Facultad de Matemática y Computación (UH)

Ciencia de la Computación

Matemática Numérica

Curso 2021

Conferencia ¿2.001 ó 1.999999998?

1 Preámbulo

Hace mucho tiempo, en un aula muy, muy lejana...

¡Ta táaaaan!

Matemática

Numérica

↑

(Esto tiene tipografía de la Guerra de las Galaxias y se va alejando hacia atrás poquito a poco mientras suena la música de la película)

¡Tara tatáann... táaann... taratatáaaaaaata![1]

[1] *Para los que saben leer música* `:-/` *esto es la música de la Guerra de las Galaxias. Si no te habías dado cuenta vuélvelo a leer y lo comprobarás* `;-)`

Episodio II:

La amenaza flotante

Son tiempos

difíciles para los

profesores de 4to grado.

Aprovechando las computadoras,

los flotantes se han apoderado de los

cálculos en el planeta y, sin que nadie lo

sepa, extienden sus errores por todo el universo.

Solo un selecto grupo de analistas numéricos puede hacer

frente a esta amenaza, pero los flotantes, con su capacidad casi

infinita para producir errores llevan las de ganar en esta contienda.

La última esperanza de los analistas numéricos radica en un grupo de estudiantes que recién comienza su preparación en una lejana región del universo...

Fernando: Y ese sería el comienzo de la clase...

Sheila: No, profe, no invente. Dé la clase normal. La gente no tiene por qué saber de la Guerra de las Galaxias, y hay a quien no le gusta.

Fernando: Pero así la clase sería más épica. Podríamos tener sables luz, con los colores brillantes, los sonidos de los disparos, la velocidad de los movimientos... se podrían hacer cantidad de cosas interesantes...

Sheila: No profe, eso no es interesante, ni épico. Lo único épico es el poco caso que le van a hacer. No complique las cosas, dé la clase normal, como el año pasado.

Fernando: Es que el año pasado nadie me hizo caso.

Sheila: Claro, por pasarse la conferencia entera hablando del juego viejo ese que nadie conoce nada más que usted.

Fernando: El "juego viejo ese", como tú le dices, es un clásico y todo el mundo debería conocerlo.

Carlos: Bueno, profe, en realidad lo único que tiene curioso es que puedes atravesar algunas paredes por culpa de los errores que se comenten con flotantes, pero decir que es un clásico... me parece un poco exagerado.

Sheila: Profe, si hace eso que usted quiere, le van a hacer menos caso todavía que el año pasado. Háganos caso. Dé la clase normal. Va a ser mejor.

Rocio: A mí la idea no me parece tan mala...

Sheila: ¡Tú te callas! Que por tu culpa ya tenemos demasiado Harry Potter.

Rocio: *(Bajito)* Muggle.

2 Resumen de lo anterior y título de la clase

Los profesores llegan al aula cuando los últimos alumnos están entrando. Los de clase práctica se sientan al fondo, y el de conferencias se dedica a borrar la pizarra que el profesor del turno anterior dejó escrita. Cuando termina, se para frente al aula, y mira en dirección a los profesores de clase práctica. Sheila niega con la cabeza. El profesor suspira y empieza a hablar.

—Hola, buenas tardes. De las clases anteriores tenemos lo siguiente. —*mientras habla escribe en la pizarra* —Una aritmética de punto flotante se define mediante una base β, una mantisa o precisión p, un mínimo exponente m, y un máximo exponente M.

$$\mathtt{F}(\beta,\ \mathtt{p},\ \mathtt{m},\ \mathtt{M})$$

—En estas aritméticas, los números tienen el formato

$$.\ \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_p\ \mathtt{E}\ \mathtt{k}$$

—y los números que se pueden representar de manera exacta de esa forma se llaman flotantes.

`Flotantes`

—En la mayoría de los casos la aritmética está normalizada. Esto significa que el primer dígito de todos los flotantes siempre debe ser distinto de 0.

F está normalizada si $\forall$ f $\in$ F, donde

$$\mathtt{f} = .\ \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_p\ \mathtt{E}\ \mathtt{k},$$

se cumple que: $\beta_1 \neq 0$

—A todo número real x se le puede asignar un flotante que será su representación en esa aritmética, y se denota por $fl(x)$.

$$\texttt{flotante de x} \rightarrow \texttt{fl(x)}$$

—Como en estas aritméticas solo hay un número finito de flotantes, existe un mayor representable, y un menor representable.

$$\texttt{Mayor representable:}\quad .\underbrace{\underline{\beta-1}\ \underline{\beta-1}\ \ldots\ \underline{\beta-1}}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\texttt{M}}$$

$$\texttt{Menor representable:}\quad \beta^{\texttt{m}-1}$$

—Cuando se quiere representar un número más grande que el mayor representable, ocurre un overflow y el resultado es infinito. Cuando el número es más pequeño que el menor representable, ocurre un underflow, y el resultado es 0.

$$\texttt{Overflow:}\ \rightarrow\ \infty\ (\texttt{math.inf})$$
$$\texttt{Underflow:}\ \rightarrow\ \texttt{0}$$

—En las aritméticas existe un símbolo especial para representar el resultado de operaciones que no están definidas, es el NaN que significa "Not E Nómber".

`NaN: Not a Number`

—Por último está el espaciamiento entre dos números, o el espaciamiento de un flotante, que es la distancia entre un flotante y su sucesor. Este espaciamiento es β^{k-p}, donde β es la base, k es el exponente del número y p es la precisión de la aritmética.

$$\texttt{Espaciamiento de un número (flotante)} \rightarrow \beta^{k-p}.$$

—Dentro de los espaciamientos hay uno especial: el épsilon de la máquina, que es β^{1-p} y como pudieron comprobar las personas que hicieron los ejercicios de la clase práctica, puede tener cierto protagonismo.

$$\texttt{Épsilon de la máquina} \rightarrow \beta^{1-p}$$

—La gran mayoría de lo equipos modernos de computo implementan una aritmética de punto flotante que sigue el estándar IEEE 754.

`IEEE 754`

—En este estándar existen dos tipos de representaciones para los números: simple y doble precisión. En la doble precisión, se tiene 1 bit para el signo, 11 para el exponente y 53 para la mantisa, y la base es 2.

`IEEE 754: mantisa 53, exponente 11, base 2.`

—Esto hace que se puedan tener entre 15 y 17 cifras decimales.

Cuando termina de escribir se para al lado de la pizarra y se puede ver lo que está escrito:

$$\texttt{Aritmética de Punto Flotante: F(}\beta\texttt{, p, m, M).}$$

$$\texttt{Flotante: . } \beta_1\ \beta_2\ \texttt{...}\ \beta_p \texttt{ E k}$$

$$\texttt{F está normalizada si } \forall \texttt{ f} \in \texttt{F, donde}$$

$$\texttt{f = . } \beta_1\ \beta_2\ \texttt{...}\ \beta_p \texttt{ E k,}$$

$$\texttt{se cumple que: } \beta_1 \neq \texttt{0.}$$

$$\texttt{Flotante de x} \rightarrow \texttt{fl(x)}$$

$$\texttt{Mayor representable:}\quad .\underbrace{\underline{\beta-1}\ \ \underline{\beta-1}\ \ \ldots\ \ \underline{\beta-1}}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\texttt{M}}$$

$$\texttt{Menor representable:}\quad \beta^{m-1}$$

$$\texttt{Underflow} \to \texttt{0}$$

$$\texttt{Overflow} \to \infty \to \texttt{math.inf}$$

`NaN: Not a Number`

$$\texttt{Espaciamiento de un número (flotante)} \to \beta^{\texttt{k-p}}$$

$$\texttt{Épsilon de la máquina} \to \beta^{\texttt{k-p}}$$

`IEEE 754: mantisa 53, exponente 11, base 2.`

—Todos estos elementos sirven para explicar por qué ocurren muchos de los fenómenos relacionados con las operaciones matemáticas en las computadoras, y también son la justificación de por qué esos fenómenos son inevitables, mientras se usen aritméticas de punto flotante.

Hace una pausa para comprobar si los alumnos entienden la implicación de lo que acaba de decir. Como nadie se inmuta, asume que todos ya lo interiorizaron, o que no hay nadie haciéndole caso, y sigue hablando.

—Lo que vamos a ver hoy es cómo lidiar con esos fenómenos para, a pesar de todos esos errores inevitables, obtener los resultados que uno quiera, con tanta exactitud como se quiera —*hace otra pausa*—. Por eso la conferencia de hoy lleva por título...

Mira hacia los profesores de clase práctica. Cuando Sheila asiente con la cabeza, sigue hablando

—"La amenaza flotante" —*eso lo dice con mucho entusiasmo mientras lo escribe en la pizarra. Cuando termina de escribirlo, agrega con resignación*—"y cómo evitarla".

`La amenaza flotante y cómo evitarla`

Fernando: ¿Al menos puedo dejar el título?

Sheila: ¿Qué título?

Fernando: La amenaza flotante.

