Procesado Digital de la Señal

Apuntes de clase

Javier Rodrigo López [1]

17 de junio de 2021

[1] Correo electrónico: javiolonchelo@gmail.com

UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID

Introducción

Imagen de la portada: *La fragua de Vulcano*, por Diego Velázquez.

Profesores del grupo G6T2TL:

- César Díaz Martín
- Eduardo Latorre Iglesias

Metodología

- Teoría
  - 13 semanas x 2h + 1 semana x 2h
  - Evaluación continua: 3 test de 30 minutos cada uno
- Laboratorio
  - 2 exámenes
  - 5 prácticas

Evaluación

Asistencia no obligatoria (pero recomendada) Sin nota mínima en ningún apartado.

	Evaluación continua
Teoría 70 %	Test 1 (4 %)
	Test 2 (6 %)
	Test 3 (10 %)
	Examen final (50 %)
Laboratorio 30 %	(5 %)
	(10 %)
	(15 %)

Conocimientos previos

- Operaciones con números complejos
  - Conversión de formatos (parte real-imaginaria y módulo-fase)
  - Fórmula de Euler y exponenciales complejas
- Conceptos matemáticos
  - Representación de funciones complejas (módulo y fase)
  - baia la cabaia
- Señales y Sistemas

Lista de tareas

1. Cambiar el índice según la asignatura.
2. Organizar los PDFs descargados.
3. Mirar calendario para cuadrar laboratorios.
4. Incluir lo que falta de los conocimientos previos.
5. Descargar bibliografía.
6. Descargar exámenes y resto del material.
7. Añadir ejemplos diapositiva 9-10.

Índice general

Transformada de Fourier y Muestreo

0.1 Introducción a la Transformada de Fourier

La transformada de Fourier nos servirá para representar señales como combinación lineal de unos ciertos componentes o señales básicas.

La aplicación fundamental del análisis de Fourier es el estudio de las señales en el dominio de la frecuencia (**dominio espectral**).

El análisis de Fourier se puede realizar para:

- Señales continuas:
  - Periódicas: Serie de Fourier de tiempo continuo
  - No periódicas: Transformada de Fourier en tiempo discreto
- Señales discretas

0.2 Series de Fourier de señales periódicas

Sea $x(t)$ una señal periódica, de periodo T_o. Esta señal puede expresarse como una combinación lineal de exponenciales complejas (serie de Fourier).

La **ecuación de síntesis** es la siguiente:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_o t} \tag{0.1}$$

Los pesos a_k se denominan **coeficientes espectrales** y determinan qué cantidad de energía reside en cada frecuencia. Se calculan mediante la **ecuación de análisis**:

Notas.

- Coeficientes hermíticos
- baia la cabaia

Añadir ejemplos para el seno y el coseno (se hace mediante la fórmula de Euler).

0.2.A. Fenómeno de Gibbs

En una señal que necesite infinitos coeficientes de Fourier para ser representada de forma exacta, al coger solo un conjunto de los coeficientes se produce un rizado.^{en} ciertos puntos de la señal, con amplitud independiente del número de coeficientes escogidos. Esto es el fenómeno de Gibbs

0.3 Transformada de Fourier para señales no periódicas

Si tenemos una señal no periódica. Si intentamos hacerla periódica repitiéndola cada T y luego hacemos que este tiempo T tienda a infinito, tenemos la transformada de Fourier.

AÑADIR FÓRMULAS Ecuación de síntesis (transformada de Fourier inversa) Ecuación de análisis

0.3.A. Propiedades de la transformada de Fourier

HAY QUE EXPLICARLAS

Propiedad de convolución: Convolución en el tiempo es multiplicación en frecuencia.

Propiedad de modulación: Multiplicación en el tiempo es convolución en frecuencia.

Añadir ejemplo

0.4 Transformada de Fourier de señales periódicas

La transformada de Fourier de una señal periódica es una combinación lineal de deltas.

EJEMPLO IMPORTANTE (en este ejemplo se basa el muestreo) Se calcula a_k

0.4.A. Algunos pares transformados

La transformada de un pulso siempre es una sinc. La transformada inversa de una sinc siempre es un pulso.

