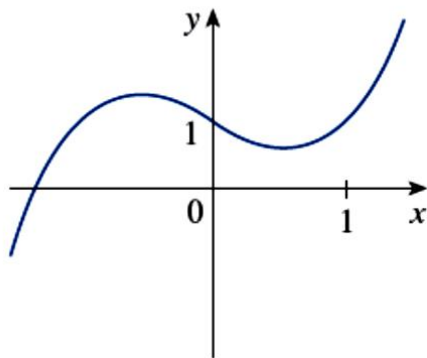
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones polinómicas

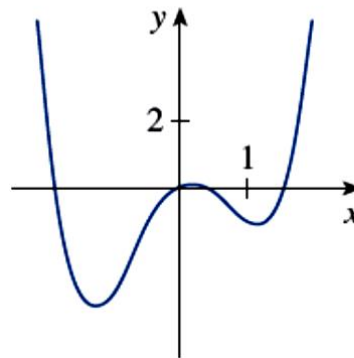
$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Donde  $n$  es un número entero no negativo y  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  son constantes llamadas coeficientes de la función polinómica.

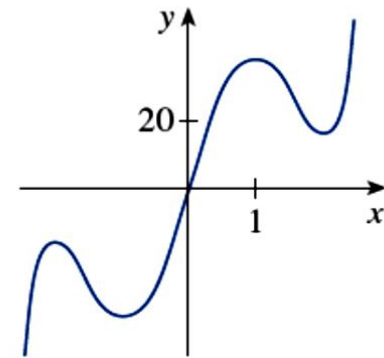
Dominio:  $Dom: \{x \in \mathbb{R}\}$



(a)  $y = x^3 - x + 1$



(b)  $y = x^4 - 3x^2 + x$



(c)  $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

# Funciones Reales de una Variable Real

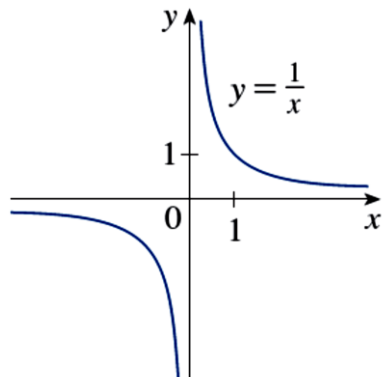
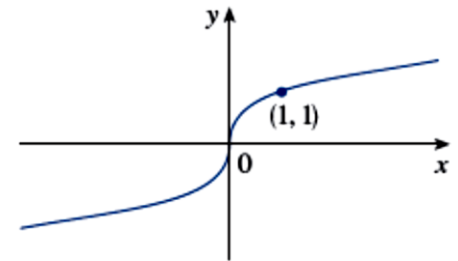
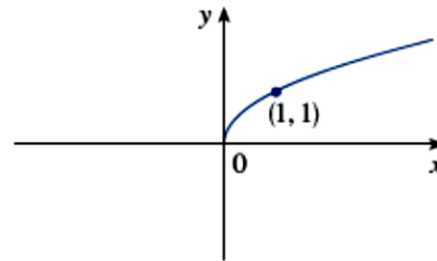
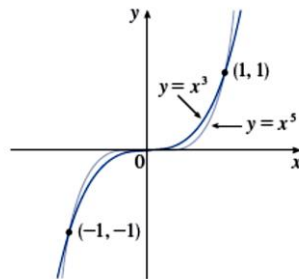
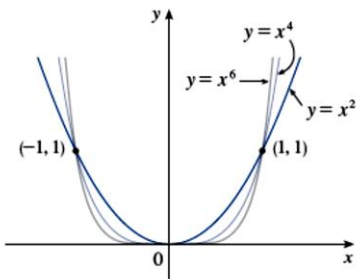
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones potencia

$$y = f(x) = x^a$$

Se consideran tres casos:

1.  $a = n$ , donde  $n$  es un entero positivo
2.  $a = 1/n$ , donde  $n$  es un entero positivo
3.  $a = -1$



Dominio:

$$\text{Dom: } \{x \in \mathbb{R}\} \text{ ó } \text{Dom: } \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$$

