

Circuitos Electrónicos

**2° de Grado en Ingeniería Informática
y de Doble Grado Ing. Informática/Matemáticas**

Escuela Politécnica Superior- U.A.M.

TEMA 1: Teoría de redes lineales

- a) Elementos de circuitos
- b) Métodos simplificados de análisis
- c) Principio de superposición
- d) Circuitos de dos terminales
- e) Impedancia y análisis fasorial
- f) Máxima transferencia de señal en la interconexión de circuitos

TEMA 1: Teoría de redes lineales.

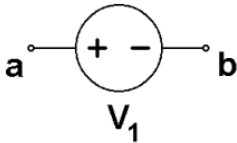
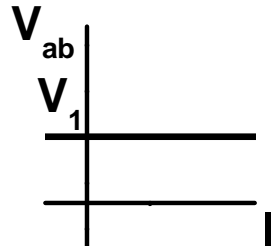
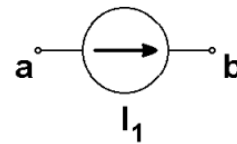
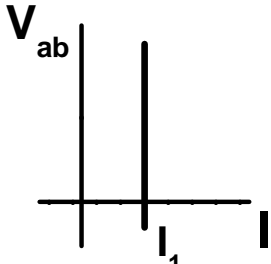
Magnitudes y propiedades	Unidades (SI)
Diferencia de potencial, tensión o " <i>voltaje</i> "	voltio (V)
Corriente	amperio (A)
Potencia	vatio (W)
Resistencia	ohmio (Ω)
Inductancia	henrio (H)
Capacidad	faradio (F)
Carga	Culombio(C)
Tiempo	Segundo(s)

Múltiplos y submúltiplos									
<i>a</i>	<i>f</i>	<i>p</i>	<i>n</i>	μ	<i>m</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	<i>G</i>	<i>T</i>
10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^3	10^6	10^9	10^{12}

TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

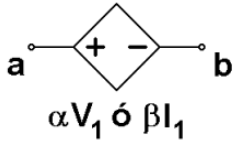
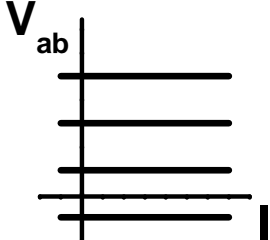
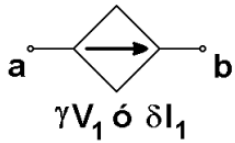
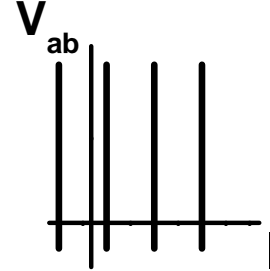
Tipos de elementos ideales:

- **Activos:** pueden ceder energía al circuito

Tipo	Nombre	Símbolo	V-I	
Independientes	Fuente de tensión			$V_{ab} = V_1$
	Fuente de corriente			$I = I_1$

- El valor de la corriente en una fuente de tensión depende del circuito en el que se encuentre
- El valor de la tensión entre los terminales de una fuente de corriente depende del circuito en el que se encuentre

TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

Tipo	Nombre	Símbolo	V-I
Dependientes	Fuente de tensión		
	Fuente de corriente		

$$V_{ab} = \alpha V_1$$

$$o$$

$$V_{ab} = \beta I_1$$

$$I = \gamma V_1$$

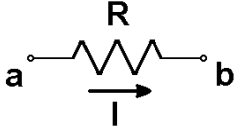
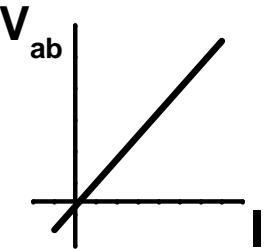
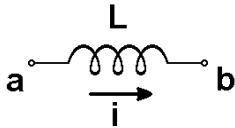
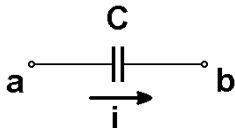
$$o$$

$$I = \delta I_1$$

- V_1 ó I_1 , tensión o corriente en algún punto del circuito en el que se encuentran
- Los coeficientes α , β , γ y δ son constantes con las dimensiones apropiadas
- A diferencia de las independientes, tanto el valor de la tensión como el de la corriente en estas fuentes, depende del circuito en el que se encuentren
- Ejemplo real: transformador

TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

- **Pasivos:** no pueden ceder energía al circuito

Tipo	Nombre	Símbolo	V-I
Impedancias	Resistencia		
	Bobina		$v_{ab} = L \frac{di(t)}{dt}$
	Condensador		$i = C \frac{dv_{ab}(t)}{dt}$

$$V_{ab} = R \cdot I$$

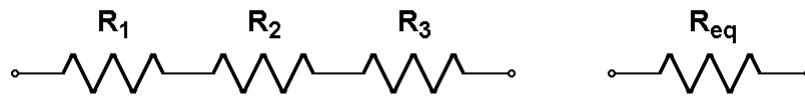
¡Ley de Ohm!

- Un cable es una resistencia de valor nulo $\Rightarrow v_{ab} = 0$; ¿i?: depende del circuito
- Notación: se suelen utilizar minúsculas para las magnitudes que dependen de t
- Recordemos cómo se obtienen R_{eq} , L_{eq} , C_{eq} ,... cuando se tienen asociaciones serie o paralelo de estos elementos

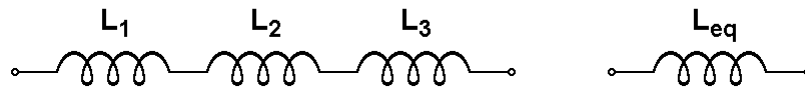
TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

- **Equivalentes:** asociaciones en serie o paralelo de elementos de circuitos

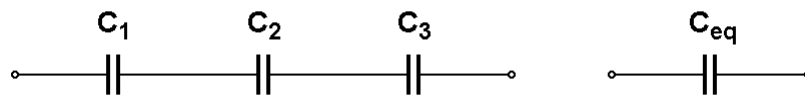
- Asociación en serie de elementos pasivos:



$$R_{eq} = \sum_k R_k$$



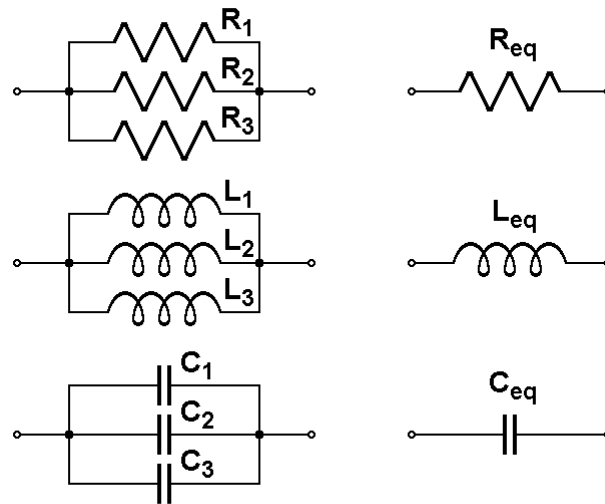
$$L_{eq} = \sum_k L_k$$



$$C_{eq} = \left(\sum_k \frac{1}{C_k} \right)^{-1}$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

- Asociación en paralelo de elementos pasivos:



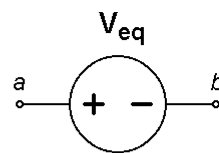
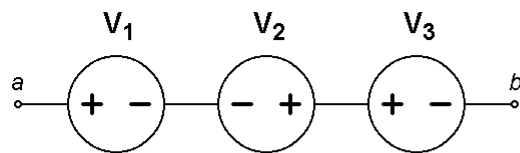
$$R_{eq} = \left(\sum_k \frac{1}{R_k} \right)^{-1}$$

$$L_{eq} = \left(\sum_k \frac{1}{L_k} \right)^{-1}$$

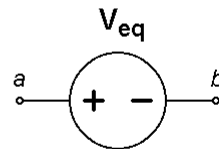
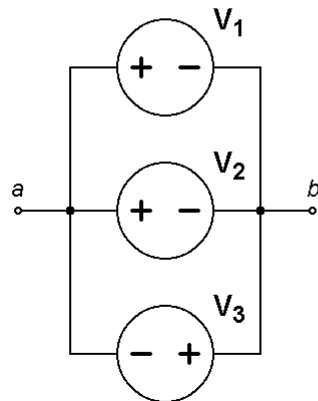
$$C_{eq} = \sum_k C_k$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

- Asociaciones en serie ¿y paralelo? de fuentes de tensión:

