匹配市场

（第10章）

背景问题

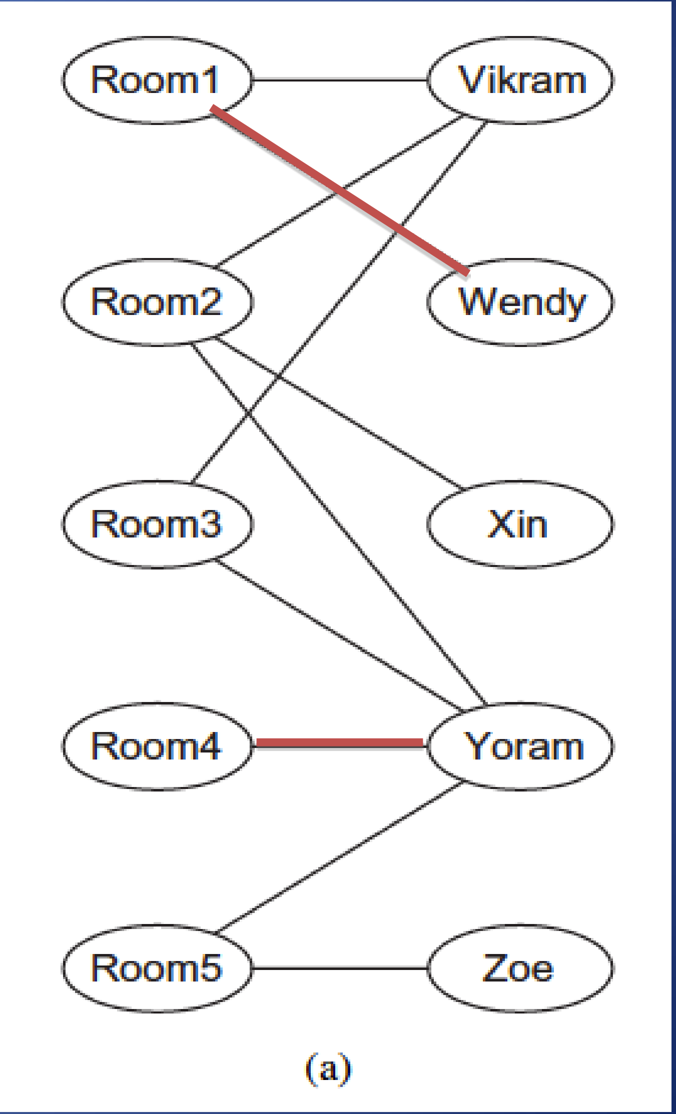
- 市场的匹配：买卖双方，数量相等，直接交易，买方有偏好，达成完全交易的条件？在不同价值期望下，大家能否都满意？

学习要点

- 匹配定理—达成完全交易的结构性条件
- 清仓价格—社会最优会“自动”实现！

买卖双方，数量相等，直接交易，买家偏好

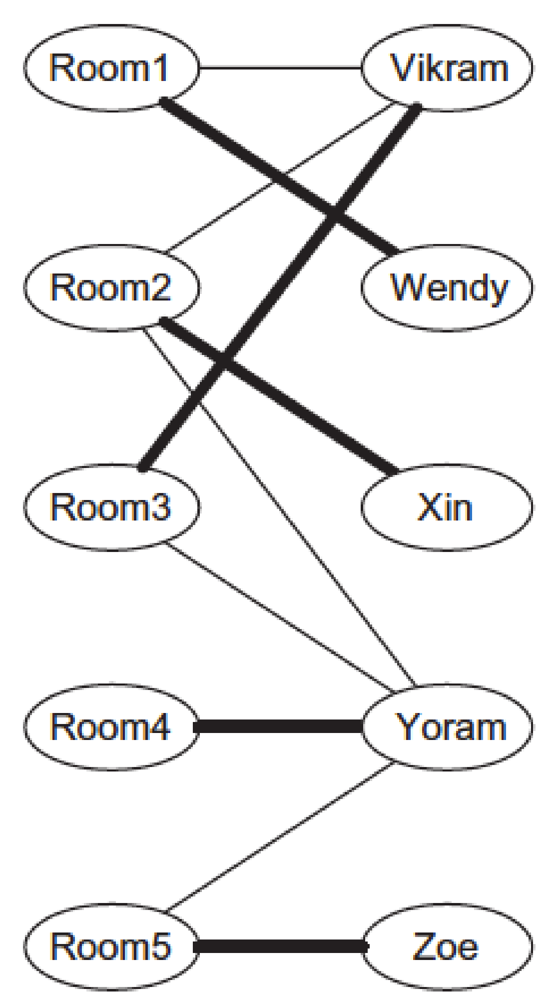
- 最方便的方法，就是将买家对卖家偏好关系用二部图刻画，讨论其性质
- 例子：宿舍供给与学生对宿舍需求的关系图
- 匹配：图中的一组边，其中所涉及节点没有重复



