Vectores

Producto escalar

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{A}\perp\vec{B} \\ AB & \text{si } \vec{A}\parallel\vec{B} \\ k & \text{resto} \end{cases} \qquad 0<k<AB$$

Producto vectorial

Representa el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\,\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{n} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \vec{A}\parallel\vec{B} \\ AB\hat{n} & \text{si } \vec{A}\perp\vec{B} \\ k\hat{n} & \text{resto} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0<k<AB \\ \hat{n}\perp\vec{A}\perp\vec{B} \end{pmatrix}$$

$$\cdots = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\cdots = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

Producto mixto

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \text{Volumen del paralelepípedo}$$

Dinámica

Leyes de Newton

Cinemática

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

Primera Ley de Newton

En un sistema de referencia inercial, si ninguna fuerza externa actúa sobre un cuerpo, este se mantendrá en reposo o MRU.

$$\vec{v} = \text{constante} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0$$

Segunda Ley de Newton - Conservación del momento lineal

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Tercera Ley de Newton - Ley de acción-reacción

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Trabajo y energía

Fuerza de rozamiento	$\vec{F}_{\text{roz}} = \mu N$
Trabajo	$W = \int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \Delta E_c$
	$W_T = W_{\text{cons}} + W_{\text{no cons}}$
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia	$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

Conservación de la energía

Fuerzas conservativas

Si el trabajo entre dos puntos no depende del camino recorrido, entonces se trata de una fuerza conservativa. La energía mecánica es conservativa.

Energía mecánica	$E_m = E_c + E_p$
Energía potencial	$W_{A\to B} = -\Delta E_p$
Energía potencial gravitatoria	$E_{pg} = mgh$
Energía potencial elástica	$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$

Curvas de potencial y puntos de equilibrio

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$$

Los puntos de equilibrio cumplen:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0 \;\Leftrightarrow\; F = 0 \qquad \begin{cases} \text{eq. estable} & \text{si } \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} > 0 \\ \text{eq. inestable} & \text{si } \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} < 0 \end{cases}$$

Sólido rígido

Centro de masas	$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{M}$
Velocidad del centro de masas	$\vec{p} = M\vec{v}_{\text{CM}}$
Momento de fuerzas	$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$

Rotaciones entorno a un eje fijo

Momento angular	$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p}$
Momento de inercia	$I = \sum_{i=1}^N m_iR_i^2$
Energía cinética de rotación	$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$
Teorema de Steiner	$I = I_{\text{CM}} + Md^2$
	$I = \frac{1}{2}mR^2$
	$\omega = \frac{v}{R}$
Condición de rodadura	$E_c = \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2$

Oscilador armónico simple

Ley de Hooke	$F = -k\Delta x$
Energía del muelle	$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (= \text{cte.})$
Elongación	$\xi = x - x_{\text{eq}}$
Ecuación diferencial	$0 = m\ddot{\xi} + k\xi$
Solución 1	$\xi(t) = \xi_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$
Solución 2	$\xi(t) = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\cos\left[\omega t + \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega\xi_0}\right)\right]$

$$F(x) \approx F(x_{\text{eq}}) + \underbrace{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x_{\text{eq}})}_{-k}(x - x_{\text{eq}})$$

$$k \approx E_p''(x_{\text{eq}}) > 0$$

Muelles en paralelo	$x_{\text{eq}} = \frac{k_1l_1 + k_2l_2}{k_1 + k_2} \qquad k_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n k_i$
Muelles en serie	$x_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n l_i \qquad \frac{1}{k_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$
En un péndulo	$\alpha \approx \mathrm{sen}(\alpha) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Oscilador amortiguado

Ecuación diferencial	$m\ddot{\xi} = -k\xi - b\dot{\xi}$
	$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$
	$0 = \ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega^2\xi$
Régimen subamortiguado	$\omega > \gamma$
Régimen crítico	$\omega \approx \gamma$
Régimen sobreamortiguado	$\omega < \gamma$

Régimen subamortiguado

Pseudofrecuencia	$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} > 0$
Solución 1	$\xi(t) = e^{-\gamma t}\left[\xi_0\cos(\Omega t) + \frac{v_0 + \gamma\xi_0}{\Omega}\,\mathrm{sen}(\Omega t)\right]$

Solución 2
$$\xi(t) = e^{-\gamma t} A\cos(\Omega t + \varphi)$$
$$A = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma\xi_0}{\Omega}\right)^2}$$
$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0 + \gamma\xi_0}{\Omega\xi_0}\right)$$

Régimen crítico

$$\xi(t) = e^{-\gamma t}\left[\xi_0 + (v_0 + \gamma\xi_0)\, t\right]$$

Régimen sobreamortiguado

$$\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$
$$\xi(t) = e^{-\gamma t}\left[\xi_0 \cosh(\Gamma t) + \frac{v_0 + \gamma\xi_0}{\Gamma}\sinh(\Gamma t)\right]$$
$$\xi(t) = \frac{1}{2}e^{-(\gamma+\Gamma)t}\left(\xi_0 - \frac{v_0 + \gamma\xi_0}{\Gamma}\right) + \frac{1}{2}e^{-(\gamma-\Gamma)t}\left(\xi_0 + \frac{v_0 + \gamma\xi_0}{\Gamma}\right)$$