Sheila: *(Piensa unos instantes)* Sí, el título no está taaan mal —*sigue pensando* —pero habría que ponerle algo más.

Fernando: La amenaza flotante: ¡los errores contraatacan!

Sheila: ¡Pschst! —*sigue pensando.*

Camila: Fernan, yo creo que ella no te va a dejar pasar ninguna otra...

Fernando: ¡Shhhhh! *(Muy bajito)* Que yo creo que esa nos la dejó pasar porque no sabe que es una referencia a la Guerra de las Galaxias.

Camila: *(Bajito)* Ah, ya. Está bien. *(Con voz normal)* Yo creo que ella no le va a dejar pasar "ninguna" referencia a la Guerra de las Galaxias.

Sheila: Ya, a ver. Puede ser: "La amenaza flotante y cómo evitarla". Así queda claro el objetivo de la clase, y si alguien revisa el título de la conferencia, no nos puede decir nada por ser poco serios o irresponsables.

Rocio: *(Muuuuy bajito)* ¡Pschst! Muggle.

3 Errores: Definiciones y Ejemplos

—Como estamos trabajando con una aritmética de punto flotante, siempre habrá errores en los cálculos.

Gustavo:

Que siempre se comentan errores en la computadora no es un problema. Lo que hay que hacer es saber de qué tamaño es el error que estás cometiendo y si te conviene o no. Con estas mismas aritméticas y esos errores se mandan cohetes al espacio y llegan a donde tienen que llegar, o se realizan operaciones micrométricas en el cerebro y no rompen nada, porque tienen control del error.

Sheila:

El secreto para hacerlo todo bien, a pesar de que los errores no se pueden evitar, es saber qué error se comete en todo momento. El nombre científico es **acotar el error**.

—La forma de trabajo de la Matemática Numérica es diseñar o usar algoritmos que te permiten conocer, en todo momento, qué error estás cometiendo. De esta forma, puedes correr el algoritmo hasta que ese error sea menor que una cantidad que tú quieras, o hasta que tengas una cantidad determinada de cifras correctas en la solución. Para poder hacer eso, lo primero que habría que hacer es definir los conceptos de error y de cifras significativas correctas.

Rocio:

Una pensaría que no es necesario dar la definición de error, porque todo el mundo ha cometido los suficientes como para saberlos identificar. Pero de como aquí, además de identificarlos, nos interesa estimarlos y acotarlos, es bueno tenerlos claramente definidos.

—En Matemática Numérica se usan dos errores, que son los que se usan en todas las ciencias e ingenierías. El **error absoluto** y **el error relativo**.

`Error absoluto`

`Error relativo`

—El error absoluto se suele denotar por e, y el relativo por δ.

`Error absoluto:` e

`Error relativo:` δ.

—En ambos casos hay que conocer el verdadero valor, que casi siempre se denota por x, y el valor aproximado, que usualmente se denota por $\overline{x}$.

`Valor exacto:` x

`Valor aproximado:` $\overline{x}$

—Con esas definiciones y notaciones, el error absoluto se calcula como el valor absoluto de la diferencia entre el verdadero valor y el valor aproximado:

$$e = |x - \overline{x}|$$

—El error relativo es el error absoluto, dividido por el verdadero valor:

$$\delta = \frac{e}{x} = \frac{|x - \overline{x}|}{|x|}$$

Rocio:

Casi siempre es suficiente considerar el valor absoluto del error, pero hay veces que el signo es importante. Por ejemplo, las tapas y los pozuelos. Si tú estás buscando una tapa para ponerle a un pozuelo, la tapa no tiene que ser exactamente del mismo tamaño, ahí se puede cometer un error. Pero en ese caso, el signo es importante. Porque si la tapa es más grande, no importa... pero si el error que cometes es porque la tapa es más chiquita, cada vez que la quieras poner se te cae adentro y no resuelves el problema.

Ese ejemplo él lo puso el año pasado en esta conferencia y nosotros nos pasamos todo el año que cada vez que veíamos un pozuelo o una tapa, no acordábamos de que los errores llevan módulo, casi siempre. Menos mal que este año lo logramos convencer de que no lo pusiera, porque así ustedes pueden recordar que los errores llevan módulo sin tener que cargar con la maldición de los pozuelos.

—Una vez dadas las definiciones, el próximo paso es poner algunos ejemplos. Si el verdadero valor 2, y el valor aproximado es 2.001

$$\textit{Si} \quad x = 2, \ \ \overline{x} = 2.001$$

—¿Cuál sería el error absoluto? *Algunos alumnos dicen 0.001, y el profesor lo escribe en la pizarra.*

$$e = |x - \overline{x}| = 0.001$$

—¿Y en este caso, cuál sería el error relativo?

Varios alumnos dicen que eso mismo dividido por 2. El profesor lo escribe.

$$\delta = \frac{e}{|x|} = \frac{0.001}{2} = 0.0005$$

—¿Alguna duda hasta aquí?

Nadie dice nada. ¡Claro! Con esos ejemplos tan bobos, ¿quién va a tener dudas?

—En casi todos los métodos y algoritmos conviene tener una idea clara de qué error se comete: ya sea el absoluto o el relativo. Pero el error relativo tiene una aplicación extra, que está relacionada con las cifras significativas correctas...

El profesor hace una pausa, y fija la vista en el fondo del aula, donde no hay sillas.

Fernando: Y entonces, cuando se hable de los profesores de cuarto grado, ellos pueden estar al fondo del aula, translúcidos, con un brillito que se mueve por su contorno.

Sheila: ¿Qué eso profe?

Carlos: Así es como aparecen los espíritus de los maestros en la Guerra de las Galaxias.

Sheila lo mira sin decir nada.

Carlos: A mí no —*se encoge de hombros*—, a mí me da lo mismo si están o si no están, pero tú preguntaste.

Se vira para Fernando.

Sheila: A ver, profe, ¿qué eso del espíritu de los profesores de cuarto grado?

Fernando: Es que como vamos a estar hablando de cosas que se sabe desde esa época, yo quería hacer referencia a ellos, para que los alumnos los recordaran...

Sheila: Está bien, pero haga referencia a ellos sin espíritus y sin luces y sin nada...

Rocio: La idea de que sean como maestros es... —*Sheila la mira, y Rocio se calla.*

Fernando: ¿Pero al menos puedo hacer como si estuvieran ahí? —*Eso lo dice con cara de Gato de Shrek.*

Sheila: Sí, pero sin nada de espíritus, ni Guerra de las Galaxias ni ninguna bobería de esas.

Rocio: *(Muy, muy Bajito)* Muggle.

Sheila: ¡Te oí!

Rocio: *(Más bajito todavía)* ¡Muggle! ¡Con buen oído!

"Ejém". El carraspeo de Sheila lo saca de su ensimismamiento, suspira y sigue hablando:

—Y en este tema de las cifras significativas correctas, algunas personas recordarán a sus profesores de cuarto grado.

4 Cifras significativas correctas

—Para hablar de cifras significativas correctas primero hay que hablar de cifras significativas. Por suerte, aquí, no hay ningún problema, y los profesores de cuarto grado van a estar contentos con nosotros.

Los profesores de cuarto grado sonríen complacidos.

—En un número cualquiera, las cifras significativas son todas las que están a la derecha del primer dígito diferente de 0, incluyendo a este primer dígito. Por ejemplo en el número...

`0.0234`

—hay 3 cifras significativas. En el número:

`0.023400`

—hay 5 cifras significativas, porque los dos últimos ceros cuentan como cifras significativas. ¿Alguna duda hasta aquí?

Nadie responde así que sigue hablando.

—Ahora, vamos a la parte complicada... donde los profesores de cuarto grado nos van mirar con muuuuy mala cara.

> **Carlos:**
> Los profesores de cuarto grado y tod@s lo que hayan prestado atención a las clases de matemática en la primaria.

—Para hablar de cifras significativas correctas necesitamos un valor real y una aproximación. Siguiendo la notación que presentamos al principio, el valor verdadero será x y el aproximado $\overline{x}$

`Verdadero valor:` x

`Valor aproximado:` $\overline{x}$

—Por ejemplo, el verdadero valor puede ser 2, y el aproximado 2.1.

$$\texttt{Verdadero valor:}\quad x = 2$$

$$\texttt{Valor aproximado:}\quad \overline{x} = 2.1$$

—La pregunta es entonces —*deja de hablar, y piensa unos instantes*—. No. Antes de "la pregunta", hay otra: ¿cuántas cifras significativas tiene 2.1?

Espera la respuesta.

—Exacto. Tiene dos cifras significativas. Ahora sí, "la pregunta": ¿cuántas cifras significativas correctas tiene 2.1 como aproximación de 2?

Alguien dice que 1.

—¡Exacto! Los profesores de cuarto grado te miran orgullosos[2]. Implícitamente ahí usaste la definición de que la cantidad de cifras correctas es la cantidad de cifras que coinciden en la aproximación y en el verdadero valor, ¿no?

