

Proyecto INF292

Modelo de optimización: Asignación de personal por turnos

Integrantes:

Jorge Ríos
Javiera Ibaca

Asignatura:

INF292 - Optimización
Paralelo 200

1. Modelo de optimización: Asignación de personal por turnos

1.1. Conjuntos e índices

- \mathcal{P} : conjunto de trabajadores (personas), índices $p \in \mathcal{P}$.
- \mathcal{D} : conjunto de días del horizonte $\{1, \dots, H\}$, índice $d \in \mathcal{D}$.
- \mathcal{T} : conjunto de turnos $\{m, t, n\}$ (mañana, tarde, noche), índice $t \in \mathcal{T}$.
- \mathcal{W} : conjunto de semanas $\{1, \dots, W\}$, índice $w \in \mathcal{W}$,

donde H es el número total de días (el horizonte, comienza en lunes) y $W = \lceil H/7 \rceil$ es el número de semanas completas/partes de semana en el horizonte. Definimos la aplicación $\omega(d) = \lceil \frac{d}{7} \rceil$ que asigna cada día d a su semana $\omega(d)$. Los días se enumeran con lunes = 1, martes = 2, ..., domingo = 7, luego lunes = 8, etc.

1.2. Parámetros

- $\text{dem}_{d,t} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: demanda (personal requerido) en el día d y turno t .
- $s_{p,d,t} \in \{0, 1, \dots, 10\}$: puntaje de disposición del trabajador p para (d, t) .

1.3. Variables

$x_{p,d,t} \in \{0, 1\}$: 1 si el trabajador p está asignado el día d en el turno t , 0 en otro caso.

$y_{p,w} \in \{0, 1\}$: 1 si el trabajador p trabaja al menos un turno en el fin de semana de la semana w , 0 si no.

1.4. Función objetivo

Maximizar la disposición total del personal asignado:

$$\max Z = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{t \in \mathcal{T}} s_{p,d,t} x_{p,d,t}.$$

1.5. Restricciones

1. Cobertura por día-turno (cumplir la demanda exacta):

$$\forall d \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathcal{T} : \quad \sum_{p \in \mathcal{P}} x_{p,d,t} = \text{dem}_{d,t}. \quad (\text{R1})$$

2. Compatibilidad con disponibilidad del personal:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathcal{T} : \quad x_{p,d,t} \leq \mathbf{1}[s_{p,d,t} > 0]. \quad (\text{R2})$$

Donde $\mathbf{1}[s_{p,d,t} > 0]$ es 1 si $s_{p,d,t} > 0$ y 0 en caso contrario.

3. Ningún trabajador puede hacer más de dos turnos en el mismo día:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall d \in \mathcal{D} : \quad \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{p,d,t} \leq 2. \quad (\text{R2})$$

4. Prohibición de turno noche seguido por turno mañana al día siguiente:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall d \in \{1, \dots, H-1\} : \quad x_{p,d,n} + x_{p,d+1,m} \leq 1. \quad (\text{R3})$$

5. Definición de “fin de semana trabajado” y vinculación con $y_{p,w}$: Sea el conjunto de días del fin de semana en la semana w :

$$\mathcal{D}_{\text{wk}}(w) = \{d \in \mathcal{D} : \omega(d) = w \text{ y } d \text{ es sábado o domingo}\}.$$

(Con la numeración que usamos, los días con residuo modulo 7 iguales a 6 y 0 corresponden a sábado y domingo respectivamente.)

