第一次作业

第二章

1. 图论作为有效建模工具的原因之一在于它的灵活性。许多大型系统都可以通过图论语言来形式化系统的性质，并用来系统地研究其结构。本章练习的第一部分，主要讨论上述过程的一个实例，该实例将引入关键节点（pivotal node）的概念。

首先，第2章所讲的两节点间最短路径对应该节点间的最短距离。对于节点Y和Z，若X存在于Y和Z间所有最短路径上，则称X为Y和Z间的关键节点（X与Y和Z均不重合）。

例如，在图2.13中，节点B是节点对A和C，A和D的关键节点（注意：B并不是节点D和E的关键节点，因为D和E间存在两条不同的最短路径，而其中的一条（包含C和F）并不通过B。由此可见，B并不位于D和E间的所有最短路径之中）。另一个例子是：节点D并非图中任意节点对的关键节点。

1. 请例举一个图例，使其满足以下条件：该图中每个节点均为至少一个节点对的关键节点。请就你的答案给出合理解释。
2. 请例举一个图例，使其满足以下条件：该图中每个节点均为至少两个节点对的关键节点。就你的答案给出解释。
3. 请例举一个图例，使其满足以下条件：该图中包含至少4个节点，并存在一个节点X，它是图中所有节点对的关键节点（不包括含X的节点组）。请给出合理解释。

答案：

关键节点：V-> WZ, W-> VX, X-> WY, Y-> XZ, Z-> VY

关键节点：V-> UW, UX, TW, 其他节点也同理可得到至少2个节点

关键节点: X-> AB, BC, CD, DA

1. 本题引入一组相关定义，以帮助我们规范化“一些节点可在网络中起到‘看门’的作用”这一概念，第一个定义内容如下：对于节点X，若存在另两个节点Y和Z，使Y和Z间的所有路径均通过X，则称X为门卫（gatekeeper）。例如，图2.14中，节点A即为一个看门节点，因为它位于节点B到E的所有路径中（除此之外，A还位于其他节点组间的所有路径中，如D和E等）。

该定义具有一个“普通”特点：因其需要我们纵观整个图，以确定某一特定节点是门卫。相比之下，另一“本地化”版本将上述定义的条件限定在只需观察一个节点的相邻节点。将其满足以下条件：存在节点X的两个相邻节点，称为Y和Z，其中间没有任意边相连（换句话说，X为局部门卫的前提是，至少存在X的两个相邻节点Y和Z，满足Y和Z分别有边与X相连，但彼此并不相连的条件）。如图2.14所示，节点A同时满足门卫和局部门卫的条件，而节点D仅为局部门卫，却不满足门卫的条件。注意：尽管D的两个相邻节点B和C彼此并没有边相连，但对于包括B和C在内的所有节点组之间均存在一条不包含D的路径。

综上所述，目前得到两个定义：门卫和局部门卫。每当讨论新的数学定义时，一个有效帮助理解定义的方法通常是：先从典型例子入手，随后将之理论化，再尝试将该理论应用于其他例子。请按以上方法来讨论下面几个问题：

1. 给出一个图例（包含解释），满足条件：该图中超过一般的节点为门卫。
2. 给出一个图例（包含解释），满足条件：该图中所有节点均不是门卫，但均为局部门卫。

答案：

B、C、D这3个节点是门卫；

4个节点都不是门卫（两个节点之间都有两条独立的通路）而是局部门卫（节点的两个邻居节点之间都不存在一条边）

1. 当试图一个已知图中节点间的距离寻找一个单一的综合衡量标准时，容易想到两个自然的指标。一个是直径，我们定义它为图中任意两节点之间的最大距离：另一个是平均距离，我们定义它为图中所有节点对间的平均距离。

在许多图中，上述两个量在数值上非常接近，但在有些图中它们可能相当不同。

1. 请给出一个直径比平均距离超过三倍的图例。
2. 请根据你解答问题（1）的方法，说明你可以构造直径比平均距离大任意倍数的图。（换句话说，对于任意数字c，你能否构造一个图，使其直径比平均距离超过c倍？）

答案：

N阶完全图