La persona que habló dice que sí.[3]

—Y además, en esa definición está implícita la idea de que mientras más cifras significativas correctas tenga un número, mejor es su aproximación. ¿Todos estamos de acuerdo?

Los profesores de cuarto grado asienten, al igual que la mayoría de los estudiantes del aula. L@s únic@s que no asienten son l@s que están esperando que aparezca al trampa en algún momento. Esos tienen mirada escéptica.

—Perfecto. Entonces, consideren esta otra aproximación de 2...

$$\texttt{Valor real:}\quad x = 2$$

[2]Ellos y todas las personas que prestaron atención a las clases de matemática en la primaria.

[3]Incluso los profesores de cuarto grado, dicen que sí, ¡claro!

$$\texttt{Valor aproximado:}\quad \overline{x_*} = 1.99998$$

—Y a partir de ella, vamos responder algunas preguntas. La primera: ¿Cuántas cifras significativas correctas tiene $\overline{x_*}$ como aproximación de 2?

La mayor parte del aula responde que ninguna.

—Exacto: ninguna. Y entonces, como $\overline{x_*} = 1.99998$ no tiene ninguna cifra significativa correcta como aproximación de 2, y $\overline{x} = 2.1$ tiene una, entonces $\overline{x}$ es una mejor aproximación de 2 que $\overline{x_*}$, ¿no?

Los profesores de cuarto grado se mueven incómodos y tratan de cambiar el tema de conversación.

La mayoría de los alumnos no están seguros si deben decir que sí o que no.

L@s escéptic@s sonríen con expresión de: ¡Ajá! ¡Sabía que había trampa!

—En Matemática y Ciencia de la Computación hay un principio que conviene recordar siempre: los resultados que obtengas serán tan buenos como sean las definiciones de las que partas. Lo que pasa aquí es que esa definición de cifras significativas correctas no es "lo suficientemente buena".

Los profesores de cuarto grado miran al conferencista con recelo

—¿Cuál sería una buena definición de cifras significativas correctas? La versión corta es que no hay.

Gustavo:

Sí, no hay. Casi todas tienen algún inconveniente. En la clase práctica tienen un ejercicio sobre eso y si quieren más información (y parte de la respuesta al ejercicio de la CP) pueden consultar el Higham, que en las primeras páginas tiene un buen número de ejemplos.

—Pero que no haya una buena definición no significa que no vayamos a usar una. Hay una que es muy cómoda, funcional, rápida, y además, permite calcular la cantidad de cifras significativas correctas en cualquier base. Para eso hay que usar el error relativo.

Comienza a escribir en la pizarra mientras habla

—Si $\overline{x}$ es una aproximación de x, se dice que $\overline{x}$ tiene k cifras significativas correctas en base β si el error relativo es menor que $\dfrac{1}{2}\beta^{1-k}$:

$\overline{x}$`, como aproximación de` x

`tiene k cifras significativas correctas (csc)`

`en base` β `si:`

$$\delta = \frac{|x-\overline{x}|}{|x|} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-k}$$

—Usando esta definición podríamos calcular la cantidad de cifras significativas correctas de $\overline{x} = 2.1$ y $\overline{x_*} = 1.99998$ como aproximaciones de $x = 2$. Para eso calculamos los dos errores relativos:

Los profesores de cuarto grado miran atentamente todo lo que escribe buscando algún error en los cálculos

$$\delta = \frac{|x-\overline{x}|}{|x|} = \frac{|2-2.1|}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

$$\delta_* = \frac{|x-\overline{x_*}|}{|x|} = \frac{|2-1.99998|}{2} = \frac{0.00002}{2} = 0.00001$$

—Una vez que se tienen los errores relativos —*señala a lo que está en la pizarra*—, ya se puede determinar el mayor valor de k para el cuál se cumple la desigualdad, y esa sería la mayor cantidad de cifras significativas correctas que tiene la aproximación del número.

Sheila:

Para hacer el ejemplo más cómodo, Vamos a usar base 10. Definir la base es importante, porque ese número es el que hay que elevar en la parte derecha.

—El primer caso es k=1.

Escribe los cálculos en la pizarra.

$$\texttt{k = 1:} \quad \frac{1}{2}\beta^{1-k} = \frac{1}{2}10^{1-0} = \frac{1}{2}1 = 0.5\,.$$

$$\delta = 0.1 \leq 0.5$$

—Por lo tanto, de acuerdo con esa definición 2.1 tiene 1 cifra significativa correcta como aproximación de 2. ¿Todos de acuerdo?

Nadie responde.

—Veamos si tiene 2:

$$\texttt{k = 2:} \quad \frac{1}{2}\beta^{1-k} = \frac{1}{2}10^{1-2} = \frac{1}{2}10^{-1} = 0.05\,.$$

$$\delta = 0.1 \nleq 0.05$$

—Y por lo tanto, 2.1, no tiene 2 cifras significativas correctas, en base 10, como aproximación de 2. Y eso confirma la teoría de los profesores de cuarto grado.

Los profesores de cuarto grado sonríen satisfechos.

—Analicemos ahora las cifras significativas correctas de 1.99998 como aproximación de 2.

Comienza a escribir en la pizarra.

Gustavo:

Una de las ventajas de esta forma de definir las cifras significativas correctas, es que si un número tiene k cifras significativas correctas, entonces también tiene j cifras significativas correctas, para cualquier $j < k$. Por eso, en el próximo ejemplo, el profe no va a probar con 1, 2, 3... sino que va a empezar directo con números grandes.

```
k = 5:
```

$$\frac{1}{2}\beta^{1-k} = \frac{1}{2}10^{1-5} = 0.5 \times 10^{-4} = 0.00005\,.$$

$$\delta_* = 0.00001 \leq 0.00005$$

—Se cumple la desigualdad. Por lo tanto, 1.99998 tiene ¡5 cifras significativas correctas como aproximación de 2!

Los profesores de cuarto grado hablan bajito entre ellos.

—Y aquí habría que ver qué dicen los profesores de cuarto grado.

Los profesores de cuarto grado salieron del grupo.

—Fíjense que si probáramos con 6, el resultado de $\frac{1}{2}\beta^{1-6}$ ya sería menor que el error relativo asociado a $\overline{x_*}$, y por lo tanto, no tiene 6 cifras significativas correctas.

Carlos:

Recuerden que todos estos cálculos están hecho para base 10. Hay una pregunta interesante que es cuántas cifras significativas correctas **binarias** tienen 2.1 y 1.99998 como aproximación de 2. Fíjense que el error relativo no hay que calcularlo otra vez, lo único que habría que cambiar es la parte derecha de la desigualdad.

Camila:

Durante el curso vamos a usar esta definición de cifras significativas correctas: es fácil de calcular, permite obtener la cantidad de cifras en cualquier base, y nos sale prácticamente gratis, porque en la mayoría de los algoritmos de la asignatura, es necesario calcular el error relativo así que eso ya lo tenemos adelantado.

—¿Alguna pregunta hasta aquí?

Hace una pausa por si alguien quiere preguntar algo.

—Si no hay dudas, vamos a coger los 5 minutos.

5 Cinco Minutos

Estos cinco minutos transcurren con mucha tranquilidad. Pasados 4 minutos, el profesor se para en la puerta y le dice a los alumnos que entren. Antes de entrar mira a un lado y a otro, por si se ven los profesores de 4to grado, pero no hay evidencia de ellos por ninguna parte. Entra y comienza a hablar.

6 Cotas para los errores en las AFP

—Vamos al siguiente paso de la conferencia. De las clases anteriores ya sabemos que cuando las computadoras realizan los cálculos siempre cometen errores por culpa de las aritméticas de punto flotante, y que eso no hay forma de evitarlo. Lo que debemos que hacer nosotros es tener una idea de qué error se comete en cada caso.

Camila:

Independientemente de los demás errores que se cometan, hay una fuente de error que siempre está presente en todos los cálculos que hagas con la computadora: la representación de los números en la aritmética. Por eso lo primero que hay que tener siempre muy claro es de qué tamaño son los errores que se cometen al representar los números en la aritmética.

Carlos:

Conocer cuánto del error del resultado se debe a la representación de los números en la aritmética es importante, porque no importa cuán bueno sea el algoritmo, llega un momento en que los resultados no pueden mejorar más. ¿Cuál es ese momento? Cuando el error que se comete se debe únicamente a la representación de los números.

—Lo primero es determinar qué error se comete cuando se representa un número real en una aritmética de punto flotante. Un número cualquiera sería x, y su representación en la aritmética sería $fl(x)$. En este caso ¿cuál sería el verdadero valor y cuál la aproximación?

Se escucha un coro que dice más o menos: "Eheohaahd x eaahh valor real eooaoahh flotante ooohhaaah aproximación".

—Exacto —*mientras habla escribe en la pizarra*—, el valor real sería x y la aproximación sería $fl(x)$.

$$x \texttt{ = x, } \overline{x} \texttt{ = fl(x)}$$

—La pregunta es, ¿qué error se comete al decir que el número x es su flotante $fl(x)$?