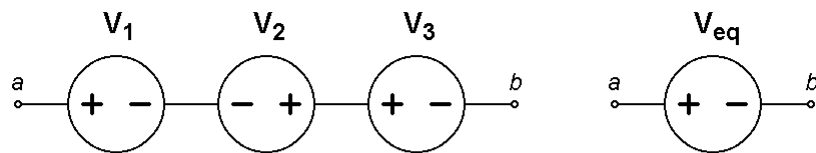


$$V_{eq} = \sum_k V_k$$

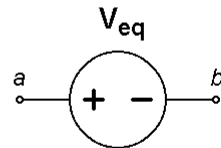
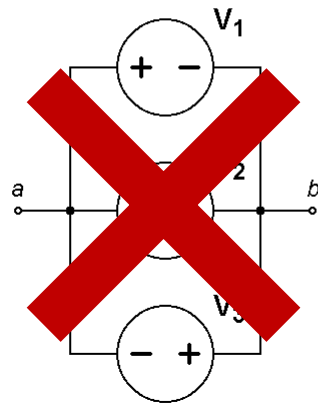


TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

- Asociación en serie de fuentes de tensión:

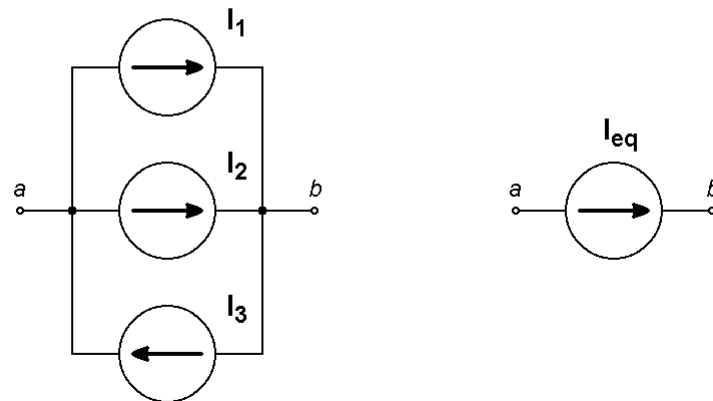
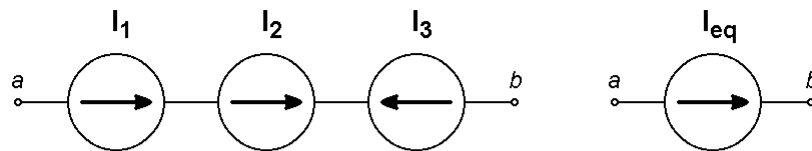


$$V_{eq} = \sum_k V_k$$



TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

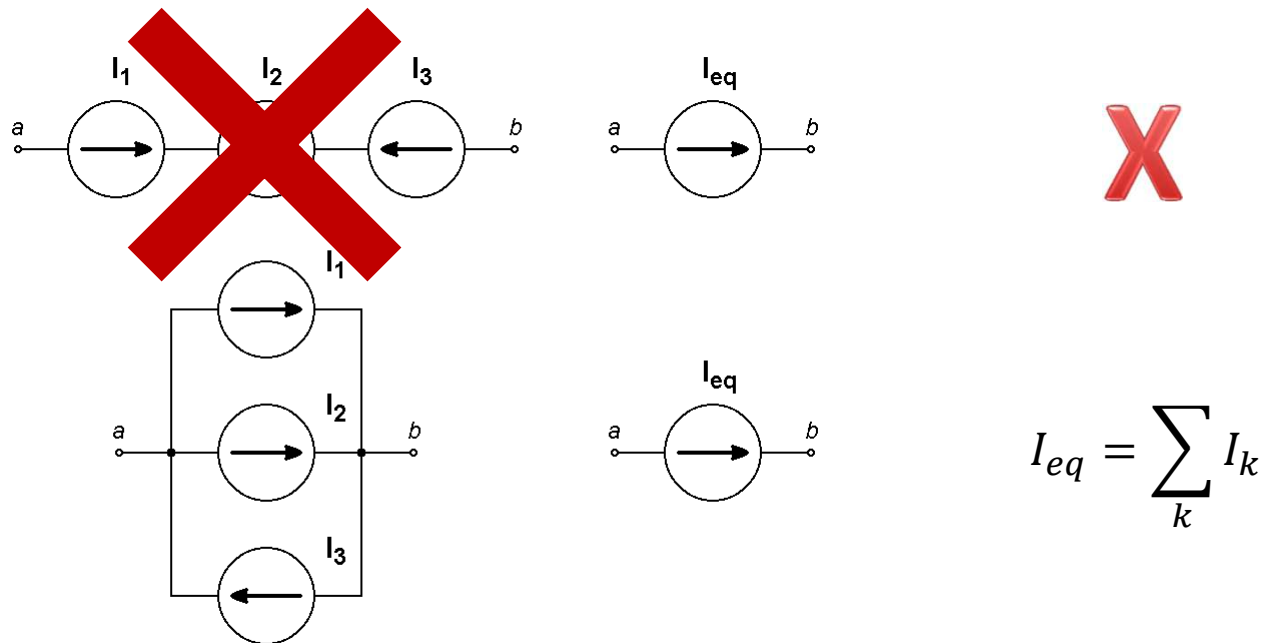
- Asociaciones en ¿serie y? paralelo de fuentes de corriente:



$$I_{eq} = \sum_k I_k$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

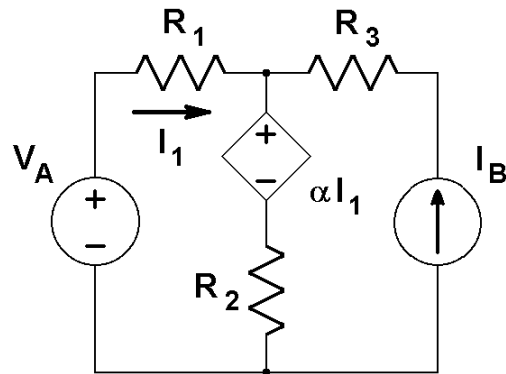
- Asociación en paralelo de fuentes de corriente:



TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

- **Otros elementos:** las conexiones (ramas, nodos, lazos cerrados y mallas)
 - Nodo: punto donde se unen tres o más elementos
 - Rama: porción de circuito entre dos nodos que no pasa por un tercer nodo
 - Lazo cerrado: recorrido en un circuito que parte y acaba en el mismo punto
 - Malla: lazo cerrado que no contiene otros lazos cerrados en su interior

♣ Ejemplo: el circuito de la figura presenta

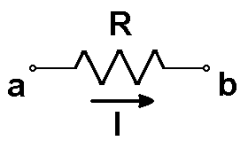
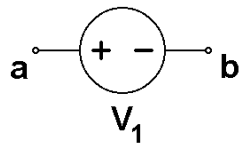
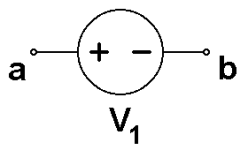
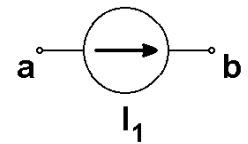
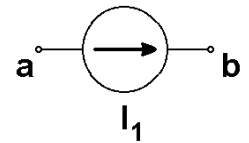


- 2 nodos
- 3 ramas
- 3 lazos cerrados
- 2 mallas

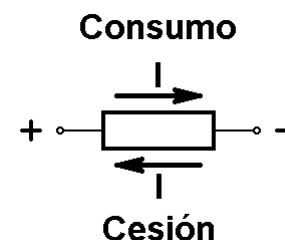
$$m = r - n + 1$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

- Cesión y consumo de energía**

Elemento					
Balance	$V_{ab} > 0,$ $I_{a \rightarrow b} > 0$ consumo	$V_{ab} = V_1 > 0$ Si $I_{a \rightarrow b} > 0$ consumo	$V_{ab} = V_1 > 0$ Si $I_{a \rightarrow b} < 0$ cesión	$I_{a \rightarrow b} = I_1 > 0$ Si $V_{ab} > 0$ consumo	$I_{a \rightarrow b} = I_1 > 0$ Si $V_{ab} < 0$ cesión

En general, para elementos activos y pasivos:



- Definiciones de potencia: $p(t) = i(t) \cdot v(t)$; $P = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot v(t) dt$
Si $i(t), v(t) \equiv \text{ctes.}$, $P = I \cdot V$
- Las resistencias siempre consumen energía
- Si hay varias fuentes en un circuito, puede ocurrir que alguna consuma energía
- El criterio para fuentes dependientes es el mismo que para f. independientes
- Se puede demostrar que en bobinas y condensadores ideales en circuitos con fuentes de señal (tensión o corriente) periódicas el consumo medio de energía es nulo

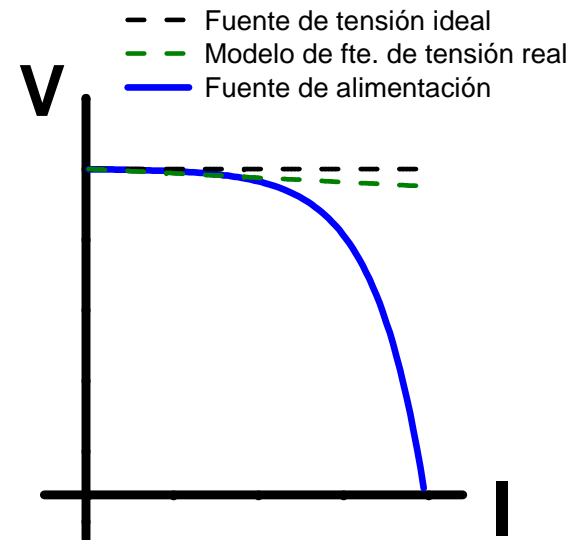
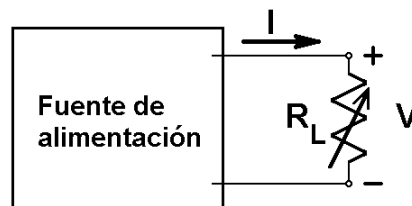
TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