(a)

匹配的覆盖程度

- 前面定义的匹配，仅仅表现了匹配的特征要求，即节点不能重复，并没有说涉及节点的个数
- 如果在两边相等的二部图中供需两组节点均完全出现在一个匹配中，则称该匹配为完美匹配（**Perfect Matching**）——见右图例

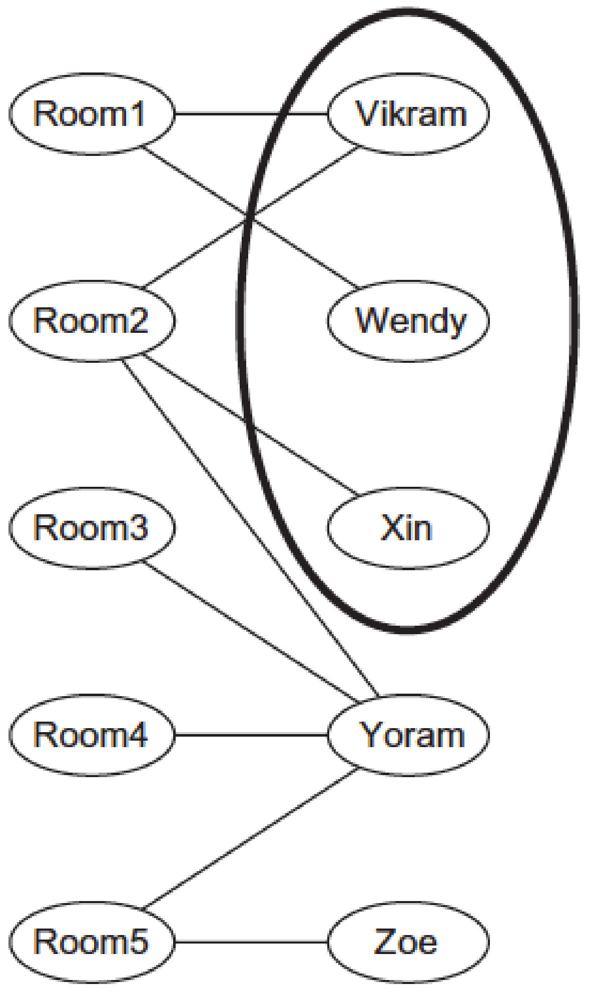


(b)

什么情况下，存在一个完美匹配

受限组

- 并不是所有二部图都含有完美匹配
- 受限组（Constricted Sets）：图中一边的一组节点，其个数多于它们邻居节点的个数之和（不算重复）
  - 相当于说供需之间在数量上不等



(b)

在市场双方数量相等情况下

- 若存在一组买方多于相应的卖方（即买方受限组），则不可能实现完美匹配
  - 亦即不能达成完全交易
- 若存在一组卖方多于相应的买方（即卖方受限组），则不可能实现完美匹配
  - 但可否达成完全交易？

