

Facultad de Matemática y Computación (UH)
Ciencia de la Computación
Matemática Numérica
Curso 2021

Clase Práctica # 1.2246467991473532e-16:
Tutorial/Introducción a las clases prácticas

Esta clase práctica es un tutorial a las clases prácticas de la asignatura. Por ese motivo aparecerán algunos textos como este a lo largo del documento. En el resto de las CP no habrá tanto texto como en esta.

Lo primero es que las CP están divididas en secciones con nombre como la siguiente:

Ejercicios muuuy fáciles.

Usualmente los ejercicios en la primera sección de la CP son tan fáciles que se pueden hacer sin mucho problema. De hecho, están pensados para que todo el mundo los pueda hacer, o que pase mucho trabajo para inventarse una excusa de por qué no los hizo.

Ejercicio 1: Notación científica en la computadora. (5000¹ créditos)

Escribe los siguientes números utilizando **exactamente** la cantidad de caracteres indicados, de forma que se puedan reconocer como números en el lenguaje de programación de su preferencia².

- a) 4500000, con 4 caracteres: _ _ _ _
- b) -1230000, con 6 caracteres: _ _ _ _ _ _
- c) 0.000000123, con 6 caracteres: _ _ _ _ _ _
- d) 1, con 4 caracteres: _ _ _ _

¹En el nombre de cada ejercicio está indicada la cantidad de créditos que se reciben por entregar el ejercicio resuelto. Si un ejercicio no se hace completo, la cantidad de créditos que se recibe es proporcional al fragmento del ejercicio que fue respondido.

²Se supone que la mayoría de las actividades del curso las vamos a hacer con Python, pero en algunos casos (como este), se puede usar cualquier otro lenguaje, y en otros, se debe usar un lenguaje específico, pero eso se indicará en las orientaciones.

Ejercicio 2: ¡No confíes en los cálculos de las computadoras! (10000 créditos)

En el lenguaje de programación de su preferencia:

a) Diga cuáles de estas igualdades (o desigualdades) son verdaderas (*1000 créditos cada una*).

a) $0.4 * 6 > 2.4$

b) $0.8 * 3 == 0.3 * 8$

c) $0.3 * 3 == 0.9$

d) $3.1 * 2 < 6.2$

e) $1e100 + 1e50 == 1e100$

b) (*2500 créditos*) Determine cuál es el menor valor natural N para el cual se cumple que:

$$1e100 + 10^N > 1e100.$$

c) (*2500 créditos*) En algunos lenguajes de programación, como **C#** o **C**, es muy fácil trabajar con distintos tipos de números, por ejemplo, **float** y **double**. Resuelva el inciso anterior para el tipo de datos **float** y para el tipo de datos **double**.

Ejercicio 3: Python! (10000 créditos)

El objetivo de este ejercicio es tener una primera familiarización con el lenguaje de programación Python, y una buena forma de hacerlo es implementado algo que sea fácil, por ejemplo, el factorial de un número :-D. Por eso, lo que hay que hacer es una función en Python que reciba un número entero y devuelva su factorial. Para ello:

a) Haga una implementación recursiva.

b) Haga una implementación iterativa.

c) Haga una implementación que use la función Gamma que está implementada en el módulo **scipy**.

Ejercicio 4: Análisis Matemático en Python. (20000 créditos)

La definición de derivada de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto \bar{x} es

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}.$$

Una manera de aproximar la derivada de una función $f(x)$ en un punto \bar{x} es:

$$f'_h(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

donde h es un valor pequeño.

