Taller 4: Movimiento ondulatorio – Ejercicios Resueltos

Problema 1:

La nota musical **la** tiene una frecuencia, por convenio internacional de 440 Hz. Si en el aire se propaga con una velocidad de 340 m/s y en el agua lo hace a 1400 m/s, calcula su longitud de onda en esos medios.

La frecuencia es una característica del centro emisor. Por tanto es la misma en todos los medios.

$$\lambda_{aire} = \frac{v_{aire}}{\nu} = \frac{340}{400} = 0{,}773 \text{ m}$$
$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{\nu} = \frac{1400}{400} = 3{,}27 \text{ m}$$

Problema 2:

La ecuación de una onda, en unidades del S.I., que se propaga por una cuerda es: y(x, t) = 0,05 cos 2 π (4 t − 2 x)

1. Determina las magnitudes características de la onda (amplitud, frecuencia angular, nu´ mero de onda, longitud de onda, frecuencia, periodo, velocidad de propagación.
2. Deduce las expresiones generales de la velocidad y aceleración transversal de un elemento de la cuerda y sus valores máximos.
3. Determina los valores de la elongación, velocidad y aceleración de un punto situado a 1 m del origen en el instante t = 3 s

1. Operando en la expresión de la onda: y(x, t) = 0,05 cos(8 π t — 4 π x) y comparando con la expresión general: y(x, t) = A cos(ω t – k x) se tiene que:

Amplitud: A = 0,05 m;

frecuencia angular: ω = 8 π rad/s;

número de onda: k = 4 π rad/m;

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{k} = \frac{2\,\pi}{4\,\pi} = 0{,}5 \text{ m};$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{8\,\pi}{2\,\pi} = 4 \text{ Hz};$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ s};$$

$$v = \lambda\,\nu = \frac{\omega}{k} = 0{,}5 \cdot 4 = \frac{8\,\pi}{4\,\pi} = 2 \text{ m/s}$$

2. Velocidad de vibración:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0{,}4\,\pi\,\sin 2\,\pi\,(4\,t - 2\,x)\ \mathrm{m/s}\ \Rightarrow v_{máx} = 0{,}4\,\pi\ \mathrm{m/s}$$

Aceleración de vibración:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -3{,}2\,\pi^2\,\cos 2\,\pi\,(4\,t - 2\,x)\ \mathrm{m/s^2}\ \Rightarrow a_{máx} = 3{,}2\,\pi^2\ \mathrm{m/s^2}$$

3. Para calcular la elongación, velocidad y aceleración del punto considerado en el instante indicado, basta sustituir sus valores en las ecuaciones generales correspondientes.

$$y(x = 1, t = 3) = 0{,}05\ \cos 2\,\pi\,(4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 0{,}05\ \mathrm{m}$$

El punto se encuentra en su máxima separación central y hacia la parte positiva.

$$v(x = 1, t = 3) = -0{,}4\,\pi\ \sin 2\,\pi\,(4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 0\ \mathrm{m/s}$$

El punto está en un extremo de la vibración y por ello su velocidad es igual a cero.

$$a(x = 1, t = 3) = -3{,}2\,\pi^2\ \cos 2\,\pi\,(4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -3{,}2\,\pi^2\ \mathrm{m/s^2}$$

Al estar el punto en el extremo positivo de la vibración, la aceleración es máxima y de sentido negativo, se dirige hacia el centro de la oscilación.

Problema 3

Un foco genera ondas de 2 mm de amplitud con una frecuencia de 250 Hz, que se propagan por un medio con una velocidad de 250 m/s. Determina el periodo y la longitud de onda de la perturbación. Si en el instante inicial la elongación de un punto situado a
3 m del foco es y = −2 mm, determina la elongación de un punto situado a 2,75 m del foco en el mismo instante.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3} \qquad \omega = 2\,\pi\,\nu = 500\,\pi\ \mathrm{rad/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{250}{250} = 1\ \mathrm{m} \qquad k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = 2\,\pi\ \mathrm{m^{-1}}$$

En este caso y como los datos de vibración no son los del foco, debe introducirse una fase inicial ϕ_0 que se determina con las condiciones de vibración del punto x = 3 m.