若存在一组卖方受限组，则存在一组买方受限组，反之依然。

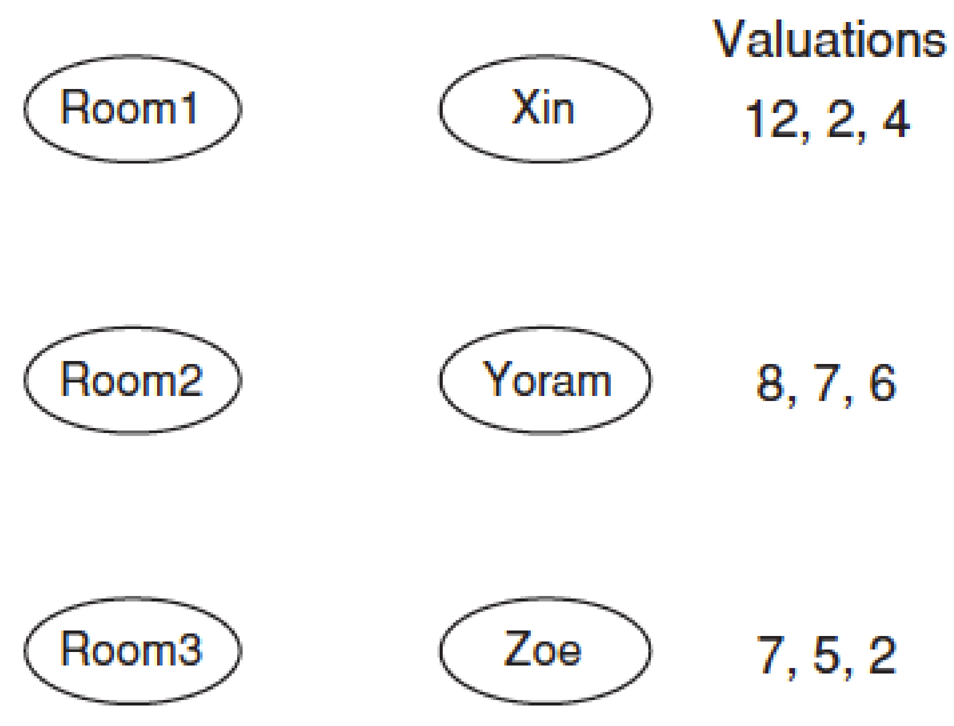
匹配定理

- 一个两边节点相等的二部图存在完美匹配，当且仅当不存在受限组。

- 若存在受限组，则不存在完美匹配——这个很容易看到；
- 若不存在完美匹配，则存在受限组——这不是显然的，需要详细证明（深度学习材料）。

引入买方价值估计

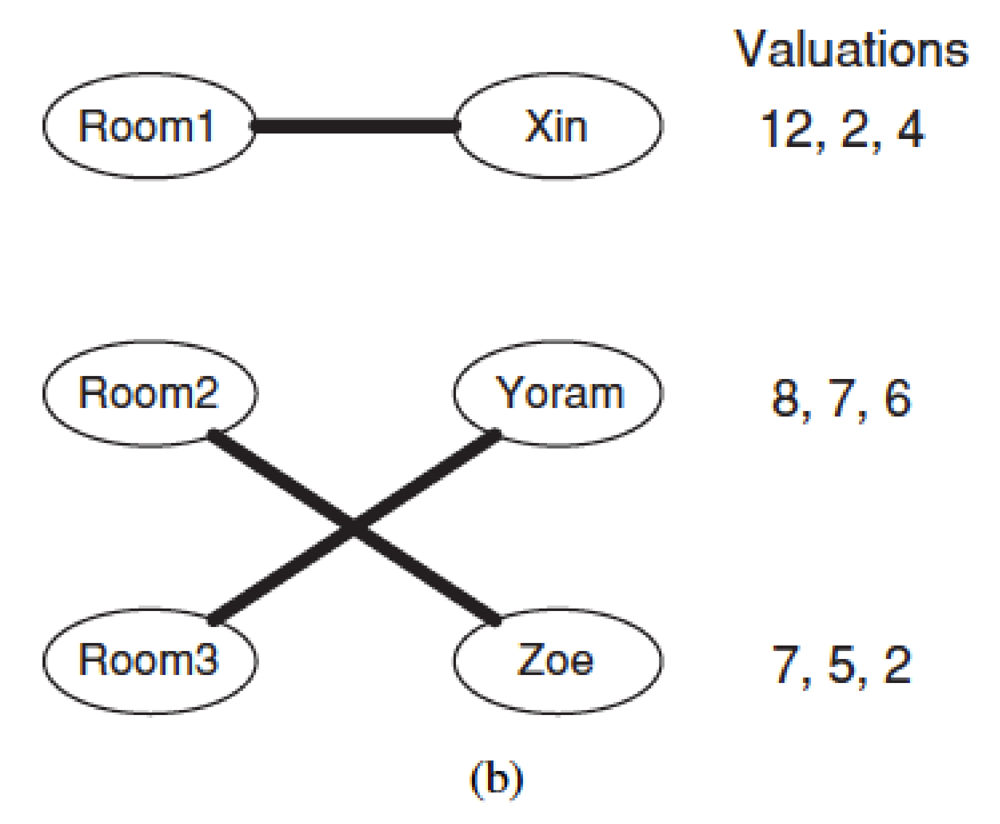
- 对一个物品的需求程度，与需方对其价值的估计密切相关，引入价值估计，有助于更加一般地探讨供需之间的匹配关系。



(a)