Elementos reales en circuitos reales

Los elementos reales se separan en mayor o menor grado de los elementos ideales estudiados, lo que habrá que tener en cuenta en los montajes experimentales que se van a realizar en el laboratorio. Estas son algunas de las diferencias que nos podremos encontrar:

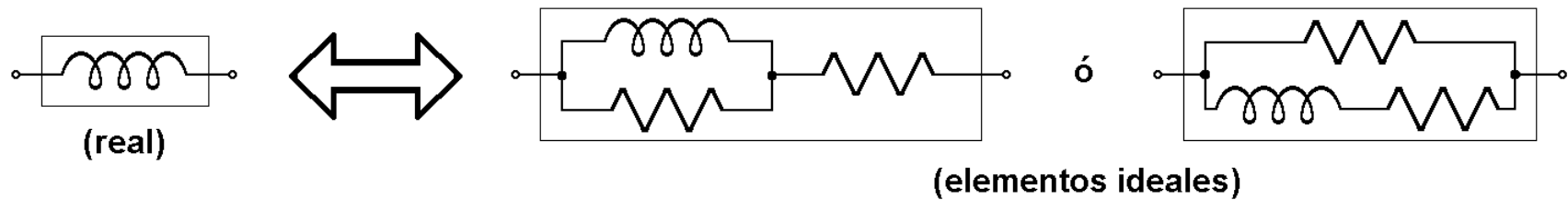
- **Activos:**

- Fuentes de tensión independientes: la tensión no es la misma para cualquier corriente. Habitualmente se les denomina fuentes de alimentación.



TEMA 1: Teoría de redes lineales. a) Elementos de circuitos

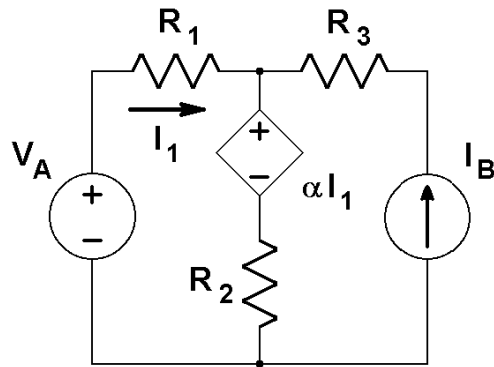
- **Pasivos:**
 - Condensadores y bobinas: se comportan como si tuvieran una cierta componente resistiva asociada, llamada resistencia parásita. Por ejemplo, para las bobinas:



Análisis de un circuito

→ determinación de las corrientes y tensiones en el mismo

♣ Ejemplo de análisis de circuitos:



- Se conocen V_A , I_B , R_j y α , pero no I_1 , I_{R_2} ni V_{I_B}
- ¿Cómo deducir las magnitudes desconocidas?
 - Mediante las leyes de Kirchhoff
 - Aplicando métodos simplificados de análisis

TEMA 1: Teoría de redes lineales. b) Métodos simplificados de análisis

Leyes de Kirchhoff:

1) L.K.N.: en un nodo, $\Sigma I_k = 0$

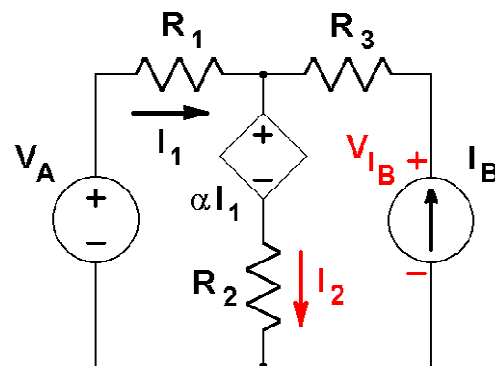
(Conservación de la carga)

2) L.K.M.: en una malla, $\Sigma V_k = 0$

(Potencial eléctrico, conservativo)

En el circuito anterior, escogiendo arbitrariamente los sentidos de corrientes y tensiones y usando además la L. de Ohm:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_B - I_2 &= 0 \\ -V_A + R_1 I_1 + \alpha I_1 + R_2 I_2 &= 0 \\ -V_{I_B} + R_3 I_B + \alpha I_1 + R_2 I_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$



⇒ Las L.K. nos proporcionan un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas

⇒ Se pueden plantear más ecuaciones, pero son linealmente dependientes

♦ Una buena elección: $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ ecuaciones de malla (con L.K.M.)} \\ n-1 \text{ ecuaciones de nodo (con L.K.N.)} \end{array} \right.$
siendo “m” el nº de mallas y “n” el nº de nodos del circuito.

TEMA 1: Teoría de redes lineales. b) Métodos simplificados de análisis

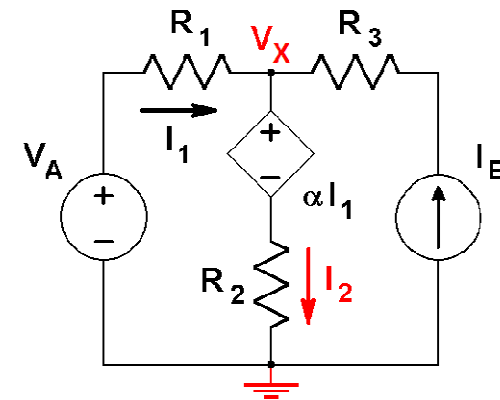
- **Método de tensiones de nodo:** utiliza la L.K.N.
 - Se elige un nodo como origen de tensiones ($V=0$), y se etiquetan los restantes
 - Se asignan corrientes a todas las ramas del circuito
 - Mediante la L.K.N. se plantean $n-1$ ecuaciones de nodo (siendo $n \equiv n^{\circ}$ de nodos)
 - Se expresan las ecs. en función de las tensiones de nodo usando la L. Ohm
 - Si el sistema es indeterminado (porque hay fuentes dependientes), se buscan relaciones “adicionales” en el propio circuito y se resuelve el sistema (obtención de las tensiones de nodo)

♣ Ejemplo:

$$\text{L.K.N.: } I_1 + I_B - I_2 = 0;$$

$$\begin{cases} I_1 = (V_{A+} - V_x)/R_1 = (V_A - V_x)/R_1 \\ I_2 = (V_x - \alpha I_1)/R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{V_A - V_x}{R_1} + I_B - \frac{V_x - \alpha(V_A - V_x)/R_1}{R_2} = 0 \Rightarrow V_x, \dots$$



☠ ¡Atención!:

- $V_{A+} = V_A$ debido a la elección del origen de tensión ($V_{A-} \equiv 0$)
- En cualquier otro caso, $V_A = V_{A+} - V_{A-} \neq V_{A+}$
- No confundir la corriente por la fuente dependiente de tensión, I_2 , con I_1

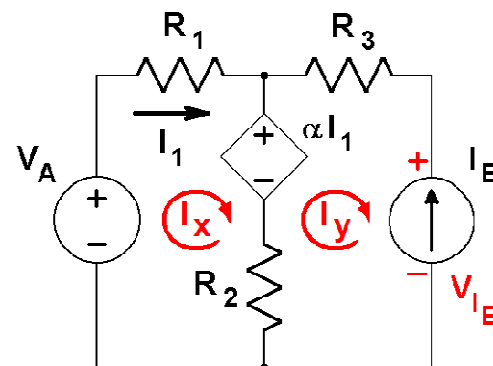
TEMA 1: Teoría de redes lineales. b) Métodos simplificados de análisis

- **Método de corrientes de malla:** utiliza la L.K.M.