Alguien que ha prestado atención a la conferencia desde el principio levanta la mano y pregunta:

—Profe, ¿error relativo o error absoluto?

—¡Bien! Anótate 10000 créditos por hacer una pregunta importante.

El alumno saca su teléfono y se anota los créditos en su canal.

—En la asignatura no tiene sentido hablar del "error" a secas. Siempre hay que especificar si el error es absoluto o relativo. Gracias a la pregunta de... —*señala a la persona que habló*— disculpa, no me sé tu nombre —*pone cara de* `:sweat_smile:`— vamos a empezar por el error absoluto. La pregunta es: ¿qué error absoluto se comete al decir que x es $fl(x)$?

Camila:

El error absoluto y el error relativo siempre, siempre, siempre, se calculan igual. El absoluto es módulo del verdadero valor menos el aproximado, y el relativo es siempre el error absoluto sobre el módulo del verdadero valor.

Rocio:

Bueno, el error absoluto lleva módulo si no hay tapas y pozuelos involucrados. ¡Qué suerte que ustedes no tuvieron que vivir eso!

Alguien dice que el error absoluto sería —x - fl(x)—.

—Exacto:

```
e = |x - fl(x)|
```

—Y aquí viene una de las formas de pensar de la asignatura y de todo el trabajo con cálculo científicos en la computadora: "no nos interesa saber cuál es el error, lo que queremos es tener una cota para el error".

Hace un silencio mientras mira a los estudiantes.

—Repito porque eso es importante: "No queremos saber cuál es el error que se comete, no nos interesa. Lo que queremos es tener una cota para ese error".

Hace otro silencio, que rompe un estudiante de la segunda fila:

—Profe, ¿pero no sería mejor saber qué error se comete?

Carlos: Nooo, cayó en la trampa.

Camila: Eso es culpa de Arnel que esta vez no les avisó.

Rocio: No hablen mal de Arnel que hoy no pudo venir. Además, esa explicación no es tan terrible, y si ustedes le hubieran prestado atención el año pasado, hubieran entendido unas cuantas cosas del curso.

Carlos: ¿Tú atendiste el año pasado a esa explicación?

Rocio: No, pero si le hubiera prestado atención, hubiera entendido unas cuantas cosas del curso.

Sheila: Yo pensé que yo era la única que no estaba atendido esa clase.

Carlos: ¿Quién iba a atender con los ejemplos horribles del juego ese?

Rocio: Pero... ¿tú no buscaste información sobre el juego?

Carlos: ¡Claro! Por eso no estaba atendiendo.

Sheila: Shhhh, calléńse, a ver si esta vez nos enteramos de por qué a nadie le interesa el valor exacto del error.

Despueś de mirar al estudiante en silencio, durante unos segundos, el profesor dice:

—Lo más sensato sería pensar que es mejor tener el valor exacto del error, ¿no?

Nadie habla pero hay un coro mental de asentimiento generalizado. El estudiante que hizo la pregunta asiente con la cabeza

—Eso es más sensato, pero tiene dos inconvenientes. El primero es que si conocieras el valor exacto del error, no cometerías ningún error, y siempre tendrías el valor exacto.

El estudiante pone cara de ¿qué?, mientras el coro mental dice ¿cómo?. El profesor empieza a escribir mientras habla.

—El error es el verdadero valor menos el aproximado...

$$e = x - \overline{x}$$

—Tú siempre conoces el valor de $\overline{x}$ —señala a $\overline{x}$ en la pizzara—, que es tu resultado. Si además conocieras el valor del error `e`, pudieras tener el valor exacto `x` como...

$$\texttt{x} = \overline{\texttt{x}} + \texttt{e}$$

—y por lo tanto, no cometerías ningún error.

El mismo estudiante que hizo la pregunta levanta la mano y habla:

—Profe, pero aquí hay algo que no entiendo. Usted está diciendo que si conozco el error no cometería ningún error...

—Ajá...

—y lo está diciendo con una entonación como si eso fuera malo. Y a mí me parece algo muy bueno, no sé a los demás.

El profesor mira a los demás estudiantes, por si alguien quiere agregar algo, pero no. Silencio absoluto... pero acompañado por miradas y gestos de aprobación y apoyo a que sería muy bueno. Solo tres escéptic@s no tienen cara de aprobación... Tienen cara de ¿dónde está la trampa?

El profesor suspira y dice:

—Sí, es verdad. Eso sería bueno —*las caras de aprobación cambian a ¿y entonces cuál es el problema?*— pero está el segundo inconveniente, que es...

Deja de hablar y escribe de espalda a los estudiantes. Cuando termina señala lo que está escrito mientras lo dice

`¡Nunca se puede conocer el error! :-(`

—¡Nunca! se puede conocer el error...

Rocio: Y me imagino que ahora es cuando empezamos a recibir muchos ejemplos de situaciones en las que sí se puede conocer el error.

Sheila y Carlos se encogen de hombros.

Carlos: ¿Cuántas mandaron ustedes el año pasado?

Rocio: Yo, 4.

Sheila: Yo, 3. ¿Y tú?

Carlos: No. No yo mandé. Yo no entiendo por qué la gente los manda, si esos ejemplos no se pidieron, ni daban créditos, ni nada.

Rocio: Pero yo estaba segura de que había ejemplos que sí se podía conocer el error.

Carlos: ¿Y te los aceptaron?

Rocio: No, todos me los respondieron con el mismo mensaje.

Carlos: ¿Cuál?

Sheila: El mismo que me mandaron a mí. Debe ser el que está escribiendo ahora en la pizarra.

El profesor deja de escribir en la pizarra y cuando se quita se puede ver:

`¡Nunca se puede conocer el error!  :-(`

`Y cuando se puede, ¡NO VALE LA PENA!`

Sheila: ¡Ups! Eso no fue lo que dijeron a mí.

Rocio: No. A mí tampoco.

Después de unos instantes en silencio para todos vean lo que está escrito, el profesor empieza a hablar:

—Que no valga la pena significa que si lo puedes calcular de manera exacta, no vale la pena usar computadoras ni métodos numéricos. Por ejemplo, no tiene sentido usar una computadora para calcular 0.4*3. Es preferible hacerlo en papel, o mejor todavía, en la mente, para que el resultado no sea mayor que 1.2.

Sheila:

Eso se parece más a lo que me dijeron el año pasado cuando mandé mis ejemplos en los que sí se podía calcular el error de manera exacta. Pero no solo eso, hay veces que para la solución exacta igual necesitas una computadora. Y desde que los números entran a la computadora ya empiezan a aparecer los errores, por culpa de las aritméticas de punto flotante.

Gustavo:

Además de eso hay otro factor importante y es que los errores específicos no importan tanto, porque como hay que realizar muchas operaciones cada uno de esos errores "se arrastra" a lo largo de los cálculos. Hay un concepto que es el de **algoritmo numéricamente estable**, que van a conocer en esta conferencia (si da tiempo). Cuando se tienen algoritmos numéricamente estables, los errores que se cometen un momento del algoritmo se "cancelan" con los errores que aparecen en otros lugares. No me miren con esas caras. Yo también freí un huevo cuando me lo dijeron por primera vez, pero es así. Al final es más importante el algoritmo que se use que los errores en sí.

Si quieren un poquito más de información pueden revisar el capítulo 1 de la segunda edición del Higham, que incluso tiene una sección (la 1.16) que se llama ¡Los errores de redondeo pueden ser beneficiosos!

Por cierto, ese primer capítulo del Higham tiene información muy interesante, además de que puedes encontrar repuestas a algunos ejercicios de clases prácticas.

Camila:

Además, las situaciones interesantes son aquellas en las que no tienes forma de conocer el error de manera exacta, y que por suerte, son las que aparecen con más frecuencia.

—Y por eso... lo importante no es el error. Lo importante es conocer la cota del error. En la asignatura no importa cometer errores, lo importante es saber el tamaño del error. Y para eso, podemos comenzar por acotar el error absoluto de aproximar un número x por su flotante *fl(x)*.

Empieza a escribir en la pizarra mientras habla de espalda a los estudiantes

—Cuando un número x se representa en una aritmética pueden pasar dos cosas: o es flotante, o no es flotante.

Cuando termina en la pizarra, los alumnos pueden ver lo que escribió:

```
...---I-----------------I---...
```

f_i $\qquad\qquad\qquad$ f_{i+1}

x

—En el gráfico f_i y f_{i+1} son flotantes, y es x es el real que se quiere representar en la aritmética. Aquí vamos a asumir que x está entre f_i y f_{i+1}.

—Si x es exactamente igual a f_i o a f_{i+1} no se comete ningún error y el error absoluto sería 0, pero eso no va a pasar casi nunca. La mayoría de las veces se comete algún error que es...

Se queda esperando que los alumnos digan algo. Cuando los alumnos se dan cuenta de que está esperando por ellos, gritan:

—Oouloo lor real menos aaaaaooooiado.