$$y = A\ \cos(\omega\,t - k\,x + \varphi_0) = 2 \cdot 10^{-3}\ \cos(500\,\pi\,t - 2\,\pi\,x + \varphi_0)$$

Operando:

$$y = 2 \cdot 10^{-3}\ \cos[2\,\pi(250\,t - x) + \varphi_0]$$

Sustituyendo los datos de vibración del punto considerado, resulta que:

$$y(x = 3, t = 0) = 2 \cdot 10^{-3}\ \cos[2\,\pi(250 \cdot 0 - 3) + \varphi_0] = -2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\ \Rightarrow \cos(-6\,\pi + \varphi_0) = -1$$

Por lo que la fase inicial es: $\phi_0 = \pi$ rad

La ecuación general de la onda es:

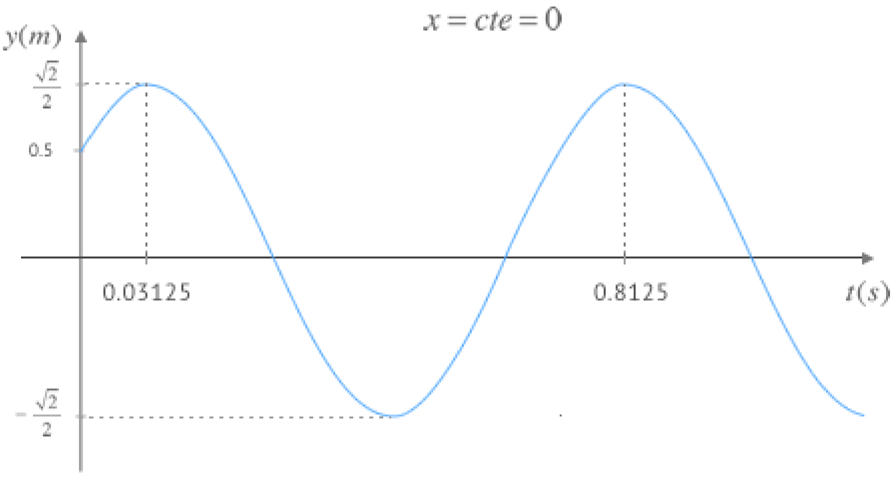
$$y = 2 \cdot 10^{-3}\ \cos[2\,\pi(250\,t - x) + \pi]$$

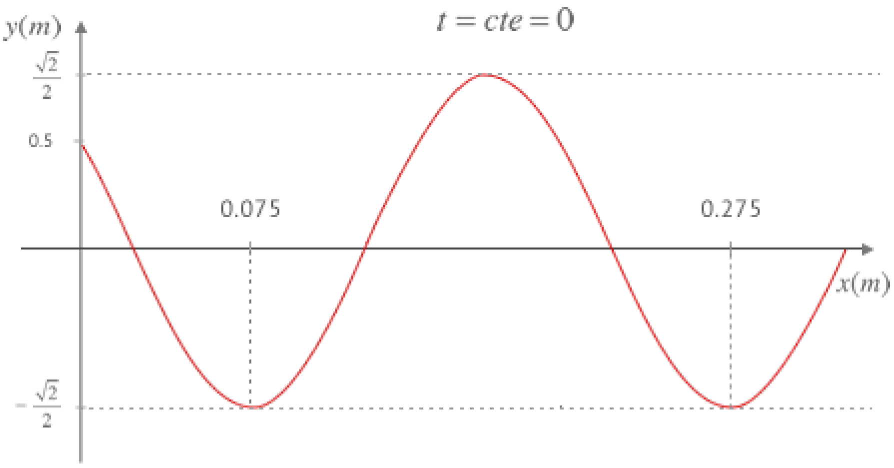
La elongación del punto x = 2,75 m en el instante pedido es:

$$y(x = 2{,}75, t = 0) = 2 \cdot 10^{-3}\ \cos[2\,\pi(250 \cdot 0 - 2{,}75) + \pi] = 2 \cdot 10^{-3}\ \cos(6{,}5\,\pi) = 0\ \mathrm{m}$$

Problema 4:

Determina la ecuación que corresponde con la onda descrita por las siguientes gráficas:



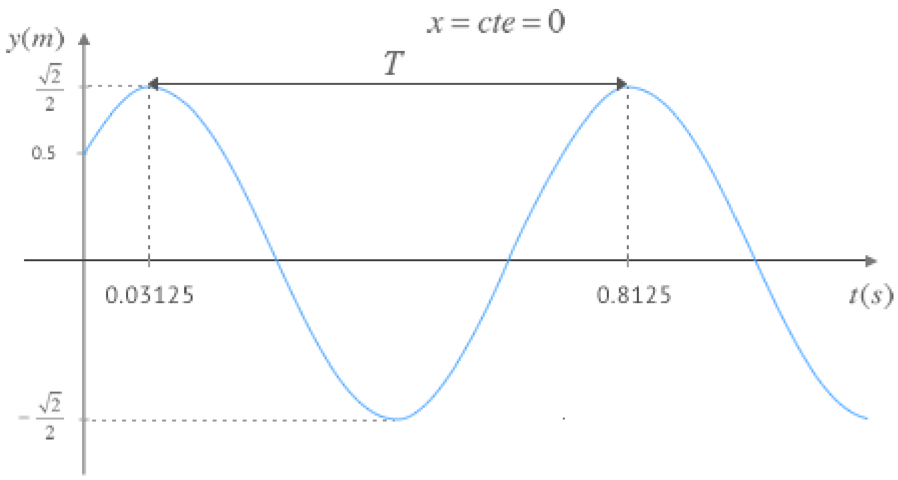


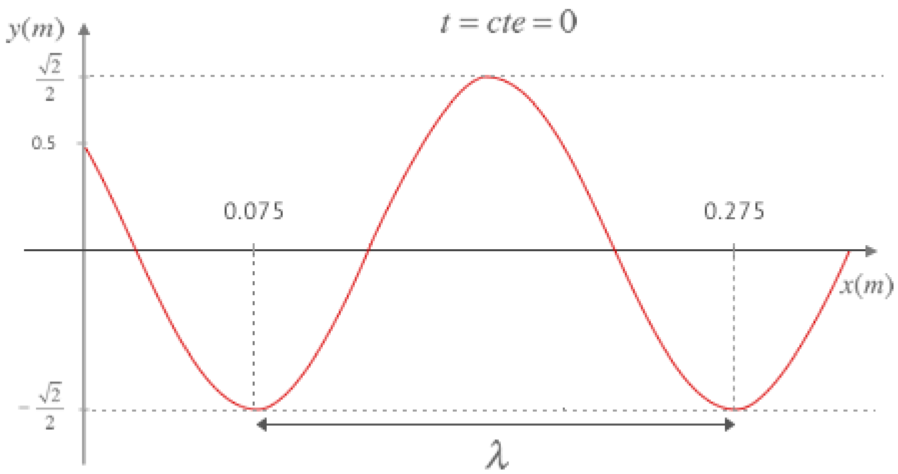
Se trata claramente de una onda armónica, por tener las gráficas formas sinusoidales, que se propaga en el sentido positivo del eje *x*. Sabemos que la ecuación de una onda armónica que se propaga hacia la derecha viene dada, en una de sus múltiples formas equivalentes, por:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

λ=0.275-0.075=0.2 m. Las siguientes gráficas recogen lo anterior:





A partir del periodo *T* podemos obtener *ω* según:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{\dfrac{\omega}{2\cdot\pi}}=\frac{2\cdot\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=2\cdot\pi/T=2\cdot\pi/0.25=8\cdot\pi\;rad/s$$

Y a partir de la longitud de onda *λ* podemos obtener el número de onda *k* según:

$$k=\frac{2\cdot\pi}{\lambda}=\frac{2\cdot\pi}{0.2}=10\pi\;rad/m$$

Finalmente, de cualquiera de las dos gráficas podemos obtener también φ_0. Necesitaremos un par de valores. Sabemos que para *x=0* y *t=0*, *y=0.5 m*, es decir:

$$y\,|_{x=0,t=0}=0.5=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega\cdot 0.5-k\cdot 0+\varphi_0)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin(\varphi_0)\Rightarrow$$

$$\varphi_0=\begin{cases}\frac{\pi}{4}\\ \frac{3\cdot\pi}{4}\end{cases}$$

Ahora bien, ¿cuál es el valor correcto para *φ_0* de los dos posibles? Utilizaremos un nuevo valor de las gráfica:

$$y\,|_{x=0,t=0.03125} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(8 \cdot \pi \cdot 0.03125 + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$1 = \sin(0.25 \cdot \pi + \varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \cancel{\frac{5\cdot\pi}{4}} \end{cases}$$

