Es necesario integrar entre los valores de y adecuados, $y = -2$ y $y = 4$; por tanto

$$A = \int_{-2}^{4} (x_D - x_I)\,dy = \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Bigg]_{-2}^{4}$$

$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18$$ ■

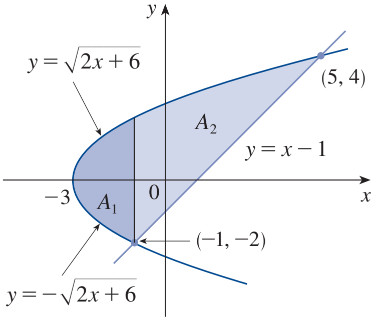


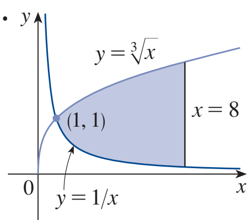
FIGURA 16

NOTA Se pudo haber calculado el área del ejemplo 7 integrando respecto a x; en lugar de y, pero el cálculo es más complicado, ya que la curva frontera inferior consiste de dos curvas diferentes, esto significaría dividir la región en dos y determinar las áreas A_1 y A_2 de la figura 16. El método aplicado en el ejemplo 6 es *mucho* más fácil.

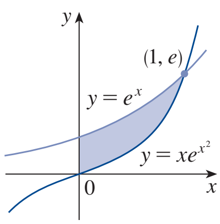
6.1 EJERCICIOS

1–4 Determine el área de cada una de las regiones sombreadas.

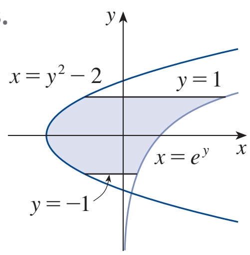
1.



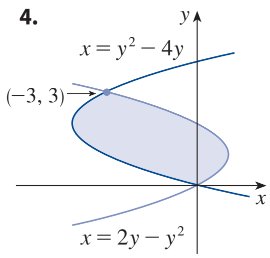
2.



3.



4.



5–12 Dibuje las regiones encerradas por cada una de las curvas dadas. Decida si integra respecto a x o y. Trace un rectángulo representativo de aproximación e indique su altura y su ancho. Luego determine el área de la región.

5. $y = x, \quad y = x^2$

6. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

7. $y = (x - 2)^2, \quad y = x$

8. $y = x^2 - 4x, \quad y = 2x$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 2x/\pi, \quad x \geqslant 0$

11. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

12. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

13–28 Trace cada una de las regiones encerradas y su área.

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

15. $y = \sec^2 x, \quad y = 8\cos x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

16. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

18. $y = \sqrt{x - 1}, \quad x - y = 1$

19. $y = \cos \pi x, \quad y = 4x^2 - 1$

20. $x = y^4, \quad y = \sqrt{2 - x}, \quad y = 0$

21. $y = \tan x, \quad y = 2\operatorname{sen} x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

22. $y = x^3, \quad y = x$

23. $y = \sqrt[3]{2x}, \quad y = \tfrac{1}{8}x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 6$

24. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

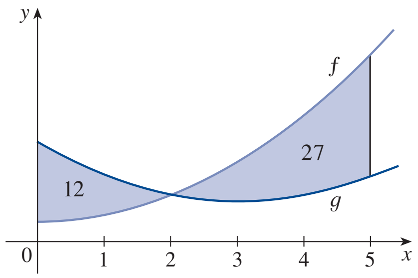
25. $y = x^4, \quad y = 2 - |x|$

26. $y = \operatorname{senh} x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 0, \quad x = 2$

27. $y = \sqrt{x}, \quad y = \tfrac{1}{2}x, \quad x = 9$

28. $y = \tfrac{1}{4}x^2, \quad y = 2x^2, \quad x + y = 3, \quad x \geqslant 0$

29. Se muestran las gráficas de dos funciones con las áreas de las regiones entre las dos curvas indicadas.
(a) ¿Cuál es el área total entre las curvas $0 \leqslant x \leqslant 5$?
(b) ¿Cuál es el valor de $\int_0^5 [f(x) - g(x)]\,dx$?



