

# Procesado Digital de la Señal

Apuntes de clase

Javier Rodrigo López <sup>1</sup>

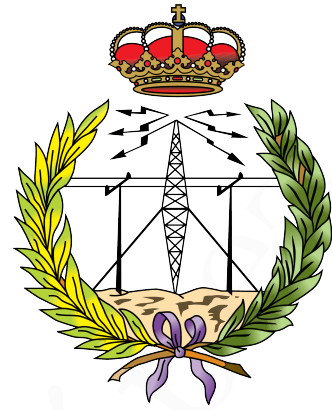
21 de junio de 2021



<sup>1</sup>Correo electrónico: [javiolonchelo@gmail.com](mailto:javiolonchelo@gmail.com)



UNIVERSIDAD  
POLITÉCNICA  
DE MADRID



## Introducción

---

Imagen de la portada: *La fragua de Vulcano*, por Diego Velázquez.

Las clases en las que se basan estos apuntes fueron impartidas por:

- César Díaz Martín
- Eduardo Latorre Iglesias

# Índice general

Introducción . . . . .	1
<b>1. Transformada de Fourier y Muestreo</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción a la Transformada de Fourier . . . . .	3
1.2. Series de Fourier de señales periódicas . . . . .	3
1.3. Transformada de Fourier para señales no periódicas . . . . .	3
1.4. Transformada de Fourier de señales periódicas . . . . .	3
<b>2. Procesado digital de señales analógicas</b>	<b>4</b>
2.1. Tipos de señal . . . . .	4
2.2. Filtros . . . . .	4
2.3. Estructura de un sistema PDS . . . . .	4
2.4. Muestreo . . . . .	5
2.5. Sistemas equivalentes. C/D y D/C . . . . .	5
2.6. Cambio de velocidad de muestreo . . . . .	6
2.7. Aspectos prácticos . . . . .	6
<b>3. Transformada Discreta de Fourier: DFT</b>	<b>9</b>
3.1. Definición, cálculo, relaciones y propiedades . . . . .	9
3.2. Introducción al análisis espectral mediante la DFT . . . . .	10
3.3. Filtrado de señales mediante la DFT . . . . .	11
3.4. Ejercicios resueltos . . . . .	11
<b>4. Diseño de filtros digitales</b>	<b>12</b>
4.1. Introducción . . . . .	12
4.2. Diseño de filtros FIR . . . . .	12
4.3. Diseño de filtros IIR . . . . .	12
4.4. Comparación entre métodos de diseño y tipos de filtros . . . . .	12
4.5. Estructuras para la implementación de filtros digitales . . . . .	12
<b>5. Ejercicios de examen resueltos</b>	<b>13</b>

# TEMA 1.

## Transformada de Fourier y Muestreo

### 1.1 Introducción a la Transformada de Fourier

---

### 1.2 Series de Fourier de señales periódicas

---

#### 1.2.1. Fenómeno de Gibbs

En una señal que necesite infinitos coeficientes de Fourier para ser representada de forma exacta, al coger solo un conjunto de los coeficientes se produce un “rizado” en ciertos puntos de la señal, con amplitud independiente del número de coeficientes escogidos. Este suceso es lo que se conoce como **fenómeno de Gibbs**.

### 1.3 Transformada de Fourier para señales no periódicas

---

#### 1.3.1. Propiedades de la transformada de Fourier

### 1.4 Transformada de Fourier de señales periódicas

---

## TEMA 2.

# Procesado digital de señales analógicas

## 2.1 Tipos de señal

---

### 2.1.1. Señales continuas

En una señal periódica, podemos obtener el **periodo** como el mínimo común múltiplo de los periodos de sus componentes. Un ejemplo:

$$x(t) = 3 \sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos(10\pi t); \quad \omega_1 = 5\pi, \quad \omega_2 = 10\pi$$
$$T = \text{mcm}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}\right) = \text{mcm}\left(\frac{2\pi}{5\pi}, \frac{2\pi}{10\pi}\right) = \text{mcm}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \text{mcm}(2, 1) = \boxed{\frac{2}{5} \text{ s}}$$

### 2.1.2. Señales discretas

El **periodo** de una señal discreta se obtiene de forma similar a las señales continuas. Sin embargo, cuando el resultado es una fracción el periodo se calcula como el numerador de dicha fracción.