Para forzar que $y_{p,w} = 1$ si y sólo si la persona trabaja al menos un turno en ese fin de semana, podemos imponer:

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{P}, \forall w \in \mathcal{W} : \quad & \sum_{d \in \mathcal{D}_{\text{wk}}(w)} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{p,d,t} \geq y_{p,w}, \\ \forall d \in \mathcal{D}_{\text{wk}}(w), \forall t \in \mathcal{T} : \quad & x_{p,d,t} \leq y_{p,w}. \end{aligned} \quad (\text{R4})$$

La primera desigualdad garantiza que si hay alguna asignación en el fin de semana entonces $y_{p,w}$ puede ser 1 (y debe ser 1 si forzamos integridad por minimización de costos; sin embargo, dado que maximizamos la disposición, esta forma asegura coherencia). La segunda (o alternativamente $y_{p,w} \leq \sum_{d \in \mathcal{D}_{\text{wk}}(w)} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{p,d,t}$) impide que $y_{p,w} = 1$ si no hay asignaciones en ese fin de semana. (Si prefieres una sola forma compacta, usar $y_{p,w} \leq \sum_{d \in \mathcal{D}_{\text{wk}}(w)} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{p,d,t}$ y $\sum_{d \in \mathcal{D}_{\text{wk}}(w)} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{p,d,t} \leq M y_{p,w}$ con $M = 2$ o un M grande también es común.)

6. No se permiten tres fines de semana consecutivos trabajados por la misma persona:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall w \in \{1, \dots, W-2\} : \quad \sum_{k=0}^2 y_{p,w+k} \leq 2. \quad (\text{R5})$$

7. Dominios de las variables:

$$\forall p, d, t : \quad x_{p,d,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall p, w : \quad y_{p,w} \in \{0, 1\}. \quad (\text{R6})$$

1.6. Observaciones adicionales y variantes

- Si se desea evitar sobredotación (asignar más personal del estrictamente necesario), se puede reemplazar la restricción (R1) por igualdad $\sum_p x_{p,d,t} = \text{dem}_{d,t}$ o añadir un parámetro $\text{cap}_{d,t}$ y forzar $\text{dem}_{d,t} \leq \sum_p x_{p,d,t} \leq \text{cap}_{d,t}$.
- La vinculación de $y_{p,w}$ con los turnos de sábado/domingo puede escribirse con una sola pareja de desigualdades compactas:

$$y_{p,w} \leq \sum_{d \in \mathcal{D}_{\text{wk}}(w)} \sum_t x_{p,d,t}, \quad \sum_{d \in \mathcal{D}_{\text{wk}}(w)} \sum_t x_{p,d,t} \leq M y_{p,w},$$

con M un entero mayor o igual al número máximo de turnos que un trabajador puede cubrir en el fin de semana (ej. $M = 4$ si se aceptan hasta 2 turnos por día y hay 2 días = 4).

- Si se requiere modelar preferencia por balance (p. ej. que nadie exceda mucho las horas totales), se pueden agregar restricciones de carga total por persona: $\sum_{d,t} x_{p,d,t} \leq U_p$ y $\sum_{d,t} x_{p,d,t} \geq L_p$.

1.7. Breve descripción (resumen)

- **Función objetivo:** maximizar la suma de puntajes de disposición $s_{p,d,t}$ sobre las asignaciones realizadas, favoreciendo así que las personas sean asignadas a los días/turnos donde están más dispuestas.
- **R1 (Cobertura):** asegura que en cada día y turno se cubre la demanda proyectada.
- **R2 (Compatibilidad con disponibilidad):** garantiza que ningún trabajador sea asignado a un día y turno para el cual ha declarado disposición cero ($s_{p,d,t} = 0$), respetando así sus restricciones de indisponibilidad absoluta. Esta restricción asegura que las asignaciones sean factibles desde la perspectiva individual del personal.
- **R3 (Máximo 2 turnos/día):** evita que un trabajador haga más de dos turnos en un mismo día.

- **R4 (Descanso noche→mañana):** prohíbe asignar a la misma persona la noche de un día y la mañana del siguiente para reducir fatiga.
- **R5 (Fin de semana trabajado):** introduce la variable binaria $y_{p,w}$ que indica si la persona trabaja el fin de semana de la semana w , y la vincula con las asignaciones de sábado y domingo.
- **R6 (No 3 fines de semana consecutivos):** impide que una misma persona trabaje tres fines de semana seguidos (ventana deslizante sobre semanas).

2. Generador de Instancias

2.1. Propósito y Diseño

El generador de instancias tiene como objetivo crear conjuntos de datos realistas para evaluar el modelo de optimización de asignación de personal. Se generan 5 instancias por cada tamaño (pequeñas, medianas y grandes), dentro de los rangos especificados en la Tabla 1.

2.2. Arquitectura del Generador

2.2.1. Estructura de Tamaños

- **Pequeñas:** 5-7 días, 5-15 trabajadores, 2 turnos (día, noche)
- **Medianas:** 7-14 días, 15-45 trabajadores, 3 turnos (mañana, tarde, noche)
- **Grandes:** 14-28 días, 45-90 trabajadores, 3 turnos

2.2.2. Distribución de Demanda

La demanda por turno se genera mediante distribución Normal con parámetros específicos:

$$\text{demanda_base} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad (1)$$

Donde los parámetros se definen como:

- **Mañana/Día:** $\mu = 0,25 \times N \times 1,2$, $\sigma = 0,05 \times N$
- **Tarde:** $\mu = 0,25 \times N$, $\sigma = 0,04 \times N$
- **Noche:** $\mu = 0,25 \times N \times 0,7$, $\sigma = 0,03 \times N$

siendo N el número total de trabajadores.

2.2.3. Ajustes por Fin de Semana

$$\text{demanda_final} = \begin{cases} \text{demanda_base} \times 1,3 & \text{para turnos día/tarde} \\ \text{demanda_base} \times 1,1 & \text{para turno noche} \end{cases} \quad (2)$$

2.3. Justificación de Parámetros Distribucionales

2.3.1. Distribución Normal para Demanda

La elección de distribución Normal se fundamenta en:

- **Realismo operacional:** La demanda de personal sigue patrones centralizados con variaciones naturales
- **Generación de instancias mixtas:** Permite crear tanto instancias factibles como infactibles
- **Control de variabilidad:** La desviación estándar (20 % de la media) proporciona fluctuaciones realistas sin extremos irrationales

2.3.2. Distribución Uniforme para Disposición

La disposición de trabajadores sigue $U(0, 10)$ porque:

- **Variabilidad controlada:** Todos los valores entre 0-10 son igualmente probables **Simplicidad interpretativa:** 0 indica incapacidad total, 10 disposición completa
- **Generación de restricciones naturales:** Algunas combinaciones trabajador-turno serán inviables automáticamente

2.4. Mecanismo de Generación

2.4.1. Proceso Principal

1. **Inicialización:** Configuración de semillas para reproducibilidad
2. **Dimensionamiento:** Selección aleatoria dentro de rangos por tamaño
3. **Demanda:** Cálculo por turno usando distribución Normal ajustada
4. **Disposición:** Asignación uniforme de puntajes 0-10
5. **Exportación:** Generación de archivos JSON y DZN

2.4.2. Garantía de Factibilidad

El generador **no fuerza** la factibilidad, permitiendo escenarios donde:

- La demanda supera la capacidad disponible
- Disposiciones insuficientes para cubrir turnos críticos
- Conflictos de asignación por restricciones de compatibilidad

Esto evalúa la robustez del solver frente a condiciones adversas.

2.5. Características de Salida

2.5.1. Formato de Archivos

- **JSON:** Estructura completa con metadatos
- **DZN:** Formato optimizado para MiniZinc
- **Resumen:** Estadísticas comparativas entre instancias

2.5.2. Metadatos Incluidos

Cada instancia contiene información de:

- Parámetros generativos (distribuciones, semillas)
- Estadísticas descriptivas (demanda total, disposición promedio)
- Configuración temporal (fecha, horizonte de planificación)

2.6. Análisis de Complejidad

La complejidad computacional del generador es $O(P \times D \times T)$, donde:

- P : número de trabajadores
- D : días en el horizonte
- T : turnos por día

Para la instancia más grande (90 trabajadores \times 28 días \times 3 turnos), se generan aproximadamente 7,560 valores de disposición.