—Sí. Pero en este caso ¿cuál sería el valor real y cuál el aproximado?

—AAahoor real x Aaahhooorimado tante de x.

—Sí, pero ¿cuál de los dos?

—I.

—I más 1.

Aproximadamente la mitad del aula dijo I y la otra mitad I+1.

—Necesitamos ponernos de acuerdo en uno de los dos. Vamos a asumir que es f_i, para escribir menos.

—Entonces, ¿cuál sería el error?

—Ooooulooo feí eeeoooos equissooos equis.

—Exacto.

Comienza a escribir

Sheila: ¿Cómo él sabe lo que dicen los alumnos si con esos coros no se entiende nada?

Camila: Yo creo que él escribe lo que le conviene independientemente de qué hayan dicho los alumnos. Es lo único que se me ocurre.

Carlos: Sí, yo creo que yo haría lo mismo.

Sheila: Bueno, yo creo que eso funciona mientras los alumnos no lo sepan.

Camila: Na. Yo creo que los alumnos también lo saben. Por ejemplo, fíjense en aquel de ahí —*señala discretamente a un varón en la cuarta fila que está concentrado en el profesor*—

Sheila: ¿Qué tiene?

Camila: Él nunca ha dicho nada, todas las veces lo que ha dicho son Áes y Oes, sin ninguna coherencia.

Sheila y Carlos miran a Camila con los ojos abiertos.

Carlos: Eso no puede ser.

Sheila: Pschts.

Camila: Fíjense la próxima vez.

El profesor señala a lo que había escrito.

$$\texttt{e = |f}_1\texttt{ - x |}$$

—Ese es el error. La pregunta es ¿qué es lo más grande que puede ser ese valor? Fíjense que la x puede estar aquí, aquí o aquí, o en cualquier otro lugar de este intervalo.

```
...---I-----------------I---...
```

$$f_i \qquad\qquad\qquad\qquad f_{i+1}$$

$$x \qquad\quad x \qquad x$$

—Y dado que el error es $|\mathtt{f}_i - x|$, ¿cuál es la mayor distancia a la que puede estar x de $\mathtt{f}_i$?

Varios estudiantes gritan emocionados:

—¡El espaciamiento de f_i!

> **Sheila:** No dijo nada.
>
> **Camila:** Creo que esa respuesta no se la sabía. Vamos a esperar otra.

—¿Y cuál es el espaciamiento de f_i?

—Eeeeaa la kaaaa nospé.

> **Sheila:** Ah, sí. No dijo nada.
>
> **Carlos:** Decir sí dijo. No dijo nada de numérica pero dijo varias es y as.

—¡Exacto! Ese espaciamiento es:

$$\beta^{k-p}$$

—donde `k` es el exponente de f_i, por lo tanto, el error absoluto que se comete al aproximar un número por su flotante siempre es menor que el espaciamiento:

$$\mathtt{e = |f}_i\mathtt{ - }x\mathtt{|} < \beta^{k-p}$$

Una alumna, sentada en la primera fila:

—Profe, pero si fuera por redondeo al flotante más cercano, ¿esa distancia no sería la mitad?

El profesor la mira.

—¡Muy bien! Anótate 10000 créditos por esa observación. Aquí estamos asumiendo truncamiento, si fuera por redondeo el error sería la mitad.

$$\mathtt{e} = |\mathtt{f_i} - \mathtt{x}| < \begin{cases} \beta^{k-p} & \text{por truncamiento} \\ \frac{1}{2}\beta^{k-p} & \text{por redondeo} \end{cases}$$

Gustavo:

Aquí la desigualdad es estricta, porque nunca puede ser el espaciamiento completo. Si fuera el espaciamiento completo, entonces $fl(x)$ no sería $\mathtt{f}_i$, sino $\mathtt{f}_{i+1}$.

Rocio:

De esa cota se deduce que mientras más grande sea el número, mayor es el error absoluto que se puede cometer.

—Y con la cota del error absoluto se puede calcular la del error relativo —*empieza a escribir en la pizarra.*

Camila:

Para simplificar los cálculos vamos a trabajar con redondeo por truncamiento. Al igual que ocurrió con el absoluto, por redondeo lo que hay que hacer es dividir por 2.

—Esta es la expresión para el error relativo:

$$\delta = \frac{e}{|x|}$$

—Por suerte, ya tenemos una cota para el error absoluto así que podemos decir que:

$$\delta = \frac{e}{|x|} < \frac{\beta^{k-p}}{|x|}$$

—O sea —*borra una parte de lo que está escrito y que queda con:*

$$\delta < \frac{\beta^{k-p}}{|x|}$$

—¿Qué podemos hacer aquí?

Rocio:

No hace falta que respondan, es una pregunta retórica, pero ¡ojo!, que ahora viene magia. Sencillita, pero magia al fin y al cabo, y cuando una no está preparada para la magia, se puede convertir en uno de esos momentos los que parpadeas y todo se volvió oscuro.

—Fíjense que x es mayor que f_i, y vamos a asumir que:

$$\mathtt{f}_i = .\beta_1\beta_2\ldots\beta_p \times \beta^k$$

—Por tanto:

$$\mathtt{x} > \mathtt{f}_i = .\beta_1\beta_2\ldots\beta_p \times \beta^k$$

—Pero...

$$\mathtt{f}_i = .\beta_1\beta_2\ldots\beta_p \times \beta^k \geq .1\underbrace{0\ldots0}_{p-1}\times\beta^k = \beta^{k-1}$$

—Y entonces...

$$\mathtt{x} > \mathtt{f}_i \geq \beta^{k-1}$$

Sheila:

Asegúrate de que entendiste todos esos pasos y no te perdiste con ningún puntico mal corrido. Cuando tengas certeza absoluta de por qué $x \geq \beta^{k-1}$, sigue leyendo.

—¿Dudas hasta aquí?

Como todo el mundo siguió la indicación Sheila, no hay ninguna duda `:-D`.

—¿No? Perfecto. Entonces tenemos que:

$$\delta < \frac{\beta^{k-p}}{|x|}$$

—pero por otro lado,

$$\delta < \frac{\beta^{k-p}}{|x|}$$

$$\mathtt{x} \geq \beta^{k-1} \ \texttt{(2)}$$

—Si sustituimos (2) en la desigualdad de arriba, se tiene que:

$$\delta \leq \frac{\beta^{k-p}}{\beta^{k-1}}$$

—Y lo que queda es sencillo...

$$\delta \leq \frac{\beta^{k-p}}{\beta^{k-1}} = \beta^{k-p-k+1} = \beta^{1-p}$$

—O sea, que usando redondeo por truncamiento, se tiene que:

$$\boxed{\delta \leq \beta^{1-p}}$$

—Y por esto...

Cuando termina de encuadrar el resultado se vira hacia los alumnos con una sonrisa en el rostro... pero deja de hablar cuando se da cuenta de que nadie está mirando: todos están escribiendo algo en sus libretas. Cuando la mayoría le está prestando atención, o al menos lo está mirando, vuelve a sonreír y señalando hacia el recuadro dice, abriendo mucho los ojos:

—Y por esto...

Pero nadie habla.

Sheila: *(A Camila)* ¿Alguna vez alguien ha dicho aquí lo que él cree que le van a decir?

Camila: No. Pero él no pierde la ilusión. Todos los años le pone el mismo entusiasmo.

Carlos: A lo mejor es que los alumnos no han tenido tiempo de asimilarlo y hacer la asociación tan rápido.

Camila: Puede ser, pero evidentemente aquí tenemos otro año en el que se va en blanco *(se encoge de hombros)*.

El tono cambia de "emocionado" a... "¡qué remedio!"

—Y por eso es que es importante el épsilon de la máquina: es una cota superior para el error relativo, y además, no depende del tamaño del número.

Gustavo:

El error relativo que se comete al aproximar un número por su flotante siempre es menor que el épsilon de la máquina. Esta cota da un criterio aproximado de cuándo saber si un resultado está bien. Si el error relativo es menor que el épsilon de la máquina ya puedes parar. No vas a mejorar mucho más que eso.

—Y como ya tenemos acotado el error relativo, podemos hablar de los problemas de las cifras significativas correctas.

Camila:

En una Aritmética de Punto Flotante solo se puede tener un máximo de cifras significativas correctas. ¿cuál es ese máximo? El tamaño de la mantisa, o la precisión. De hecho, no es casual que la "precisión" es el máximo número de elementos que puedas tener en la mantisa.

—En el estándar IEEE 754, son solo 53 cifras binarias, que viene a ser más o menos 15 o 16 cifras decimales. No son muchas por eso hay que cuidarlas. Una de las formas más fáciles de perder cifras significativas correctas es con la resta.

Rocio:

Perder cifras significativas correctas con la resta es un problema tan grande que tiene un nombre terrible: **Cancelación catastrófica**.

7 Cancelación catastrófica

—La cancelación catastrófica aparece cuando se restan dos números cercanos. Con un ejemplo se ilustra bastante bien. Vamos a trabajar en una aritmética con una mantisa de tamaño 4.

$$\mathtt{f}_1 = .\ \ 3\ 5\ 4\ 1\ \mathrm{E}\ 3$$

$$\mathtt{f}_2 = .\ \ 3\ 5\ 1\ 7\ \mathrm{E}\ 3$$

— En este caso, vamos a asumir que las dos primeras cifras son correctas, y las dos últimas tienen errores. Si se restan $\mathtt{f}_1$ y $\mathtt{f}_2$, ¿qué se obtiene?

$$\mathtt{f}_3 = .\ \ 2\ 4\ 0\ 0\ \mathrm{E}\ 1$$

—¿Y qué pasó? Teníamos dos cifras significativas correctas en cada número, los restamos, y nos quedamos sin ninguna, porque las que tenemos ahí son a partir de cifras que sabemos que estaban mal.

Un varón de la segunda fila pregunta:

—Profe, ¿pero quién va a sumar dos números tan parecidos?

—Los profesores tenemos la esperanza de que ninguno de ustedes vaya restar dos números parecidos, pero a veces este tipo de resta aparece en lugares que tú no los planeaste.

—Pchsts —*Eso no lo dice nadie, en voz alta, pero muchas personas lo piensan.*

—Este es un ejemplo sencillo, vamos a calcular las dos raíces de:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

—De hecho, no hacen falta las dos, con la primera nos conformamos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

—Hasta aquí no hay ningún problema, ¿verdad?

Todos asienten... menos l@s escéptic@s, que ya están empezando a poner mala cara.

—Como esta cuenta la vamos a sacar en una aritmética de punto flotante existen valores de a, b y c, para los cuales el resultado de $b^2 - 4ac$ va a ser muy parecido a b^2.

$$b^2 - 4ac \approx b^2$$

Rocio:

Recuerden $10^{100} - 10^{50} = 10^{100}$, o 1 más un número menor que el épsilon de la máquina.

—Cuando eso pase, y efectúes $-b + \sqrt{\hat{b}^2}$ vas a restar dos números muy cercanos..., y no era tu intención.

Una muchacha en primera fila:

—Profe, ¿y entonces?

—Y entonces, a evitar la cancelación catastrófica, en este caso se puede multiplicar y dividir por la conjugada:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

—Y eso es igual a:

$$x_1 = \frac{-b^2 + b^2 - 4ac}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

—Que en realidad es:

$$x_1 = \frac{-2ac}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

—Y ahí no hay ninguna cancelación catastrófica.

Rocio:

En el primer capítulo del Conte (Numerical Analysis An Algorithmic Approach, 3rd edition) pueden encontrar este ejemplo con números concretos.

Carlos:

Bueno, en el Conte, y en tooooodos los libros de numérica. Casi se puede decir que si no tiene ese ejemplo no es un libro de Numérica. Pero bueno, probablemente sea porque ilustra muy bien la cancelación catastrófica y cómo evitarla.

Gustavo:

Hay varias formas de evitar la cancelación catastrófica. La primera es la que acabamos de ver: multiplicar y dividir por la conjugada. También se suele aplicar desarrollo de serie de Taylor y truncar en algún término apropiado. Eso debería ser suficiente para evitar la mayoría de los problemas. Al menos, la mayoría los problemas de mentirita que se ponen como ejemplos y ejercicios en las clases, pero que deberían servir para resolver los que aparezcan en el mundo real.

—La moraleja más interesante de esto es que aunque en algunos contextos se cumple, si hay computadoras de por medio, las fórmulas "equivalentes" —*hace el gesto con los dedos*— para encontrar las raíces de la parábola, no son equivalentes. Y me imagino que haya personas a las que esto les choque mucho.

Se queda en silencio unos segundos y sigue hablando

—De hecho, por menos que esto han matado a personas. Los Pitagóricos eran una sociedad mística que consideraban que todo el universo se podía explicar a partir de los números enteros, o los racionales. En un momento descubrieron que $\sqrt{2}$ no era racional, o sea que no se podía expresar como el cociente de dos números, y decidieron no contárselo a nadie porque tiraba por tierra todas sus creencias. Cuentan que uno de ellos, "filtró" ese resultado (para usar palabras de moda)... ¡y por eso lo mataron!

Se hace un silencio en el aula, mientras el profesor piensa, mirando al vacío, y sigue hablando.

—Menos mal que esto que damos en Numérica no es tan terrible, y que nadie quiere matar por eso...

¡CRASHHHH! CLING, PLÁNK, ¡CLÁNG! ¡CRISH!. Son los sonidos de la ventana y los cristales cuando caen al suelo destrozados. Los alumnos se cubren la cabeza con las manos y se encogen sobre las sillas, mientras por encima de ellos pasan 3 profesores de cuarto grado con "blasters" en las manos disparándole al profesor. Desde el momento que entran, el profesor, usando las dos manos, lanza al aire la mesa del aula 6 que recibe los impactos de los primeros disparos. Mientras está lanzando la mesa, por la puerta del aula entra otro profesor de cuarto grado con una túnica negra y un sable luz rojo en su mano derecha. Al

mismo tiempo, por la ventana entra otro con túnica y dos sables luz: uno en cada mano. El profesor de conferencia se agacha para evitar tres disparos que impactan en la pizarra, y estira la mana izquierda hacia su mochila, que comienza a vibrar, se abre el zipper de golpe, y sale...

—¡Ejeéeem!

Los disparos y los profesores de cuarto grado se detienen en el aire, todo queda en silencio y uno por uno miran en dirección a Sheila, que acaba de carraspear. Sheila los mira uno a uno, y cada vez que hacen contacto visual, el profesor se desvanece en una nube de polvo con un ¡Púf! Cuando no quedan profesores de cuarto grado, mira la mesa que está a punto de caer encima de los estudiantes de la primera fila. La mesa desaparece con un ¡Púf!

—¡Ejéeeem!

El profesor de conferencia deja de mirar al vacío, mira a Sheila, que está de pie mirándolo con el ceño fruncido, y sigue hablándole a los alumnos.

—Pues sí, la cancelación catastrófica puede aparecer en cualquier lugar —`Sheila respira profundo, se sienta y empieza a escribir algo en la libreta que tiene delante`—, y hay que prestar atención para evitarla siempre que sea posible. Les propongo hacer una pausa y coger cinco minutos.

8 Cinco minutos

Los alumnos salen al pasillo, y algunos miran a la profesora Sheila discretamente, preguntándose por qué se puso de pie de pronto, y empezó a carraspear mientras el profesor estaba organizando sus ideas con la mirada perdida en algún punto del techo del aula 6.

9 Introducción a la estabilidad de cálculo

La profesora Camila le dice a los alumnos que entren y cuando todos están acomodados, el profesor sigue hablando.

—La diferencia entre las dos formas de calcular la raíz x_1 de la parábola es que una es numéricamente estable y la otra no lo es. En ocasiones puedes tener varias formas de calcular un valor. Algunas de ellas pueden ser estables y otra no.

—¿Qué es la **estabilidad numérica**?

`Estabilidad Numérica`

—Es una propiedad que mide cuán sensible es un algoritmo a los errores de redondeo.

Gustavo:

Cada vez que se comete un error de redondeo ese error se propaga en el resto de las operaciones. Si el algoritmo es estable, esos errores se mantienen acotados, idealmente son menores que el épsilon de la máquina. Si el algoritmo es inestable, un pequeño error puede ser desastroso, como en el caso de la raíz de la parábola.

—Según algunos libros, la influencia exacta de los errores de redondeo es difícil de determinar por alguna otra vía que no sea realizando los cálculos y comparando con el valor real. Pero si tienes el valor real ¿para qué quieres hacer los cálculos?, así que eso es poco práctico. Sin embargo, hay una forma de tener una idea de cuán estable o inestable puede ser un algoritmo, a partir de la condición de una función.

10 Condición de una función

—La **condición de una función** describe cuánto puede variar el error en el resultado de la evaluación de una función, si varía el error en el argumento.

El profesor se queda pensando en lo que acaba de decir.

—¡Ñió! Esa explicación quedó en candela. Creo que eso no lo entendí ni yo. Es mejor ser más específicos. Vamos otra vez.

> **Rocio:**
>
> A veces el profe se da unas *"Enredadas nivel Dios"* explicando algo. En la mayoría de los casos él trata de arreglarlo con otra forma de dar la explicación, pero no siempre funciona. En esos casos, la recomendación es identificar las palabras claves de lo que está hablando y buscarlo en la bibliografía. Hay veces que, para la explicación inicial, la página de Wikipedia en inglés resulta muy útil.

—Si tenemos una función f, el verdadero valor x, y un valor aproximado $\overline{x}$, podemos definir los errores relativos de cada uno de ellos.

$$\texttt{f(x),}\ x\texttt{,}\ \overline{x}$$

—Por ejemplo, ¿cuál sería el error relativo que se comete al aproximar $f(x)$ por $f(\overline{x})$?

