Ecuaciones diferenciales ordinarias. Tarea I

Kevin Talavera Díaz C211
Lía Zerquera Ferrer C212
Javier Alejandro Oramas López C212
Daniel Alejandro Cárdenas C213

1 Resumen

2 Demuestre el siguiente Teorema de existencia y Unicidad: Sea $Q = \{(x,y)|a < x < b, c < y < d\}$ y las funciones $f_1(x), f_2(y)$ definidas y continuas en Q, de modo que $f_2 \neq 0, \forall y \in (c,d)$. Entonces, por cada punto $(x_0, y_0) \in Q$ pasa una y solo una curva integral de la ecuación $\frac{\delta y}{\delta x} = f_1(x)f_2(y)$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = f_1(x)f_2(y)|dividimospor f_2(y), f_2(y) \neq 0$$

$$\frac{1}{f_2(y)}\frac{\delta y}{\delta x} = f_1(x)$$

$$\int \frac{1}{f_2(x)}\delta y = \int f_1(x)\delta x$$

Como $f_2(y)$ es continuam $\frac{1}{f_2(y)}$ es continua

Como $\frac{1}{f_2(y)}$ y $f_1(x)$ son continuas, son también integrables

Como $\frac{1}{f_2(y)}$ y $f_1(x)$ son integrables, existe $F_2(y), F_1(x)$ primitivas, tal que $\int \frac{1}{f_2(y)}dy = F_2(y) + c_1$ y $\int f_1(x)dx = F_1(x) + c_2$

Luego

$$\int \frac{1}{f_2(y)}dy = \int f_1(x)dx$$

$$F_2(y) + c_1 = F_1(x) + c_2$$

$$c_1 - c_2 = F_1(x) - F_2(y)$$

$$C = F_1(x) - F_2(y)$$

Obteniendo así la solución general

Sabemos que pasa por el punto (x_0, y_0) por lo tanto podemos particularizar la solución evaluando en F_1 y F_2

$$C = F_1(x_0) - F_2(y_0)$$

Luego, $F_1(x_0)$ y $F_2(y_0)$ son únicos porque la evaluación de una función en un valor fijo es único

Luego C es único por ser resta de valores únicos

Luego, Queda demostrado que por cada punto $(x_0, y_0) \in Q$ pasa una y solo una curva integral de la ecuación $\frac{\delta y}{\delta x} = f_1(x)f_2(y)$

3 $y^{'} - 2y = ty^2$, $y(0) = 1$, $1 \leq t \leq 2$

Para resolver esta EDO utilizaremos la ecuación diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dt} - 2y = ty^2$$

dividimos entre y^2

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt} - 2y = t$$

Sustitución :

$$y = u^{-1}$$

(1)

$$\frac{dy}{dt} = -u^{-2}\frac{du}{dt}$$

(2) Sustituyendo en la ecuación (1) y (2)

$$\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} - 2u^{-1} = t$$

$$\frac{du}{dt} + 2u^{-1} = -t$$

Hallando el factor diferencial

$$e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$$

Multiplicando el factor diferencial se obtiene

$$\frac{d}{dt}[e^{2t}] = -te^{2t}$$

$$\int \frac{d}{dt}[e^{2t}]\,dx = \int -te^{2t}\,dx$$

Resolviendo las integrales y depejando obtenemos

$$y = \frac{-2te^{2t} + e^{2t} + 4c}{4e^2 t}$$

Como sabemos que y(0) = 1 podemos hallar el valor de la constante c

$$y(0) = \frac{-2(0)e^{2(0)} + e^{2(0)} + 4c}{4e^2(0)} = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

Luego

$$y = \frac{-2te^{2t} + e^{2t} + 3}{4e^2 t}$$

3.1 Comparaciónes

4 Ejercicio 21 página 81

4.1 Datos de Interés

1. Máxima capacidad del tanque: 500 gal
2. Tanque lleno de Agua Pura $\Rightarrow$ x(0) = 0 y c(0) = 0
3. Concentración de sal de entrada: 2 lb/gal
4. Velocidad de Entrada de Salmuera: 5 gal/min
5. Concentración de sal de salida: 2 lb/gal
6. Velocidad de salida de Salmuera: 5 gal/min
7. Tasa de entrada de sal: (2 lb/gal)(5 gal/min) 10 lb/min
8. Tasa de salida de sal: ($\frac{x}{500}$ lb/gal)(5 gal/min) $\frac{x}{100}$ lb/gal

Planteemos el ejercicio como un problema de valor inicial

$$\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{x}{100} = 10; x(0) = 0 \tag{1}$$

Sabemos que (1) es una ecuación diferencial linela, y su factor de integración es: $e^{\frac{t}{100}}$, luego:

$$\frac{\delta e^{\frac{t}{100}}}{\delta t} = 10e^{\frac{t}{100}} \tag{2}$$

integrando y resolviendo para x tenemos:

$$x(t) = 1000 + ce^{-\frac{t}{100}}; x(0) = 0$$

$$0 = 1000 + c$$

$$c = 1000$$

$$\boxed{x(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{t}{100}}}$$

4.2 Comparaciónes

5 Ejercicio 22 página 81

5.1 ¿Cuál es la concentración de sal $c(t)$ en el tanque en el tiempo t?

De la fórmula de la concentración $c = \frac{Ms}{Vd}$ donde Ms representa la masa de soluto y Vd el volúmen de la disolución.
Definimos la concenttración de Sal en el tiempo t como:

$$c(t) = \frac{x(t)}{500} \tag{3}$$

5.2 ¿En t=5 min?

Sustituyendo en (3)

$$c(5) = \frac{x(5)}{500}$$

$$c(5) = \frac{1000 - 1000e^{-\frac{5}{100}}}{500}$$

$$c(5) = \frac{1000(1 - e^{-\frac{1}{20}})}{500}$$

$$\boxed{c(5) \approx 48.77058}$$

5.3 ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque después de un largo tiempo, es decir cuando t → q ?

$$\lim_{t\to\infty} x(t) * \frac{1}{500}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1000 - 1000e^{-\frac{5}{100}}}{500}$$

Cuando $t \to \infty$, $e^{-\frac{5}{100}} = 0$, luego:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) * \frac{1}{500} = \frac{1000}{500} = 2$$

Luego, la concentración pasado un largo período será de 2 lb/gal

5.4 ¿En qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de este valor límite?

$$\frac{x(t)}{500} = 1$$

$$x(t) = 500$$

$$1000 - 1000e^{-\frac{5}{100}} = 500$$

$$-1000e^{-\frac{5}{100}} = -500$$

$$500e^{-\frac{5}{100}} = 1$$

$$e^{-\frac{5}{100}} = \frac{1}{500}$$

$$\frac{t}{100} = \ln(500)$$

$$\boxed{t = 100 \ln(500)}$$

6 Conclusiones