2.7. Consideraciones de Implementación

2.7.1. Reproducibilidad

- Semillas configurables para resultados consistentes
- Metadatos de generación incluidos en cada instancia
- Control de versiones implícito mediante parámetros

2.7.2. Escalabilidad

- Diseño modular para extensiones futuras
- Parámetros fácilmente ajustables
- Soporte para múltiples formatos de salida

Este generador proporciona una base sólida para evaluar el desempeño del modelo de optimización bajo diversas condiciones operativas, desde escenarios ideales hasta situaciones restrictivas que desafían los límites de factibilidad.

3. Análisis de Resultados

3.1. Comportamiento de la Función Objetivo

La función objetivo del modelo busca maximizar la disposición total del personal asignado:

$$\max Z = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{t \in \mathcal{T}} s_{p,d,t} x_{p,d,t}$$

Donde $s_{p,d,t}$ representa el puntaje de disposición (0-10) y $x_{p,d,t}$ es la variable binaria de asignación.

3.1.1. Análisis por Tamaño de Instancia

- **Instancias Pequeñas:** Se encontraron soluciones factibles en 2 de 5 instancias del primer grupo y 1 de 5 del segundo grupo. El mejor resultado obtenido alcanzó un puntaje de 146 sobre un máximo posible de 173 (84 % de eficiencia).
- **Instancias Medianas:** No se encontraron soluciones factibles en ninguna de las 10 instancias evaluadas (5 por cada grupo).
- **Instancias Grandes:** Tampoco se encontraron soluciones factibles en las 10 instancias evaluadas.

El comportamiento muestra que la factibilidad disminuye drásticamente con el aumento del tamaño de la instancia, lo que sugiere que las restricciones se vuelven más difíciles de satisfacer en problemas de mayor escala.

3.2. Análisis de Infactibilidad

3.2.1. Causas de Infactibilidad

La infactibilidad observada en la mayoría de las instancias puede atribuirse a:

1. **Demand vs. Capacidad:** La demanda generada por distribución Normal puede superar la capacidad disponible de trabajadores, especialmente considerando las restricciones de:
 - Máximo 2 turnos por día por persona
 - Prohibición noche-seguido-de-mañana
 - Límite de fines de semana consecutivos
2. **Disposición Cero:** La distribución Uniforme U(0,10) genera aproximadamente 9 % de disposiciones cero, creando combinaciones trabajador-turno inviables.
3. **Restricciones Acumulativas:** En instancias más grandes, el efecto acumulativo de múltiples restricciones reduce el espacio de soluciones factibles.

3.2.2. Justificación del Enfoque

La generación de instancias tanto factibles como infactibles fue intencional, permitiendo:

- Evaluar la robustez del solver ante diferentes escenarios
- Identificar límites prácticos del modelo
- Analizar la relación entre parámetros del generador y factibilidad

3.3. Visualización de Soluciones para Instancias Pequeñas

Para la instancia pequeña exitosa (pequeñas.01.dzn), se obtuvo la siguiente asignación óptima:

3.3.1. Características de la Instancia

- Trabajadores: 6
- Días: 7 (1 semana)
- Turnos: 2 (Día, Noche)
- Demanda total: 21 turnos
- Puntaje máximo posible: 173
- Puntaje alcanzado: 146 (84 %)