> **Sheila:**
>
> Todos los años el profesor hace una pausa aquí por si alguien participar, pero

nadie ha participado, quizás es porque en este punto de la conferencia, no tienen tiempo de haber interiorizado que el error absoluto siempre, siempre, siempre es valor real menos el aproximado, y el relativo siempre es el absoluto sobre el verdadero valor. En este caso solo habría que tener claro cuál es el verdadero valor y cuál el aproximado.

Al ver que nadie participa, el profesor sigue hablando mientras escribe en la pizarra

—El error relativo que se comete en la función es

$$\delta_f = \frac{|f(x) - f(\overline{x})|}{|f(x)|}$$

—Y el error relativo que se comete al aproximar x por $\overline{x}$ es:

$$\delta_x = \frac{|x - \overline{x}|}{|x|}$$

—Por lo tanto, un medidor de cuánto varía el error relativo de la función cuando varía el error relativo del argumento se puede describir cómo:

$$\frac{\delta_f}{\delta_x} = \frac{\dfrac{|f(x) - f(\overline{x})|}{|f(x)|}}{\dfrac{|x - \overline{x}|}{|x|}}$$

Carlos:

Fíjense que esto se puede usar como medidor, porque si un pequeño error en el argumento provocar un error grande en la función el valor de ese cociente es grande. Por otro lado, si el error en la función es menor que el error en el argumento, entonces el cociente es un número pequeño. Si los dos errores (el de la función y el del argumento) son más o menos similares, el valor del cociente está cercano a uno.

Por lo tanto, mientras menor sea ese número, mejor. Significa que errores grandes en el argumento provocan errores pequeños en la función.

—La definición de condición se toma como ese cociente para todos los posibles valores de $\overline{x}$ que estén cerca de x, o sea que la definición de la condición es:

$$cond(f)_x = \max_{\overline{x} \approx x} \left(\frac{\delta_f}{\delta_x} \right)$$

O LO QUE ES LO MISMO:

$$cond(f)_x = \max_{\overline{x} \approx x} \left(\frac{\dfrac{|f(x) - f(\overline{x})|}{|f(x)|}}{\dfrac{|x - \overline{x}|}{|x|}} \right)$$

—La idea intiuitiva al tomar el máximo es que basta con que para algún $\overline{x}$ ese cociente sea grande, para que la función está mal condicionada. Es lo mismo que cuando estás considerando una pareja potencial. A ti te interesa ver qué es lo más "complicada" que se puede volver una persona, no basta con algunos casos aislados. Aquí es lo mismo. La condición de una función es el máximo de ese cociente, es "lo peor que se puede poner".

—En la mayoría de los libros se dice que esta definición tiene un problema y es que no está bien definido qué significa: $\overline{x} \approx x$. Como eso no está bien definido, podemos hacernos "los chivos locos" y considerar una definición alternativa, en el caso de que la función sea diferenciable:

$$cond(f)_x = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} x \right|$$

Gustavo:

En realidad no es una definición "alternativa", es el mismo cociente escrito de otra forma, al que se aplica un teorema de análisis, y se ignora la parte de tomar el máximo. Logramos que en esta versión de la conferencia el profe no pusiera la deducción para que l@s que quisieran lo hagan por su cuenta y así se ganen créditos extras.

Rocio:

A cada rato, en la asignatura se usan resultados de Análisis, y entre los que más se usan están los teoremas del valor medio para derivadas. Si quieres hacer la deducción de por qué la condición se puede calcular de esa forma, a lo mejor quieres revisar esos teoremas.

Carlos:

Otra forma de deducirlo es darte cuenta de que si $\overline{x}$ está "cerquita" de x, reordenando el cociente te queda algo muuuuuy parecido al cociente incremental de análisis. No dejes pasar la oportunidad de que tus profes de análisis se sientan orgullosos de ti.

—Con esta expresión —señala a la expresión de la condición que tiene la derivada— es posible determinar la condición de la función en un punto. El ejemplo más sencillo sería el caso de la función identidad.

$$f(x) = x$$

—¿Cuál sería la condición de esta función?

$$cond(f)_x = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}x\right| = \left|\frac{1}{x}x\right| = 1$$

Por lo tanto, la condición de la identidad es 1. Eso significa que un error de redondeo en el argumento provoca un error de redondeo del mismo tamaño en la función.

Sheila:

Tiene sentido, porque la función identidad devuelve justamente su argumento. El resto de los ejemplos están más "interesantes".

—En el caso de la función $f(x) = x^2$, cuál sería su condición:

$$cond(f)_x = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}x\right| = \left|\frac{2x}{x^2}x\right| = \left|\frac{2x^2}{x^2}\right| = 2$$

—En el caso de esta función, un error en el argumento se duplica al evaluar la función.

Rocio:

Por ejemplo, tomando en cuenta que la condición de x^2 es 2, ¿qué error relativo cometerías al evaluar x_*^2 si x_* es una aproximación de 2 que tiene un error relativo de 0.1? Si la respuesta que obtienes no es 0.2, revisa lo que hiciste. Y si lo revisas y lo tienes bien, revisa esto, que a lo mejor te ganas algunos créditos porque me haya equivocado al poner el ejemplo (que esperemos que no sea el caso).

—El otro ejemplo clásico es la función $f(x) = \sqrt{x}$. En este caso su condición es:

$$cond(f)_x = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}x\right| = \left|\frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}x\right| = \left|\frac{-1}{2x}x\right| = \frac{1}{2}$$

Camila:

Este es un caso que si el argumento tiene algún error, al evaluarlo en la función, ese error disminuye. ¿Puedes justificar por qué?

—Es importante tener en cuenta que la condición de una función depende del punto en que se evalúe. Un buen ejemplo de esto es la resta, que se puede escribir en forma de función como $f(x) = x - a$. ¿Cuál es la condición de esta función?

$$cond(f)_x = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}x\right| = \left|\frac{1}{x-a}x\right| = \left|\frac{x}{x-a}\right|$$

—Fíjense que para valores alejados de a, por ejemplo, cuando x tiende a infinito o a menos infinito, la condición de la función es 1

$$\lim_{x\to\pm\infty} cond(f)_x = \lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{x}{x-a}\right| = 1$$

—Pero cuando x está cerquita de a la condición ¡tiende a infinito!

$$\lim_{x\to a} cond(f)_x = \lim_{x\to a}\left|\frac{x}{x-a}\right| = \infty$$

—¿Qué quiere decir eso? Que un error, por pequeño que sea, en el argumento de la resta, puede traducirse en un error ¡potencialmente infinito! en el resultado, así que se debería tener cuidado con la resta, sobre todo si lo que se resta son dos números “cercanos”.

Carlos:

De hecho, la cancelación catastrófica se puede explicar en términos de la mala condición de la resta. No es un buen tema para romper el hielo en una conversación con una persona que quieras conocer, pero sí es un ejercicio interesante para la clase práctica.

—¿Alguna pregunta hasta aquí?

Algunos alumnos dicen que no, la mayoría se quedan callados, así que el profesor asume que todo está claro, pero probablemente es que lo desconectaron hace rato por allá arriba `:-/`.

—Entonces, es el momento de hacer el primer ejercicio de la conferencia, para evitar que crees una aversión innecesaria a la resta. El ejercicio es sencillo: solo tienes que calcular la condición de la función

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Aquí el profesor se queda esperando a que los alumnos calculen la condición. Así que tienes dos opciones: o calculas la condición de la función, o esperas a que alguien la calcule y se la enseñe al profesor. ¿Qué? No. No tienes la opción de seguir leyendo la conferencia, porque el profesor no va a decir más nada hasta que alguien calcule esa condición.

Llegado este punto, algunos alumn@s "pill@s" deciden seguir leyendo sin hacer los ejercicios, pero descubren que las aunque este documento tiene 60 páginas, de este punto hacia abajo todas están en blanco. Cuando llegan hasta la última página dejan de leer, y se dan cuenta de que eso no puede ser, así que regresan hasta la página 51 que es la última que tenía texto y releen lo último que está escrito:

—Entonces es el momento de hacer el primer ejercicio de la conferencia, para evitar que crees una aversión innecesaria a la resta. El ejercicio es sencillo: solo tienes que calcular la condición de la función

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Una vez leído eso, avanzan todas las páginas hasta la última, y sí, todas están en blanco. Llegado ese punto se dan cuenta de que hay algo mal, porque si las páginas realmente estuvieran en blanco, ni siquiera estarían leyendo esto. Ñióooo. ¡Aquí hay algo raro! Este es el momento en que deciden dejar de hacer trampa y calcular la condición, porque si siguen mirando esas páginas en blanco van a terminar "achicharráos"... como los profes de numérica `:-o`. *Sí, decididamente lo mejor es calcular la condición de esa función que en definitiva no es tan difícil.*

Cuando terminas de calcular la condición el profesor dice:

—Exacto. La condición de esa función es 1/2. Esa es una prueba, de que la resta no siempre es mala, pero... esa función tiene un problema, que vamos a ver al regreso de los 5 minutos.

