13. **a.** La norma de Frobenius (que no es una norma natural) se define para una matriz A $n \times n$ mediante

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Muestre que $\|\cdot\|_F$ es una norma matricial.

b. Encuentre $\|\cdot\|_F$ para las matrices en el ejercicio 5.

c. Para cualquier matriz A, muestre que $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq n^{1/2}\|A\|_2$.

14. En el ejercicio 13 se definió la norma de Frobenius de una matriz. Muestre que para cualquier matriz A $n \times n$ y vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.

15. Si S es una matriz definida positiva $n \times n$. Para cualquier $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ defina $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t S \mathbf{x})^{1/2}$. Muestre que esto define una norma en $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: Utilice la factorización Cholesky para S y muestre que $\mathbf{x}^t S \mathbf{y} = \mathbf{y}^t S \mathbf{x} \leq (\mathbf{x}^t S \mathbf{x})^{1/2} (\mathbf{y}^t S \mathbf{y})^{1/2}$.]

16. Si S es una matriz real y no singular y si $\|\cdot\|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^n$. Defina $\|\cdot\|'$ por $\|\mathbf{x}\|' = \|S\mathbf{x}\|$. Muestre que $\|\cdot\|'$ también es una norma en $\mathbb{R}^n$.

17. Pruebe que si $\|\cdot\|$ es una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$, entonces $\|A\| = \text{máx}_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$ es una norma matricial.

18. El siguiente extracto de *Mathematics Magazine* [Sz] proporciona una forma alternativa de probar la desigualdad de Cauchy-Buniakowsky-Schwarz.

a. Muestre que cuando $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, tenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}} - \frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}} \right)^2.$$

b. Utilice el resultado en la parte a) para mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}.$$

19. Muestre que la desigualdad Cauchy-Buniakowsky-Schwarz se puede extender a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El análisis del error para problemas relacionados con vectores y matrices implica medir el tamaño de los errores en un vector o matriz. Existen dos tipos comunes de análisis de error que se usan para este propósito. ¿Qué son y cómo se utilizan las normas vectoriales y matriciales?
2. ¿Cuál es la norma espectral y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?
3. ¿Qué es una norma p y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?
4. ¿Qué es una norma de Frobenius y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.2

1. Calcule los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Calcule los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. Encuentre los eigenvalores complejos y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

4. Encuentre los eigenvalores complejos y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Encuentre el radio espectral para cada matriz en el ejercicio 1.

6. Encuentre el radio espectral para cada matriz en el ejercicio 2.

7. ¿Cuál de las matrices en el ejercicio 1 son convergentes?

8. ¿Cuál de las matrices en el ejercicio 2 son convergentes?

9. Encuentre la norma l_2 para las matrices en el ejercicio 1.

10. Encuentre la norma l_2 para las matrices en el ejercicio 2.

11. Si $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Muestre que A_1 no es convergente, pero que A_2 es convergente.

12. Una matriz A $n \times n$ recibe el nombre de *nilpotente* si existe un entero m con $A^m = O$. Muestre que si λ es un eigenvalor de una matriz nilpotente, entonces $\lambda = 0$.

EJERCICIOS APLICADOS

13. En el ejercicio 11 de la sección 6.3, supusimos que la contribución de un escarabajo hembra de cierto tipo para la población de escarabajos de los años futuros se podía expresar en términos de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

donde la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna representa la contribución probabilística de un escarabajo de edad j en la población hembra del siguiente año de edad i.

a. ¿La matriz A tiene algún eigenvalor real? En este caso, determínelo, así como cualquier eigenvector asociado.

b. Si se necesita una muestra de esta especie para propósitos de pruebas de laboratorio que tendría una proporción constante en cada grupo de edad año con año, ¿qué criterios se impondrían en la población inicial para garantizar la satisfacción de este requisito?

14. En el ejercicio 11 de la sección 6.5 se consideró una población de escarabajos hembra, lo cual condujo a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix},$$

donde las entradas a_{ij} denotan la contribución que un solo escarabajo hembra de edad j realizaría a la siguiente población de escarabajos hembra del siguiente año de edad i.

a. Encuentre el polinomio característico de A.

b. Encuentre el radio espectral $\rho(A)$.

c. Dada cualquier población inicial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, de escarabajos hembra, ¿qué sucederá al final?

EJERCICIOS TEÓRICOS

15. Muestre que el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ para la matriz A $n \times n$ es de enésimo grado. [*Sugerencia*: Expanda $\det(A - \lambda I)$ a lo largo de la primera fila y utilice inducción matemática en n.]

16. **a.** Muestre que si A es una matriz $n \times n$, entonces

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_1,$$

donde $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$ son los eigenvalores de A. [*Sugerencia*: Considere $p(0)$.]

b. Muestre que A es singular si y sólo si $\lambda = 0$ es un eigenvalor de A.

17. Sea λ un eigenvalor de la matriz A $n \times n$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ un eigenvector asociado.

a. Muestre que λ también es un eigenvalor de A^t.

b. Muestre que para cualquier entero $k \geq 1$, λ^k es un eigenvalor de A^k con eigenvector $\mathbf{x}$.

c. Muestre que si existe A^{-1}, entonces $1/\lambda$ es un eigenvalor de $(A^{-1})^k$ con eigenvector $\mathbf{x}$.

d. Generalice las partes b) y c) para $(A^{-1})^k$ para enteros $k \geq 2$.

e. Dado el polinomio $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k$, defina $q(A)$ para la matriz $q(A) = q_0 I + q_1 A + \cdots + q_k A^k$. Muestre que $q(\lambda)$ es un eigenvalor de $q(A)$ con eigenvector $\mathbf{x}$.

f. Sea $\alpha \neq \lambda$ dado. Muestre que si $A - \alpha I$ no es singular, entonces $1/(\lambda - \alpha)$ es un eigenvalor de $(A - \alpha I)^{-1}$ con eigenvector $\mathbf{x}$.

18. Muestre que si A es simétrica, entonces $||A||_2 = \rho(A)$.

19. Encuentre las matrices A y B para las que $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$. (Esto muestra que $\rho(A)$ no puede ser una norma matricial.)

20. Muestre que si $||\cdot||$ es una norma natural, entonces $(||A^{-1}||)^{-1} \leq |\lambda| \leq ||A||$ para cualquier eigenvalor λ de la matriz no singular A.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Encuentre una aplicación en la que el eigenvalor de 1 tenga un significado importante.
2. Analice la importancia geométrica del radio espectral relativo para los eigenvalores de una matriz A.
3. ¿En qué circunstancias el radio espectral de una matriz también es un eigenvalor de la matriz?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.3

1. Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas lineales, por medio de $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

a.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \phantom{{}- 2x_3} &= 9, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7, \\ - 2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25, \\ - 4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11, \\ - x_3 + 5x_4 &= -11. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6. \end{aligned}$$

2. Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas lineales, por medio de $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

a.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4, \\ x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$