- Implemente en Python una función que devuelva una aproximación de la derivada de una función dada, en un punto \bar{x} usando un parámetro h . La función implementada debe recibir tres argumentos **f**, **x**, y **h**, donde **f** es una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ implementada en Python, **x** es un número real donde se quiere aproximar la derivada de f , y **h** es el valor del parámetro presente en la aproximación propuesta.
- Verifique el buen funcionamiento de su implementación aproximando la derivada de la función $f(x) = x^2$, en el punto $\bar{x} = 1$, con varios valores de h .
- ¿Para qué valor de h se obtienen los mejores resultados en el inciso anterior?³

Ejercicio 5: Primera introducción a la Serie de Taylor. (20000 créditos)

Dados una función $f \in C^n$, un punto $x \in \text{Dom}f$, y $h \in \mathbb{R}$ se puede aproximar el valor $f(x+h)$ mediante la expresión:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \dots$$

- ¿Cómo se llama esta forma de aproximar una función?⁴
- ¿Cuál es la expresión general para este tipo de aproximación?
- Calcule el desarrollo en serie de _____⁵ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \text{sen}(x)$

c) $f(x) = x^5 + 6x^3 - 4x^2 + 5$

Ejercicio 6: ¿Has visto las series de Taylor? (20000 créditos)

Para cada una de las funciones del ejercicio anterior, escriba una función en Python que reciba un número real x , un entero n menor o igual que 3, los extremos de un intervalo $[a, b]$ y usando `matplotlib` construya un gráfico en el intervalo $[a, b]$ en el que se muestre:

- la función original y
- el polinomio de Taylor de grado n alrededor del punto x .

³¡Taratatáaan! Acabas de descubrir una pregunta secreta por un valor de 20000 créditos. *Voz del tutorial: En algunas clases prácticas hay ejercicios secretos como este que acabas de encontrar. Siempre puedes distinguir una pregunta secreta de una nota al pie tradicional sonido que hacen al ser leídas, que es ¡Taratatáaan! En el caso de las preguntas secretas, para ganar los créditos solo tienes que responderlas normalmente (si puedes :-P). En el caso de esta ¿primera? pregunta secreta de esta clase práctica lo que debes responder es: ¿Cómo se puede saber si la aproximación con un valor de h es mejor que con otro?*

⁴*Voz de tutorial: En muchos ejercicios de la asignatura aparecen pistas que se pueden usar, por ejemplo en el nombre del ejercicio, o en otros lugares del mismo.*

⁵Este espacio en blanco debe ser rellenado con la respuesta al inciso a)

Ejercicios más interesantes

Por lo general los ejercicios en esta segunda sección son más interesantes que los de la primera. Por ejemplo, rara vez son solo mecánicos, y te permitirán combinar conocimientos y habilidades de una manera creativa y elegante, y son el tipo de ejercicios que si durante el curso los hiciste todos, podrás terminar la asignatura cómodamente con 4 puntos.

Ejercicio 7: En esta asignatura el tamaño⁶ sí importa. (30000 créditos)

La derivada de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se puede aproximar de varias formas. Algunas de ellas son:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h), \quad (1)$$

y

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2). \quad (2)$$

Al usar cada una de ellas se comete un error del tamaño indicado en cada caso⁷.

Tomando como ejemplo las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$, responda las siguientes preguntas:

- Si se usa un valor de $h = 0,1$ en las aproximaciones (1) y (2) para calcular las derivadas de f_1 y f_2 , ¿aproximadamente qué error se debe cometer en cada caso?
- Si se usa un valor de $h = 0,1$ en las aproximaciones (1) y (2) para calcular las derivadas de f_1 y f_2 en el punto $\bar{x} = 1$, ¿**exactamente** qué error se comete en cada caso?
- Implementa en Python una función que calcule cada una de las aproximaciones para la derivada indicadas anteriormente, implementa las funciones f_1 y f_2 , y experimentando con ellas verifica si en las aproximaciones obtenidas los errores que se cometen tienen los tamaños que indica la teoría.

Ejercicio 8: Lo que tus profesores de Álgebra no querían que supieras (30000 créditos)

Uno de los temas del curso del álgebra son las operaciones con matrices. En este ejercicio es una introducción a **numpy**, una biblioteca de Python que permite realizar, con mucha facilidad, operaciones con matrices, de esas que en primer año eran muy tediosas. Para ello lo que se debe hacer es:

- Escriba una función en Python que reciba tres matrices y, usando **numpy**, determine si el producto de las dos primeras “es igual” a la tercera.

⁶(Del error)

⁷¡Taratatáaan! Acabas de descubrir una segunda pregunta secreta, con un valor de 40000 créditos: ¿Cuál es la expresión exacta de los términos $O(h)$ y $O(h^2)$ en las expresiones anteriores? Junto con la pregunta has encontrado una pista: utiliza los desarrollos en serie de Taylor de $f(x+h)$ y $f(x-h)$.

- b) Escriba una función en Python, que usando la función implementada en el inciso a), reciba una matriz A y dos vectores \mathbf{x}_1 y \mathbf{b} (con las dimensiones correspondientes) y determine si el vector \mathbf{x}_1 es solución del sistema $Ax = b$.

Ejercicio 9: Cuando a la computadora no le gusta tu álgebra (30000 créditos)

Dados la matriz $A_n = \alpha_{i,j}$, donde $\alpha_{i,i} = 0,5$, para todo $i = \overline{1, n}$, $\alpha_{i,i+1} = 1$, para todo $i = \overline{1, n-1}$, y $\alpha_{i,j} = 0$ en otro caso; y el vector columna $\mathbf{1}_n$, que tiene dimensión n y un 1 en cada componente:

- a) (15000 créditos) Implemente una función en Python que reciba un parámetro n , y devuelva un vector x_e que sea la solución **exacta**⁸ del sistema:

$$A_n x_e = \mathbf{1}_n.$$

- b) (10000 créditos) Usando alguna de las funciones implementadas en el ejercicio 8, reciba un número n y verifique si el vector x que devuelve la función implementada en el inciso a) es solución del sistema $A_n x = \mathbf{1}_n$.
- c) (5000 créditos) Use la función implementada en el inciso b) y compruebe que la propuesta implementada en el inciso a) funciona para los siguientes valores de n : 20, 40, 60, 80 y 100.

Ejercicio 10: No hagas caso a los rumores (a no ser que sean ciertos :-/)(45000 créditos)

A cada rato hay gente que habla bobería y dice cosas que no tienen sentido, y atrás viene algún bobo (o boba) y las repite como si fueran ciertas, sin comprobar su veracidad. En este ejercicio se presentan varias de esas “boberías” que la gente dice por ahí. En cada uno de los casos, lo que tienes que hacer es explicar por qué, desde un punto de vista teórico, no tiene sentido lo que se plantea y además comprobar que, a pesar de no tener ningún sentido teórico, en esta cruel, despiadada y anti-teórica realidad nuestra sí se cumple :-/.

- a) Cuando se usa la expresión (2) del ejercicio 7 para aproximar $f'_1(1)$ con $h = 30$, se obtiene una mejor aproximación de la derivada que si se usa $h = 0,1$.
- b) La función:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases},$$

se puede implementar en Python de la siguiente forma:

⁸Aquí la palabra clave es **exacta**. La solución tiene que ser la solución exacta, y no una aproximación calculada por algún método de las bibliotecas *Numpy*, *Scipy* o alguna otra similar. Pista: Este ejercicio pudiera estar una clase práctica de Álgebra en primer año.

```
def funcion_identidad(x):
    for i in range(70):
        x = math.sqrt(x)
    for i in range(70):
        x = x*x
    return x
```

- c) En las computadoras, la suma no es asociativa. Por ejemplo, en dependencia del orden en que se sumen los números:

[1e100, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83]

se pueden obtener resultados diferentes.

Ejercicios para los muuuuy valientes⁹

Voz de tutorial: Por lo general, los ejercicios en esta tercera sección de las clases prácticas son “interesantes”. Para poder resolverlos suele ser usual combinar conocimientos y habilidades que se tienen, con otros conocimientos y habilidades que no se tienen y que hay que buscar y desarrollar para cada ejercicio particular. Hay ocasiones en que la habilidad más útil es la de saber buscar la respuesta, y la segunda más importante, es poder entender lo que se encontró, así que ¡suerte con eso!

