9-Ma'ruza

Ikkinchi ajoyib limit. Funksiyaning uzluksizligi. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ualrning turlari

Endi ikkinchi ajoyib limit deb ataluvchi

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{7}$$

tenglikni isbotlaymiz.

► $x > 1$ bo'lsin. U holda

$$1 \le [x] \le x < [x]+1, \tag{8}$$

bu yerda $[x]$ orqali x sonning butun qismi belgilangan. Bu tengsizlikdan

$$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]} \le 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Tengsizlikning har bir qismiga birni qoshib uni

$$1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{[x]}$$

ko'rinishda yozamiz. So'ngi tengsizlikning barcha qismi birdan katta. Shuning uchun ularni (8) tengsizlikning mos qismlariga teng musbat darajalarga ko'tarsak

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}. \tag{9}$$

Ketma-ketliklarning limitini o'rganganimizda $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ tenglikni isbotlagan edik. U holda bu tenglikni hamda yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalarini qo'llab

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

tengliklarni yozamiz. Bu tengliklarni ketma-ketlikning limiti ta'rifi bo'yicha yozsak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $N \in \boldsymbol{N}$ topilib, barcha $n > N$ uchun

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon, \qquad \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda (9) tengsizlikni inobatga olsak $x > N+1$, $[x] = n > N$ uchun

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\varepsilon$$

o'rinli bo'ladi yoki

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon.$$

Bu esa argument $+\infty$ ga intilgandagi limit ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (10)$$

ekanligini anglatadi.

Endi $x \to -\infty$ bo'lsin. $x = -u$ deb olamiz, u holda $x \to -\infty, u \to +\infty$. Ayniy almashtirishlardan so'ng

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^u = \left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda o'zgaruvchilarni almashtiramiz va ko'paytmaning limiti haqidagi teoremani va (10) tenglikni qo'llab

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\cdot\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right) = e\cdot 1 = e$$

limitni topdik. Xulosa qilsak, x cheksizlikka har qanday intilganda ham (10) o'rinli.

(7) tenglikda $y = 1/x$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz va $x \to \infty$ da $y \neq 0$ degan shartni qo'yamiz, u holda

$$\lim_{y\to0}(1+y)^{1/y} = e \qquad (11)$$

natijani hosil qilamiz.

4-Misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

► Limit ostidagi funksiyaning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$\frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \frac{\sin 5x}{x}\frac{x}{\sin 7x} = \frac{5}{7}\frac{\sin 5x}{5x}\frac{7x}{\sin 7x}.$$

$\lim\limits_{x\to0}5x = 0$, $\lim\limits_{x\to0}7x = 0$ bo'lganligi uchun murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo'llab

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{7x} = 1$$

tengliklarga ega bo'lamiz. U holda ko'paytmaning limiti haqidagi teoremani qo'llab

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \frac{5}{7}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{7x} = \frac{5}{7}\cdot1\cdot1 = \frac{5}{7}$. ◄

5-Misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

► Ayniy almashtirishlardan so'ng

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right)^{x^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{x^2}} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{1/x^2}}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{2}{-2/x^2}}$$

ifodani hosil qilamiz. Bu yerda $1/x^2 = y$ va $-2/x^2 = z$ deb olsak

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = (1+y)^{1/y}\left[(1+z)^{1/z}\right]^2$$

ko‘rinishni oladi. Agar $x \to \infty$, u holda $y \to 0$ va $z \to 0$, o‘zgaruvchilarni almashtirgandan so‘ng ko‘paytmaning limiti haqidagi teoremani va (11) formulani qo‘llaymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\cdot\lim_{z\to 0}\left[(1+z)^{1/z}\right]^2 = e^3.$$

Funksiyaning uzluksizligi

Uzluksizlikning ta’rifi. $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan va bu nuqtada aniq bir $f(a)$ qiymatni qabul qilsin.

1-Ta’rif. Agar $x = a$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va u $f(a)$ qiymatga teng bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Shunday qilib

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad (12)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb atalar ekan.

Funksiyaning uzluksizligi $\varepsilon - \delta$ tilida quyidagicha ta’riflanadi.