- Se asigna una “corriente de malla” a cada malla. Una rama perteneciente a dos mallas estará recorrida por dos “corrientes de malla”
- Mediante la L.K.M. se plantean m ecuaciones de malla (siendo $m \equiv n^0$ de mallas)
- Se expresan las ecs. en función de las corrientes de malla usando la L. Ohm
- Si el sistema de ecuaciones es indeterminado, se buscan relaciones “adicionales” en el circuito y se resuelve el sistema (obtención de las corrientes de malla)

- ♣ Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{L.K.M.: } & -V_A + I_x R_1 + \alpha I_1 + (I_x - I_y) R_2 = 0 \\ & (I_y - I_x) R_2 - \alpha I_1 + I_y R_3 + V_{I_B} = 0 \\ & I_1 = I_x \text{ (ec. adicional)} \\ & I_y = -I_B \text{ (ec. adicional)} \\ \Rightarrow & \left. \begin{aligned} -V_A + I_x(R_1 + \alpha + R_2) + I_B R_2 &= 0 \\ -I_B(R_2 + R_3) - (R_2 + \alpha)I_x + V_{I_B} &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$



- ☠ ¡Atención!:

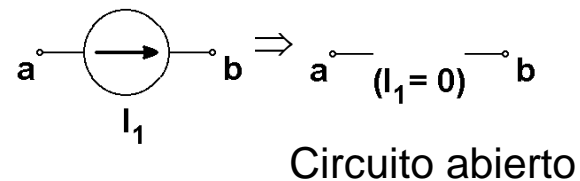
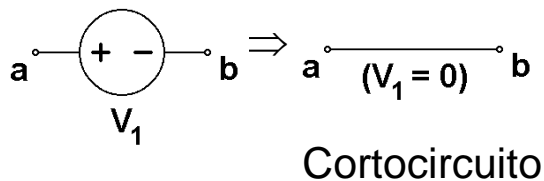
- No confundir las “corrientes de malla” con las corrientes de rama
- En este caso, se podrían haber etiquetado directamente las “corrientes de malla” como I_1 e I_B tomando los sentidos apropiados para las mismas
- Entre los terminales de una fuente de corriente hay una tensión desconocida

TEMA 1: Teoría de redes lineales. c) Principio de superposición

P^o de superposición: En aquellos fenómenos físicos en los que causa y efecto están linealmente relacionados, el efecto total de varias causas actuando simultáneamente es equivalente a la suma de los efectos de cada causa actuando individualmente.

En circuitos electrónicos: causas \Leftrightarrow fuentes independientes
efectos \Leftrightarrow tensiones y corrientes que producen

- Anulación de fuentes independientes:



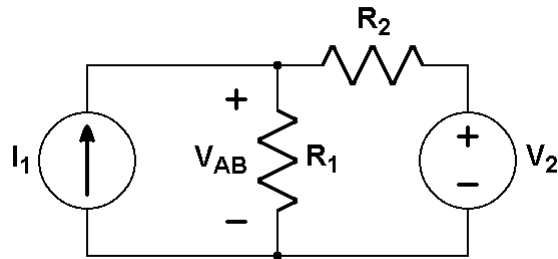
- Este teorema puede usarse con cualquiera de los métodos de análisis anteriores
- Es especialmente útil en algunos circuitos de c.a.

☠ ¡Atención!:

- Las fuentes dependientes no se deben anular, pues no son causas
- No olvidar que la corriente por un cortocircuito puede tomar cualquier valor, mientras que la corriente por un circuito abierto es nula
- Las ecuaciones de un circuito parcial no son válidas para el o los otros, pues la topología de ambos circuitos es diferente

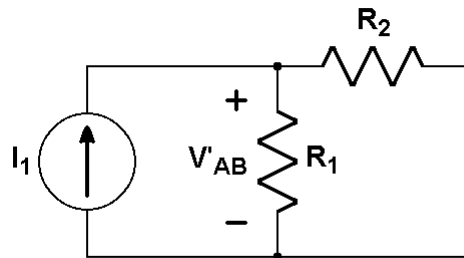
TEMA 1: Teoría de redes lineales. c) Principio de superposición

♣ Ejemplo 1: Obtener V_{AB} utilizando el principio de superposición

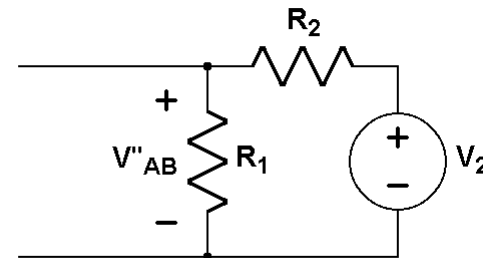


$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB}, \text{ siendo}$$
$$V'_{AB}: \text{tensión debida a } I_1$$
$$V''_{AB}: \text{tensión debida a } V_2$$

Anulando V_2 :



Anulando I_1 :



Resolviendo ambos circuitos parciales mediante los métodos de análisis estudiados, se puede obtener que:

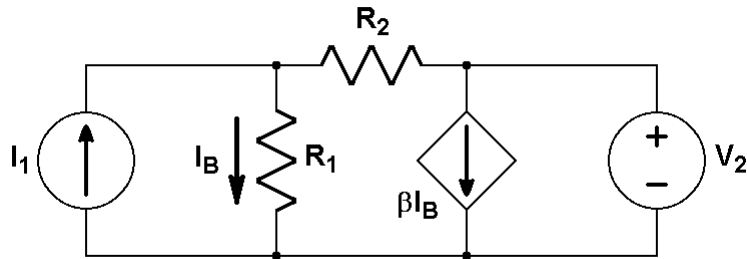
$$V'_{AB} = I_1 R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$

$$V''_{AB} = V_2 R_1 / (R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow V_{AB} = (I_1 R_2 + V_2) R_1 / (R_1 + R_2)$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. c) Principio de superposición

♣ Ejemplo 2: Obtener I_B utilizando el principio de superposición

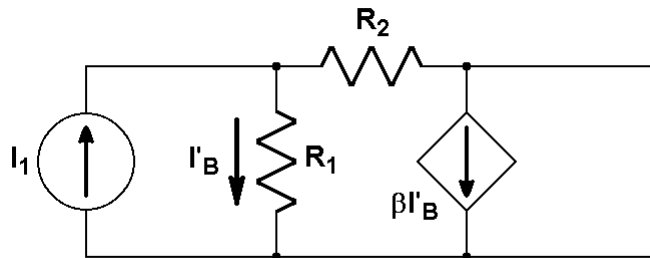


$$I_B = I_B' + I_B'', \text{ siendo}$$

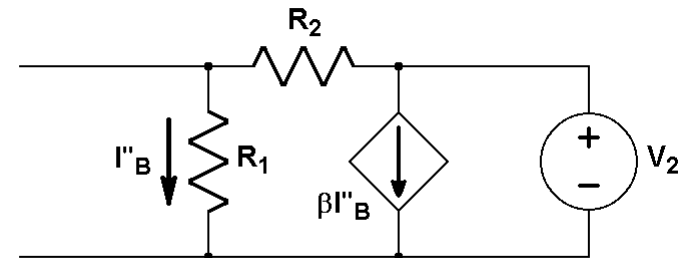
I_B' : corriente debida a I_1

I_B'' : corriente debida a V_2

Anulando V_2 :



Anulando I_1 :



Y resolviendo ambos circuitos parciales mediante los métodos de análisis estudiados, se puede obtener que:

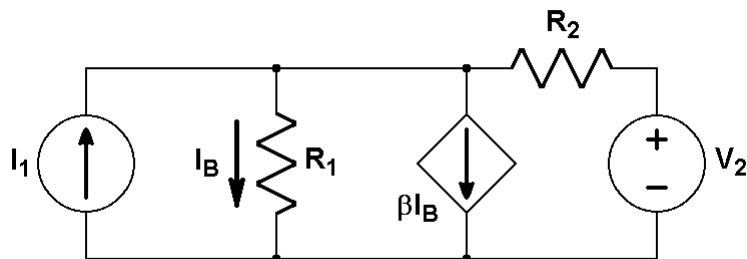
$$I_B' = I_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$

$$I_B'' = V_2 / (R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow I_B = (I_1 R_2 + V_2) / (R_1 + R_2)$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. c) Principio de superposición

♣ Ejemplo 3: Obtener I_B utilizando el principio de superposición

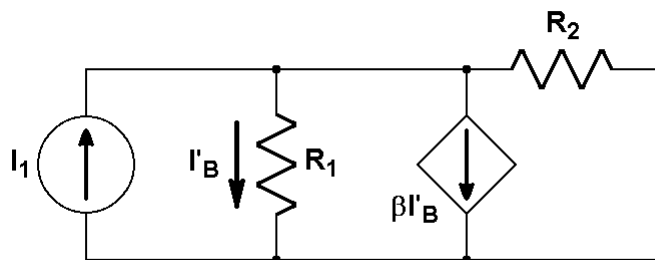


$$I_B = I_B' + I_B'', \text{ siendo}$$

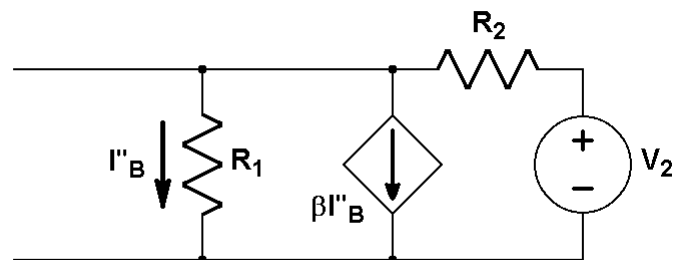
I_B' : corriente debida a I_1

I_B'' : corriente debida a V_2

Anulando V_2 :



Anulando I_1 :



Y resolviendo ambos circuitos parciales mediante los métodos de análisis estudiados, se puede obtener que:

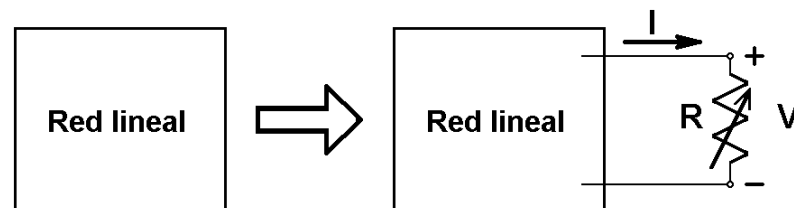
$$I_B' = \frac{I_1 R_2}{R_1 + (\beta + 1) R_2}$$

$$I_B'' = \frac{V_2}{R_1 + (\beta + 1) R_2}$$

$$\Rightarrow I_B = \frac{V_2 + I_1 R_2}{R_1 + (\beta + 1) R_2}$$

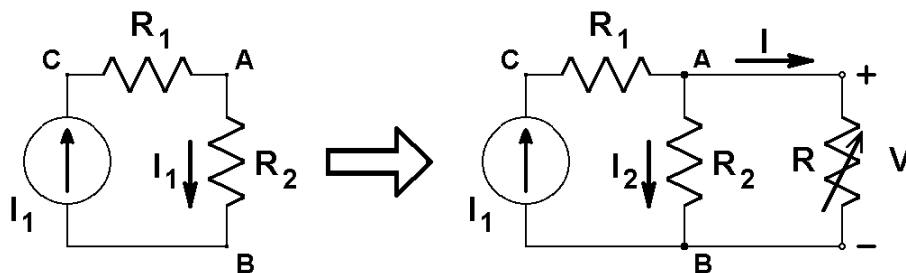
TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

¿Qué ocurre si en una red o circuito lineal conectamos entre dos puntos una resistencia adicional (o resistencia de carga) y hacemos variar su valor?



- Las corrientes y tensiones dentro de la red lineal variarán con el valor de R
- Se establecerá una corriente I por la resistencia, y la caída de tensión V entre sus terminales será función de ella
- A la relación V - I así obtenida se le denomina **ecuación característica** del circuito, y a su representación gráfica, **curva característica**

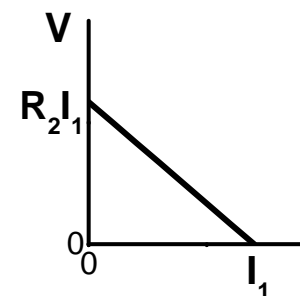
♣ Ejemplo: ecuación característica del circuito de la figura, dados los puntos A y B



$$\text{L.K.N.: } I_1 - I_2 - I = 0; \quad I_1 - V/R_2 - I = 0$$

$$\Rightarrow V(I) = R_2 I_1 - R_2 I$$

Curva característica:



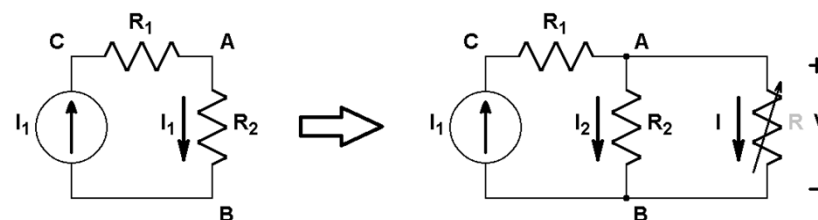
TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

☠ ¡Atención!:

- En circuitos con varias posibilidades de elección de los terminales, se obtendrán distintas ecuaciones características (y distintos circuitos equivalentes) para cada par de terminales. En el ejemplo anterior es inmediato que:

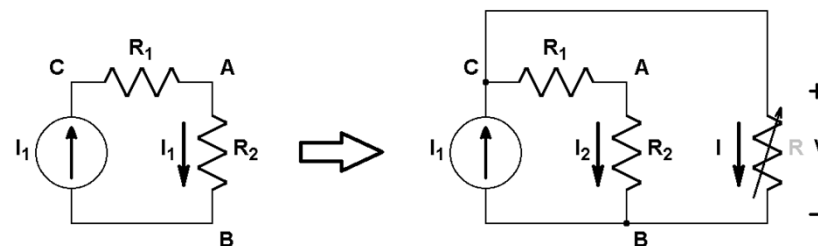
- tomando los puntos A y B:

$$V(I) = R_2 I_1 - R_2 I$$



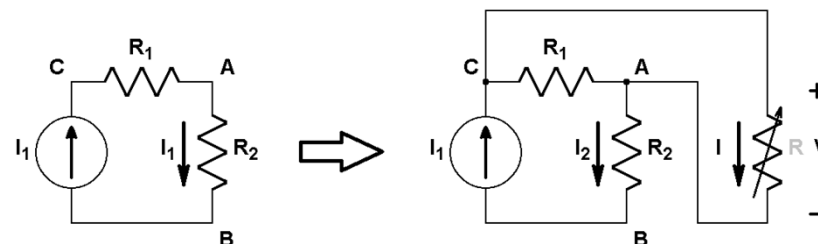
- tomando los puntos C y B:

$$V(I) = (R_1 + R_2) I_1 - (R_1 + R_2) I$$



- tomando los puntos C y A:

$$V(I) = R_1 I_1 - R_1 I$$

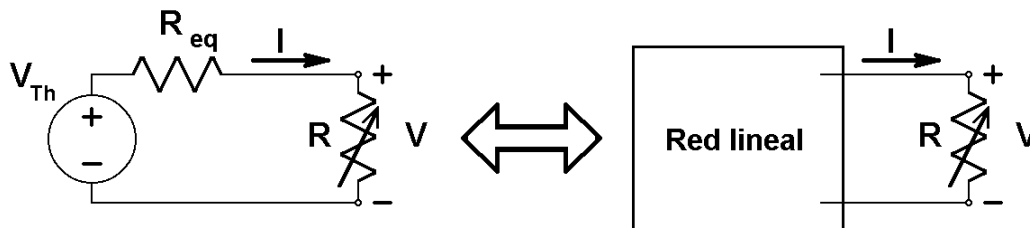


TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

- Observar que la relación obtenida es de la forma $V(I) = A - B \cdot I$; este resultado es general para toda red lineal, por ser combinación de elementos lineales
- La constante “A” ($[A] = V$) corresponde a la situación en que $I=0$ (R no conectada o de valor infinito, o sea terminales en “circuito abierto”), y recibe el nombre de tensión de Thévenin, V_{Th}
- La constante “B” ($[B] = \Omega$) recibe el nombre de resistencia equivalente, R_{eq}

$$V(I) = V_{Th} - R_{eq} \cdot I$$

Todo circuito lineal se comporta de la misma manera que un circuito formado por una fuente de tensión en serie con una resistencia (Teorema de Thévenin)

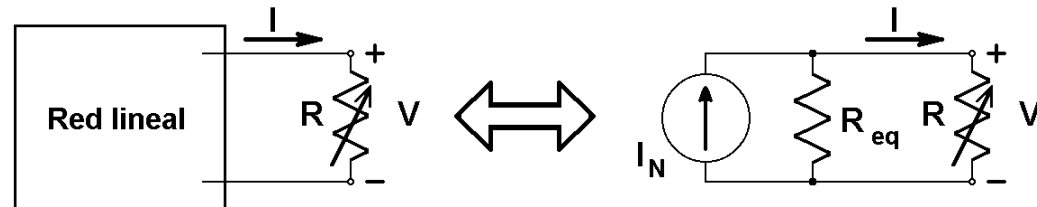


TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

- Si se intercambian las variables dependiente e independiente, la relación es de la forma $I(V) = C - D \cdot V$; este resultado es también general para toda red lineal
- La constante “C” ($[C] = \text{Amp}$) corresponde a la situación en que $V=0$ ($R=0$, o sea terminales en “cortocircuito” –con un cable entre ellos–), y recibe el nombre de corriente de Norton, I_N .
Como $C = A/B$, entonces $I_N = V_{Th}/R_{eq}$
- La constante “D” ($[B] = \Omega$) es $D = B^{-1} = R_{eq}^{-1}$

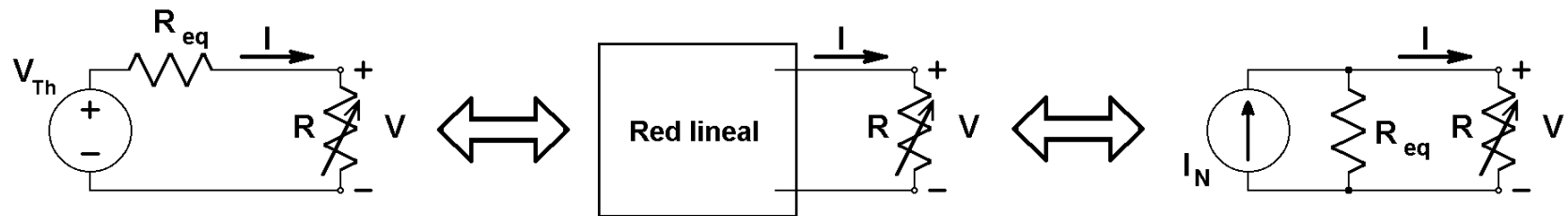
$$I(V) = I_N - R_{eq}^{-1} \cdot V$$

Todo circuito lineal se comporta de la misma manera que un circuito formado por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia (Teorema de Norton)



TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

- Los circuitos de Thévenin y Norton son a su vez equivalentes entre sí:



$$V(I) = V_{Th} - R_{eq} \cdot I$$

$$I(V) = I_N - R_{eq}^{-1} \cdot V$$

o:

$$V(I) = R_{eq} \cdot I_N - R_{eq} \cdot I$$

$$V(I) = V_{Th} - R_{eq} \cdot I$$

$$V(I) = R_{eq} \cdot I_N - R_{eq} \cdot I$$

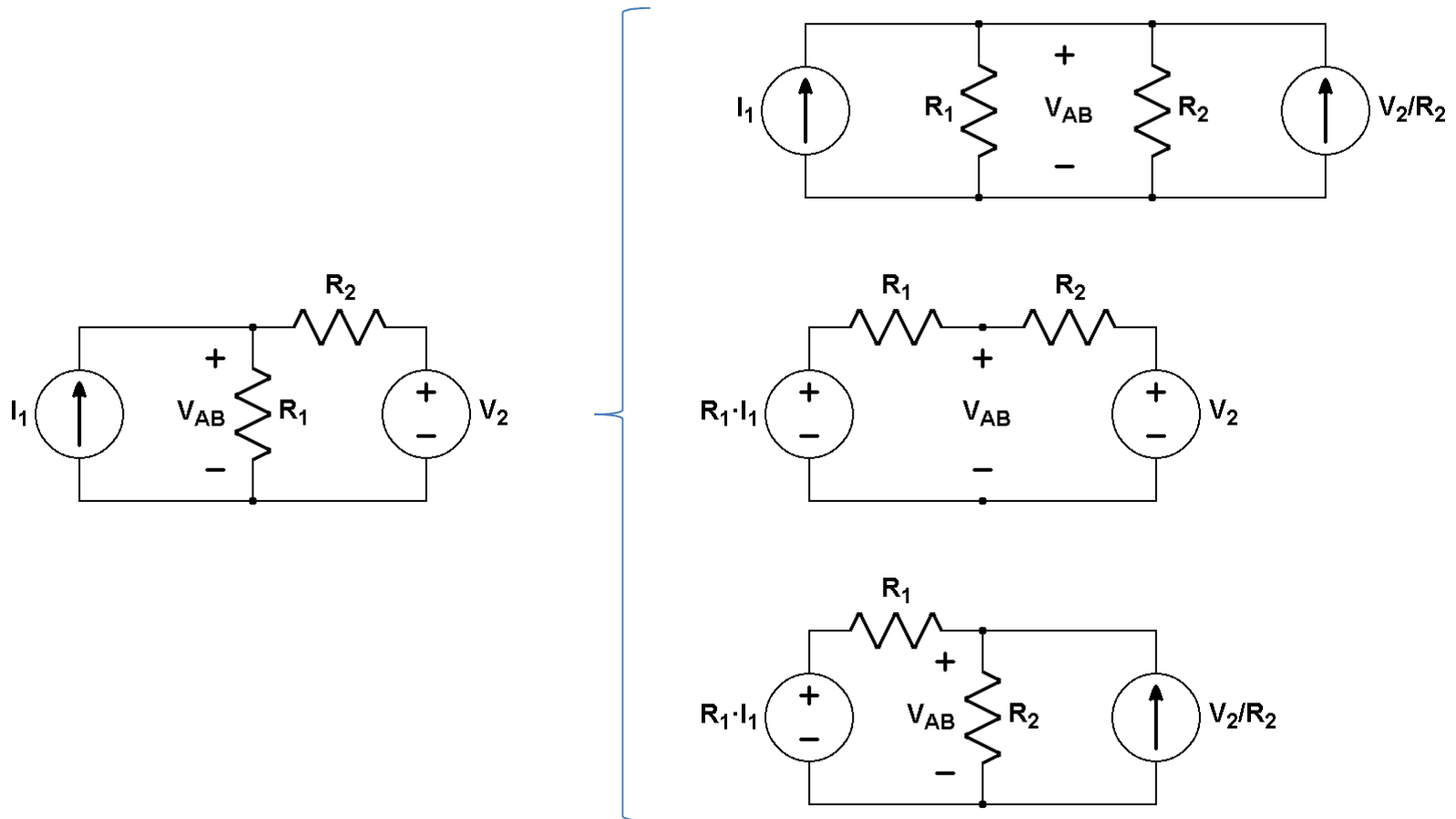
\Leftrightarrow

$$V_{Th} = R_{eq} \cdot I_N$$

Aplicación: propiedad de “transformación de fuentes”

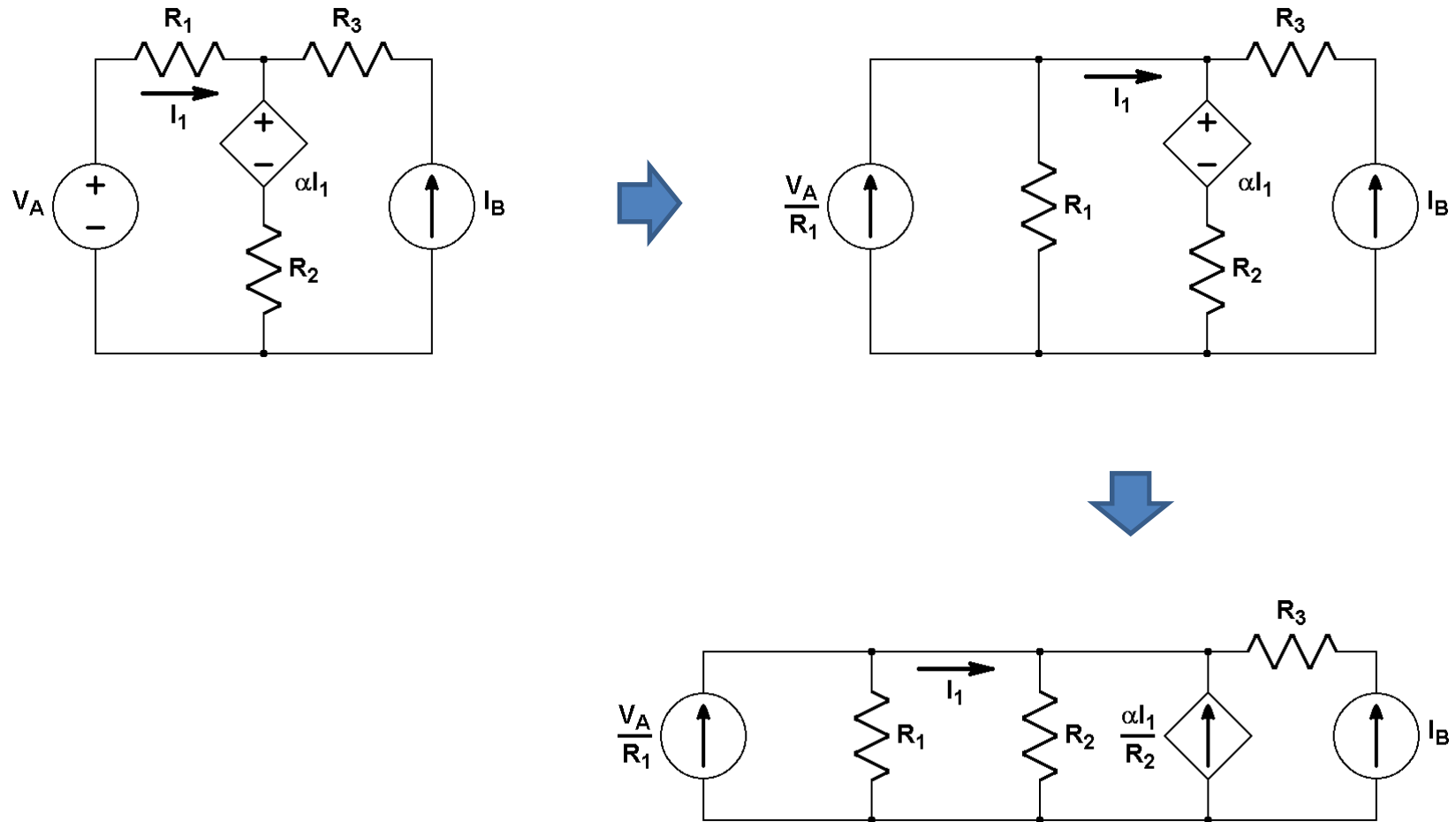
TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

♣ Ejemplo 1: “transformación de fuentes”



TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

♣ Ejemplo 2: (transformación de fuentes)



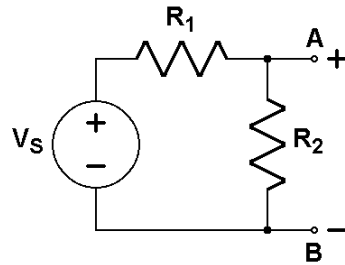
TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