Siguiendo con el ejemplo anterior, a partir de la última fracción obtenida:

$$\frac{N}{m} = \frac{2}{5} \implies \boxed{N = 2}$$

## 2.2 Filtros

---

Un **filtro** es cualquier sistema que modifica la forma de la señal, tanto en su amplitud como en su fase, del modo deseado. Los catalogamos como **FIR**<sup>1</sup> o **IIR**<sup>2</sup>, en función de su respuesta al impulso.

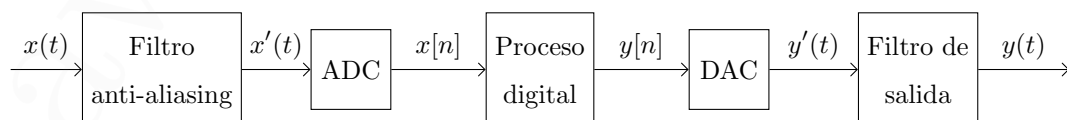
Hablaremos de ellos con profundidad en el Tema 4.

## 2.3 Estructura de un sistema PDS

---

A continuación, se encuentra representado el esquema general de un sistema PDS:

**Figura 1.** Esquema de un sistema PDS



---

<sup>1</sup>FIR  $\equiv$  *Finite Impulse Response*.

<sup>2</sup>IIR  $\equiv$  *Infinite Impulse Response*.

## 2.4 Muestreo

El muestreo es la recogida de muestras temporalmente equiespaciadas de una señal analógica para conformar una señal discreta.

### 2.4.1. Teorema de Nyquist

Para realizar el muestreo de una señal sin que se produzca aliasing<sup>3</sup> debemos asegurar que se cumple el **Teorema de Nyquist**. Este afirma que la frecuencia de muestreo debe ser, al menos, el doble de la frecuencia máxima de la señal a muestrear<sup>4</sup>:

$$w_s \geq 2w_m$$

Un ejemplo curioso es el caso de los CDs de audio. Como los humanos somos capaces de escuchar hasta 20 kHz (aproximadamente), los CDs tienen una frecuencia de muestreo un poquito mayor al doble de esta: 44.1 kHz.

### 2.4.2. Evitar solapamiento

Sabiendo que si no se cumple el teorema de Nyquist (debido al submuestreo) podemos llegar a experimentar solapamiento espectral, tenemos dos alternativas para enfrentarnos a este problema.

- **Aumentar la frecuencia de muestreo.** Es la opción más directa y sencilla. Sin embargo, muchas veces los sistemas que usemos serán limitados. Esta no es una opción que siempre podamos usar.
- Utilizar un **filtro anti-solapamiento**. El uso de un filtro paso bajo con frecuencia de corte  $\omega_c = \omega_s/2$  asegura el procesado de la señal limpia. En la práctica, la pérdida de señal es menos perjudicial que los efectos del aliasing.

### 2.4.3. Teorema del muestreo discreto

Para evitar el solapamiento espectral, se debe cumplir:

$$Q \leq \frac{\pi}{\Omega_m}$$

Donde  $Q$  es el número de réplicas que caben en el espectro de la señal a muestrear. En otras palabras,  $Q$  es el **orden de diezmado**.

### 2.4.4. Teorema de la interpolación

Sea  $x[n]$  una señal discreta a la que queremos realizar interpolación de orden  $P$ , la señal interpolada resultante tendrá la forma:

$$x_P[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{P}\right] & \text{si } n = \dot{P} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Lo que se traduce en posicionar  $P - 1$  ceros entre cada muestra de la señal original.

Es importante saber que una expansión en el tiempo conlleva una compresión en frecuencia.

## 2.5 Sistemas equivalentes. C/D y D/C

Para trabajar con sistemas continuos y discretos, se deben establecer unos criterios de equivalencia. En resumidas cuentas, los sistemas equivalentes se basan en la siguiente característica:

$$H_D(e^{j\omega}) = H_C(j\omega) \Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T_s}}$$

- La propiedad de **invarianza temporal** surge de la relación entre el tiempo continuo y el tiempo discreto:  $t = nT_s$

<sup>3</sup>El *aliasing* es el solapamiento espectral producido por el submuestreo.

<sup>4</sup>El subíndice “s” viene de *sampling* (en inglés, muestreo). El subíndice “m” viene de *max*.