2-Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (13)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning limitiga $x \neq a$ degan shartni qo‘ygan edik. Bu yerda esa bu shart bajarilishini talab qilmaymiz.

Funksiya uzluksizligi tushunchasini ifodalashning yana bir ko‘rinishini keltiramiz. $y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin. Qaralayotgan a nuqtani asosiy nuqta deb hisoblab, argumentning a nuqtadan Δx miqdorga (manfiymi yoki musbatmi farqi yo‘q) farq qiluvchi boshqa $x = a + \Delta x \in U(a)$ qiymatini olamiz. Δx miqdorni argumentning orttirmasi deb ataymiz. Funksiya o‘zgarishining

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) \qquad (14)$$

qiymatini f funksiyaning a nuqtadagi x argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi orttirmasi deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(a + \Delta x) = f(a)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu esa

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x + \Delta x) - f(a)] = 0 \qquad (15)$$

tenglikka teng kuchli. $f(x + \Delta x) - f(a) = \Delta y$ ekanligini e’tiborga olsak, (15) tenglikni

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

3-Ta’rif. Δx argument orttirmasi nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bu orttirmaga mos keluvchi Δy orttirmasi ham nolga intilsa, $y = f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

6-Misol. $y = x^3$ funksiya son o‘qining ixtyoriy a nuqtasida uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz.

► a nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirma uchun

$$\Delta y = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2 \cdot \Delta x + 3a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 =$$
$$= (3a^2 + 3a\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikda $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ bo‘lishi ko‘rinib turibdi. ◄

7-Misol. $y = \sin x$ funksiya son o‘qining ixtyoriy a nuqtasida uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz.

► a nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirma uchun

$$|\Delta y| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left|2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le |\Delta x|$$

o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $|\cos(a + \Delta x/2)| \le 1$ va $|\sin(\Delta x/2)| \le |\Delta x|/2$ tengsizliklardan foydalanildi. Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. ◄

Funksiya uzluksizligining uchala ta’rifi ham teng kuchli. Har bir holda qulay bo‘lgan ta’rifdan foydalaniladi.

Endi nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiyaning xossalarini o‘rganamiz.

3-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a) > A$ (mos ravishda $f(a) < A$) bo‘lsa, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $(a - \delta, a + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x) > A$ (mos ravishda $f(x) < A$) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

4-Teorema (uzluksiz funksiya ishorasining o‘zgarmasligi). Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a) \neq 0$ bo‘lsa, u holda a nuqtaning shunday $(a - \delta, a + \delta)$ atrofi topiladiki, bu oraliqda funksiya nolga aylanmaydi va ishorasini o‘zgartirmaydi ($f(a)$ sonining ishorasi bilan bir xil bo‘ladi).

Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

5-Teorema. $fx)$ va $g(x)$funksiyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin. Agar $fx)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda ularning $f(x) + g(x)$ yig‘indisi, $f(x) - g(x)$ ayirmasi, $f(x) \cdot g(x)$ ko‘paytmasi va $g(a) \neq 0$ qo‘shimcha shartda $f(x)/g(x)$ nisbati ham a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Murakkab funksiyaning uzluksizligi.

6-Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz, $g(y)$ funksiya esa mos $A = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

8-Misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x \to \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3\operatorname{ctg} x}.$$

► Limit ostidagi funksiyani

$$(1 + \operatorname{tg} x)^{3\operatorname{ctg} x} = \left((1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x}\right)^3$$

ko‘rinishda yozib olamiz va $y = f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x}$, $g(y) = y^3$ funksiyalarning superpozitsiyasi sifatida qaraymiz. Agar $u = \operatorname{tg} x$ deb o‘zgaruvchilarni almashtirsak, $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$ limitni hisoblash qiyin bo‘lmaydi. Haqiqatdan ham ikkinchi ajoyib limitni inobatga olsak

$$\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}x=u\\ u\to 0\\ x\to\pi\end{matrix}\right|=\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$$

limitni topamiz. U holda $g(y)=y^3$ funksiyaning uzluksizligidan

$$\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x}=\left(\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}\right)^3=e^3. \blacktriangleleft$$

Bir tomonlama uzluksizlik. $f(x)$ funksiya a nuqtaning o'ng (chap) yarim atrofida aniqlangan bo'lsin.

