

Facultad de Matemática y Computación (UH)
Ciencia de la Computación
Matemática Numérica I

Clase Práctica ¿2.001 ó 1.999999998?:
¡Tiene que haber un error!

Curso 2021

Introducción

Llegado a este punto deberías saber qué son los errores absolutos y relativos; qué son las cifras significativas correctas y cómo calcularlas; qué es la condición de una función; y en qué consiste la estabilidad de cálculo, y por supuesto, ser capaz de relacionarlo todo con las aritméticas de punto flotante. Si crees que dominas esos contenidos... ¡adelante!

Vamos a ver si de verdad te sabes lo básico

Ejercicio 1: En este ejercicio hay varios errores (10000 créditos)

Alguien calculó 1.41, 0.02573 y 846.28 como aproximaciones de $\sqrt{2}$, 0.024 y 847.

- a) Calcule el error absoluto en cada caso.
- b) Calcule el error relativo en cada caso.
- c) Diga cuántas cifras significativas correctas tiene cada una de las aproximaciones.
- d) ¿Cuál es la aproximación más precisa?

Ejercicio 2: e de error (15000 créditos)

El número e se puede calcular como $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Calcule el error absoluto y relativo que se obtienen al realizar las siguientes aproximaciones:

a) $e \approx \sum_{i=0}^5 \frac{1}{n!}$

b) $e \approx \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{n!}$

Ejercicio 3: Este ejercicio se puede hacer con una condición (20000 créditos)

Calcule $\text{cond}(f)$, para la función $f(x) = (x - 1)^2$.

- a) Determine un valor de x para el que $f(x)$ esté bien condicionada.
- b) ¿Para qué valores de x la función está mal condicionada?

Ejercicio 4: Diga NO a la inestabilidad de cálculo (40000 créditos)

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+4} - 2$, $g(x) = 1 - e^x$:

- a) ¿Qué problema numérico aparece al evaluar $f(x)$ y $g(x)$ en valores de x que estén cercanos a 0?
- b) Encuentre expresiones equivalentes para $f(x)$ y $g(x)$ en las que no aparezca el problema detectado en el inciso anterior.

Y ahora... ¡sin números!

Ejercicio 5: Si no se conoce el valor real... ¡No importa! (40000 créditos)

Cuando se trabaja con métodos numéricos nunca¹ se conoce el valor real que se está buscando. ¡Eso hace que en la práctica sea imposible calcular el error relativo² :-o! Sin embargo, en la práctica se suele usar el valor $\bar{\delta}$ que se calcula como:

$$\bar{\delta} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}$$

Lo que hay que hacer en este ejercicio es que si $\delta \approx 0$, entonces $\delta \approx \bar{\delta}$.

Ejercicio 6: ¿Puedes hacer el ejercicio en abstracto? :-/ (40000 créditos)

Sean $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ y $F = (\beta, p, m, M)$ una aritmética de punto flotante.

¹Que valga la pena

²¡Tarataatán! ¡Ganga! Por el módico valor de la respuesta a ¿por qué no se puede calcular el error relativo si no se conoce el valor real que se desea aproximar? te puedes ganar 10000 créditos. No dejes pasar esta oportunidad :-D.

- a) ¿Para qué valor de x , hay “problemas”³ al evaluar $h(x)$ en la aritmética F .
- b) Cómo se puede evaluar $h(x)$ evitando el problema indicado en el inciso anterior.

Ejercicio 7: Para no discriminar contenidos (50000 créditos)

Una de las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se puede obtener como:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- a) Para qué valores de a , b y c esta forma de calcular x_1 resulta numéricamente inestable en una aritmética $F(\beta, p, m, M)$.
- b) Utilizando los conceptos de estabilidad de cálculo y condición de una función, justifique por qué los valores determinados en el inciso anterior para a , b y c hacen que esa forma de calcular x_1 sea inestable.

