UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

Máster Universitario en Sistemas Espaciales

Ampliación de Matemáticas 1

Hito 1

Javier Pueyo Serrano

Curso 2023-2024

1. Introducción

El objetivo principal del **Hito 1** es realizar una primera aproximación a la programación en *Python*. Para ello, se va a resolver el problema de Kepler que, matemáticamente, es un problema de Cauchy.

2. Problema de Cauchy

Un problema de Cauchy, también denominado *problema de valor inicial*, es una ecuación diferencial ordinaria junto con un valor especificado, llamado la condición inicial, de la función desconocida en un punto dado del dominio de la solución.

$$\frac{dU}{dt} = F\left(U, t\right) \tag{1}$$

$$U(t_0) = U_0 \tag{2}$$

Para su resolución numérica, es necesario utilizar algún esquema numérico temporal de integración. A continuación, se resumen los que se han utilizado en el presente informe.

2.1. Método de Euler

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F^n \tag{3}$$

2.2. Método Runge-Kutta de 4 etapas

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{4}$$

siendo

$$k_1 = F\left(U^n, t_n\right) \tag{5}$$

$$k_2 = F\left(U^n + \frac{\Delta t}{2}k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \tag{6}$$

$$k_3 = F\left(U^n + \frac{\Delta t}{2}k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \tag{7}$$

$$k_4 = F\left(U^n + \Delta t k_3, t_n + \Delta t\right) \tag{8}$$

2.3. Método de Euler inverso

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F^{n+1} \tag{9}$$

2.4. Método Crank-Nicolson

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{2}\left(F^n + F^{n+1}\right) \tag{10}$$

3. Problema de Kepler

En mecánica clásica, el problema de Kepler es un caso especial del problema de los dos cuerpos, en el que los dos cuerpos interactúan por medio de una fuerza central que varía en intensidad según una ley cuadrática inversamente proporcional en función de la distancia entre ambos.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{u}_r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{11}$$

$$U = \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{r}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ -\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} \end{Bmatrix} = F\left(U, t\right) \tag{13}$$

En el caso del problema de Kepler, F no depende de forma explícita del tiempo, de forma que $F(U, t) = F(U)$.

Además, hay que añadir la condición inicial:

$$U(t_0) = U^0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}(t_0) \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{Bmatrix} \tag{14}$$

4. Resultados

La condición inicial que se ha tomado en este primer estudio es

$$\mathbf{r}(t_0) = (1, 0) \qquad\qquad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = (0, 1) \tag{15}$$

y, además, se ha tomado $t_f = 10$.

Algunos resultados se muestran a continuación.

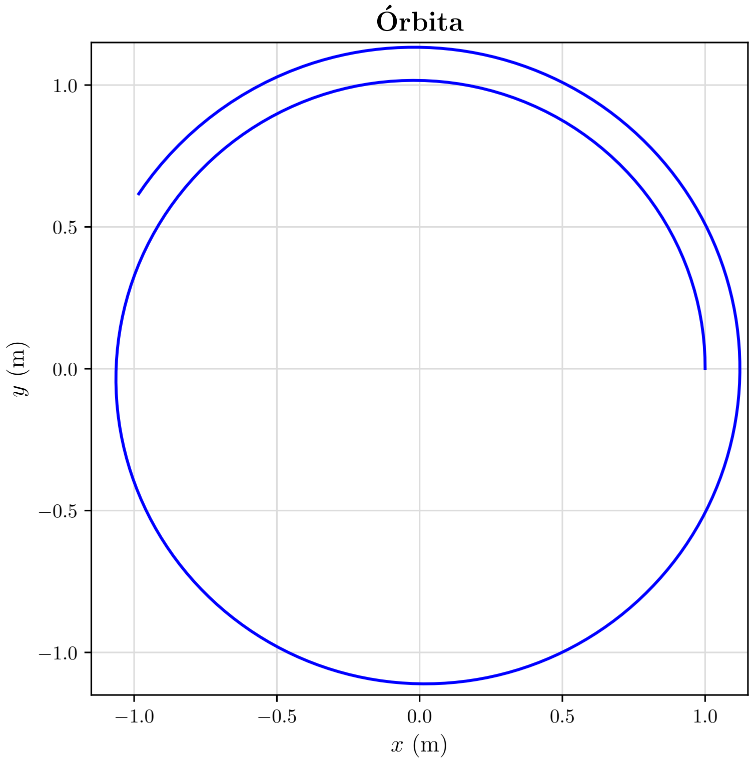

Figura 1: Solución numérica. Método de Euler. $t_f = 10$, $N = 10^3$, $\Delta t = 10^{-2}$.