4-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtada o'ng limiti mavjud va bu limit $f(a)$ qiymatga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)=f(a) \tag{16}$$

tenglik orinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada o'ngdan uzluksiz deyiladi.

a nuqtada chapdan uzluksizlik xuddi shu singari

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0)=f(a) \tag{17}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan bo'lsa, uning chegaraviy a va b nuqtalarga nisbatan a nuqtada o'ng uzluksizlik, b nuqtada chap uzluksizlik haqida gapirish mumkin. Oraliqning ixtiyoriy ichki nuqtasidagi uzluksizlik bu nuqtadagi o'ng va chap uzluksizlikka teng kuchli, chunki nuqtadagi limitning mavjudligi o'ng va chap limitlarning mavjudligiga teng kuchli.

Funksiya uzluksiz bo'ladigan nuqtani bu funksiyaning uzluksizlik nuqtasi deb ataymiz. $f(x)$ funksiyaning a uzluksizlik nuqtasida quyidagi shartlar bajarilgan bo'ladi:

1) Funksiya a nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;
2) a nuqtada ikkala bir tomonlama limitlar mavjud va ular chekli;
3) a nuqtadagi ikkala bir tomonlama limitlar ustma-ust tushadi, ya'ni $f(a+0)=f(a-0)$;
4) a nuqtada ustma-ust tushadigan bir tomonlama limitlar funksiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$f(a+0)=f(a-0)=f(a) \tag{18}$$

Funksiyaning uzilish nuqtalari va ualrning turlari

5-Ta'rif. a nuqtada uzluksiz bo'lmagan funksiyani bu nuqtada uzilishli funksiya, a nuqtani esa bu funksiyaning uzilish nuqtasi deb ataladi.

a nuqta haqida uzilish nuqtasi sifatida gapirilganda, a nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasining a nuqtadan farqli boshqa nuqtalari ham mavjud deb faraz qilinadi.

(18) uzluksizlik shartining qanday buzilganligiga qarab uzilish nuqtalari turlarga bo'linadi.

6-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli chap va o'ng limitlarga ega va ular o'zaro teng, ammo funksiyaning a nuqtadagi qiymatiga teng bo'lishmasa

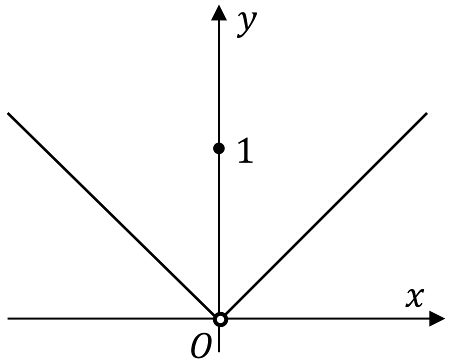
$$f(a+0)=f(a-0)\neq f(a),$$

u holda a nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilishi bartaraf qilinadigan nuqtasi deb ataladi.

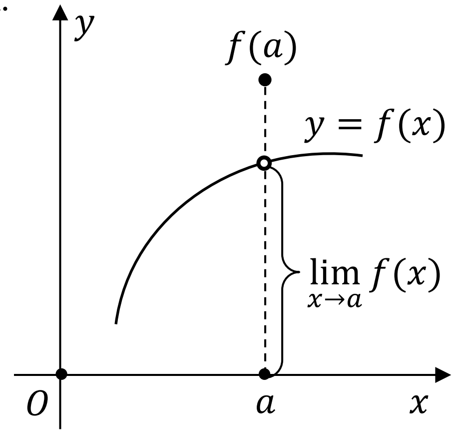
Uzilishi bartaraf qilinadigan nuqta degan iboraning ma’nosi shundan iboratki, yangi uzluksiz funksiya hosil qilish uchun funksiyaning faqat bitta a nuqtadagi qiymatini o‘zgartirish yetarli. $f(x)$ funksiya yordamida tuziladigan

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a; \\ \lim\limits_{x \to a} f(x), & x = a \end{cases}$$

funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Shunday qilib funksiyaning a nuqtadagi qiymatini o‘zgartirib uzilishni “bartaraf” qildik.



2-rasm



3-rasm

9-Misol. $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ funksiyani qaraymiz.

► Funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi chap va ong limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

ya’ni $x = 0$ nuqta uzilishi bartaraf qilinadigan nuqta ekan (2-rasm). Agar $f(x)$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi qiymatini $F(0) = 0$ deb ozgartirsak, bu nuqtada uzluksiz bo‘lgan $F(x) = |x|$ funksiyani hosil qilamiz.◄

Umuman olganda $(a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_2)$ to‘plamda uzluksiz va a nuqtada bartaraf qilinadigan uzilishga ega funksiyaning grafigi sifatida absissasi a bo‘lgan nuqtasi o‘yib olib tashlangan uzluksiz egri chiziq xizmat qiladi (3-rasm).

Uzilishi bartaraf qilinadigan a nuqtada $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limit mavjud bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz.

Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limit mavjud bo‘lmasa a nuqta bartaraf qilib bo‘lmaydigan uzilish nuqtasi deb ataladi.

7-Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chap va o‘ng limitlarga ega bo‘lib, ammo ular har xil bo‘lsa

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x),$$

u holda a nuqta $f(x)$ funksiyaning chekli sakrashli uzilish nuqtasi deb ataladi.

Uzilsh nuqtasini bunday nomlashning ma’nosi shundan iboratki, x o‘zgaruvchi a nuqta orqali o‘tishda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o‘ng va chap limitlarining ayirmasi bilan o‘lchanadigan sakrash yuz beradi.

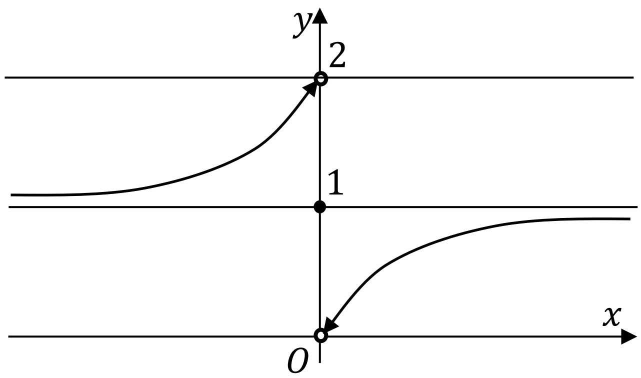
10-Misol. Ushbu funksiyani qaraymiz (4-rasm):

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

► Berilgan funksiya $x=0$ nuqtada 2 ga teng bo‘lgan chekli sakrashga ega bo‘ladi:

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=0.$ ◄

Funksiyaning bartaraf qilinadigan va chekli sakrashli uzilish nuqtalari birinchi tur uzilish nuqtalari deb ataladi. $f(x)$ funksiyaning barcha 1-tur uzilish nuqtalari chap va o‘ng limitlarning mavjudligi bilan tavsiflanadi.



4-rasm

8-Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o‘ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, bu nuqta funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deb ataladi.

11-Misol. Ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

► $x=0$ nuqtada bir tomonli limitlarni topamiz:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Bir tomonli limitlarning ikkalasi ham chekli emas, ya’ni ta’rifga ko‘ra $x=0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. ◄

12-Misol. $y=a^{1/x}$ funksiyani $0<a<1$ bo‘lganda qaraymiz.

► $x=0$ nuqtada bir tomonli limitlarni topamiz:

$$\lim_{x\to 0+0} a^{1/x}=0,\quad \lim_{x\to 0-0} a^{1/x}=+\infty.$$

$x=0$ nuqtadagi o‘ng limit cheksiz, ya’ni ta’rifga ko‘ra $x=0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. ◄

7-Teorema. X oraliqda monoton bo‘lgan $f(x)$ funksiya bu oraliqda uzilishlarga ega bo‘lsa, u holda bu uzilish nuqtalari albatta birinchi tur bo‘ladi.

Kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning xossalari. Nuqtaning kichik atrofida funksiyaning o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘ladigan xossalar bu funksiyaning lokal xossalari deb ataladi (masalan, nuqtada limitga ega funksiyaning xossalari yoki berilgan nuqtada uzluksiz funksiyaning xossalari). Funksiyaning aniqlanish sohasi yoki bu sohaning biror oralig‘i bilan bog‘liq xossalar global xossalar deb ataladi.

