Tema III: Aplicaciones bilineales.

<u>Clase Práctica 7:</u> Producto escalar.

Objetivos: Aplicar las definiciones de aplicación bilineal y producto escalar y las definiciones y propiedades asociadas a estos conceptos en la resolución de los ejercicios.

La autopreparación para esta clase debe basarse en las notas de clases de las conferencias. Para la resolución de los ejercicios es necesario el conocimiento de los conceptos: aplicación bilineal, matriz asociada a una aplicación bilineal, matriz congruente, producto escalar real, producto escalar unitario, matriz asociada a un producto escalar, espacio Euclidiano, matrices definidas positivas, norma inducida por un producto escalar, espacio normado. También se evaluarán las habilidades de demostración de los alumnos. (Muchos de estos ejercicios fueron extraídos de [2]). Estudiar (haciendo hincapié en los ejemplos) Capítulo 2, epígrafes 2.1 al 2.4 [2].

Se realizaran los ejercicios en orden, según la orientación de los profesores de clase práctica, hasta tratar de concluirlos todos.

1. Verifique que las siguientes aplicaciones son bilineales y halle la matriz asociada en la base que se indica en cada caso.
   1.1 $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x_1y_1-2x_1y_2+x_2y_1-x_3y_3$ en la base $\{a_i\}=\{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}$.
   1.2 $f:M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ dada por $f(A,B)=trA\cdot trB$ en la base canónica.
2. Ejercicio 1 página. 37

3. En el e.v. $\mathbb{R}^2$ se da la aplicación $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que
   $f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=4x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$
   3.1 Probar que f es un producto escalar
   3.2 Halla la matriz representativa de este producto escalar en una base $B=(e_1,e_2)$, así como las normas y ángulos entre los vectores e_1 y e_2.
   3.3 Suponiendo que $B=\big((1,0),(0,1)\big)$ halla la expresión de este producto escalar en una nueva base $B'=\big((2,0),(0,3/2)\big)$

4. En el e.v. $\mathbb{R}^2$ se da la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$ y la aplicación
   $$f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \text{ dada por } f(x,y)=(x_1\quad x_2)A\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$
   4.1 Probar que f es un producto escalar
   4.2 Denotando α el ángulo entre los vectores $y,z\epsilon\mathbb{R}^2$ probar que
   $\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2-2\|y\|\|z\|\cos\alpha$ donde y = x + z

5. Ejercicio 5 a) página 37.

6. Ejercicio 8 página 38.

7. Probar que en todo espacio Euclideano, se cumple que
   7.1 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$ (ley del paralelogramo)
   7.2 Si x es ortogonal a y ($\langle x,y\rangle=0$) entonces: $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

Prof. Wilfredo Morales Lezca, wilfre@matcom.uh.cu Prof. Celia T. González González, celia@matcom.uh.cu Prof. Alina Fernández Arias, aly@matcom.uh.cu
Departamento de Matemática, facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana.

<u>Ejercicios propuestos:</u> realizar los ejercicios 1, 2, 3, 7, 9, 10, todos a partir de la página 37 y 38.

1. ***Sean*** f, g ***aplicaciones bilineales sobre*** $E, \alpha \in \mathbb{R}$***. Demuestre que*** $f+g, \alpha f$ ***son aplicaciones bilineales.***

2. ***Sea*** $f : E \times E \to \mathbb{R}$ ***una aplicación bilineal. Demuestre que:***

   2.1 $f(0_E, x) = f(x, 0_E) = 0$

   2.2 $\forall x, y, z, t \in E$ se cumple que $f(x+y, z+t) = f(x,z) + f(x,t) + f(y,z) + f(y,t)$

Bibliografía

[1] Álgebra, tomo I, Noriega Sánchez T., de Arazoza Rodríguez H., Editorial Félix Varela, La Habana, 2007.

[2] Álgebra, tomo II, Noriega Sánchez T., Piñeiro Díaz L.R., Editorial Félix Varela, La Habana, 2007.

Prof. Wilfredo Morales Lezca, wilfre@matcom.uh.cu Prof. Celia T. González González, celia@matcom.uh.cu Prof. Alina Fernández Arias, aly@matcom.uh.cu

Departamento de Matemática, facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana.