Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

MATEMÁTICAS

Reglas de Derivación

Prof. Dr. Jorge Crespo Álvarez

Objetivo

Aprender a derivar funciones reales de una variable mediante Reglas de Derivación

- Reglas de derivación. Tabla de Derivadas
- Derivación implícita
- Aproximaciones lineales
- Teoremas
- Formas indeterminadas y Regla de L'Hôpital

Reglas de Derivación

Aunque se pueden calcular derivadas mediante la definición, este procedimiento resulta muy tedioso. Es por eso que en la presente clase se presentarán reglas de derivación que nos permitirán calcular derivadas sin necesidad de aplicar directamente la definición.

4 Definición La **derivada de una función f en un número a,** denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Reglas de Derivación

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Reglas de Derivación

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Reglas de Derivación

Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\,\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Regla de la cadena Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

Reglas de Derivación

Ejemplo:

Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 3x^2$

d) $f(x) = x^2 + 1$

e) $f(x) = x^2(x^2 - 1)$

f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Tablas de Derivadas

www.uneatlantico.es

FÓRMULAS GENERALES

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regla del producto)

6. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Regla del cociente)

7. $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regla de la cadena)

8. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regla de potencias)

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

9. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

12. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

13. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

14. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

15. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

16. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

17. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

18. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

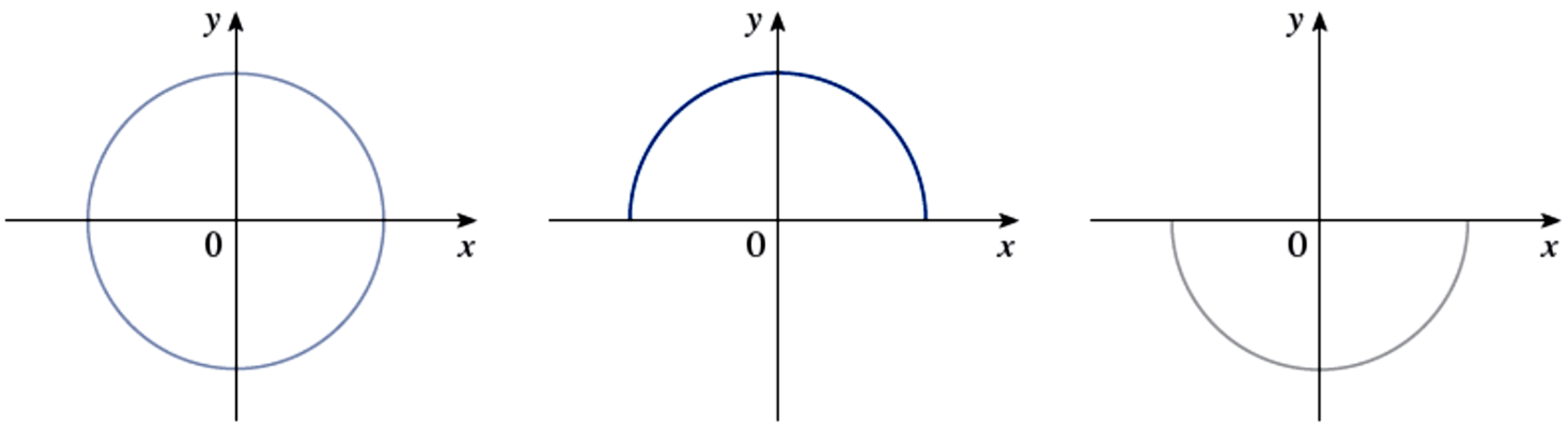
Derivación Implícita

Las funciones que se han encontrado hasta ahora se pueden describir expresando una variable explícitamente en términos de la otra variable, por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \boxed{1}$$



(a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x para determinar la derivada de y. En lugar de ello, se aplica el **método de derivación implícita**.