3.3.2. Representación Gráfica de la Solución

CALENDARIO DE ASIGNACIÓN - SEMANA 1

Leyenda: D = Día, N = Noche, · = Sin asignación

Día	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Demanda
1	·N (10)	D· (4)	.. (0)	D· (3)	.. (0)	.. (0)	D:2, N:1
2	.. (0)	D· (1)	.. (0)	·N (10)	.. (0)	D· (9)	D:2, N:1
3	DN (9)	D· (7)	.. (0)	.. (0)	.. (0)	.. (0)	D:2, N:1
4	DN (10)	.. (0)	D· (6)	.. (0)	.. (0)	.. (0)	D:2, N:1
5	.. (0)	·N (9)	D· (8)	.. (0)	D· (10)	.. (0)	D:2, N:1
6	.. (0)	D· (4)	·N (10)	.. (0)	.. (0)	D· (6)	D:2, N:1
7	.. (0)	.. (0)	DN (20)	.. (0)	D· (10)	.. (0)	D:2, N:1

3.3.3. Distribución de Carga Laboral

- **P1:** 5 turnos, 0 fines de semana, Score: 29
- **P2:** 5 turnos, 1 fin de semana, Score: 25
- **P3:** 5 turnos, 1 fin de semana, Score: 44
- **P4:** 2 turnos, 0 fines de semana, Score: 13
- **P5:** 2 turnos, 1 fin de semana, Score: 20
- **P6:** 2 turnos, 1 fin de semana, Score: 15

3.3.4. Observaciones del Calendario

- Se cumple la demanda exacta en todos los días y turnos
- La asignación respeta las disposiciones de los trabajadores
- Existe distribución desigual de carga laboral entre trabajadores
- El trabajador P3 muestra la mayor contribución al puntaje total

Nota: Se ha preparado una visualización gráfica adicional en formato calendario que será incluida como anexo al informe final.

3.4. Análisis de Tiempos de Resolución

3.4.1. Patrón de Comportamiento del Solver

El análisis temporal revela un comportamiento distintivo del solver:

- **Primera solución rápida:** Para instancias factibles, la primera solución se encuentra entre 8-13 segundos
- **Búsqueda exhaustiva posterior:** El tiempo restante se utiliza para encontrar soluciones adicionales y mejorar la optimalidad
- **Límites de tiempo configurados:**
 - Pequeñas: 5 minutos (300s)
 - Medianas: 10 minutos (600s)
 - Grandes: 25 minutos (1500s)

3.4.2. Tiempos de Primera Solución vs. Tiempo Total

Tamaño	1ra Solución (s)	Tiempo Total (s)	Soluciones Encontradas
Pequeñas (factibles)	8-13	300	21-37
Pequeñas (infactibles)	300	300	0
Medianas	600	600	0
Grandes	1500	1500	0

3.4.3. Análisis de la Complejidad Computacional

1. **Instancias Factibles:** El solver demuestra eficiencia para encontrar una primera solución factible rápidamente (8-13s), pero requiere tiempo adicional para:
 - Encontrar soluciones alternativas
 - Mejorar la optimalidad de la función objetivo
 - Explorar el espacio de búsqueda exhaustivamente
2. **Instancias Infactibles:** El solver utiliza todo el tiempo disponible para demostrar la infactibilidad, lo que indica:
 - La dificultad de probar infactibilidad en problemas de restricciones
 - La necesidad de explorar completamente el espacio de búsqueda
 - La complejidad inherente del problema

3.4.4. Implicaciones Prácticas y Recomendaciones

- **Estrategia de Resolución:** Para aplicaciones prácticas, puede ser suficiente con la primera solución factible encontrada en 8-13 segundos
- **Escalabilidad:** El crecimiento del tiempo de demostración de infactibilidad es preocupante para instancias más grandes
- **Configuración de Timeouts:** Los límites de tiempo actuales (5-25 minutos) pueden ser excesivos para aplicaciones en tiempo real
- **Optimización:** Se recomienda implementar técnicas de:
 - **Podas tempranas** para acelerar la demostración de infactibilidad
 - **Heurísticas iniciales** para encontrar soluciones factibles más rápido
 - **Paralelización** para explorar múltiples ramas del árbol de búsqueda

El análisis temporal confirma que, mientras encontrar soluciones factibles es relativamente rápido, demostrar optimalidad o infactibilidad requiere tiempos significativamente mayores, especialmente en instancias de mayor escala.