- **Obtención de los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de una red lineal**
 - 1) Identificando términos una vez obtenida la ecuación característica
 - 2) Imponiendo en el circuito las condiciones de circuito abierto (tensión V_{Th}) y de cortocircuito (para I_N), y utilizando la relación entre ellas para obtener R_{eq}
 - Si el circuito no tiene fuentes dependientes, se puede obtener R_{eq} anulando las fuentes independientes y calculando el equivalente de la asociación de resistencias visto desde esos dos puntos
 - En cualquier circuito se puede obtener R_{eq} anulando las fuentes independientes, conectando una fuente de prueba externa (entre los terminales a y b) y hallando el cociente entre la tensión que aplica dicha fuente y la corriente que suministra

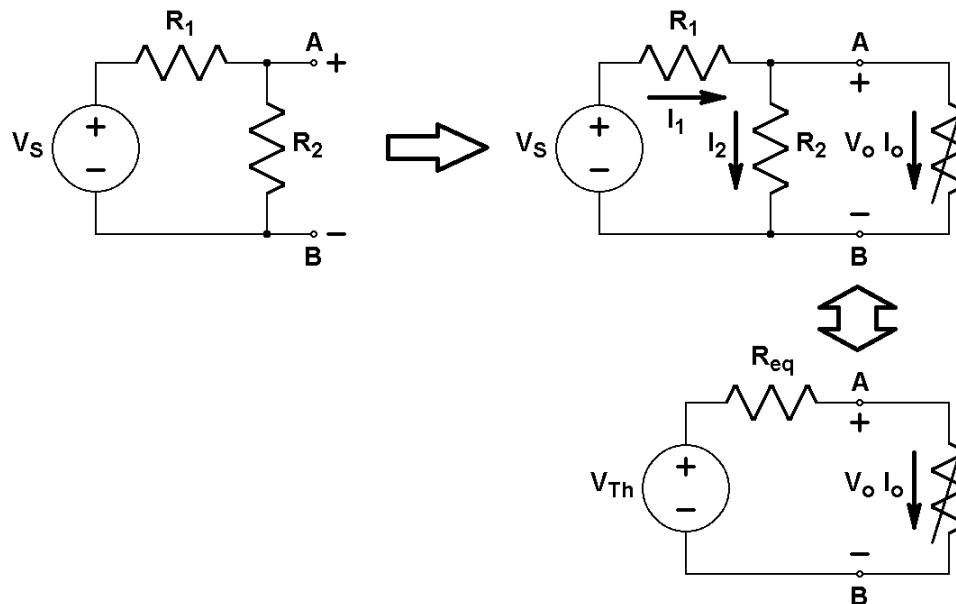
Ejemplos...

TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

- ♣ Ejemplo 1: obtención de los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de un divisor de tensión mediante la ecuación característica



Conectamos una resistencia de carga entre los terminales de salida A y B, obteniendo parejas de valores (V_o, I_o) para cada valor de dicha resistencia:



- *Ecuación característica:*
expresión de V_o en función I_o

$$V_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_o$$

$$V_o = V_{Th} - R_{eq} I_o$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

Identificando:

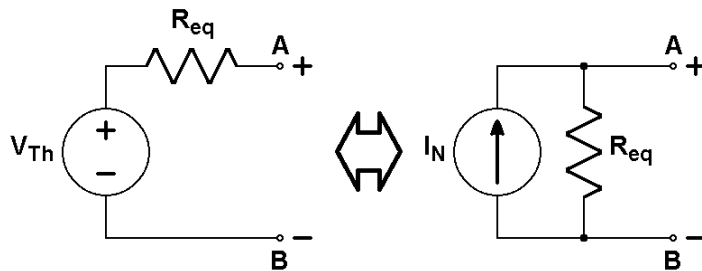
- *Tensión equivalente de Thévenin*: tensión en circuito abierto (valor de V_o cuando $I_o=0$):

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S$$

- *Resistencia equivalente*: pendiente de la recta (cambiada de signo):

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Y por equivalencia de fuentes (*equivalencia de equivalentes*):

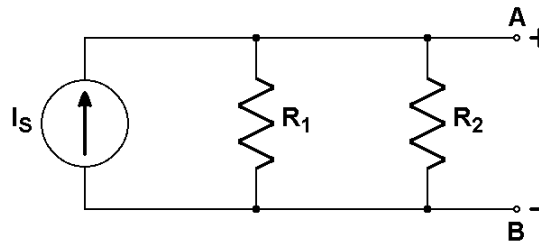


$$V_{Th} = R_{eq} I_N \Rightarrow I_N = \frac{V_{Th}}{R_{eq}}$$

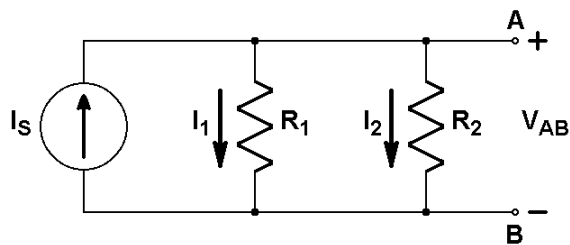
- *Corriente equivalente de Norton*: corriente en cortocircuito (valor de I_o cuando $V_o=0$):

TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

- ♣ Ejemplo 2: obtención de los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de un divisor de corriente mediante las definiciones de sus parámetros

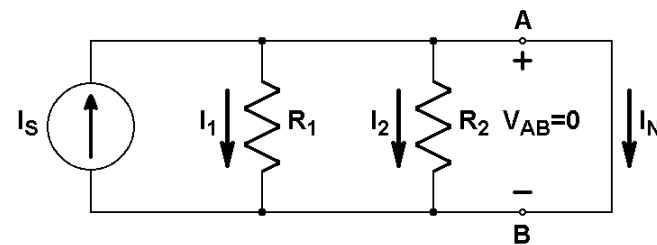


- *Tensión equivalente de Thévenin:*
tensión en circuito abierto



$$V_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_S$$

- *Corriente equivalente de Norton:*
corriente en cortocircuito

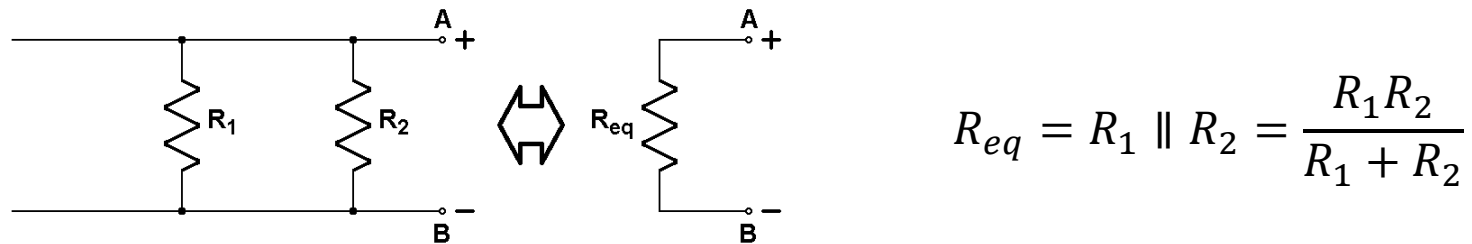


$$(I_1 = 0, I_2 = 0 \Rightarrow) \quad I_N = I_S$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

- *Resistencia equivalente:*

Al no haber ninguna fuente dependiente, anulamos las independientes y obtenemos la resistencia equivalente por asociación de los elementos pasivos



que coincide con el resultado esperado a partir de la *equivalencia de equivalentes*:

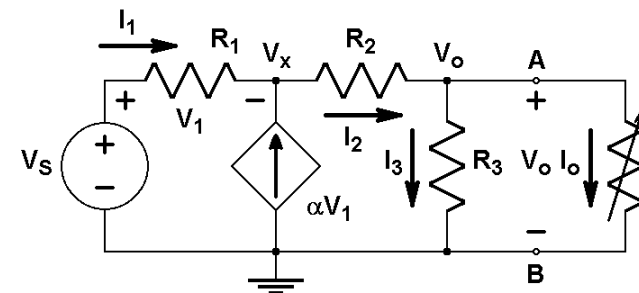
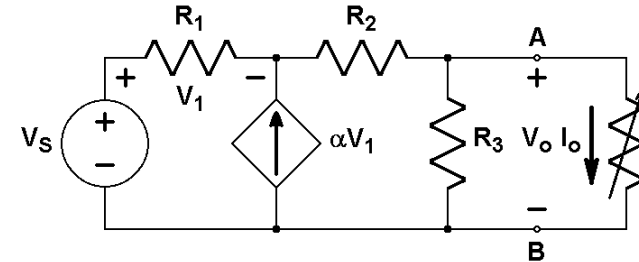
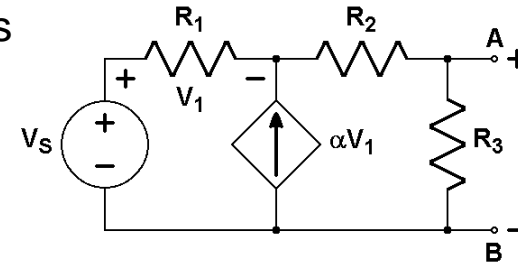
$$V_{Th} = R_{eq} I_N \Rightarrow R_{eq} = \frac{V_{Th}}{I_N} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