最优分配

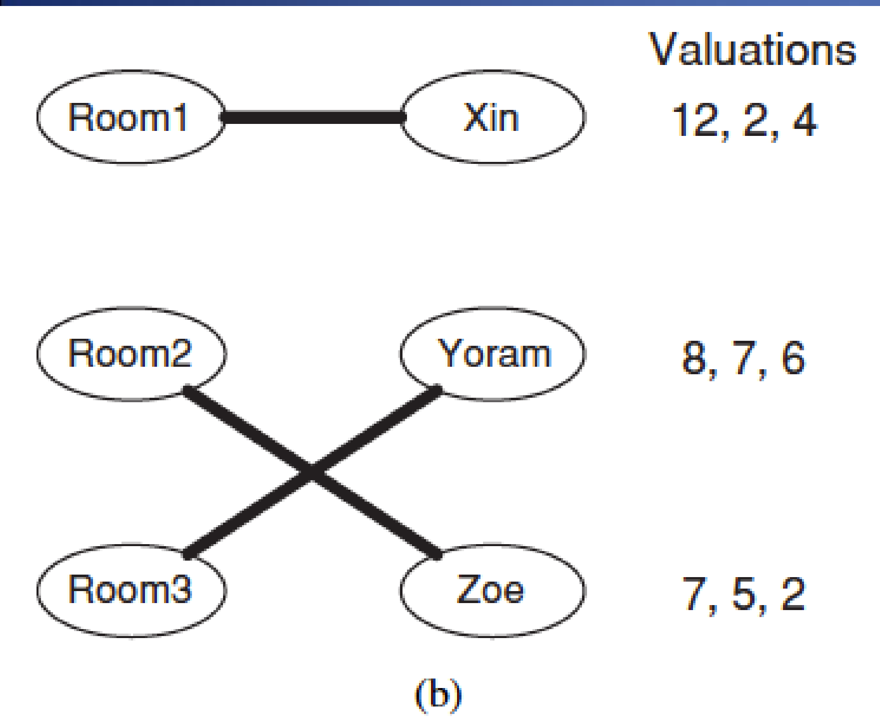
- 市场是一种分配机制，只要有供需，理论上就可以形成市场。
- 最优分配（optimal assignments），估值之和最大的完全分配方案



$V_{Max} = 12 + 6 + 5 = 23$

二部图匹配问题，是最优分配问题的一个特例：让看好的房间对应估值1，不看好的为0，希望V=N。

最优分配问题



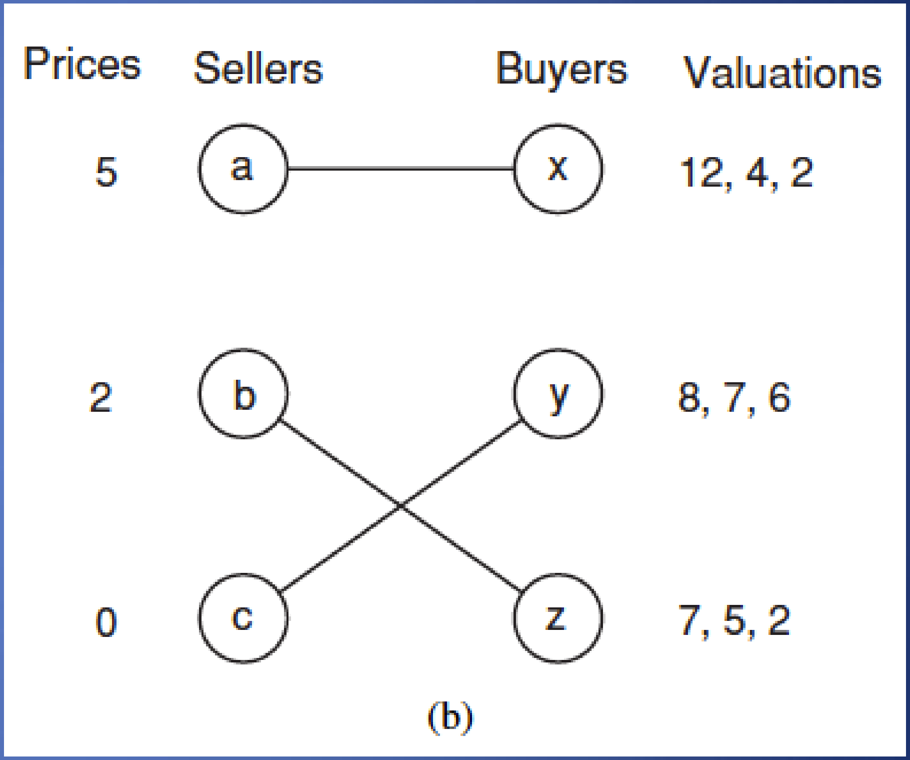
(b)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

一般性问题：给定一个N＊N矩阵（A），从中选择N个不同行不同列元素，a_{ij}（即i，j 分别在｛1，2，…，N｝中遍历），使得和最大。

引入卖方价格

- 买方对房子有估值，卖方可能有价格
- 如果卖方的要价组合使每一个买方分别得到一个回报相对最大的房子，则称形成市场清仓
- 清仓时的出售价格，就是市场清仓价格（Market-Cleaning Price）