Derivación Implicita

www.uneatlantico.es

Ejemplo:

a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\frac{dy}{dx}$.

b) Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si $x^3 + y^3 = 6xy$

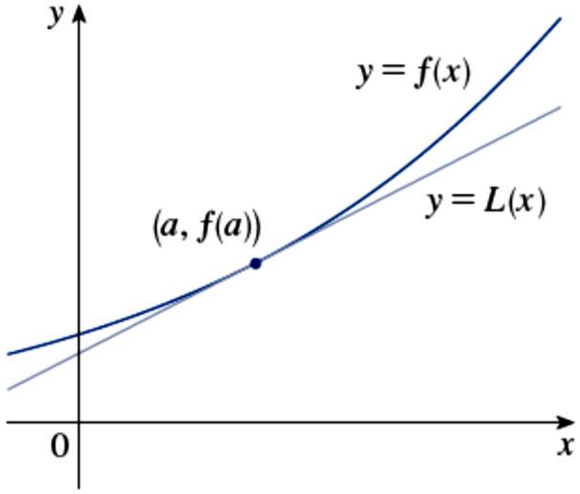
Aproximaciones Lineales

1 $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

2 $$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se le llama **linealización** de f en a.



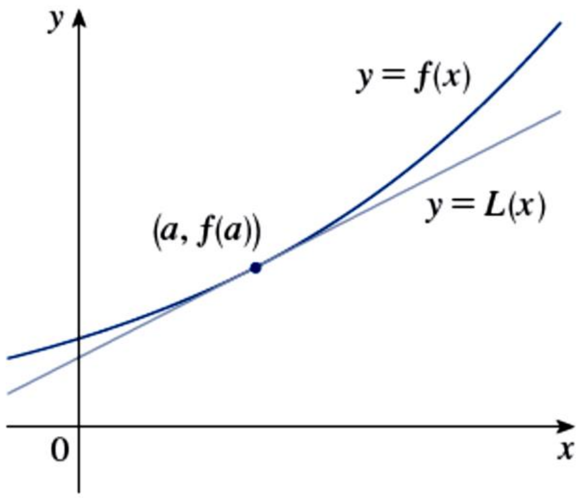
Aproximaciones Lineales

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

se le llama **linealización** de f en a.



Aproximaciones Lineales

Ejemplo:

Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x+3}$, en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3{,}98}$ $y\sqrt{4{,}05}$.