Ya estamos en condiciones de determina la ecuación de onda armónica pedida:

$$\boxed{y(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(8 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4}\right)\, m}$$

Problema 5:

En el centro de un estanque circular de 5 m de radio. se produce un movimiento ondulatorio en la superficie del agua. Se observa que las ondas tardan 10 segundos en llegar a la orilla y que la distancia entre dos crestas sucesivas es de 50 cm. Calcular el periodo, la frecuencia y la amplitud del movimiento, sabiendo que la elongación de! foco emisor es de 3 cm al cabo de 1/6 de segundo.
Calcular, finalmente, la elongación de un punto situado a 3,875 m del foco emisor, al cabo de 8 segundos.

Solución: El movimiento ondulatorio se propaga a través de la superficie del agua con velocidad constante. Esta velocidad es:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{5\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 0{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ya que la distancia entre dos crestas consecutivas coincide con la longitud de onda: $\lambda = 0{,}5$ m. En consecuencia, el período del movimiento ondulatorio valdrá:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0{,}5\ \text{m}}{0{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \boxed{1\ \text{s}}$$

Conociendo el período, se puede calcular fácilmente la frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1\ \text{s}} = \boxed{1\ \text{Hz}}$$

La ecuación de este movimiento ondulatorio es:

$$s = A \cdot \text{sen}\ 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) = A \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (t - 2x)$$

Como para el foco emisor: $x = 0$, su elongación en función del tiempo vendrá dada por la expresión:

$$s = A \cdot \text{sen}\ 2\pi t$$

De acuerdo con el enunciado del problema, para $t = \frac{1}{6}$ s, $s = 3$ cm. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\boxed{A = 2\sqrt{3}\ \text{cm}}$$

Como la ecuación de la onda es:

$$s = A \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (t - 2x) = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (t - 2x)\ \ (\text{SI})$$

resulta que la elongación de un punto tal que $x = 3{,}875$ m; $t = 8$ s; será:

$$s = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\ 2\pi\ [8 - 2 \cdot 3{,}875]\ (\text{m}) = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-2}\ \text{m} = \boxed{2\sqrt{3}\ \text{cm}}$$

Movimiento Armónico Simple

Problema 6:

Una partícula que vibra a lo largo de un segmento de 10 cm de longitud tiene en el instante inicial su máxima velocidad que es de 20 cm/s. Determina las constantes del movimiento (amplitud, fase inicial, pulsación, frecuencia y periodo) y escribe las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración. Calcula la elongación, velocidad y aceleración
en el instante t = 1,75 π s. ¿Cual es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial?

La amplitud es igual a la mitad del segmento recorrido: A = 5 • 10^{-2} m. Las expresiones generales de la elongación y de la velocidad son:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0); \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Como en el instante inicial la velocidad es máxima, se tiene que la fase inicial es:

$$cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

Del valor de la máxima velocidad se deducen el resto de las constantes del movimiento.

$$v_{máxima} = A \cdot \omega = 0{,}20 \text{ m/s} \Rightarrow \omega = \frac{v_{máx}}{A} = \frac{0{,}20}{0{,}05} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{\pi}{2} \text{ s}$$

Las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración y sus valores en el instante indicado, t =1,75 · π s, son:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0{,}05 \cdot \sin(4 \cdot t) \Rightarrow x_t = 0{,}05 \cdot \sin(4 \cdot 1{,}75 \cdot \pi) = 0 \text{ m}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0{,}2 \cdot \cos(4 \cdot t) \Rightarrow v_t = 0{,}2 \cdot \cos(4 \cdot 1{,}75 \cdot \pi) = -0{,}2 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0{,}8 \cdot \sin(4 \cdot t) \Rightarrow a_t = -0{,}8 \cdot \sin(4 \cdot 1{,}75 \cdot \pi) = 0 \text{ m/s}^2$$

La diferencia de fase entre el instante inicial y el t — 1,75 · π s es:

$$\Delta\varphi = \varphi_t - \varphi_0 = \omega \cdot 1{,}75 \cdot \pi - 0 = 4 \cdot 1{,}75 \cdot \pi = 7 \cdot \pi \text{ rad} = (3 \cdot 2 \cdot \pi + \pi) \text{ rad}$$

por lo que los dos instantes están en oposición de fase.