# Funciones Reales de una Variable Real

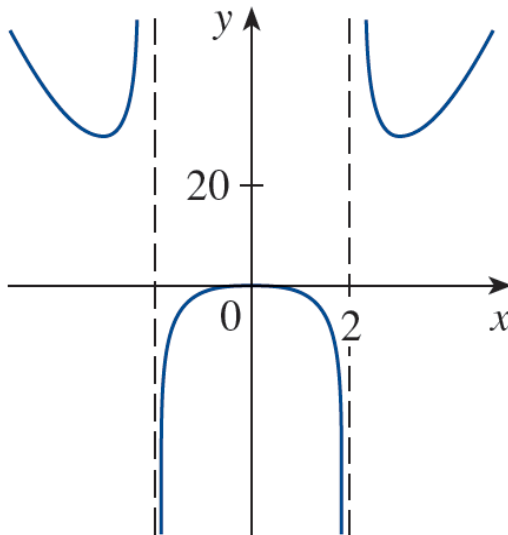
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones racionales

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde  $P$  y  $Q$  son polinomios

Dominio:  $Dom: \{x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq 0\}$



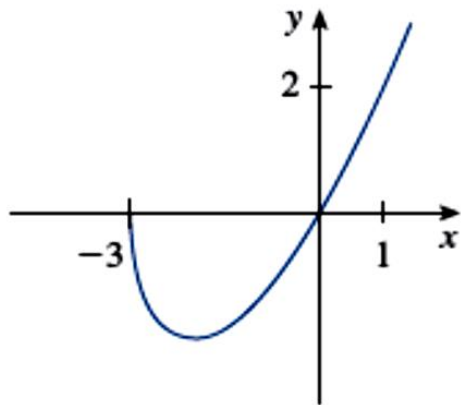
$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

# Funciones Reales de una Variable Real

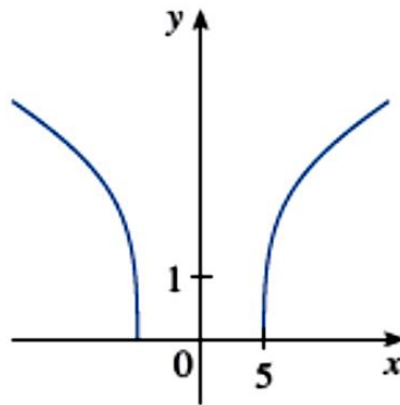
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones algebraicas

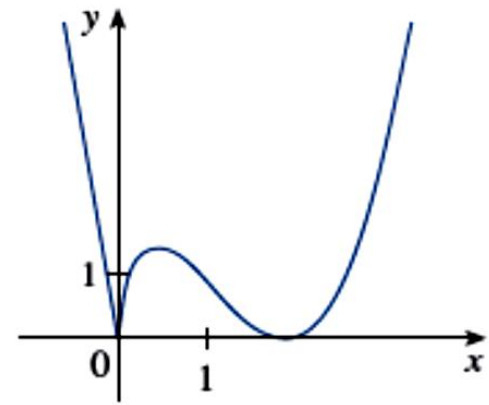
Una función  $f$  se llama función algebraica si puede construirse a partir de polinomios utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces.)



(a)  $f(x) = x\sqrt{x+3}$



(b)  $g(x) = \sqrt[4]{x^2-25}$



(c)  $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

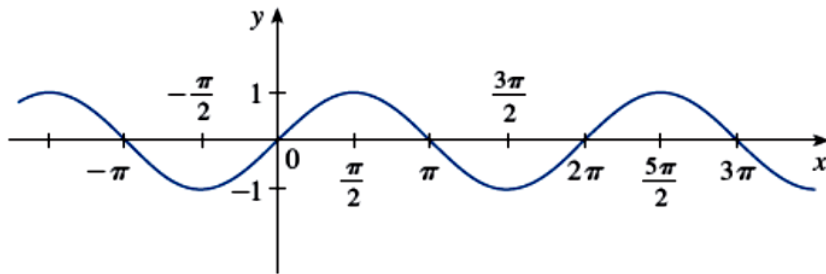


# Funciones Reales de una Variable Real

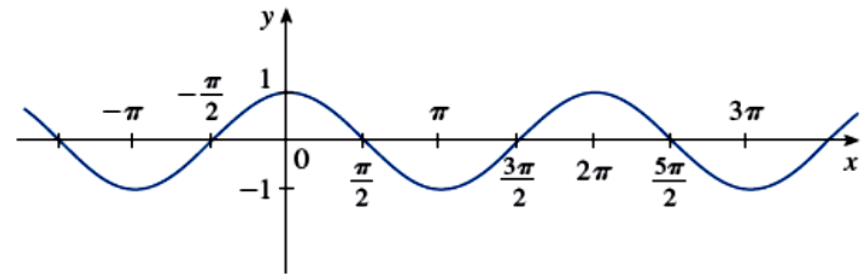
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones trigonométricas