- Cuando introducimos una señal continua  $x(t)$  en un conversor C/D, la señal discreta que tenemos a la salida resulta escalada en un factor  $\frac{1}{T_s}$  con respecto a  $x(t)$ . Si te surgen dudas, mira en la tabla de transformadas y propiedades de la DFT.

**Ejemplo 1.** Obtenga el sistema discreto que permite implementar el siguiente sistema LTI continuo:

$$H_C(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

**Solución**

$$H_D(e^{j\omega}) = H_C(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T_s}} = H_C\left(j\frac{\Omega}{T_s}\right) \quad , |\Omega| < \pi$$

$$H_D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , \left|\frac{\Omega}{T_s}\right| < \omega_c \\ 0 & , \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} 1 & , |\Omega| < \omega_c T_s < \pi \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

Siempre y cuando se cumpla que  $\omega_s \geq 2\omega_c$ , podré emular en todo el rango de frecuencias de interés  $H_c(j\omega)$

## 2.6 Cambio de velocidad de muestreo

El cambio de velocidad de muestreo (también denominado procesado multitasa) pretende obtener a partir de una señal discreta otra señal discreta con diferente frecuencia de muestreo.

### 2.6.1. Expansor y Compresor

Un **expansor** es un elemento que realiza la interpolación. Un **compresor** es un elemento que realiza el diezmado. Sin embargo, este último lo consigue en dos pasos:

- Muestreo con  $T_s = Q$ .
- Supresión de  $Q - 1$  ceros (lo opuesto a la interpolación).

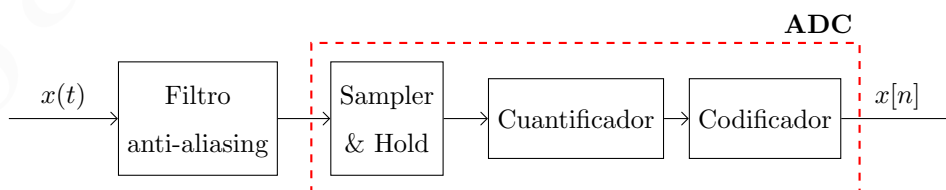
En un sistema real, lo preferible es hacer uso del expansor antes que el compresor.

## 2.7 Aspectos prácticos

El proceso de muestreo y reconstrucción de una señal nunca es ideal. Se producirán errores, que pueden ser minimizados en función de los parámetros que escojamos en cada proceso.

El **ADC** agrupa el conjunto de operaciones que nos permite convertir una señal de entrada continua en una señal analógica.

**Figura 2.** Etapa de entrada ADC



### 2.7.1. Filtro antialiasing

Para evitar el aliasing, debemos usar un filtro paso bajo que, idealmente, tendría la siguiente forma:

$$H_{aa}(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Sin embargo, en la realidad es muy complicado implementar un filtro de este estilo. La solución alternativa es el **sobremuestreo**. Si conseguimos  $\omega_s \gg 2\omega_m$ , podemos implementar un filtro que no altere demasiado la información a filtrar.

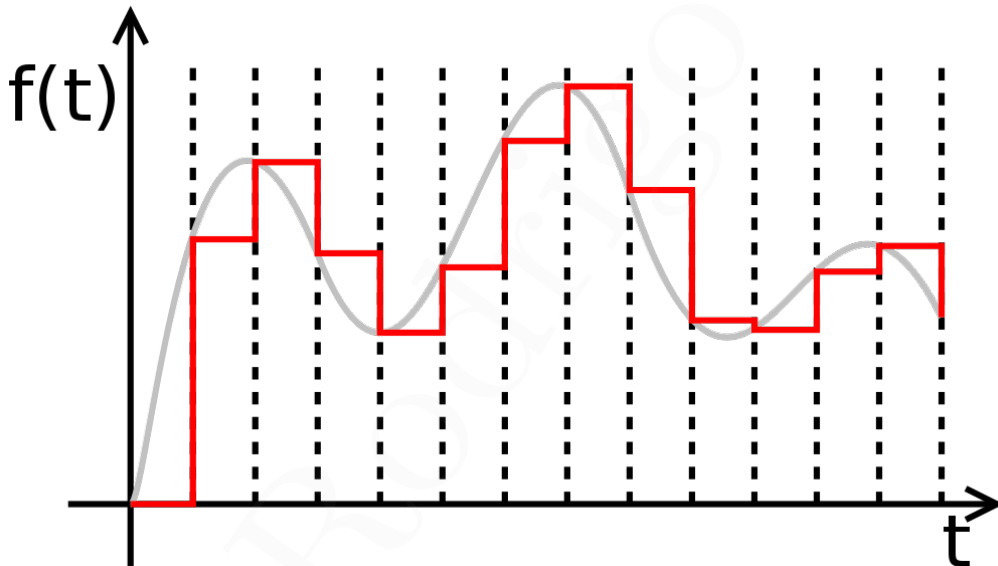
Se define entonces la **tasa de sobremuestreo**  $R$  como:

$$R = \frac{\omega_s}{2\omega_m}$$

### 2.7.2. Sampler & Hold

Este circuito sirve para seleccionar ciertas muestras equiespaciadas en el tiempo de una señal continua dada y mantener su valor hasta obtener la siguiente muestra.

**Figura 3.** Ejemplo de señal procesada por un circuito Sampler & Hold



### 2.7.3. Cuantificador y Codificador

Un cuantificador es una etapa que asigna a cada valor leído en su entrada un valor binario de  $n$  bits, de modo que puede leer  $2^n$  valores diferentes (que se corresponden con los escalones proporcionados a la salida del Sampler & Hold).

Puedes ver un ejemplo del procesamiento de una señal a través de un cuantificador uniforme en la [Figure 4](#).

#### Error de Cuantificación

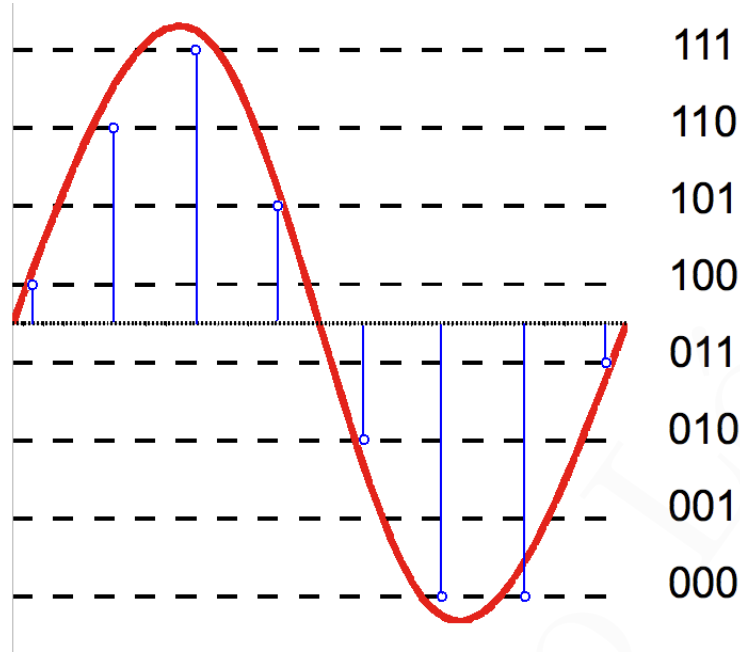
Para tratar con el ruido en estos sistemas, vamos a suponer que sigue el modelo estadístico del ruido:

- El error es un proceso estocástico estacionario.
- La secuencia  $e[n]$  está incorrelada con  $x[n]$ .
- El error es un proceso de ruido blanco.
- La función densidad de probabilidad (FDP) del error es uniforme entre  $-\Delta/2$  y  $+\Delta/2$ .

Estas suposiciones se cumplen si la señal a tratar es complicada, fluctuando de manera rápida e impredecible, y si el escalón de cuantificación es suficientemente pequeño.

Podemos calcular varias cosas a partir de esto.



**Figura 4.** Ejemplo de señal procesada en un cuantificador uniforme.

- Potencia del error.