Ejercicio 11: Cónicas (50000 créditos)

Escriba una función en Python que reciba una cónica **cualquiera** en algún formato especificado por usted y devuelva un fichero con la imagen de la cónica representada en el plano.

Ejercicio 12: Este ejercicio es mucho más difícil de lo que parece. (80000 créditos)

Implemente una función en Python que reciba una lista de números y devuelva la suma. Compruebe su implementación con la lista:

[1e100, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83, 1e83],

que al sumar sus números se debe obtener: 1.0000000000000001e+100

⁹O para todos aquellos que estén dispuestos a terminar la asignatura con 5 ;-).

Noticias, eventos, convocatorias y otras cosas extrañas

Voz de tutorial: En algunas clases prácticas hay una sección en la que aparecen ejercicios que, para algunas personas, no tienen mucho que ver con la asignatura, aunque sí están relacionadas ;-). En esta primera clase práctica se tiene un ejemplo de un ejercicio que promueve la cultura general (que siempre es importante) y una convocatoria a un concurso romántico :-/, que también tributa a la cultura general :-D.

Ejercicio 13: ¿Dinosaurios? :-/ (30000 créditos)

¿Por qué es relevante el dinosaurio de Augusto Monterroso?¹⁰

Convocatoria: Por un 14 de febrero romántico y polar

Vos¹¹ de tutorial: En algunas clases prácticas se publican algunos eventos y convocatorias que tienen una fecha de realización que no necesariamente coincide con la semana de la clase práctica. La participación en esas actividades suele ser opcional y la cantidad de créditos que se puede ganar en ellas, suele ser mucho mayor, pero también depende de la participación y desempeño de los demás participantes.

La Sociedad Cubana de Matemática y Computación, en colaboración con el Fondo Cubano de Bienes Culturales y el Instituto Internacional para la Promoción y Divulgación del Arte Polar Interactivo y Fuera de Fecha (IPDAPIFF), convocan al primer concurso internacional “Amor en Coordenadas Polares 2021”, en saludo al 14 de febrero.

Los interesados en participar deben enviar un fichero con un código de python que cuando se ejecute genere un fichero que se llame **nombre-de-los-participantes.png**¹² y que tenga una imagen “romántica” formada a partir de graficar funciones en coordenadas polares. Además de los gráficos, la imagen puede contener textos, elementos matemáticos, leyenda, o cualquier otro elemento que desee el autor. El único requisito es que todos los gráficos se hagan en coordenadas polares.

¹⁰¡Taratatáan! Acabas de descubrir una tercera pregunta secreta por un valor de 20 000 créditos: ¿Por qué en esta clase práctica hay una pregunta relacionada con un dinosaurio? ¿Qué tiene que ver ese dinosaurio con la asignatura? *Voz de tutorial: En algunos casos en que una pregunta parece no tener nada que ver con la clase, conviene revisar la bibliografía propuesta, porque a lo mejor algunos de esos títulos puede dar alguna idea.*

¹¹¡TintirínTitín! Si te das cuenta, el sonido es diferente, así que lo que acabas de descubrir no es una pregunta secreta :-(, pero puede ser una posibilidad de ganar créditos ;-). En algunas orientaciones de clases prácticas pueden aparecer algunos errores. En algunos casos (como este) de ortografía, pero en otras pudiera ser de cualquier tipo. Cuando eso ocurra, y te des cuenta puedes comunicarlo a los profores, y por eso ganas créditos. La cantidad de créditos depende del error que se encuentre y sus posibles consecuencias :-o. Por ejemplo, en este caso, se le pudiera enviar un mensaje a los profesores diciendo algo así como “Profe: en la página 7 donde habla la voz del tutorial, parece ser que hay un error de ortografía, porque vos aparece con s. Y a no ser que el que lo hay escrito tenga muy incorporado el español de España y se esté refiriendo a la segunda persona del singular (que en Cuba le decimos tú o usted), voz debería ser con z.” Claro que si “no estás pà nà” puedes decir: “Profe, en la página 7 hay un voz con s y debería ser con z.” ;-).