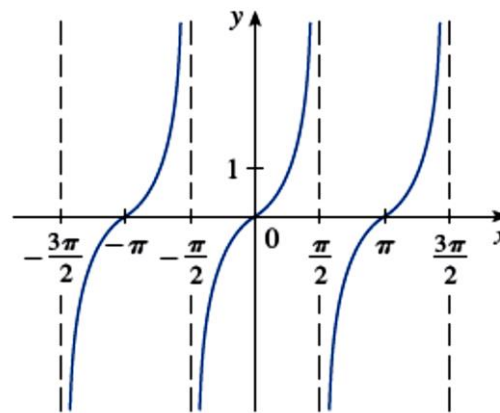
En Cálculo, por convención, siempre se utilizan medidas en radianes (excepto cuando se indique lo contrario).



(a)  $f(x) = \sin x$



(b)  $g(x) = \cos x$



$y = \tan x$

# Funciones Reales de una Variable Real

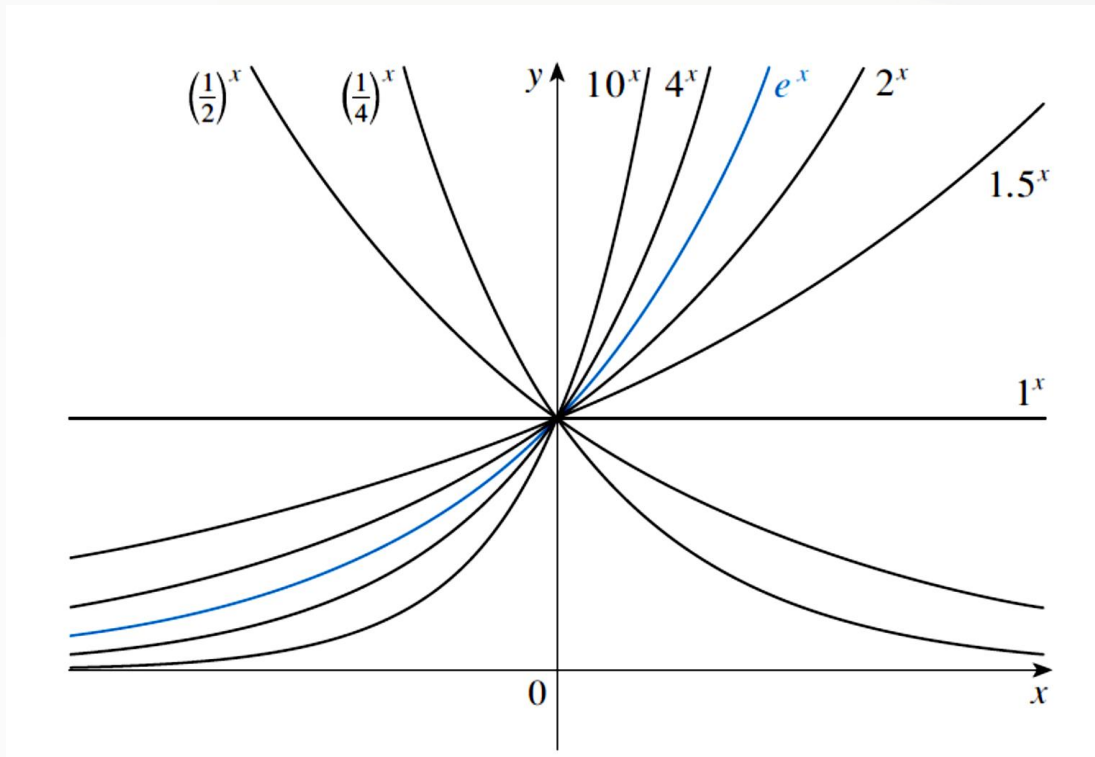
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones exponenciales