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_m^2}{12 \cdot 2^{2b}}$$

- Relación señal a ruido (SNR)

$$\begin{aligned} \text{SNR(dB)} &= 10 \log \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) \\ &= 10 \log(12) + 10 \log(2^{2b}) + 10 \log \left( \frac{\sigma_x^2}{x_m^2} \right) \\ &= \boxed{10.79} + \boxed{6.02 \cdot b} + \boxed{20 \log \left( \frac{x_m}{\sigma_x} \right)} \end{aligned}$$

## TEMA 3.

# Transformada Discreta de Fourier: DFT

### 3.1 Definición, cálculo, relaciones y propiedades

---

#### Ecuación de análisis

---

$$X_K = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{M} Kn}, \quad K = 0, 1, \dots, M-1$$
$$\Omega = 0, \frac{2\pi}{M}, \frac{4\pi}{M}, \dots, 2\pi - \frac{2\pi}{M}$$

#### Ecuación de síntesis

---

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{M} \sum_{K=0}^{M-1} X_K e^{j \frac{2\pi}{M} Kn}$$

#### 3.1.1. Conversión a secuencia discreta

La conversión de la DFT de una señal a una secuencia discreta se realiza con la simple relación  $\Omega = \omega T_s$ , adaptándola según necesitemos. A continuación, la forma de llevarlo a la práctica:

$$X(\omega) = X(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T_s} \quad X(\Omega) = X(\omega) \Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T_s}}$$

La TF de una señal discreta es una señal continua periódica. Sin embargo, para operar con las frecuencias en el terreno digital es mucho más cómodo realizar un muestreo de la misma.

La **DFT** es simplemente un muestreo realizado entre 0 y  $2\pi$  de  $M$  muestras, siendo  $M$  el orden de la DFT<sup>1</sup>.

Este muestreo se realiza de una forma completamente diferente a como lo hacíamos en un ADC. Si recuerdas, la TF surgía como una serie de Fourier de una señal cuando su periodo tendía a infinito. De forma análoga, podemos obtener realizar el desarrollo en series de Fourier de una señal no periódica si forzamos su repetición, de modo que su nuevo periodo sea  $N = M$ .

$$a_k = \frac{1}{M} X(\Omega) \Big|_{\Omega=k \frac{2\pi}{M}}$$

Suponemos que la señal  $x[n]$  tiene  $L$  muestras, podemos tener dos situaciones:

■ **Sobremuestreo:**  $M \geq L$

■ **Submuestreo:**  $M < L$

Cuando se realiza un submuestreo, no se puede recuperar la señal original una vez hayamos calculado la DFT, cosa que no sucedería si se realizara un sobremuestreo.

Sin embargo, en ambas situaciones se puede realizar la DFT. Simplemente debemos saber lo que conlleva.

---

<sup>1</sup>Normalmente se denota como  $DFT^M$  para indicar directamente que la DFT es de orden  $M$ .

### 3.1.2. Cálculo matricial

Es más sencillo obtener la DFT realizando el **cálculo matricial de la DFT**:

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[F] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0 \cdot 0} & W^{0 \cdot 1} & \dots & W^{0 \cdot F} \\ W^{1 \cdot 0} & W^{1 \cdot 1} & \dots & W^{1 \cdot F} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^{F \cdot 0} & W^{F \cdot 1} & \dots & W^{F \cdot F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \vdots \\ \tilde{x}[F] \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} W^{K \cdot n} &= e^{-j \frac{2\pi}{M} K n} \\ F &= M - 1 \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos realizar el **cálculo matricial de la DFT inversa**:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \vdots \\ \tilde{x}[F] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{0 \cdot 0} & v^{0 \cdot 1} & \dots & v^{0 \cdot F} \\ v^{1 \cdot 0} & v^{1 \cdot 1} & \dots & v^{1 \cdot F} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{F \cdot 0} & v^{F \cdot 1} & \dots & v^{F \cdot F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[F] \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} v^{K \cdot n} &= \frac{1}{M} e^{j \frac{2\pi}{M} K n} \\ F &= M - 1 \end{aligned}$$

### 3.1.3. Convolución circular

Para que la convolución circular y la convolución lineal coincidan, es necesario que:

$$N \geq L + D - 1 \quad \Rightarrow \quad y[n] = x[n] \otimes h[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] \otimes h[n] & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

## 3.2 Introducción al análisis espectral mediante la DFT

### 3.2.1. Enventanado

En los sistemas reales, no podemos coger muestras infinitas de una señal. Al acto de escoger  $L$  muestras de la señal original se le denomina **enventanado**.