¹²Si alguno de los participantes genera un fichero que se llame “literalmente” **nombre-de-los-participantes.png** recibirá la admiración del jurado y los profesores de la asignatura por su disciplina y capacidad de seguir indicaciones literales, pero probablemente pierda los créditos del premio, porque el otorgamiento de los mismos se hará a partir de los nombres que aparezcan en el nombre del fichero con la imagen.

Cada participante solo puede enviar un archivo con extensión “.py”, que los miembros del jurado ejecutarán en una consola mediante el comando `python nombre_del_fichero.py`. Solo se puede asumir que estén instaladas las bibliotecas `numpy` y `matplotlib`.

Cada fichero que se reciba debe poderse identificar del resto de los ficheros recibidos. Si varios participantes mandan ficheros con el mismo nombre, todos serán descalificados.

El jurado realizará un escalafón de acuerdo a la calidad de las imágenes generadas. El autor o la autora del trabajo que obtenga la primera posición recibirá 200 000 créditos. De la segunda posición en adelante se recibirán cada vez menos créditos hasta llegar a un mínimo de 50 000 créditos. Cuánto recibe el trabajo en cada posición dependerá de la cantidad de trabajos recibidos, pero la mínima cantidad de créditos que se recibirán es 50 000.

Eso quiere decir que todos los trabajos que participen y que no sean rechazados por el jurado recibirán, al menos, 50 000 créditos.

Si en un trabajo participan mas de una persona, entonces los créditos recibidos se deben repartir entre los autores.

Se recibirán trabajos hasta el día **MARTES DE LA SEGUNDA SEMANA DESPUÉS DE EMPEZADO EL CURSO** de febrero y los resultados del concurso se publicarán el día **JUEVES DE LA SEGUNDA SEMANA DE EMPEZADO EL CURSO**.

Bibliografía recomendada

Voz de tutorial: Usualmente en esta sección se presentan elementos que pueden ser útiles para resolver los ejercicios propuestos. Sin embargo, si encuentras algún elemento que creas que debería estar listado aquí y no lo está, lo puedes proponer, y se considera como otro ejercicio de la clase práctica. La cantidad de créditos que se pueden recibir por esas adiciones dependen de lo “valioso” que sea el recurso propuesto, pero nunca sería menos de 50000 créditos.

- *Numerical Analysis. 10th Edition.* J. D. Faires, R. L. Burden, y A. M. Burden. Brooks Cole Publishing, 2016.
- *Análisis Numérico. Décima Edición.* J. D. Faires, R. L. Burden, y A. M. Burden. CENGAGE Learning, 2017.
- *Numpy Beginner’s Guide.* 2nd Edition. Ivan Idris. Packt Publishing. 2013.
- *Numpy Cookbook.* Ivan Idris. Packt Publishing. 2012.
- *Matplotlib for Python Developers.* Sandro Tosi. Packt Publishing. 2009.
- *matplotlib Plotting Cookbook.* Alexandre Devert. Packt Publishing. 2014.
- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.
- *Conferencia #1.2246467991473532e-16 de Matemática Numérica para Ciencia de la Computación, curso 2021. MATCOM. UH.* Autores: Profesores de la asignatura. 2021.

Voz de tutorial: Y bueno, aquí termina la orientación de esta primera clase práctica. El resto queda por ti :-). Recuerda que por cada ejercicio de estos (que entregues) puedes ganar la cantidad de créditos indicada en cada caso, y que además, si lo entregas “antes” de la CP, entonces la cantidad de créditos que recibes se duplica ;-).