El término resultante adicional $-\frac{3}{2}\ln(1/\sqrt{3})$ puede absorberse por la constante de integración.

Mathematica aporta la respuesta

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2+2x+4}-\frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1+x}{\sqrt{3}}\right)$$

Mathematica combina los dos primeros términos del ejemplo 4 (y el resultado de Maple) en un solo término mediante factorización. ■

EJEMPLO 6 Utilice un SAC para determinar $\int x(x^2+5)^8\,dx$.

SOLUCIÓN Maple y Mathematica dan la misma respuesta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18}+\tfrac{5}{2}x^{16}+50x^{14}+\tfrac{1750}{3}x^{12}+4375x^{10}+21875x^8+\tfrac{218750}{3}x^6+156250x^4+\tfrac{390625}{2}x^2$$

Es claro que ambos sistemas deben haber desarrollado $(x^2+5)^8$ mediante el teorema del binomio y después integrado cada término.

Si se integra a mano utilizando la sustitución $u=x^2+5$, se obtiene

La TI-89 también produce esta respuesta.

$$\int x(x^2+5)^8\,dx=\tfrac{1}{18}(x^2+5)^9+C$$

Para la mayoría de los propósitos, esta es la forma más conveniente de respuesta. ■

EJEMPLO 7 Utilice un SAC para encontrar $\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\,dx$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 7.2.2 encuentra que

$$\boxed{1}\qquad \int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\,dx=-\tfrac{1}{3}\cos^3 x+\tfrac{2}{5}\cos^5 x-\tfrac{1}{7}\cos^7 x+C$$

Maple y la TI-89 reportan la respuesta

$$-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^4 x\cos^3 x-\tfrac{4}{35}\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x-\tfrac{8}{105}\cos^3 x$$

mientras que Mathematica produce

$$-\tfrac{5}{64}\cos x-\tfrac{1}{192}\cos 3x+\tfrac{3}{320}\cos 5x-\tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Sospeche que existen identidades trigonométricas que demuestran que estas tres respuestas son equivalentes. De hecho, si le pide a Maple y Mathematica que simplifiquen sus expresiones utilizando identidades trigonométricas, finalmente producirán la misma forma de la respuesta que en la ecuación 1. ■

7.6 EJERCICIOS

1–4 Utilice la forma indicada en la tabla de integrales en las páginas de referencia para evaluar las integrales.

1. $\int_0^{\pi/2}\cos 5x\cos 2x\,dx$; fórmula 80

2. $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$; fórmula 113

3. $\int_1^2\sqrt{4x^2-3}\,dx$; fórmula 39

4. $\int_0^1\tan^3(\pi x/6)\,dx$; fórmula 69

5–32 Utilice la tabla de integrales de las páginas de referencia 6–10 para evaluar las integrales siguientes.

5. $\int_0^1 2x \cos^{-1} x \, dx$

6. $\int_2^3 \dfrac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 7}} \, dx$

7. $\int \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 9} \, dx$

8. $\int \dfrac{e^x}{4 - e^{2x}} \, dx$

9. $\int \dfrac{\sqrt{9x^2 + 4}}{x^2} \, dx$

10. $\int \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$

11. $\int_0^\pi \cos^6\theta \, d\theta$

12. $\int x\sqrt{2 + x^4} \, dx$

13. $\int \dfrac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

14. $\int_0^\pi x^3 \operatorname{sen} x \, dx$

15. $\int \dfrac{\coth(1/y)}{y^2} \, dy$

16. $\int \dfrac{e^{3t}}{\sqrt{e^{2t} - 1}} \, dt$

17. $\int y\sqrt{6 + 4y - 4y^2} \, dy$

18. $\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} \, dx$

19. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$

20. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{5 - \operatorname{sen}\theta}} \, d\theta$

21. $\int \dfrac{e^x}{3 - e^{2x}} \, dx$

22. $\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2 - x^4} \, dx$

23. $\int \sec^5 x \, dx$

24. $\int x^3 \operatorname{arcsen}(x^2) \, dx$

25. $\int \dfrac{\sqrt{4 + (\ln x)^2}}{x} \, dx$

26. $\int \operatorname{sen}^6 2x \, dx$

27. $\int \dfrac{\cos^{-1}(x^{-2})}{x^3} \, dx$

28. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

29. $\int \sqrt{e^{2x} - 1} \, dx$

30. $\int e^t \operatorname{sen}(\alpha t - 3) \, dt$

31. $\int \dfrac{x^4 \, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

32. $\int \dfrac{\sec^2\theta \tan^2\theta}{\sqrt{9 - \tan^2\theta}} \, d\theta$

33. La región bajo la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ de 0 a π rota alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

34. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando la región bajo la curva $y = \operatorname{arcsen} x$, $x \geqslant 0$, rota alrededor del eje y.

35. Verifique la fórmula 53 en la tabla de integrales (a) derivando y (b) sustituyendo $t = a + bu$.

36. Verifique la fórmula 31 (a) al derivar y (b) al sustituir $u = a \operatorname{sen}\theta$.

SAC **37–44** Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar la integral. Compare la respuesta con el resultado utilizando tablas. Si las respuestas no son las mismas, demuestre que son equivalentes.

37. $\int \sec^4 x \, dx$

38. $\int \csc^5 x \, dx$

39. $\int x^2\sqrt{x^2 + 4} \, dx$

40. $\int \dfrac{dx}{e^x(3e^x + 2)}$

41. $\int \cos^4 x \, dx$

42. $\int x^2\sqrt{1 - x^2} \, dx$

43. $\int \tan^5 x \, dx$

44. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} \, dx$

SAC **45.** (a) Utilice la tabla de integrales para evaluar $F(x) = \int f(x) \, dx$, donde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

¿Cuál es el dominio de f y de F?

(b) Utilice un SAC para evaluar $F(x)$. ¿Cuál es el dominio de la función F que produce el SAC? ¿Hay una discrepancia entre este dominio y el dominio de la función F que encontró en el inciso (a)?

SAC **46.** A veces los sistemas algebraicos computacionales necesitan ayuda humana. Intente determinar

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2} \, dx$$

con un sistema algebraico computacional. Si no obtiene respuesta, haga una sustitución que cambie la integral en una que el SAC *pueda* evaluar.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

SAC PATRONES EN INTEGRALES

En este proyecto se utiliza un sistema algebraico computacional para investigar integrales indefinidas de familias de funciones. Observando los patrones que ocurren en la integral de varios miembros de la familia, infiera primero, y después demuestre, una fórmula general para la integral de cualquier miembro de la familia.

1. (a) Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar las integrales siguientes.

(i) $\int \dfrac{1}{(x + 2)(x + 3)} \, dx$

(ii) $\int \dfrac{1}{(x + 1)(x + 5)} \, dx$

(iii) $\int \dfrac{1}{(x + 2)(x - 5)} \, dx$

(iv) $\int \dfrac{1}{(x + 2)^2} \, dx$