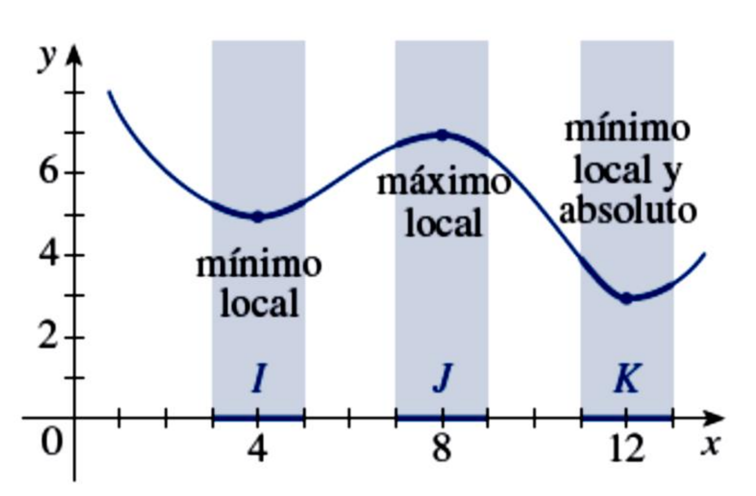
Teoremas

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

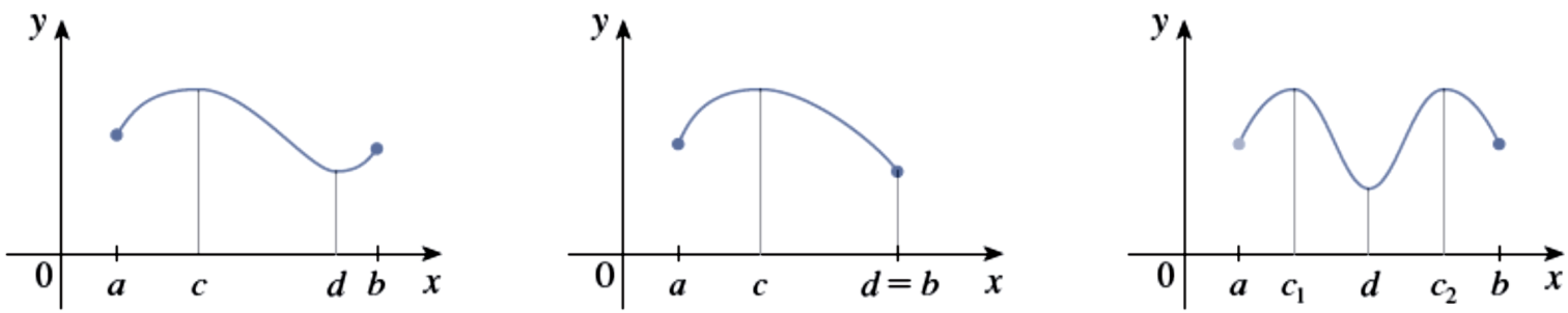
2 Definición El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

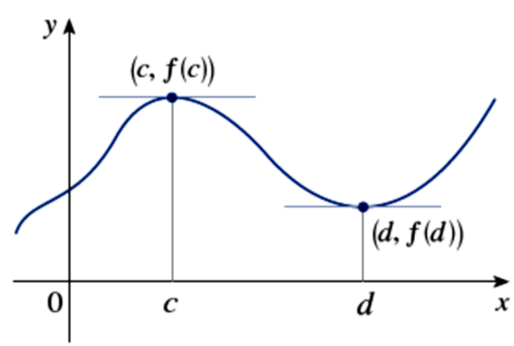


Teoremas

3 Teorema del valor extremo Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.



4 Teorema de Fermat Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

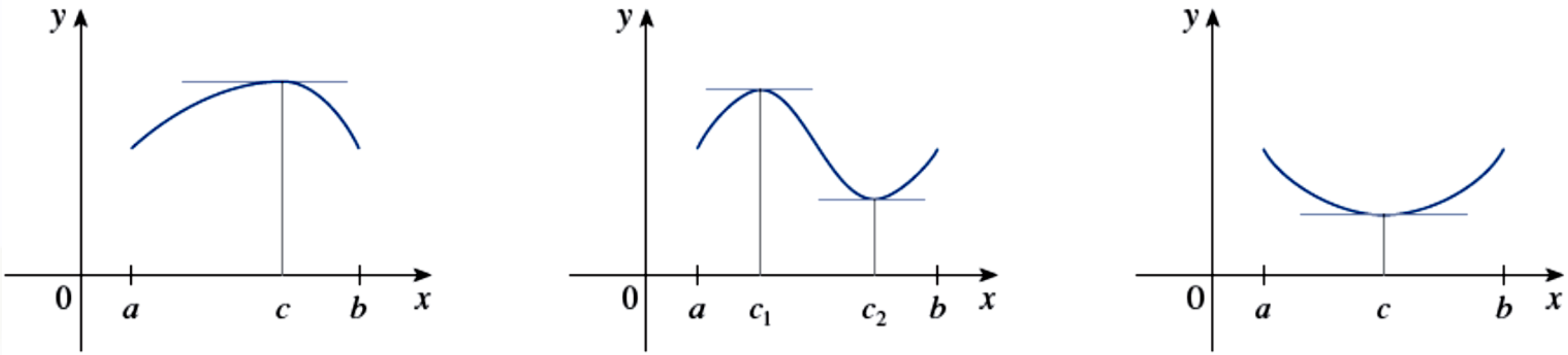


Teoremas

Teorema de Rolle Sea f una función que satisface las tres hipótesis siguientes:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.