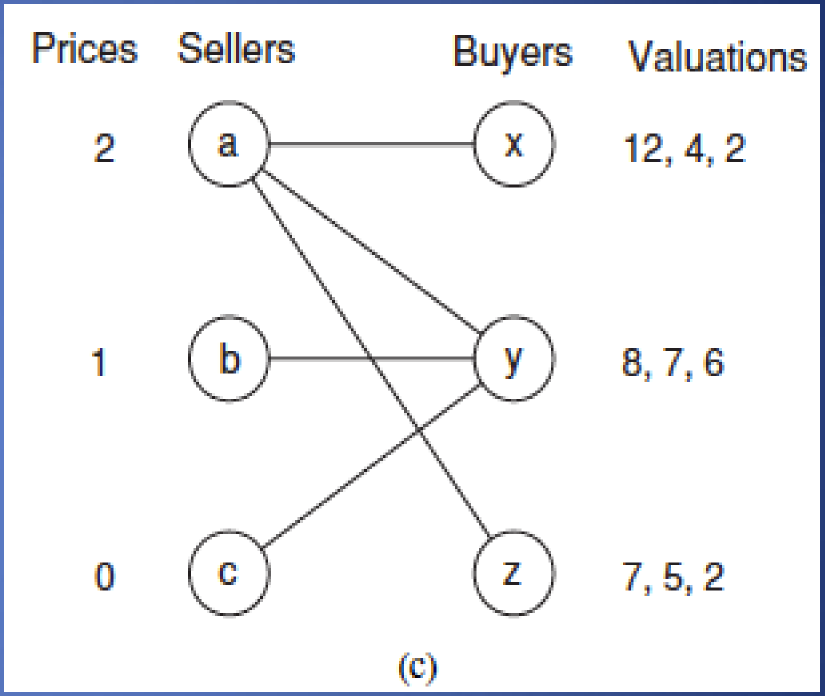


市场清仓价格

“回报相对最大”，分别针对每一买方而言。

偏好卖家图，描述买家喜好

- 如果只有买方估值，匹配问题就是依据买方估值的最优分配问题
- 如果引入卖方价格，偏好卖家图（买方偏好图）的概念有助于我们的分析
- 偏好卖家图表达："它们对我具有同样最划算"。
- 其上的完美匹配表明大家都等得到最满意结果
- 但偏好卖家图不一定有完美匹配，即可能存在受限组



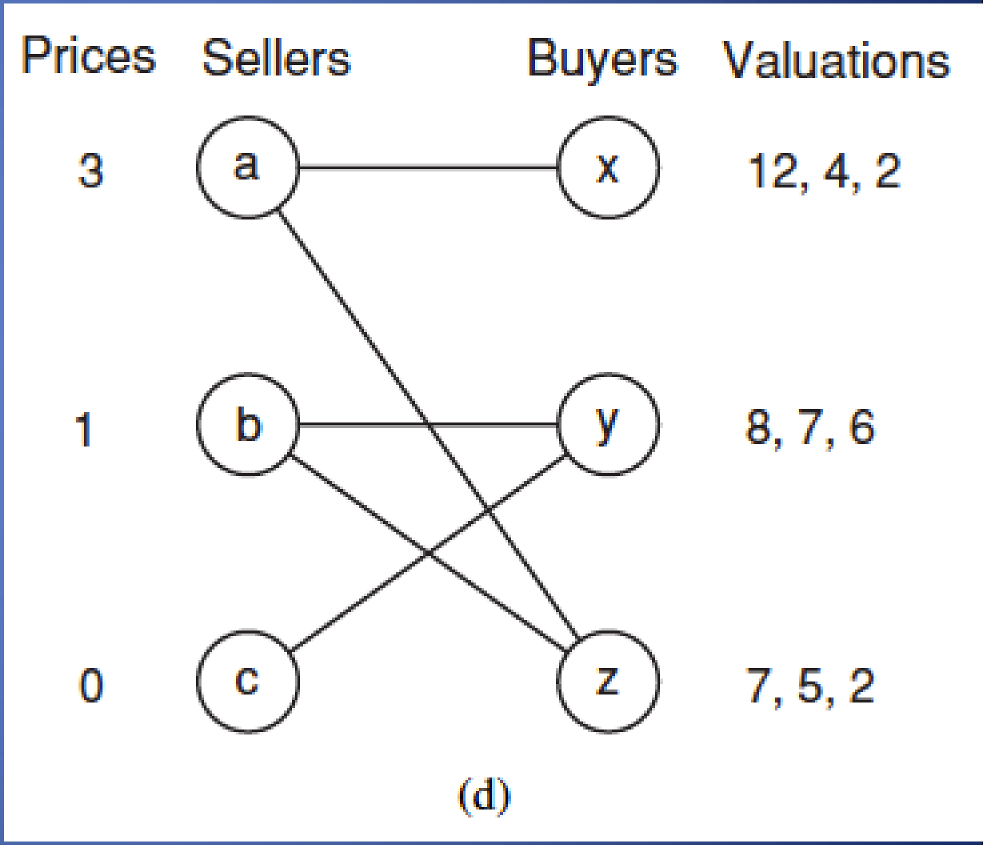
(c)

