Apuntes de Propagación de Ondas

Javier Rodrigo López

30 de septiembre de 2024

Índice

Introducción

El primer parcial incluye los temas 1 a 4. El segundo parcial incluye los temas 5 a 9. Se debe obtener una nota mínima de 3 en cada uno y la media debe ser mayor o igual a 5. Ambos parciales ponderan un 50 % en la nota final. Se puede optar a evaluación final en lugar del segundo parcial.

Fechas de examen

Primer parcial 13 de noviembre

Segundo parcial o global 20 de enero

Ejercicios propuestos

Hay que hacer los ejercicios propuestos antes de que el profesor los resuelva en clase. Los que serán resueltos en clase son los siguientes:

- 1.3
- 1.6
- 2.1
- 2.4
- 3.5
- 4.3
- 4.5
- 5.3
- 5.7
- 6.3
- 6.7
- 7.3
- 7.5
- 8.2
- 8.4
- 9.2
- 9.10

Tareas pendientes

- Relación entre vectores unitarios **sin mezclar coordenadas**. Es decir, un ejemplo:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{en lugar de} \qquad \cos\varphi$$

1. Herramientas: operadores vectoriales

Una **función de onda** es una función en el espacio y el tiempo que describe el comportamiento de una onda.

El sistema de referencia será siempre un triedro orientado a derechas, de modo que se cumpla:

$$\begin{aligned} \vec{u}_x + \vec{x}_1 \times \vec{u}_y &= +\vec{u}_z \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_x &= -\vec{u}_z \end{aligned} \tag{1}$$

Las **coordenadas** de un punto representan la posición de ese punto en el espacio.

Una **superficie coordenada** es una superficie que se define por una ecuación de la forma $f(x, y, z) = \text{cte}$.

El vector posición de un punto P en el espacio se denota como $\vec{r}$, y se puede expresar en función de las coordenadas del punto (diferente en cada sistema de coordenadas).

1.1. Sistemas de coordenadas

1.1.1. Coordenadas cartesianas

Recomendables para problemas con **simetría plana**. Los valores que pueden tomar las coordenadas son:

$$\begin{aligned} x &\in (-\infty, +\infty) \\ y &\in (-\infty, +\infty) \\ z &\in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \tag{2}$$

- La coordenada x es la distancia del punto a la superficie yz.
- La coordenada y es la distancia del punto a la superficie xz.
- La coordenada z es la distancia del punto a la superficie xy.

Cualquier vector puede expresarse como combinación lineal de los vectores unitarios.En cualquier sistema de coordenadas, los vectores unitarios tienen módulo unidad y son perpendiculares entre sí. En este sistema, los vectores unitarios son: $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$.

El vector $\vec{u}_x$ es perpendicular a la superficie coordenada $x = \text{cte.}$, y apunta en la dirección creciente de x. Análogamente para $\vec{u}_y$ y $\vec{u}_z$. Los vectores unitarios cartesianos mantienen la orientación relativa en todos los puntos del espacio.

El vector posición $\vec{r}$ se puede expresar como:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \tag{3}$$

1.1.2. Coordenadas cilíndricas

Recomendables para problemas con **simetría cilíndrica**. Los valores que pueden tomar las coordenadas son:

$$\begin{aligned} \rho &\in [0, +\infty) \\ \varphi &\in [0, 2\pi) \\ z &\in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \tag{4}$$

- La coordenada ρ es la distancia del punto al eje z.
- La coordenada φ es el ángulo que forma el vector posición con el eje x.
- La coordenada z es la distancia del punto al plano xy.

Los vectores unitarios cilíndricos son $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z$. El vector $\vec{u}_\rho$ es perpendicular a la superficie coordenada $\rho = \text{cte.}$ (que es un cilindro), y apunta en la dirección creciente de ρ. El vector $\vec{u}_\varphi$ es perpendicular a la superficie coordenada $\varphi = \text{cte.}$ (que es un plano perpendicular al eje z), y apunta en la dirección creciente de φ. El vector $\vec{u}_z$ es perpendicular a la superficie coordenada $z = \text{cte.}$, y apunta en la dirección creciente de z.

