图论作业5

习题7.6

6. 求图的最小生成树。

解：

8. 证明：任何二叉树有奇数个结点。

证明：在二叉树中，任何结点的出度不是0，就是2；假设出度为2的结点有x个，则该二叉树的出度之和为2x；设二叉树共有n个结点，这些结点中除了根结点的入度为0，其余结点的入度都为1，因此，所有结点的入度之和为n-1。由图的性质，可知二叉树的出度之和与入度之和相等。即n-1=2x， n=2x+1，因此，无论x如何取值，二叉树的结点总数n都是奇数。得证。

9. 证明：n阶二叉树的叶子结点数目为(n+1)/2，其高度h满足log2(n+1)-1≤h≤ (n-1)/2

证明：（1）在二叉树中，出度为0的结点是叶子结点，出度为2的结点是分支结点，设分支结点个数为x，由上题证明过程可知，n=2x+1, x=(n-1)/2。因此，叶子结点的个数为n-x=(n+1)/2。

（2）n阶二叉树的叶子结点有(n+1)/2个，分支结点有(n-1)/2个。利用(n-1)/2个结点构造一棵一元或二元树，设树高为m，则h=m+1。

考察(n-1)/2个结点构造的一棵一元或二元树，树高最大的情况是一元树，高度为(n-1)/2-1，因此，h最大值是(n-1)/2-1+1=(n-1)/2。

树高最小的情况是构造了一棵满二叉树，满二叉树的高度x和结点个数(n-1)/2满足关系2x+1-1=(n-1)/2，解得x=log(n+1)-2，因此h最小值是log(n+1)-1。因此，log2(n+1)-1≤h≤ (n-1)/2。

11. 找出叶的权分别为2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37和41的最优叶加权二叉树，并求其叶加权路径长度。

解：对于2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41，先组合两个最小的权2+3=5，得5,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41；在所得到的序列中再组合5+5=10，得10,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41；再组合10+7=17，得17,11,13,17,19,23,29,31,37,41；继续下去。。。。，过程如下：

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

5 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

10 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

17 11 13 17 19 23 29 31 37 41

17 24 17 19 23 29 31 37 41

24 34 19 23 29 31 37 41

24 34 42 29 31 37 41

34 42 53 31 37 41

42 53 65 37 41

42 53 65 78

95 65 78

95 143

238

所得到的最优二叉树如下图：



12. 找出下图给出的有向序森林所对应的二元有向有序树，并求其前缀编码。

解：



1： 2：0 3：01 4：011 5：0111

6：00 7：001 8：010 9：01110 10：011101

11：111011 12：1 13：10 14：101

15：100 16：1010 17：10101 18：11

19：110 20：1101 21：1100 22：11001

23：11010 24：110101 25：11000 26：110001

27：1101010 28：11010101