Ejercicio 8: Para vincular conceptos e ideas (60000 créditos)

Explique el fenómeno de cancelación catastrófica en términos de la condición de la resta. Para ello:

- a) Argumente qué tiene que ver la cantidad de cifras significativas correctas con el error relativo.
- b) Explique qué tiene que ver el error relativo con la condición de una función.
- c) Determine para qué valores de x la función $f(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$ está mal condicionada.
- d) Usa los resultados de los incisos anteriores e impresiona a los profesores ;-).

Ejercicio 9: El problema con las cifras significativas correctas (Al menos 30000⁴ créditos)

Es un hecho comúnmente aceptado que tus resultados matemáticos serán tan buenos como las definiciones de las que partas. La idea de cifras significativas correctas tiene el inconveniente de que para casi cualquier definición “medianamente sensata e intuitiva” que se dé, se pueden encontrar ejemplos que no “encajan” con esa definición.

Ponga al menos dos ejemplos de estas posibles definiciones “sensatas” y cuáles son los problemas que tienen.

³Vaya, esto no merece casi ni el nombre de “ejercicio”, pero bueno... si estás leyendo esto es porque lo encontraste, así que: ¡Tarataatán! (Está con letra chiquitica porque no tiene mérito, y además sonó muy bajito) ¿Qué “problemas” son los que pueden aparecer para esos valores de x ? Si respondes bien, el profesor te entrega renuentemente 10000 créditos por hacer la primera pregunta secreta de la CP.

⁴Son 30000 por cada una de las definiciones que des.

Ejercicio 10: Tipos de errores (60000 créditos)

Por la forma en que se calculan, los errores pueden ser absolutos o relativos, pero de acuerdo a su origen se pueden clasificar en tres grandes grupos: de redondeo, de truncamiento e inherentes.⁵

- a) Diga en qué consiste cada uno de estos “errores”.
- b) Pon al menos dos ejemplos de cada uno de ellos.

Ejercicios desastrosos⁶

Ejercicio 11: Errores catastróficos (de verdad) (Al menos 30000 créditos)

Para ponerle emoción a la asignatura, en este ejercicio hay explosiones, muertes, y misterios de la vida real, todos relacionados con tus recientes conocimientos de Matemática Numérica :-o.

- a) Busca ejemplos de catástrofes y problemas reales que hayan ocurrido por culpa del mal uso de la matemática numérica.
- b) Describe y explica (si puedes) los elementos de matemática numérica que intervinieron en esas catástrofes.
- c) ¿Puedes decir cómo se hubieran podido evitar esos problemas?

Ejercicio 12: Cien preguntas como esta por un peso⁷ (100000 créditos)

Utilizando tus recientes conocimientos de matemática numérica, ¿tus? conocimientos de análisis matemático, y un poquito de imaginación⁸, determine **analíticamente** cuál es el valor de h para el que se comete el menor error posible al aproximar la derivada de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la aproximación:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Ejercicio 13: Precisando detalles (200000 créditos)

¿Dada una aritmética $F = (\beta, p, m, M)$, y una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para qué valores de $\text{cond}(f)$, la función está mal condicionada?

⁵He aquí otro ejercicio para poner a prueba tus habilidades de búsqueda. Es muy poco probable que puedas “deducir” las respuestas correctas a este ejercicio.

⁶Idealmente lo de desastroso es solo por los ejercicios y no por las respuestas.

⁷O en otras palabras: “pregunta kilo”

⁸O mucha habilidad buscando información.

Bibliografía recomendada

- *Numerical Analysis. 10th Edition.* J. D. Faires, R. L. Burden, y A. M. Burden. Brooks Cole Publishing, 2016.
- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach. 3rd Edition* S. D. Conte y Carl de Boor. McGraw-Hill Book Company. 1980.
- *Scientific Computing. An Introductory Survey. 2nd Edition* M. Heath. McGraw-Hill Book Company, 2002.
- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.
- *Numerical Analysis.* Timothy Sauer, 3rd Edition. Pearson, 2017.