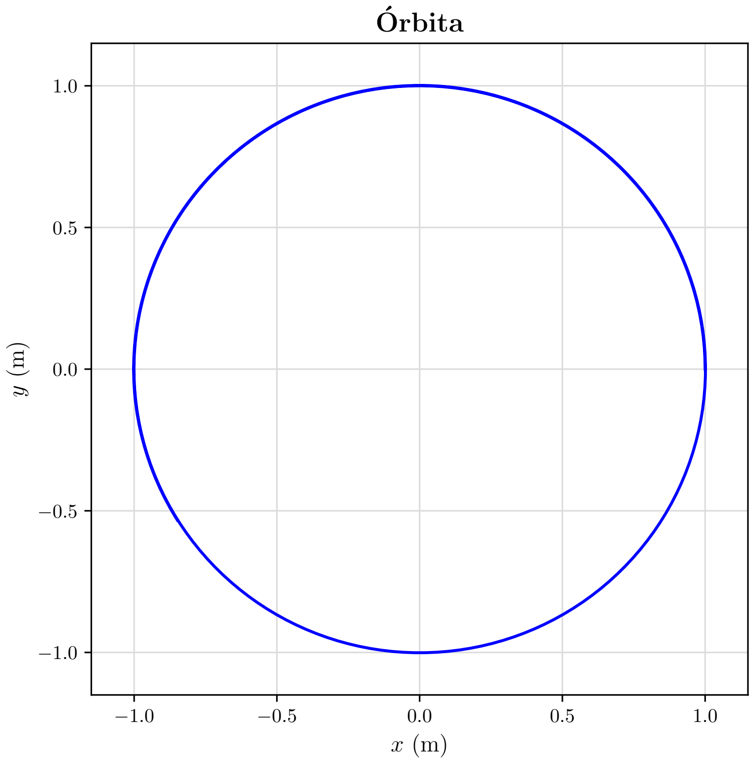

Figura 2: Solución numérica. Método de Euler. $t_f = 10$, $N = 10^5$, $\Delta t = 10^{-4}$.

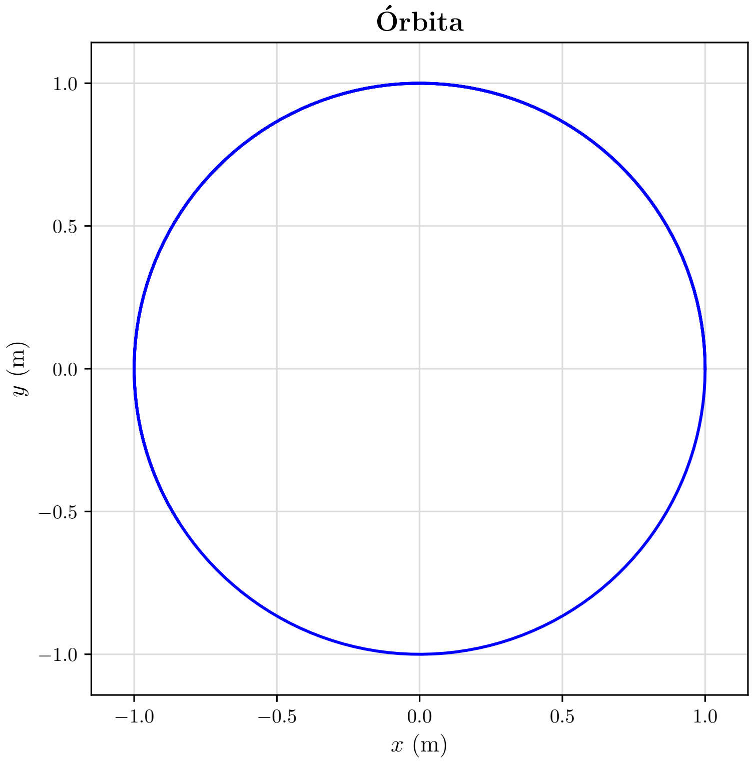

Figura 3: Solución numérica. Método Crank-Nicolson. $t_f = 10$, $N = 10^3$, $\Delta t = 10^{-2}$.

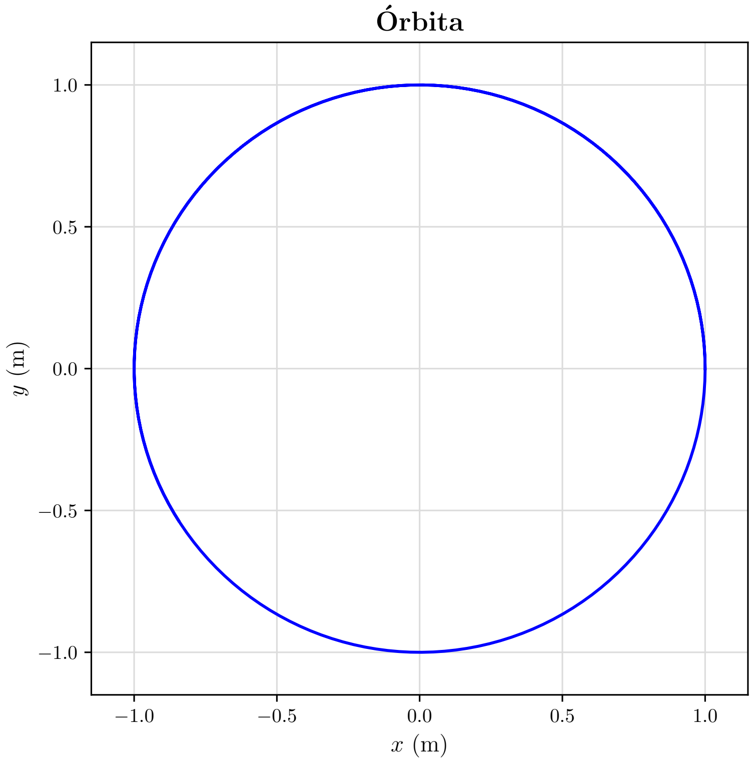

Figura 4: Solución numérica. Método Runge-Kutta 4. $t_f = 10$, $N = 10^3$, $\Delta t = 10^{-2}$.