El vector posición $\vec{r}$ se puede expresar como:

$$\vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z \tag{5}$$

1.1.3. Coordenadas esféricas

Recomendables para problemas con **simetría esférica**. Los valores que pueden tomar las coordenadas son:

$$\begin{aligned} r &\in [0, +\infty) \\ \theta &\in [0, \pi] \\ \varphi &\in [0, 2\pi) \end{aligned} \tag{6}$$

- La coordenada r es la distancia del punto al origen.
- La coordenada θ es el ángulo que forma el vector posición con el eje z.
- La coordenada φ es el ángulo que forma el proyección del vector posición en el plano xy con el eje x.

Los vectores unitarios esféricos son $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$. El vector $\vec{u}_r$ es perpendicular a la superficie coordenada $r =$ cte. (que es una esfera), y apunta en la dirección creciente de r. El vector $\vec{u}_\theta$ es perpendicular a la superficie coordenada $\theta =$ cte. (que es un cono), y apunta en la dirección creciente de θ. El vector $\vec{u}_\varphi$ es perpendicular a la superficie coordenada $\varphi =$ cte. (que es un plano perpendicular al eje z), y apunta en la dirección creciente de φ.

El vector posición $\vec{r}$ se puede expresar como:

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \tag{7}$$

1.2. Relación entre los sistemas de coordenadas

1.2.1. Cartesianas y cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \tag{8}$$

1.2.2. Cilíndricas y esféricas

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\rho}{z}\right) \\ \varphi = \varphi \end{cases} \tag{9}$$

1.2.3. Cartesianas y esféricas

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{10}$$

1.3. Operador, campo escalar, campo vectorial

Un operador es un "objeto matemático" que actúa sobre una función, transformándola. Sirve para estudiar las características de esa función.

Un ejemplo sería el operador **derivada**. Si se aplica el operador derivada a una función.

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sen}\,(x)}{\mathrm{d}x} = g(x) \tag{11}$$

Un campo escalar es una función que asigna un valor escalar a cada punto del espacio. Es decir,

$$f(x, y, z) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{12}$$

1.4. Gradiente

El **gradiente** es un operador que se aplica a un campo escalar y devuelve un campo vectorial, de tal forma que en cada punto hay un vector que apunta en la dirección de mayor crecimiento del campo escalar. Se denota mediante el operador nabla: ∇.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \tag{13}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \tag{14}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi \tag{15}$$

1.4.1. Ejemplo

$$\begin{aligned} f\,(x, y, z) &= 3x^2 + y - \cos(z) \\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \\ &= 6x\vec{u}_x + \vec{u}_y + \sin(z)\vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(1, 1, \frac{\pi}{6}\right) &= 3 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7 - \sqrt{3}}{2} \\ \nabla f\left(1, 1, \frac{\pi}{6}\right) &= 6\vec{u}_x + \vec{u}_y + \frac{1}{2}\vec{u}_z \end{aligned}$$

1.5. Divergencia

El **operador divergencia** se aplica a un campo vectorial y devuelve un campo escalar. Se denota también mediante el operador nabla (∇, aunque en LaTeXel comando `\div` lo asigna como $\nabla\cdot$ porque utiliza el producto escalar entre el operador gradiente y el campo vectorial. Se define como:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{16}$$

Si la divergencia es positiva ($\nabla \cdot \vec{a} > 0$), el campo vectorial diverge o emana del punto (fuente). Si la divergencia es negativa ($\nabla \cdot \vec{a} < 0$), el campo vectorial converge o se dirige al punto (sumidero).

En lo diferentes sistemas de coordenadas, se puede calcular como:

$$a \tag{17}$$

1.5.1. Teorema de Gauss o de la divergencia

La superficie puede ser cualquier superficie cerrada, no necesariamente una esfera.

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{a} \, \mathrm{d}V = \oiint_S \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{18}$$

El flujo de un campo vectorial $\vec{a}$ a través de una superficie cerrada equivale a la integral del volumen de la divergencia de $\vec{a}$.

1.6. Rotacional

El rotacional se aplica a un campo vectorial y devuelve un campo vectorial. Se representa también por el operador nabla (∇), aunque en LaTeXel comando `\curl` lo asigna como $\nabla\times$.