Energía y analogía RLC

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Efecto Joule $\quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -RI^2 < 0$ (Se disipa energía)

Teoría de campos

Campo escalar	$f(\vec{r})$
Campo vectorial	$f(\vec{r})$

Sistemas de coordenadas

Coordenadas cartesianas

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Coordenadas polares (2D)

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Coordenadas cilíndricas (3D)

$$x = \rho\cos(\theta)$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$\mathrm{d}S = \rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Coordenadas esféricas (3D)

$$x = r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$
$$\mathrm{d}S = r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

Líneas de campo

$$\vec{F} \times \mathrm{d}\vec{l} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{F_x} = \frac{\mathrm{d}y}{F_y} = \frac{\mathrm{d}z}{F_z}$$

Operadores diferenciales

Operador Nabla $\quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Gradiente $\quad \nabla f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Derivada direccional $\quad D_{\hat{a}} f(\vec{r}) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(\vec{r} + h\hat{a}) - f(\vec{r})}{h}$

$$D_{\hat{a}} f(\vec{r}) = \hat{a}\cdot\nabla f(\vec{r})$$

Divergencia $\quad \mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla\cdot\vec{F} \begin{cases} > 0 & \text{tiende a divergir} \\ < 0 & \text{tiende a converger}\end{cases}$

Rotacional $\quad \mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{F} \begin{cases} \neq 0 & \text{líneas cerradas} \\ = 0 & \text{líneas no cerradas}\end{cases}$

Laplaciano $\quad \vec{\Delta} \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Flujo

$$\Phi = \int_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\hat{n}$$

- Encontrar el sistema de coordenadas.
- Encontrar la expresión de $\mathrm{d}\vec{S}$
- Calcular el producto escalar $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
- Calcular la integral sobre toda la superficie.

Cómo hallar el vector normal

- Considerar que la superficie es un campo escalar. La ecuación de la superficie será algo como $f(\vec{r}) = c$
- Calcular el gradiente (porque es perpendicular). $\nabla f(\vec{r})$
- Normalizamos el gradiente para obtener un vector unitario. $\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

Circulación

$$C = \int_{A,C}^{B} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

- Escibir el camino C en forma paramétrica.
- Escribir $\mathrm{d}\vec{l}$
- Calcular $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$
- Calcular la circulación (hacer la integral).

$$C = \oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{F} \text{ es un campo conservativo}$$

Teorema de Gauss

$$\Phi = \int_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{F}\mathrm{d}V \begin{cases} > 0 & \text{Fuente interior} \\ < 0 & \text{“Sumidero” interior}\end{cases}$$

Teorema de Stokes

$$C = \oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Campo eléctrico

Ley de Coulomb	$\vec{F}_{1\to 2} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$
Constante de Coulomb	$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
Carga del electrón	$e = -1.602 \times 10^{-19}$ C
Principio de superposición	$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$
Campo eléctrico	$\vec{E}(\vec{r}) = k\dfrac{q}{r^2}\hat{r}$
(varias cargas puntuales)	$\vec{E}(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{n} \dfrac{q}{r_i^2}\hat{r}_i$
Relación con la fuerza eléctrica	$\vec{F}_{\text{eléc}} = q\vec{E}$

Líneas de campo

El campo eléctrico es un campo conservativo. Las líneas de campo comienzan o acaban en las cargas. Si se separan, indica que aumenta el módulo. Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo.

Densidad de carga

Densidad lineal	$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$	$q = \int_L \lambda \mathrm{d}l$
Densidad superficial	$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$	$q = \int_S \sigma \mathrm{d}S$
Densidad volumétrica	$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$	$q = \int_V \rho \mathrm{d}V$
Ejemplo (volumen)	$\vec{E} = k\int_V \dfrac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{r} = k\iiint \dfrac{\rho}{r^2}\hat{r}\ \mathrm{d}V$	

Ley de Gauss

Ley de Gauss	$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$
Forma diferencial	$\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Campos producidos por algunas distribuciones de carga

Hilo infinito, $\lambda =$ cte.	$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\hat{\rho}$
Esfera cargada, radio R, $\rho =$ cte.	$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}\ , & r \le R \\ k\frac{Q_T}{r^2}\hat{r}\ , & r > R \end{cases}$
Esfera cargada, radio R, $\rho(r) = \alpha r$	$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\alpha r^2}{4\varepsilon_0}\hat{r}\ , & r \le R \\ k\frac{Q_T}{r^2}\hat{r}\ , & r > R \end{cases}$
Plano infinito, $\sigma =$ cte.	$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

Conservación del campo eléctrico

El campo eléctrico es conservativo. Todo campo conservativo puede ser obtenido a través del gradiente de un campo escalar (en este caso, el potencial eléctrico).

