图论作业3

习题7.3

3．考虑图7.3.7

（1）对于每个结点，求。

解：





（2）找出所有强分支、单向分支和弱分支。

解：强分支7个，分别是

单项分支4个，分别是

弱分支3个，分别是

5. 证明：有向图的每个结点和每条边恰处于一个弱分支中。

反证法：若任意结点V处于两个或两个以上的弱分支中，不妨设两个弱分支为G1, G2, 则G1, G2是G的极大联通子图。设，又,故联通。这与G1, G2是极大联通子图矛盾，故命题得证。

6. 有向图的每个结点（每条边）是否恰处于一个强分支中？是否恰处于一个单向分支中？

解：有向图中的每个结点处于一个强分支中，而边不一定。有向图的结点和边可能出现在两个单向分支中

10. 设G是弱联通有向图，如果对于G的任意结点v, ,则G恰有一条有向回路。试给出证明。

证明：因为G是弱联通有向图，不妨设一条极大单向联通子图：



因为: , 所以对，。若，则与极大联通子图矛盾，故V必为之一。

又假设有两条以上的回路（反证法），不妨设有两条，则这两条回路上所有点的出度为1，而要使这两条回路联通，则至少其中有一个点的出度大于1，这与矛盾。故G恰有一条会向回路。

11. 证明：有k个弱分支的n阶简单有向图至多有条边。

证明：由于是弱分支，故分支之间不存在边。因此，假设每个分支的结点数为

那么最大边数为

12. 证明非连通简单无向图的补图必连通。

证明:对补图中的任意结点a，b进行分析：

（1）若a，b在原图中不存在边，则在补图中，a与b之间存在边，a可以到达b

（2）若a，b在原图之间存在边，则必存在点c，使得在原图中，不存在ac与bc这两条边。反证：若不存在，则剩下n-2个点，要么与a连，要么与b连，那么图中至少存在n-2+1=n-1条边，这形成了树的结构，与连通图相矛盾。故在补图中，可以通过acb到达b，从而a可以到达b

综上，非连通简单无向图的补图必连通

13. 设G为n阶简单无向图，对G的任意结点v, ，证明G是联通的。

证明：



任取, 因为, 故至少存在个点与相连，最多还剩余（除去剩余的点）。故对于至少存在一个与连接的点与相连，因此与联通。由与选取的任意性，G联通。

15. 下图给出了一个加权图，旁边的数字是该边上的权，求出从到的加权距离。

解：



到的距离路径如上图红色线，加权距离为：2+1+3+1+1+1+2=11