Problema 7:

Un resorte se alarga 4 cm cuando se cuelga de un objeto de 20 kg de masa. A continuación, se estira el resorte 3 cm más y se le deja que oscile libremente. determina el periodo y la pulsación del movimiento. Calcula los valores de la elongación, velocidad, aceleración y dureza elástica a los 2,1 s de iniciado el movimiento. ¿Cuál es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial?

Aplicando la ley de Hooke:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{m\,g}{y} = \frac{20 \cdot 9{,}8}{0{,}04} = 4900 \text{ N/m}$$

El periodo del movimiento y la pulsación son:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{20}{4900}} = 0{,}4 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{0{,}4} = 5\,\pi \text{ rad/s}$$

El movimiento comienza en el punto más bajo de la vibración, por ello si para su descripción se utiliza la función sin φ, entonces la fase inicial es $\varphi_0 = 3\,\pi/2$ rad.

Las expresiones de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza elástica y sus valores a los 2,1 s de iniciado el movimiento son:

$$y = 0{,}03 \sin(5\,\pi\,t + 3\,\pi/2) \;\Rightarrow y_{2,1} = 0{,}03 \sin(5\,\pi \cdot 2{,}1 + 3\,\pi/2) = 0 \text{ m}$$

Problema 8:

Una partícula de 10^{-3} kg de masa recorre un segmento de 5 cm de longitud en 1 s, con movimiento vibratorio armónico simple. La partícula en el instante inicial está situada en
la posición central del recorrido y se dirige hacia elongaciones positivas.

a) Calcula su energía cinética en el instante 2,75 s.

b) ¿Cual es el primer instante en que coinciden los valores de la energía cinética y de la energía potencial?

c) Representa gráficamente la velocidad de la partícula frente al tiempo transcurrido.

a) La amplitud del movimiento es igual a la mitad de la distancia entre los extremos.

$$A = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm} \;= 0{,}025 \text{ m}$$

Como la partícula tarda en recorrer el segmento 1 s, para poder volver a la posición inicial tarda el doble. Por tanto, el periodo y la pulsación del movimiento son:

$$T = 2 \cdot 1 = 2 \text{ s} \;\Rightarrow \omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

La partícula está en el instante inicial en el centro de la oscilación y se dirige hacia elongaciones positivas, por lo que la fase inicial es $\varphi_0 = 0$ rad, cuando se utiliza para la descripción de la posición la función seno.

Las expresiones de la elongación y de la velocidad son:

$$y = A\,\sin(\omega\,t + \varphi_0) = 0{,}025 \cdot \sin(\pi\,t) \;\Rightarrow v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}025 \cdot \pi \cdot \cos(\pi\,t)\ \mathrm{m/s}$$

La expresión de la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot [0{,}025 \cdot \pi \cdot \cos(\pi\,t)]^2 = 3{,}08 \cdot 10^{-6} \cdot \cos^2(\pi\,t)\ \mathrm{J}$$

Y en el instante pedido:

$$E_c = 3{,}08 \cdot 10^{-6} \cdot \cos^2(\pi \cdot 2{,}75) = 1{,}54 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

b) Las expresiones generales de las energías potencial y cinética son:

$$y = A\,\sin(\omega\,t) \;\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}\,k\,y^2 = \frac{1}{2}\,k\,A^2\,\sin^2(\omega\,t)$$

$$v = A\,\omega\,\cos(\omega\,t) \;\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,A^2\,\omega^2\,cos^2(\omega\,t)$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{1}{2}\,k\,A^2\,\sin^2(\omega\,t) = \frac{1}{2}\,m\,A^2\,\omega^2\,\cos^2(\omega\,t)$$

Simplificando y como $k = m\omega^2$, se tiene:

$$\sin^2(\omega\,t) = \cos^2(\omega\,t)$$

Por tanto:

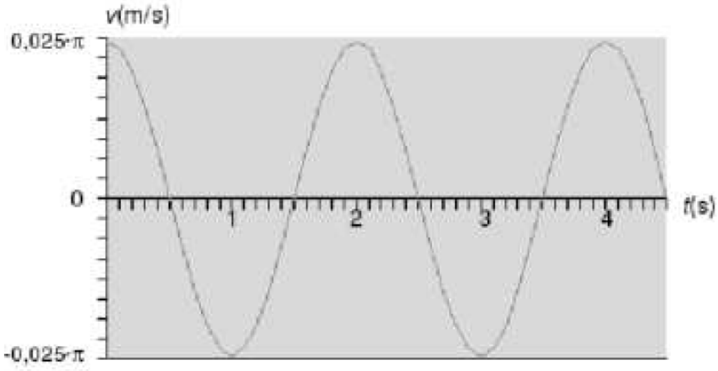
$$\sin(\omega\,t) = \cos(\omega\,t) \;\Rightarrow \omega\,t = \frac{\pi}{4}$$

Despejando se tiene el instante pedido:

$$t = \frac{\pi/4}{\omega} = \frac{\pi}{4 \cdot \pi} = 0{,}25\ \mathrm{s}$$

c) Hay que representar gráficamente la función $v = 0{,}025 \cdot \pi \cdot \cos(\pi\ t)$ m/s. Esta función está comprendida entre los valores máximos $v_{max} = \pm\, 0{,}025 \cdot \pi$ m/s.

Inicialmente la partóícula tiene el valor móaximo de la velocidad y los sucesivos valores de esta se repiten con un periodo de 2 s.



Problema 9:

Un péndulo está calibrado para realizar una oscilación completa en 1 s en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es g = 9,8 m/s2. ¿Cuánto retrasará o adelantará al cabo de un día cuando se traslade a un lugar en el que la aceleración de la gravedad es g = 9,7 m/s^2?

Sea A el punto en el que el péndulo realiza una oscilación completa en 1 s. Al trasladarlo al punto B, en el que la aceleración de la gravedad disminuye, entonces el periodo del péndulo se hace mayor, por lo que se retrasa en la medida del tiempo.
Los distintos periodos del péndulo en los lugares A y B son:

$$T_A = 2\,\pi\,\sqrt{l g_A}\,; \quad T_B = 2\,\pi\,\sqrt{l g_B} \;\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{g_B}{g_A}} = \sqrt{\frac{9{,}7}{9{,}8}} = 0{,}9949$$

Por lo que:

$$T_B = \frac{T_A}{0{,}9949} = \frac{1}{0{,}9949} = 1{,}0051\ \mathrm{s}$$

El péndulo colocado en el lugar B indica que ha transcurrido 1 s cuando en realidad han transcurrido 1,0051 s, por lo que se retrasa 0,0051 s en cada segundo.
El retraso al cabo de un día es: retraso = 0;0051 · 24 · 3600 = 7 min 21 s

Problema 10:

Una partícula describe un movimiento armónico simple con una frecuencia de 10 Hz y 5 cm de amplitud. Determina la velocidad cuando la elongación es x = 2,5 cm.

La pulsación de la vibración es: $\omega = 2\,\pi\,\nu = 20\,\pi$ rad/s y la amplitud es: $A = 5 \cdot 10^{-2}$ m. En ausencia de rozamiento la energía mecánica del oscilador se conserva:

$$E = E_c + E_p\,; \quad \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

Operando y como $k = m\cdot\omega^2$, se tiene:

$$m\,\omega^2\,A^2 = m\,v^2 + m\,\omega^2\,x^2\,; \quad \omega^2\,A^2 = v^2 + \omega^2\,x^2 \Rightarrow v = \pm\,\omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

Sustituyendo, se tiene que la velocidad en la posición x = 2,5 cm = $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m es:

$$v_{2,5} = \pm\,20\,\pi\,\sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2 - (2{,}5\cdot 10^{-2})^2} = \pm\,2{,}72\ \mathrm{m/s}$$

Cuando la partícula se aleja del origen su velocidad es positiva y cuando se dirige al origen su velocidad tiene el signo negativo.