En los diferentes sistemas de coordenadas, se puede calcular como:

$$\nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z \tag{19}$$

$$\nabla \times \vec{a} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial a_z}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \rho}\vec{u}_z \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{a} = {} & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial r}\right)\vec{u}_\varphi\end{aligned} \tag{21}$$

Un campo es **irrotacional** si su rotacional es nulo.

$$\nabla \times \vec{a} = 0 \tag{22}$$

La condición necesaria para que un campo vectorial $\vec{a}$ pueda expresarse como el gradiente de un campo escalar ϕ es que su rotacional sea nulo.

$$\nabla \times \vec{a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = \nabla\phi \tag{23}$$

1.7. Teorema de Stokes

Se escoge una curva cerrada C y una superficie S de forma arbitraria que contenga en su contorno la curva C. Entonces, se cumple que el flujo del vector rotacional de un campo vectorial $\vec{a}$ a través de la superficie S es igual a la circulación de $\vec{a}$ a lo largo de la curva C.

$$\iint_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{24}$$

Para campos conservativos, el flujo del rotacional a través de una superficie cerrada es nulo. Por ello, este teorema puede ser útil para resolver

TODO: Repetir el 7 de las tareas de clase (hice mal un vector unitario).

1.8. Laplaciano

El **operador laplaciano** se aplica a un campo escalar y devuelve un campo escalar. Se denota mediante el operador nabla (∇^2), aunque en LaTeXel comando `\laplacian` lo asigna como ∇^2 o a veces incluso como un triángulo (Δ).

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \tag{25}$$

En coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, se puede calcular como:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{26}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{27}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{28}$$

Las ecuaciones de onda están escritas en función de laplacianos, por ello son relevantes.

1.9. Cálculo de la función potencial

Lo realizaremos con un ejemplo. Dado el campo vectorial:

$$\vec{a} = y\vec{u}_x + (2yz + x)\,\vec{u}_y + y^2\vec{u}_z$$

Y sabiendo que se trata del gradiente de un campo escalar, calcular su función potencial ϕ.

$$\left.\begin{aligned} \nabla\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{u}_z \\ &= a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2yz + x \dots \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = \displaystyle\int y \,\mathrm{d}x & = xy + f_1(y,z) \\ \phi = \displaystyle\int (2yz + x)\,\mathrm{d}y & = 2y^2z + xy + f_2(x,z) \\ \phi = \displaystyle\int y^2\,\mathrm{d}z & = y^2z + f_3(x,y) \end{cases}$$

TODO: Problema 5 de las tareas de clase

1.10. Campo solenoidal

Un campo vectorial es **solenoidal** si su divergencia es nula. Es decir:

$$\nabla \cdot \vec{a} = 0 \tag{29}$$

Si un campo es solenoidal, este se puede expresar como el rotacional de otro campo vectorial, al que se le llama **potencial vector**.

$$\nabla \cdot \vec{a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = \nabla \times \vec{A} \tag{30}$$

TODO: Comprobar cálculo de la función potencial TODO: Problemas 6 y 11 de las tareas de clase. TODO: Comprobar que los ejercicios anteriores están bien (ver fotos)

2. Ondas acústicas planas

3. Ondas acústicas esféricas

4. Reflexión y refracción de ondas acústicas

5. Ecuaciones de Maxwell. Ecuaciones de onda. Energía

6. Propagación de ondas electromagnéticas en medios dieléctricos

7. Propagación de ondas electromagnéticas en medios conductores

8. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas

9. Ondas guiadas

10. Soluciones de los ejercicios

10.1. Diapositiva 75 Tema 1, mayo 2020

COMPROBAR

Sea el campo vectorial,

$$\vec{a} = \left[8x^2 \operatorname{sen}\varphi + (16xy - z)\cos\varphi\right]\vec{u}_\rho + \left[8x^2\cos\varphi - (16xy - z)\operatorname{sen}\varphi\right]\vec{u}_\varphi - x\vec{u}_z$$

1. Determinar si es irrotacional o no. **Solución:** Sí es irrotacional.
2. Calcular el flujo neto de $\vec{a}$ a través del cubo $0 < x, y, z < 1$. **Solución:** Usando Teorema de Gauss Ecuación 18 el resultado es 8.
3. Determinar la circulación de $\vec{a}$ a lo largo del perímetro de la cara del cubo definida por $z = 0$ y por $0 < x, y < 1$. **Solución:** Usando Teorema

de Stokes Ecuación 24, el resultado es 0.