Se pueden modificar los parámetros según lo que se quiera conseguir. Algunas modificaciones que se pueden hacer:

- **Ancho del lóbulo principal.** Solo depende de  $L$ .

$$\uparrow L \quad \downarrow W \quad \uparrow \text{Tiempo de adquisición}$$

- **Ancho de los lóbulos secundarios.** Corresponde a las **fugas espectrales**, energía que aparece en frecuencias no deseadas. Solo depende del **tipo de ventana**.

A efectos prácticos, es como multiplicar la señal por una ventana rectangular de longitud  $L$ . Vamos a ver qué tipos de ventana podemos usar y qué efectos tienen en la DFT.

**Ventana rectangular**

- Lóbulo lateral a **13 dB** por debajo del lóbulo principal.
- La anchura del lóbulo principal se reduce a medida que se aumenta la longitud de la ventana.

$$w[n] = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

**Ventana de Hanning**

- Lóbulo lateral a **31 dB** por debajo del lóbulo principal.
- La anchura del lóbulo principal es aproximadamente el doble que en la ventana rectangular, y se reduce según aumenta  $L$ .

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{M+1}n\right) & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

**Ventana triangular o de Bartlett**

$$w[n] = \begin{cases} \frac{(M+1)-|n|}{(M+1)^2} & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

**Ventana de Hamming**

- Optimización de la ventana de Hanning.
- Lóbulo lateral a **41 dB** por debajo del lóbulo principal.
- Anchura del lóbulo principal igual que la Hanning.

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi}{M}n\right) & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

**3.3 Filtrado de señales mediante la DFT****3.4 Ejercicios resueltos**

Calcular los coeficientes  $a_k$  de la señal indicada a continuación:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

## TEMA 4.

# Diseño de filtros digitales

### 4.1 Introducción

---

### 4.2 Diseño de filtros FIR

---

### 4.3 Diseño de filtros IIR

---

### 4.4 Comparación entre métodos de diseño y tipos de filtros

---

### 4.5 Estructuras para la implementación de filtros digitales

---

## TEMA 5.

# Ejercicios de examen resueltos

**Ejemplo 2.** Enero de 2013. Problema 2. Se han muestreado, a sus frecuencias de Nyquist (el doble de la componente de frecuencia no nula de mayor frecuencia), dos señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  cuyos espectros de amplitud de muestran en las figuras 1 y 2.

Sabiendo que el sistema total (figura 3) trabaja en tiempo real, que los sistemas  $H_1(\Omega)$  y  $H_2(\Omega)$  son filtros ideales paso bajo con pulsaciones de corte  $|\Omega_{c1}| > 0$  y  $|\Omega_{c2}| > 0$  (respectivamente) por determinar, los sistemas  $A$  y  $B$  pueden ser bien un insertador de ceros bien un eliminador de muestras, y la señal de salida no presenta solapamientos espectrales, se pide:

- Identificar las características ideales de los sistemas  $A$ ,  $B$ , y  $H_1(\Omega)$  para que el sistema pueda funcionar en tiempo real.
- Representar, indicando valores, los espectros de las señales  $x_1[n]$ ,  $x_A[n]$ ,  $x_B[n]$ ,  $x_C[n]$ .
- Representar, indicando valores, los espectros de las señales  $x_2[n]$ ,  $x_F[n]$ ,  $x_M[n]$  en función de  $|\Omega_{c2}| > 0$  y  $H_2(\Omega)$ .
- Sabiendo que no deben producirse solapamientos espectrales en la señal de salida  $y[n]$ ; determinar el valor de  $\Omega_{c2}$  y representar el espectro de  $y_2[n]$ .

Otros datos:

- $w_{m1} = 20\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$
- $w_{m2} = 30\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

### Solución

- Para funcionar en tiempo real, los sistemas necesitan operar en la misma frecuencia de muestreo en el momento de la suma. Para evitar pérdida de información por aliasing, primero debería ir el expansor (con  $P = 3$ ) y luego el compresor (con  $Q = 2$ ). El sistema  $H_1(\Omega)$  tendrá una amplitud que compense el efecto del interpolador, por lo que será 3.

$$\frac{P}{Q} = \frac{w_{m2}}{w_{m1}} = \frac{3}{2} \quad \Omega_{c1} = \min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

- Hola
- Se hace igual que en el apartado a, pero sabiendo que:

$$(-1)^n = \cos(\pi n)$$

Esto simplifica enormemente los cálculos.