30–32 Trace la región encerrada entre las curvas dadas y encuentre su área.

30. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad y = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad x \geqslant 0$

31. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{x^2}{1 + x^3}$

32. $y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

33–34 Utilice el cálculo para encontrar el área del triángulo con los vértices dados.

33. $(0, 5), \quad (2, -2), \quad (5, 1)$

34. $(2, 0), \quad (0, 2), \quad (-1, 1)$

35–36 Evalúe la integral e interprétela como el área de una región. Trace la región.

35. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x + 2} - x|\,dx$

36. $\displaystyle\int_{-1}^1 |3^x - 2^x|\,dx$

37–40 Por medio de una gráfica, encuentre un valor aproximado de las coordenadas x de los puntos de intersección entre las curvas dadas. Luego determine (en forma aproximada) el área de la región acotada entre las curvas.

37. $y = x \operatorname{sen}(x^2), \quad y = x^4, \quad x \geqslant 0$

38. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

39. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

40. $y = 1.3^x, \quad y = 2\sqrt{x}$

41–44 Trace la gráfica de cada una de las regiones entre las curvas dadas y utilice su calculadora para medir el área redondeada a cinco decimales.

41. $y = \dfrac{2}{1 + x^4}, \quad y = x^2$

42. $y = e^{1-x^2}, \quad y = x^4$

43. $y = \tan^2 x, \quad y = \sqrt{x}$

44. $y = \cos x, \quad y = x + 2 \operatorname{sen}^4 x$

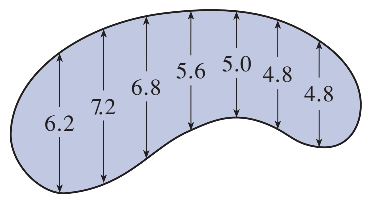
SAC **45.** Utilice un sistema algebraico computacional para encontrar el área exacta encerrada por las curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ y $y = x$.

46. Trace la región en el plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ y determine su área.

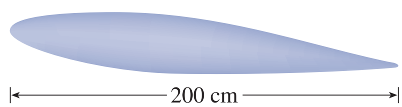
47. Los automóviles de carreras de Chris y Kelly están lado a lado al inicio de la carrera. En la tabla se proporcionan las velocidades de cada vehículo (en kilómetros por hora) durante los primeros 10 segundos de la competencia. Aplique la regla del punto medio para estimar cuánto se adelanta Kelly durante los primeros 10 segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	110	128
1	32	35	7	120	138
2	51	59	8	130	150
3	74	83	9	138	157
4	86	98	10	144	163
5	99	114			

48. Los anchos (en metros) de una piscina en forma de riñón se midieron a intervalos de 2 metros, como se indica en la figura. Usando la regla del punto medio, estime el área de la piscina.



49. Se muestra la sección transversal de un ala de avión. Las mediciones del grosor del ala, en centímetros, en intervalos de 20 centímetros son 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1, 8.7 y 2.8. Aplique la regla del punto medio para estimar el área de la sección transversal del ala.



50. La tasa de nacimientos de una población es $b(t) = 2200e^{0.024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1460e^{0.018t}$ personas por cada año. Determine el área entre estas curvas para $0 \leqslant t \leqslant 10$. ¿Qué representa el área?

51. En el ejemplo 5, se modeló una curva de patogénesis del sarampión con una función f. Un paciente infectado con el virus del sarampión que tiene cierta inmunidad al virus tiene una curva de patogénesis que se puede modelar, por ejemplo, con $g(t) = 0.9f(t)$.
(a) Si se requiere la misma concentración de umbral del virus para iniciar la infección que en el ejemplo 5, ¿en qué día se presenta esta?

(b) Sea P_3 el punto en la gráfica de g donde comienza la infección. Se ha demostrado que la infección termina en un punto P_4 en la gráfica de g donde la recta pasa a través de P_3, P_4 tiene la misma pendiente que la recta que pasa a través de P_1, P_2 en el ejemplo 5(b). ¿Qué día termina la infección?

(c) Calcule el grado de infección de este paciente.

52. La tasa con la que cayó la lluvia, en centímetros por hora, en dos lugares diferentes t horas después de que comenzó una tormenta están dadas por $f(t) = 0.73t^3 - 2t^2 + t + 0.6$ y $g(t) = 0.17t^2 - 0.5t + 1.1$. Calcule el área entre las gráficas de $0 \leqslant t \leqslant 2$ e interprete el resultado en este contexto.

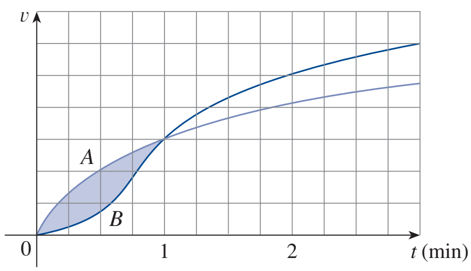
53. Dos automóviles, A y B, se encuentran lado a lado al inicio de la carrera, y aceleran a partir del reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones velocidad.

(a) ¿Cuál vehículo tiene ventaja después de un minuto? Explique.

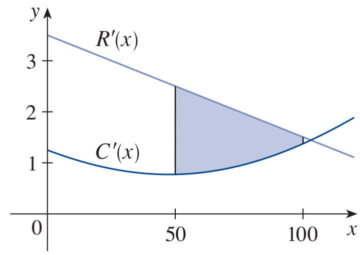
(b) ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?

(c) ¿Cuál es el automóvil que tiene ventaja después de dos minutos? Explique.

(d) Estime el tiempo en el cual los vehículos van de nuevo parejos.



54. En la figura se muestran las gráficas de la función de ingreso marginal R' y la función de costo marginal C' para un fabricante. [Recuerde de la sección 4.7 que $R(x)$ y $C(x)$ representan los ingresos y el costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que R y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Estime el valor de esta cantidad mediante la regla del punto medio.



55. La curva cuya ecuación es $y^2 = x^2(x + 3)$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Si se traza la gráfica de esta curva, se puede ver que una parte de ella forma un lazo. Encuentre el área definida por este lazo.

56. Encuentre el área de la región definida por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en $(1, 1)$ y el eje x.

57. Determine el número b tal que la recta $y = b$ divide a la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.

58. (a) Calcule el número a tal que la recta $x = a$ biseca el área bajo la curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

(b) Determine el numero b tal que la recta $y = b$ biseca el área del inciso (a).

59. Calcule los valores de c tales que el área de la región acotada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

60. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valor de c el área de la región que encierran las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$, y $x = 0$ es igual al área de la región encerrada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

61. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ encierran una región? Calcule el área de la región.

PROYECTO DE APLICACIÓN — EL ÍNDICE DE GINI

¿Cómo es posible medir la distribución del ingreso entre los habitantes de un determinado país? Una de esas medidas es el *índice de Gini*, nombrado así en honor del economista italiano Corrado Gini, quien lo ideó en 1912.

Primero se clasifican todos los hogares de un país de acuerdo con el ingreso y después se calcula el porcentaje de hogares cuyo ingreso sea a lo más un porcentaje dado del ingreso total del país. Se define una **curva de Lorenz** $y = L(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ ubicando el punto $(a/100, b/100)$ en la curva si la parte inferior a% de los hogares recibe a lo más b% del ingreso total. Por ejemplo, en la figura 1 (página 437), el punto $(0.4, 0.12)$ está sobre la curva de Lorenz para los Estados Unidos en 2010 porque 40% del sector más pobre de la población recibió solo 12% del ingreso total. Asimismo, la parte inferior 80% de la población recibió 50% del ingreso total, por lo que el punto $(0.8, 0.5)$ está sobre la curva de Lorenz. (La curva de Lorenz es así nombrada en honor del economista estadounidense Max Lorenz.)