TEMA 1. Procesado digital de señales analógicas

1.1 Tipos de señal

1.1.A. Señales continuas

En una señal periódica, podemos obtener el **periodo** como el mínimo común múltiplo de los periodos de sus componentes. Un ejemplo:

$$x(t) = 3\,\mathrm{sen}\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(10\pi t\right)\ ; \qquad \omega_1 = 5\pi\,, \quad \omega_2 = 10\pi$$

$$T = \mathrm{mcm}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\,,\,\frac{2\pi}{\omega_2}\right) = \mathrm{mcm}\left(\frac{2\pi}{5\pi}\,,\,\frac{2\pi}{10\pi}\right) = \mathrm{mcm}\left(\frac{2}{5}\,,\,\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}\,\mathrm{mcm}\left(2\,,1\right) = \boxed{\frac{2}{5}\ \mathrm{s}}$$

1.1.B. Señales discretas

El **periodo** de una señal discreta se obtiene de forma similar a las señales continuas. Sin embargo, cuando el resultado es una fracción el periodo se calcula como el numerador de dicha fracción.

Siguiendo con el ejemplo anterior, a partir de la última fracción obtenida:

$$\frac{N}{m} = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{N = 2}$$

1.2 Filtros

Un **filtro** es cualquier sistema que modifica la forma de la señal, tanto en su amplitud como en su fase, del modo deseado. Los catalogamos como **FIR**[1] o **IIR**[2], en función de su respuesta al impulso.

Hablaremos de ellos con profundidad en el Tema 3.

1.3 Estructura de un sistema PDS

A continuación, se encuentra representado el esquema general de un sistema PDS:

Figura 1.1. Esquema de un sistema PDS

[1]FIR ≡ *Finite Impulse Response.*
[2]IIR ≡ *Infinite Impulse Response.*

1.4 Muestreo

Para realizar el muestreo de una señal sin que se produzca aliasing[3] debemos asegurar que se cumple el **Teorema de Nyquist**

Este dice que la frecuencia de muestreo debe ser, al menos, el doble de la frecuencia máxima de la señal a muestrear[4]:

$$w_s \geq 2w_m$$

1.5 Sistemas equivalentes. C/D y D/C)

Para trabajar con sistemas continuos y discretos, se deben establecer unos criterios de equivalencia. En resumidas cuentas, los sistemas equivalentes se basan en la siguiente característica:

$$H_D\left(e^{j\omega}\right) = H_C\left(j\omega\right)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T_s}}$$

Ejemplo 1. Obtenga el sistema discreto que permite implementar el siguiente sistema LTI continuo:

$$H_C\left(j\omega\right) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

<u>**Solución**</u>

$$H_D\left(e^{j\omega}\right) = H_C\left(j\omega\right)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T_s}} = H_C\left(j\frac{\Omega}{T_s}\right) \quad , |\Omega| < \pi$$

$$H_D\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1 & , \left|\frac{\Omega}{T_s}\right| < \omega_c \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 1 & , |\Omega| < \omega_c T_s < \pi \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}}$$

Siempre y cuando se cumpla que $\omega_s \geq 2\omega_c$, podré emular en todo el rango de frecuencias de interés $H_c\left(j\omega\right)$

Ejemplo 2. Encuentre el sistema discreto que permite implementar un diferenciador en tiempo continuo cuya relación entrada/salida es $y_c(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_c(t)$ entre $-\frac{\omega_s}{2}$ y $\frac{\omega_s}{2}$.

<u>**Solución**</u>

1.6 ADC reales. Cuantificación

1.7 Cambio de la velocidad

[3] El *aliasing* es el solapamiento espectral no intencionado. Es producido por el submuestreo.

[4] El subíndice "s" viene de *sampling* (en inglés, muestreo). El subíndice "m" viene de *max*.

TEMA 2. La Transformada Discreta de Fourier (DFT)

2.1 Introducción

Hay algunas cosas importantes que debemos recordar sobre la Transformada Discreta de Fourier:

- La TF de una señal discreta es **periódica**, de periodo 2π.

2.2 Definición, cálculo, relaciones y propiedades

2.2.A. TF para señales periódicas

Ecuación de síntesis

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Ecuación de análisis

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

DFT

Sea $x[n]$ una señal periódica de periodo N:

$$x[n] =$$

Podemos calcular su TF como:

$$\text{TF}\left\{x[n]\right\} = X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=<N>} a_k \cdot \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

2.3 Introducción al análisis espectral mediante la DFT

2.4 Filtrado de señales mediante la DFT

2.5 Ejercicios resueltos

Calcular los coeficientes a_k de la señal indicada a continuación:

$$x[n] = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

TEMA 3. Diseño de filtros digitales

3.1 Introducción

3.2 Diseño de filtros FIR

3.3 Diseño de filtros IIR

3.4 Comparación entre métodos de diseño y tipos de filtros

3.5 Estructuras para la implementación de filtros digitales