(b) (c) (d)

Teoremas

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las hipótesis siguientes:

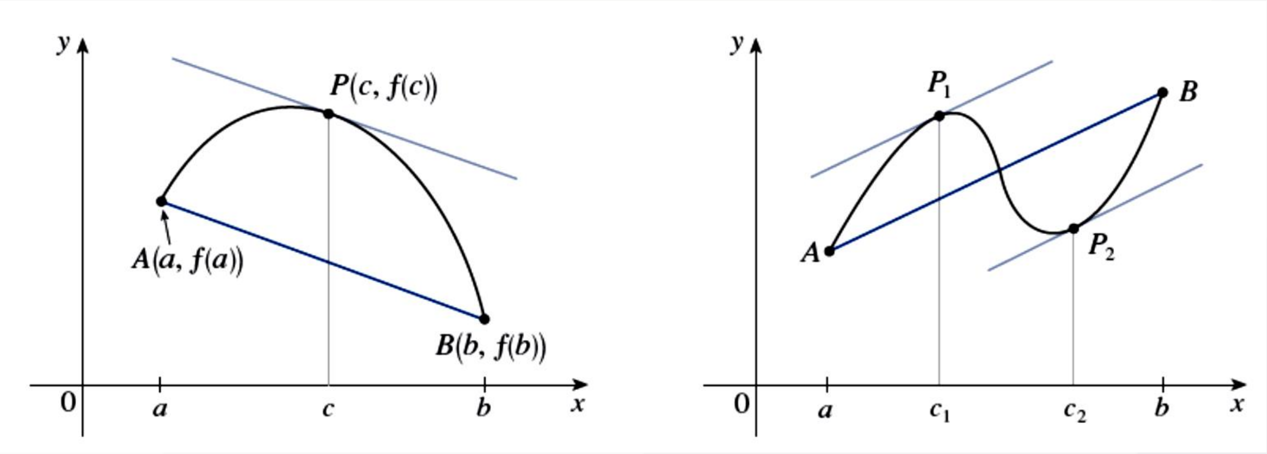
1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe un número c en (a, b) tal que

1
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o en forma equivalente

2
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Teoremas

Ejemplo:

a) Investigue si se puede aplicar el Teorema de Rolle a la siguiente función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo [-1, 1].

b) Aplique el Teorema del valor medio de Lagrange a la función en el intervalo [0, 1].

Formas Indeterminadas. Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, se tiene una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

Ejemplo:

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

Formas Indeterminadas. Regla de L'Hôpital

Productos indeterminados

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no es claro cuál es el valor de $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ si existe. Hay una lucha entre f y g. Si gana f, la respuesta será 0; si gana g, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un comportamiento intermedio donde la respuesta es un número finito distinto de cero. Este tipo de límite se llama **forma indeterminada de tipo $0 \cdot \infty$**, y se puede abordar expresando el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{y} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞ por lo que se puede utilizar la regla de L'Hôpital.

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

se llama **forma indeterminada de tipo** $\infty - \infty$. Una vez más hay una contienda entre f y g. ¿La respuesta será ∞ (gana f) o será $-\infty$ (gana g) o habrá un término intermedio en un número finito? Para encontrarlo, se intenta convertir la diferencia en un cociente (por ejemplo, utilizando un común denominador, racionalizando o factorizando un factor común), de manera que se tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

Formas Indeterminadas. Regla de L'Hôpital

Potencias indeterminadas

Hay varias formas indeterminadas que surgen del límite

$$\lim_{x \to a} = [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada uno de estos tres casos se puede tratar ya sea tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o expresando la función como una exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Ejemplo:

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

b) $\lim_{x \to \infty} e^x - x$

c) $\lim_{x \to 0^+} x^x$

Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es