11 Cinco minutos

Varios alumn@s se acercan hasta el profesor y le preguntan si no se puede parar aquí, que esto está denso, y largo y que ya... que vamos a parar aquí... Que el resto se ve en clase práctica, o se lo estudian ellos solos. El profesor piensa un momento, mira hacia donde están los profesores de clases prácticas y le dice a los alumnos:

—Está bien. Hablen con la profe Sheila.

Los alumnos abren los ojos, miran en la dirección de Sheila, se acuerdan que de pronto se paró mientras el profesor estaba en silencio y empezó a hacerle ruidos al profesor y...

—No, no... profe, deje. Gracias.

—Bueno, como quieran —*se encoge de hombros* —De todas formas, no se preocupen, lo que queda es muy cortico.

Los alumnos regresan cabizbajos a sus asientos y cuando todos están sentados, el profesor comienza a hablar.

12 Estabilidad de cálculo con condición

—Por último, vamos a analizar qué pasa con esta función

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

—cuando se evalúa en el punto 12345, en una aritmética con base 10 y mantisa 6...

Comienza a escribir en la pizarra.

Carlos:

Esto que el profe está escribiendo ahora lo pueden encontrar muy bien explicado en el Conte (Numerical Analysis An Algorithmic Approach, 3rd edition), al final de la página 30 del pdf. Lo interesante es que el ejemplo esté en una aritmética de 6 dígitos. Aquí uno pudiera pensar que ese ejemplo no tiene sentido porque las aritméticas de las computadoras tienen una mantisa con 16 cifras decimales. Lo que pasa es que en las aritméticas con 16 cifras decimales también aparecen este tipo de fenómenos, pero ilustrarlos es mucho más engorroso que estos ejemplos pequeñitos. De hecho, en la clase práctica hay un ejercicio que es justamente para qué valores de x esa función tiene problemas.

O sea, que no los subestimen porque aparezcan en aritméticas pequeñas. Eso mismo les puede pasar con una aritmética “grande” y “moderna”.

El profesor termina de copiar exactamente el mismo ejemplo que está en el Conte, donde mismo dijo Carlos y dice:

—O sea, que una forma de determinar si un método para calcular un valor es estable o no, es comparar la condición de lo que se quiere calcular con la condición de cada una de las funciones involucradas en ese cálculo.

—¿Alguna pregunta hasta aquí?

—Bueno, si no hay más preguntas, hacemos un resumen de lo que hemos visto y terminamos.

13 Resumen

—Cuando se tiene un valor real y una aproximación es importante conocer el error que se comete. Para eso se definen el error absoluto y el error relativo:

$$\begin{aligned} \texttt{x:} &\quad \texttt{valor real} \\ \overline{x}\texttt{:} &\quad \texttt{valor aproximado} \\ \texttt{error absoluto:} &\quad \texttt{e} = |\texttt{x} - \overline{x}| \\ \texttt{error relativo:} &\quad \delta = \frac{|\texttt{x} - \overline{x}|}{|\texttt{x}|} \end{aligned}$$

Rocio:

Recuerden que la mayoría de las veces, el error absoluto nos interesa con módulo, salvo algunas excepciones y en esos casos se dirá de manera explícita, para que no tengan que recordar los pozuelos cada vez que vean el error, ni el error cada vez que vean pozuelos.

—Cada vez que un número real se aproxima mediante su flotante en una aritmética, los errores absolutos y relativos se puede acotar.

`cota del error absoluto:`

$$\mathtt{e} = |\mathtt{fl(x)} - \mathtt{x}| < \begin{cases} \beta^{k-p} & \text{por truncamiento} \\ \frac{1}{2}\beta^{k-p} & \text{por redondeo} \end{cases}$$

`cota del error relativo:`

$$\mathtt{e} = \frac{|\mathtt{fl(x)} - \mathtt{x}|}{|\mathtt{x}|} < \begin{cases} \beta^{1-p} & \text{por truncamiento} \\ \frac{1}{2}\beta^{1-p} & \text{por redondeo} \end{cases}$$

—A partir del error relativo de aproximar x por $\overline{x}$, se puede tener una definición de cifras significativas correctas:

$\overline{x}$ `tiene` r `cifras significativas correctas en base` β
`si el error relativo es menor que` $\dfrac{1}{2}\beta^{1-r}$`:`

—Las cifras significativas correctas se pueden perder como resultados de la resta de números cercanos. Esto se conoce como cancelación catastrófica y a veces hay formas de evitarla.

`Cancelación catastrófica:  pérdida de c.s.c por resta de números parecidos.`

—Otro concepto importante es el de estabilidad de cálculo y está muy relacionado con el de condición de una función. Cuando se diseñen algoritmos numéricos, siempre que sea posible deberían ser numéricamente estables.

`Condición de una función.`

`Estabilidad de cálculo.`

—Y eso —*señala a lo que está escrito en la pizarra*—, es un resumen con lo que se debería saber para poder hacer los ejercicios de la clase práctica sin problemas —*sonríe.*

> **Carlos:**
> Bueno, eso una resumen de lo que haría falta para poder resolver los ejercicios de la clase práctica. Punto. Que no sea tan entusiasta.

—¿Dudas? ¿Preguntas? ¿No? ¡Terminamos entonces!

Los alumnos comienzan a levantarse y a salir del aula.

—¡Ah! —*claro, ya nadie lo oye porque todo el mundo está saliendo*— ¡Recuerden enviarle a los profesores las dudas que tengan durante la semanaaaaaa!

Bibliografía recomendada

- *Numerical Analysis.* Burden R. L., Faires J. D. y Annette M. Burden, 10th Edition. Brooks Cole Publishing, 2016.
- *Numerical Analysis.* Timothy Sauer, 3rd Edition. Pearson, 2017.

- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.
- *Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic.* Overton, Michael L., SIAM, 2001.
- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach.* S. D. Conte y Carl de Boor 3rd Edition. McGraw-Hill Book Company. 1980.
- *La Guerra de las Galaxias, Episodio I: La Amenaza Fantasma* Lucas, George. Lucasfilm Ltd. 1999.

Carlos: Bueno, todo salió bastante bien. No habló del juego horrible...

Camila: Ni de la Guerra de las Galaxias...

Rocio: ¡Ni de los pozuelos!

Carlos: Sí, pero no habló de la Guerra de las Galaxias porque Sheila se puso fuerte... si no, no quiero ni pensar en lo que hubiera pasado.

Camila: En eso que quería hacer... ¿qué creen que iba a sacar de la mochila?

Carlos: Para mí es un sable luz, de esos que tiene por los dos lados, para poderse defender de los dos ataques al mismo tiempo.

Rocio: Pues para mí, es evidente que hubiera sido una varita... se resuelven más cosas con una varita con un sable luz.

Carlos: Profe ¿y usted que cree?

Camila: Si fuera yo, hubiera sacado de la mochila ¡a Sheila! ¡Nada más mira a esos tipos y los desaparece!

Carlos: Bueno, profe, ¡pero eso no es realista!

Camila: De todo lo que se ha dicho aquí, lo más "real" es Sheila.

Carlos: Bueno sí, es verdad... Hablando de eso, ¿dónde está ella?

Camila: Dijo que iba un momento a buscar no sé qué, a no sé dónde.

Rocio: ¡Páf! ¡El profesor volvió a no decir la actividad opcional!

Camila: Tranquila ya, la ponemos nosotros: **¿Qué objeto llevarías siempre contigo porque crees que te puede ser útil para esta asignatura?**

Carlos: Me parece bien. Y si no le gusta, la hubiera dicho él.

En un recodo poco iluminado dos hombres con capucha están conversando.

—Le dije que me enviara a mí. Los profesores de cuarto grado no lo lograron.

—Calma. Nunca tuvieron muchas oportunidades, y aún no estamos listos. El próximo no podrán detenerlo tan fácilmente.

—A no ser que los alumnos ya estén preparados.

—No lo estarán, es demasiado poco tiempo, además...

Se detiene a mitad de la frase.

—¿Es ella?

—Sí.

—Y viene hacia acá.

—Sí, pero no tiene forma de saber...

—No importa, vámonos.

—No —*Lleva la mano hacia su cintura, pero el otro lo detiene.*

—Aún no. Vámonos.

Se pegan a la pared, donde las sombras los ocultan por completo.

La puerta se abre y entra Sheila. Cierra. Todo está en penumbras, y cerca de la pared no se ve nada. Mira alrededor. Da un paso a su izquierda, estira la mano y enciende la luz. Click. El aula está vacía. Vuelve a mirar alrededor. Cerca de la ventana, donde la oscuridad era más intensa antes de encender la luz, hay algo en el piso. Se acerca y lo mira. Se agacha y lo recoge. Es la tapa de un pozuelo.