例：没有完美匹配的偏好卖家图，

存在完美匹配的偏好卖家图中卖家的价格称为"清仓价格"

市场：无形的手

- 市场协调，即价格调整，能够自动协调供需之间的关系，实现市场清仓
- 右图是在前页图的基础上，卖方a提高价格后的新卖家偏好图
  - 存在完美匹配，于是(3,1,0)为市场清仓价格
  - “无差异”（无所谓）：平手消解



价格调整后的偏好卖家图

市场清仓价格的最优性

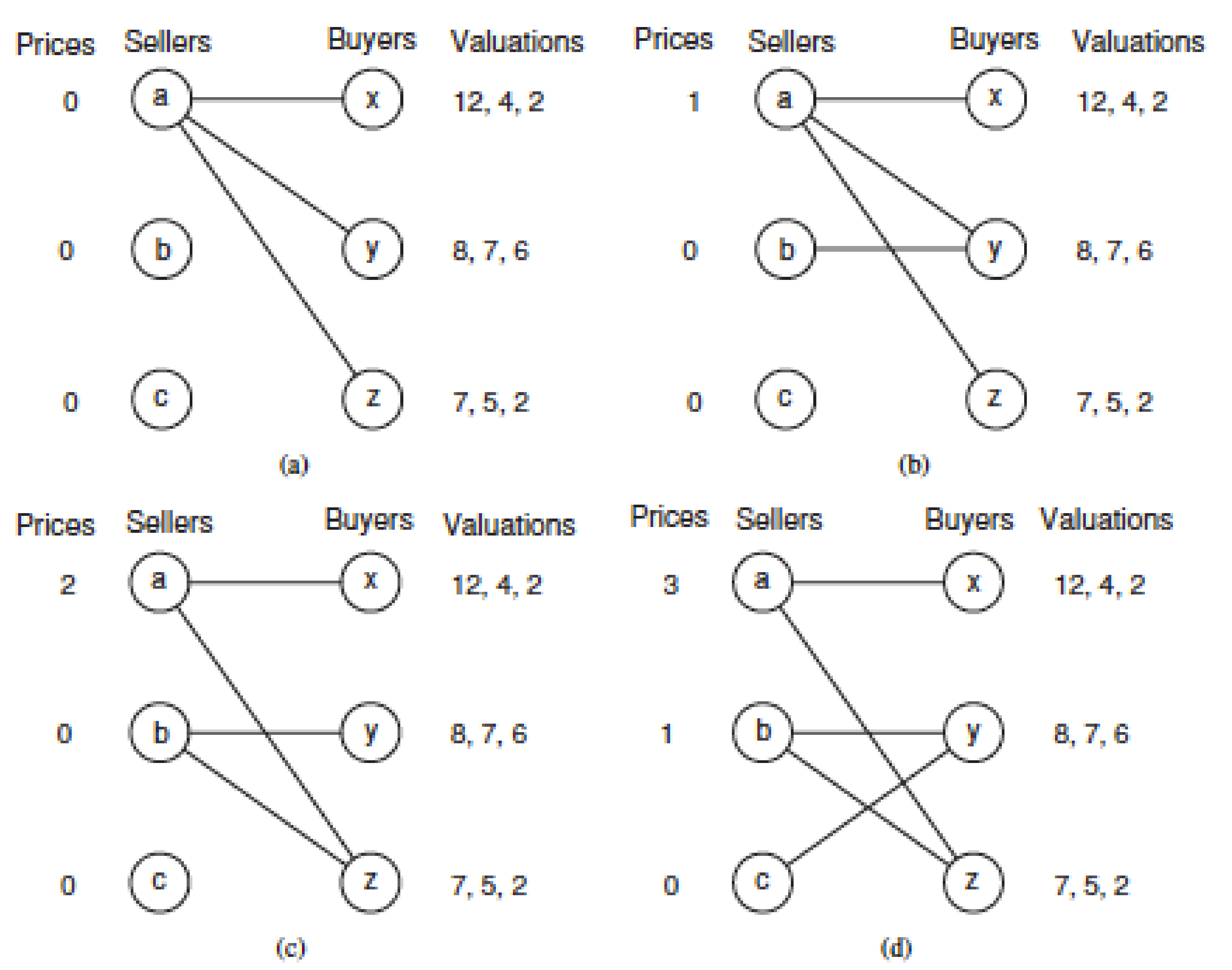
- “最优”的含义→社会最优。在任何可能的买卖配对安排下：
  - 买家群体可实现的估值之和最大。等价于：
  - 所有卖家收益之和＋所有买家收益之和 最大
    - 这是因为：一个卖家的收益＝价格
    - 一个买家的收益＝购得物品的估值－所支付的价格
- 断言：在市场协调机制下
  - 对于任何买家的估值组合，都存在一组市场清仓价格，亦即对应的偏好卖家图存在一个完美匹配

市场清仓价格的形成：算法

- 卖方从（0,0,...,0）开始，按照轮次进行下述：
  - 构造偏好卖家图
  - 识别一个买方受限组（S），若没有，则存在完美匹配，结束。
  - 将受限组对应的卖方集合N(S)中的价格都＋1（也就是根据需求调整价格，“物以稀为贵”）
    - 若因此使所有价格都 >0，则统一约减最低价至0。
  - 开始下一轮

（市场清仓价格形成的过程类似于拍卖过程）

类拍卖过程促成市场清仓



在这个过程中，偏好卖家图不断被调整，最终结束在在一个含有完美匹配的图上

这个过程为什么一定能结束？

- 定义市场的势能：所有参与者潜在回报之和
  - 卖方：价格，$a_1, a_2, \ldots, a_n$；
  - 买方(i)：最大的“估值减去价格”，$\max (v_{ij}-a_j)$
- 势能初值（a=0）：

$$P_0 = \sum_{i=1\ldots k} \max_{j=1\ldots k}(v_{ij}-a_j)+\sum_{j=1\ldots k} a_j = \sum_{i=1\ldots k} \max_{j=1\ldots k}(v_{ij}) > 0$$

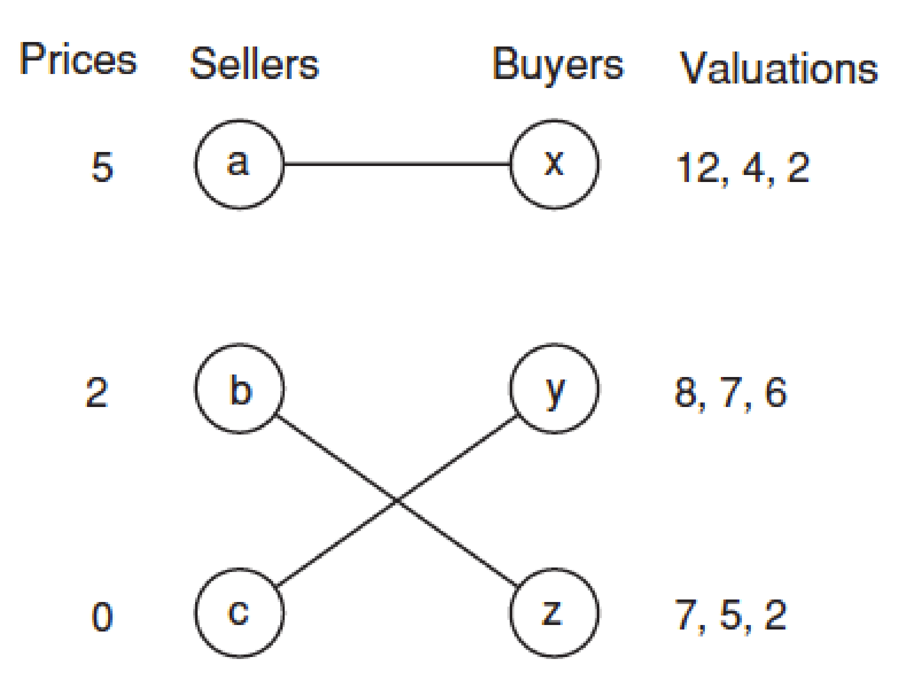
我们如果能说明在上述过程中，（1）势能每一轮单调减，（2）但总不会小于0；则就说明了过程一定结束。“结束”＝“无受限集”。