$$y = f(x) = b^x$$

Donde la base  $b$  es una constante positiva

Dominio:  $Dom: \{x \in \mathbb{R}\}$



# Funciones Reales de una Variable Real

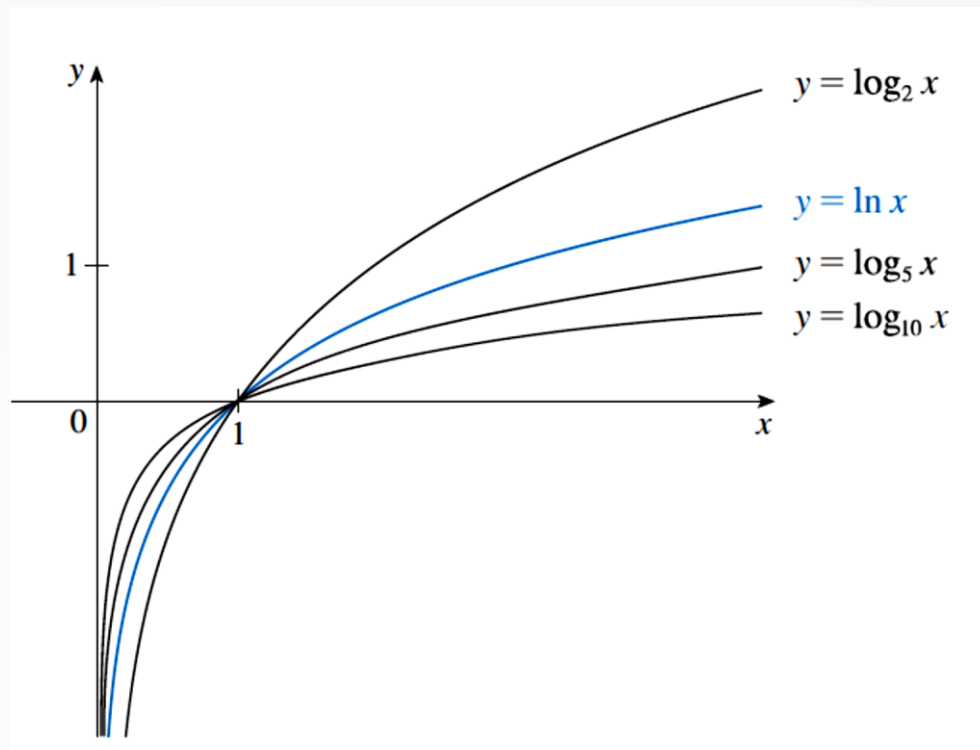
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones logarítmicas

