图论作业1

5.在一次集会中，相互认识的人会彼此握手，试证明：与奇数个人握手的人数是偶数个。

证明：设集会上的人一共有m个，可分为两部分，一部分为与奇数个人握手的人，设为x个，另一部分为与偶数个人握手的人，为m-x个。

由于握手是相互的，即一次握手，两个人握手的次数都加1，一共加2，因此，集会上所有人的握手次数之和为偶数。

与偶数个人握手的人，这些人的握手次数之和为（其中，都是偶数），为偶数。

与奇数个人握手的人，这些人的握手次数之和为（其中，为基数），由于所有人的握手次数之和偶数，因此也要为偶数，即

又因为



即，因此x为偶数，即与奇数个人握手的人是偶数个，得证。

6.证明：图下面的两个图同构。

证明：首先，给这两幅图标上对应的结点编号，如下



两个图的结点和边的数目都相同。假设函数，左图中相邻的结点是1和4，1和5，1和6，2和4，2和5，2和6，3和4，3和5，3和6，对应的像点1’和4’，1’和2’，1’和6’，5’和4’，5’和2’，5’和6’，3’和5’，3’和2’，3’和6’在右图中也相邻，因此，两图同构。

7.证明：在任意六个人中，若没有三个人彼此认识，则必有三个人彼此都不认识。

证明：分三种情况：

（1）任何一个人最多认识另外一个人

将相互认识的两个人分成一组，则至少可以分3组，每组取一个人，则这三个必不认识。

（2）任何一个人最多认识另外两个人

最糟糕的情况是当每个人都认识另外两个人时，若认识的人之间画一条线可以构成一个六边形，取不相邻的三个点即是不认识的。

（3）任何一个人最多认识另外的三个人



不妨设点A与B,C,E认识（用实线连接）。因为B,C,E之间只有有两个人认识就不满足任何三个人都不认识的条件，比如B,C认识画一条实线，那么A,B,C就相互认识，与已知矛盾。所以B,C,E是所求的三个互补认识的人。

（4）任何一个人最多认识两外4或5个人

该情况与（3）类似，所求的人即与A认识的两外4或5个人中的三个人。

证毕。

8.证明：下面的两个图不同构。

证明：给这两幅图标上对应的结点编号，如下：



两个图的点数和边数相同。假设函数：



易证：① a）中的子图，，，与b）中的子图，，，同构。

② a）中的子图，，，与b）中的子图，，，，同构。

除这两个子图以外，对应a）中的子图，，，在b）无中对应的同构图。因此a）和b）两个图不同构。

9．图下面的两个图是否同构？说明理由。



解：对于图b）中的点，其出度为：，入度：。而在a)图中不存在这样的结点。因此这两个图不同构。

10．证明：任何阶大于1的简单无向图必有两个结点的度数相等。

证明：考虑一个有n个结点的连通图（如果有一个孤立结点，去掉孤立结点考虑联通子图）。因为是无向连通图，每个结点的最大度数是n-1，最小度数是1。即对n个点赋值，共n-1种取值，由抽屉原理，必有两个结点的取值相同，即必有两个点的度数相同。

11．设n阶无向图G有m条边，其中个结点的度数为k，其余结点的度数为k+1，证明：。

证明：由题意，结点数为n，由总边数建立关系：

，由此可得：。