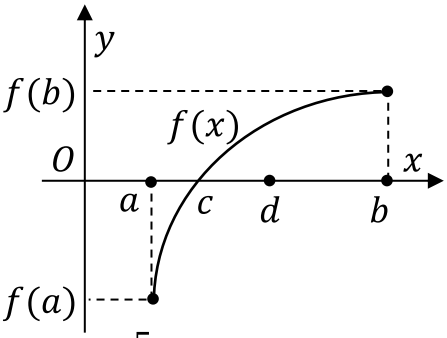
9-Ta’rif. Agar (a,b) intervalning barcha nuqtalarida $y=f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa, bu funksiya (a,b) intervalda uzluksiz deyiladi. Agar funksiya (a,b) intervalda uzluksiz, a nuqtada chapdan, b nuqtada esa o‘ngdan uzluksiz bo‘lsa bu funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz deyiladi.

Masalan, $f(x)=1/x$ funksiya $(0,1)$ intervalda uzluksiz va $[0,1]$ kesmada uzluksiz emas, chunki $x=0$ nuqtada funksiya o‘ngdan uzluksiz emas. $\sin x$

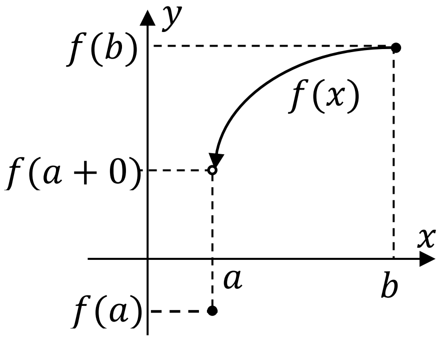
funksiya ixtiyoriy $[a,b] \subset \mathbf{R}$ kesmada uzluksiz. Agar funksiya barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda uzluksiz bo‘lsa, u $(-\infty,+\infty)$ intervalda yoki $\mathbf{R}$ son o‘qida uzluksiz deyiladi.

8-Teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsin. U holda (a,b) intervalda $f(c)=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi c nuqta topiladi.

Teorema oddiy geometrik ma’noga ega: agar funksiya grafigining uzluksiz chizig‘i Ox o‘qdan pastda ham, yuqorida ham yotsa, u holda egri chiziq Ox oqni albatta kesib o‘tadi (5-rasm).



5-rasm



6-rasm

8-Teoremada $f(x)$ funksiyaning kesmada uzluksizligi muhim shart ekanligini aytib o‘tish kerak. Uni (a,b) intervalda uzluksizligi bilan almashtirish mumkin emas: 6-rasmda (a,b) intervalda uzluksiz, ammo a nuqtada o‘ngdan uzluksizlik buzilganligi tufayli $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lmagan funksiyaning grafigi keltirilgan. Bu funksiya kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi, ammo kesmaning birorta nuqtasida ham nolga aylanmaydi. (a,b) intervalning hech bo‘lmaganda bitta nuqtasida uzilishga ega funksiya manfiy qiymatdan musbat qiymatga nolga aylanmasdan o‘tishi mumkinligi ravshan.

9-Teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya biror X oraliqda (yopiq yoki ochiq, chekli yoki cheksiz) aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar bu oraliqning ikkita a va b $(a<b)$ nuqtalarida teng bo‘lmagan $f(a)=A$ va $f(b)=B$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda (A,B) intervaldan olingan har qanday C nuqta uchun shunday $c \in (a,b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(c)=C$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

10-Teorema (Veyyershtrassning birinchi teoremasi). Kesmada uzluksiz funksiya bu kesmada chegaralangan ham bo‘ladi, ya’ni shunday m va M sonlar topilib, barcha $x \in [a,b]$ nuqtalar uchun $m \le f(x) \le M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Teoremada funksiyaning aynan kesmada uzluksizligi muhim shart hisoblanadi. Oraliqda yoki yarim oraliqda uzluksizlik funksiyaning bu oraliqda chegaralangan bo‘lishini ta’minlay olmaydi. Masalan, $f(x)=1/x$ funksiya $(0,1]$ yarim oraliqda uzluksiz, ammo unda chegaralanmagan.

11-Teorema (Veyyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u bu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.