$$y = f(x) = \log_b x$$

Donde la base  $b$  es una constante positiva

Dominio:  $Dom: \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

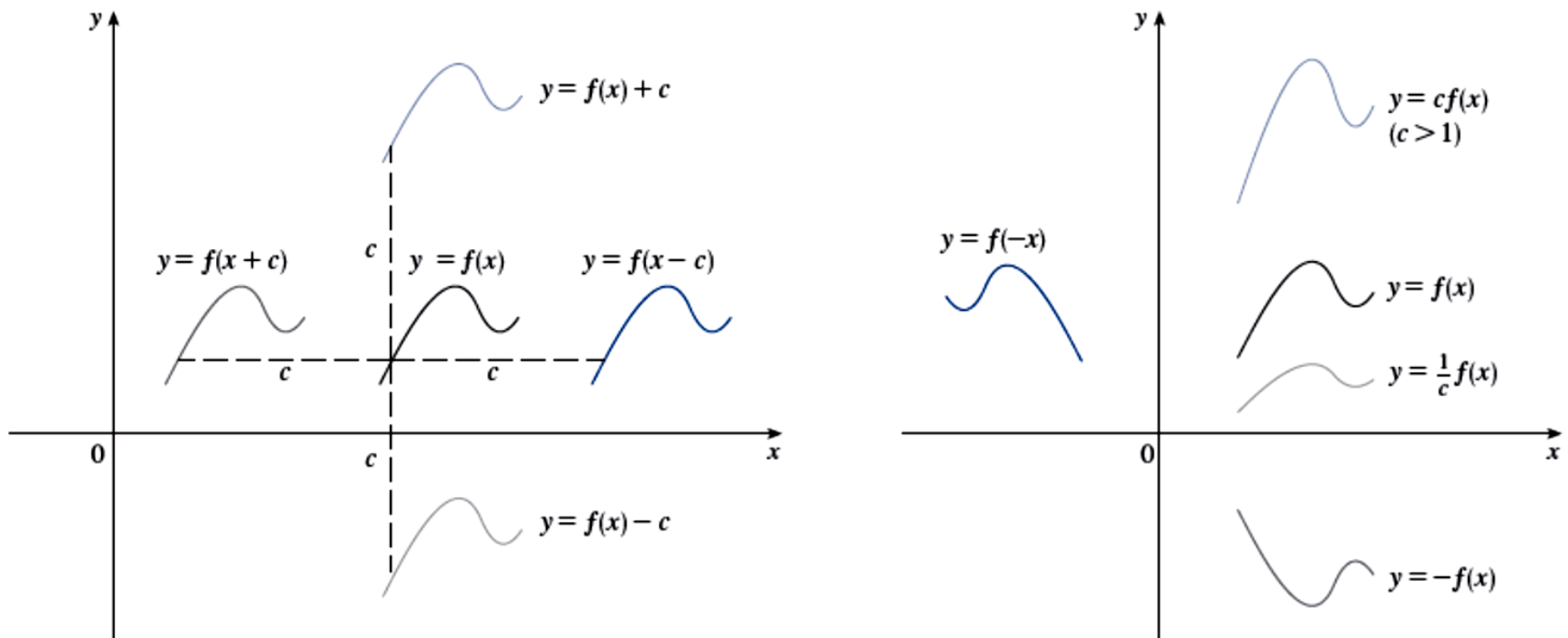


# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones nuevas a partir de funciones previas

A partir de las funciones básicas se pueden obtener nuevas funciones mediante desplazamiento, estiramiento y reflexión:



# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones nuevas a partir de funciones previas

A partir de las funciones básicas se pueden obtener nuevas funciones mediante la combinación de operaciones aritméticas estándar y composición.

Dos funciones  $f$  y  $g$  pueden combinarse para formar funciones nuevas  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  y  $f/g$  de forma similar a la suma, resta, multiplicación y división de números reales.

Dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , la función compuesta  $f \circ g$  se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Funciones nuevas a partir de funciones previas

**Ejemplo:**

Si  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x - 3$ , encuentre las funciones compuestas  $f \circ g$  y  $g \circ f$

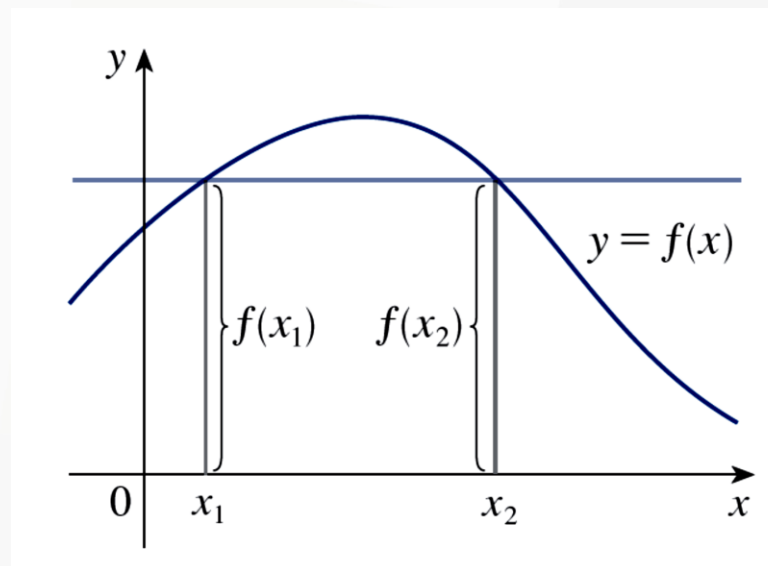
# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Función inversa

Una función  $f$  se llama **función inyectiva** si nunca toma el mismo valor dos veces, esto es:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1 \neq x_2$$



**Prueba de la recta horizontal** Una función es inyectiva si y solo si no existe una recta horizontal que interseque su gráfica más de una vez.

# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Función inversa

Una  $f$  una función inyectiva con dominio  $A$  y rango  $B$ . Entonces la función inversa tiene dominio  $B$  y rango  $A$  y está definida por:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

dominio de  $f^{-1} = \text{rango de } f$

rango de  $f^{-1} = \text{dominio de } f$

Para comprobar si dos funciones son inversas entre si se utilizan las ecuaciones de cancelación:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } B$$



# Funciones Reales de una Variable Real

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Función inversa

### Ejemplo:

Si  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = x^{1/3}$ , investigue si son funciones inversas

### Ejemplo:

Encuentre la función inversa de  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$



Universidad  
Europea  
del Atlántico

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)