这个过程为什么一定结束？（续）

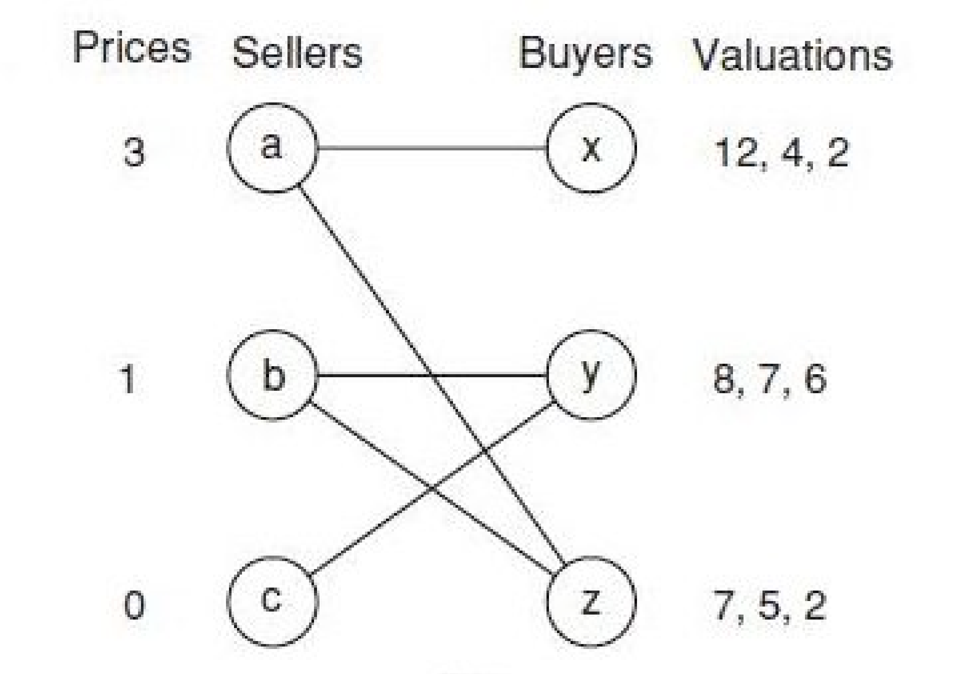
$$P = \sum_{i=1...k} \max_{j=1...k}(v_{ij} - a_j) + \sum_{j=1...k} a_j$$

- 观察势能在每一轮的变化，设买卖双方各有K人。可见只有价格a的变化会引起势能的变化。
- 在操作过程中有两处会引起a的变化
  - （1）因受限集S造成的N(S)中元素价格＋1
  - （2）统一约减a至最小价格为0
- 可见
  - 卖方势能之和，（1）增加N(S)，（2）减少K
    - 但总保持是≥0
  - 买方势能之和，（1）减少S>N(S)，（2）增加K
    - 结果也总是≥0（因为v≥0，且算法过程保证了总存在一个a=0）
- 于是市场势能在每轮都单调递减，且下界为0。

清仓价格的不唯一性



(b)

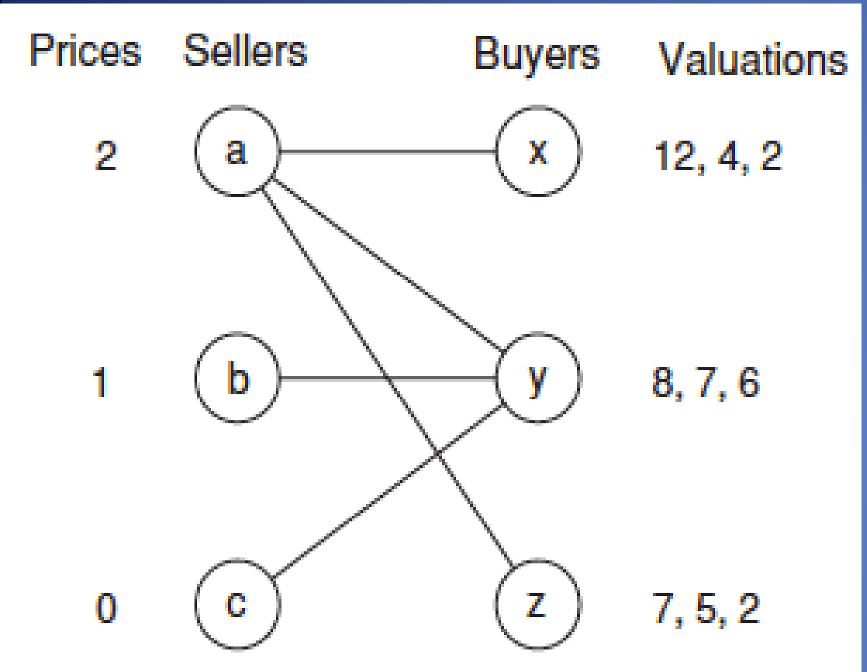


(d)

- 但都是“社会最优”（12＋6＋5＝23）

再来看求矩阵不同行列元素最大和的问题

$$P=\sum_{i=1\dots k}\max_{j=1\dots k}(v_{ij}-a_j)+\sum_{j=1\dots k}a_j$$



(c)

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

- 给定一个N＊N矩阵（A），从中选择N个不同行不同列元素，a_{ij}（即i，j分别在｛1，2，…，N｝中遍历），使得和最大。
- 可不可以利用前述算法来得到结果？复杂性如何？

作业

- 第10章，第3，5题