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V$$

Potencial eléctrico

Potencial por carga puntual	$V(\vec{r}) = k\dfrac{q}{r}$
Distribuciones finitas	$V(\vec{r}) = k\int_{Q_T} \dfrac{\mathrm{d}q}{r}$
(a partir de la circulación)	$V(\vec{r}) = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(r) - \cancel{V(\infty)}$
Distribuciones infinitas	$V(\vec{r}) = \int_r^{\text{origen de } V} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

Trabajo y energía potencial eléctrica

Trabajo eléctrico	$W = \int_{C_{A\to B}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\Delta E_p$
Energía potencial	$E_p = qV$
	$E_p = kq_0 \sum_{i=1}^{n} \dfrac{q_i}{r_i}$
Energía de formación	$U = k\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i<j \\ i=1}}^{n} \dfrac{q_i q_j}{r_{ij}}$
Ecuación de Poisson	$\vec{\Delta}^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
Ecuación de Laplace	$\vec{\Delta}^2 V = 0$ (si no hay densidades de carga)

Curva de potencial

El origen de potencial es arbitrario. El sistema intentará llevar la carga a un mínimo de potencial (punto de equilibrio estable). Los máximos son puntos de equilibrio inestable.

Condensadores

Conductores y capacidad

Los conductores son materiales donde las cargas se mueven libremente. En el interior de un conductor, el campo eléctrico es nulo. Si hay un campo eléctrico externo, o bien está cargado, se genera una distribución de carga en la superficie que mantenga el campo interior nulo. El potencial eléctrico es el mismo en todo el conductor.

Capacidad	$C = \dfrac{Q}{V}$

Aislantes y dieléctricos

Los aislantes son materiales donde las cargas no se mueven libremente. Los dieléctricos son un tipo de aislantes. Cuando existe un campo eléctrico externo, estos son sometidos a una polarización. Se induce un campo eléctrico interno que contrarresta parcialmente el campo externo.

$$\vec{E}_{\text{ef}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_P = \frac{1}{\varepsilon_r}\vec{E}_{\text{ext}}$$

Permitividad en el vacío	$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}
Permitividad relativa	ε_r
Permitividad de un material	$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$
Susceptibilidad eléctrica	$\chi_e = \varepsilon_r - 1$
Densidad de polarización	$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_{\text{ef}}$
	$\vec{E}_P = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{P}$
Desplazamiento eléctrico	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}_{\text{ef}}$
Ley de Gauss en dieléctrico	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}}$

Condensadores

Teniendo dos conductores, la presencia de uno puede afectar a la distribución de carga de su superficie. Si todas las líneas de campo de un conductor van de un conductor al otro, se dice que hay influencia total. Esto sucede en coronas esféricas y en dos planos infinitos (o muy grandes) paralelos. La carga de cada conductor será igual pero de signo contrario. Solo existe campo eléctrico entre los conductores.

Energía almacenada	$U = \dfrac{1}{2}Q\Delta V = \dfrac{1}{2}C\,(\Delta V)^2$
Diferencia de potencial	$\delta V = \int_-^+ \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$
Campo dentro del condensador	$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$
Carga del condensador	$Q = \sigma S$
Analogía con el muelle	$k \leftrightarrow \dfrac{1}{C}\ , \qquad x \leftrightarrow q$

Campo magnético

Analogía con Coulomb $\overrightarrow{\mathrm{d}^2F_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{\vec{\mathrm{d}l}_2 \times \left(\vec{\mathrm{d}l}_1 \times \vec{r}\right)}{r^3}$

$$\vec{F}_{q_1 \to q_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \frac{\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

Campo magnético sobre una carga en movimiento

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec{v}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^2} = \frac{1}{c^2} \vec{v}_1 \times \vec{E}(\vec{r})$$

Si tenemos $N+1$ cargas $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} q_i \frac{\vec{v}_i \times \vec{r}_i}{r_i^3}$

Fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

$$\vec{F}mag = I \int_C \vec{\mathrm{d}l} \times \vec{B}$$

Ley de Biot y Savart $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} q_i \frac{\vec{v}_i \times \vec{r}_i}{r_i^3}$

Constante magnética $k_m = \frac{\mu}{4\pi}$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{\mathrm{d}l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Ley de Ampère $\oint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I$

Forma integral $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Densidad superficial de corriente $\vec{j}$

Ejemplos de algunos campos magnéticos

Hilo rectilíneo infinito $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{t}$

Hilo rectilíneo infinito $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{t}$

Otros recursos

Integrales inmediatas

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{sen}(x) + C$$

$$\int \left(1 + \mathrm{tg}^2(x)\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

$$\int \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{arc\,sen}(x) + C$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = \overset{1}{\cancel{x}} \cdot e^x + C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{x} + C$$

Integración por partes

Susana un día vio un valiente soldadito vestido de uniforme.

$$\int u \ \mathrm{d}v = uv - \int v \ \mathrm{d}u$$

Identidades trigonométricas

$$1 = \mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x)$$
$$\mathrm{sen}(2x) = 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x)$$
$$\mathrm{sen}(x) = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$$
$$\cos(x) = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$
$$\mathrm{tg}(x) = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}}$$