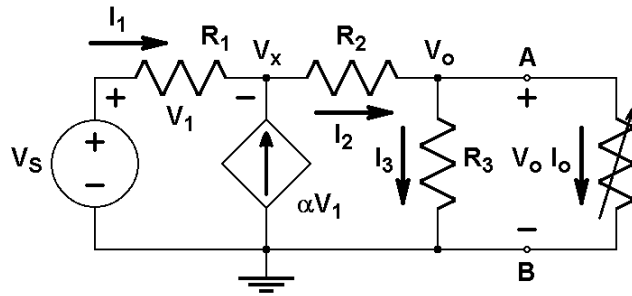
- ♣ Ejemplo 3: obtención de los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de un circuito con fuentes dependientes

Conectamos una resistencia de carga entre los terminales de salida A y B, obteniendo parejas de valores (V_o, I_o) para cada valor de dicha resistencia:

Analizamos mediante el método de tensiones de nodo, para obtener la *ecuación característica* del circuito de dos terminales, V_o en función de I_o :



TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales



$$\left. \begin{aligned} I_1 + \alpha V_1 - I_2 &= 0 \\ I_2 - I_3 - I_o &= 0 \end{aligned} \right\} (V_1 = V_S - V_x)$$

$$\frac{V_S - V_x}{R_1} + \alpha(V_S - V_x) - \frac{V_x - V_o}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_x - V_o}{R_2} - \frac{V_o}{R_3} - I_o = 0$$

Dos ecuaciones con tres incógnitas (V_x , V_o e I_o); eliminamos V_x entre ambas y obtenemos, V_o en función de I_o : la *ecuación característica* buscada

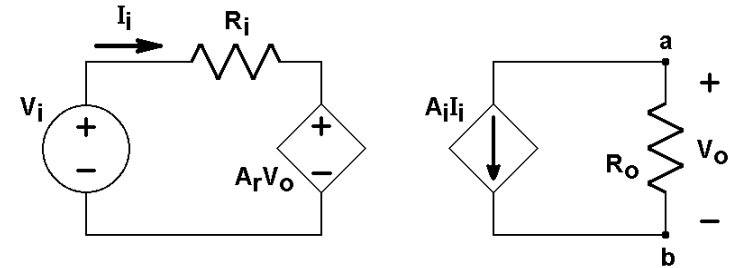
$$V_o = \frac{(1 + \alpha R_1)R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + \alpha R_1(R_2 + R_3)} V_S - \frac{(R_1 + R_2 + \alpha R_1 R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + \alpha R_1(R_2 + R_3)} I_o$$

$$V_o = V_{Th} - R_{eq} I_o \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} V_{Th} &= \frac{(1 + \alpha R_1)R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + \alpha R_1(R_2 + R_3)} V_S \\ R_{eq} &= \frac{(R_1 + R_2 + \alpha R_1 R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + \alpha R_1(R_2 + R_3)} \end{aligned} \right.$$

$$V_{Th} = R_{eq} I_N \Rightarrow I_N = \frac{V_{Th}}{R_{eq}} \Rightarrow I_N = \frac{1 + \alpha R_1}{R_1 + R_2 + \alpha R_1 R_2} V_S$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

- ♣ Ejemplo 4: circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de la red lineal vista desde los puntos a y b



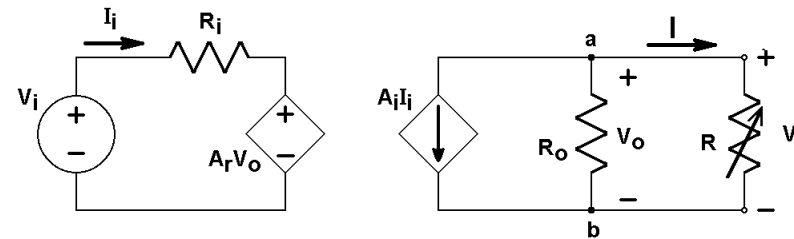
- 1) Identificando términos en su ecuación característica:

Para obtener $V(I)$ conectamos una resistencia de carga R entre a y b; $V_o \equiv V$

L.K.N.: $A_i I_i + V/R_o + I = 0$; “sobra” I_i

$V_i - R_i I_i - A_r V_o = 0$; $I_i = V_i/R_i - A_r V/R_i$

$A_i V_i/R_i - A_i A_r V/R_i + V/R_o + I = 0$



Finalmente,

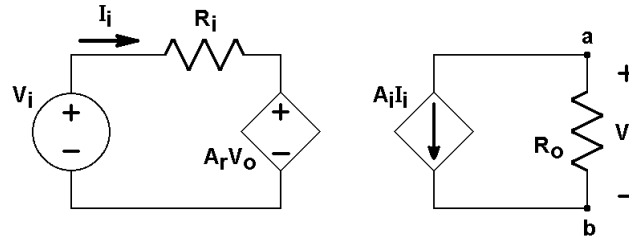
$$V(I) = \frac{A_i V_i R_o}{A_i A_r R_o - R_i} + \frac{R_i R_o}{A_i A_r R_o - R_i} I \Rightarrow V_{Th} = \frac{A_i V_i R_o}{A_i A_r R_o - R_i}, R_{eq} = -\frac{R_i R_o}{A_i A_r R_o - R_i}, I_N = -\frac{A_i V_i}{R_i}$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. d) Circuitos de dos terminales

2) Imponiendo condiciones de salida en circuito abierto y cortocircuito:

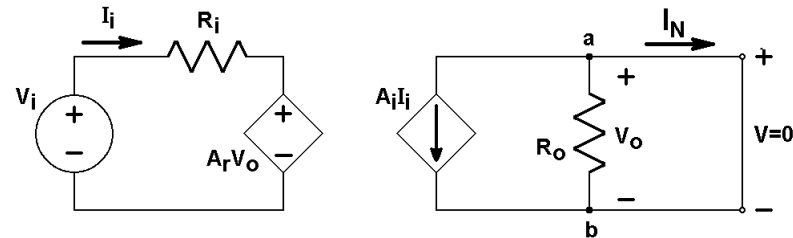
En circuito abierto, $V_{Th} = V_o = -R_o A_i I_i = -R_o A_i V_i / R_i + R_o A_i A_r V_{Th} / R_i$

$$\Rightarrow V_{Th} = \frac{A_i V_i R_o}{A_i A_r R_o - R_i}$$



En cortocircuito, $V_o \equiv V = 0 \Rightarrow I_{R_o} = 0$

$$\Rightarrow I_N = -A_i I_i = -A_i V_i / R_i$$



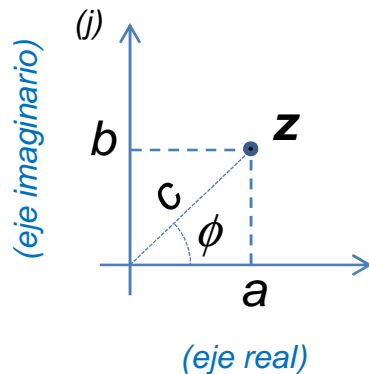
$$\therefore R_{eq} = \frac{V_{Th}}{I_N} = -\frac{R_o R_i}{A_i A_r R_o - R_i}$$

☠ ¡Atención!:

- En la expresión $V(I)$ no pueden figurar otras corrientes o tensiones que no sean valores nominales de fuentes independientes, ni tampoco la resistencia de carga

TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

- **Números complejos** ($j \equiv$ unidad imaginaria, $j = \sqrt{-1}$):



$$a + jb = c (\cos \phi + j \cdot \operatorname{sen} \phi)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \equiv |a + jb|$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Fórmula de Euler: $e^{j\phi} = \cos \phi + j \cdot \operatorname{sen} \phi$

Haciendo uso de los operadores “parte real” y “parte imaginaria”: $\begin{cases} \cos \phi = \operatorname{Re}\{e^{j\phi}\} \\ \operatorname{sen} \phi = \operatorname{Im}\{e^{j\phi}\} \end{cases}$

Entonces:

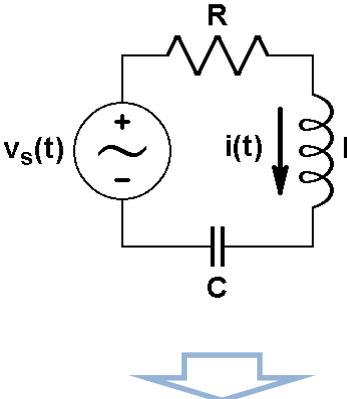
$$\boxed{\mathbf{z} = a + j \cdot b = c \cdot e^{j\phi}}$$

(formas $\underbrace{\hspace{1cm}}$ cartesiana $\underbrace{\hspace{1cm}}$ y $\underbrace{\hspace{1cm}}$ polar –o módulo-argumento–)

- “Complejo conjugado” de \mathbf{z} : $\mathbf{z}^* = a - j \cdot b = c \cdot e^{-j\phi} \Rightarrow \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^* = |\mathbf{z}|^2$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

Todas las redes lineales consideradas hasta aquí presentan la resistencia como único elemento pasivo. Si presentaran bobinas o condensadores, el sistema de ecuaciones a plantear sería integro-diferencial, al no ser válida la ley de Ohm para estos dos elementos.

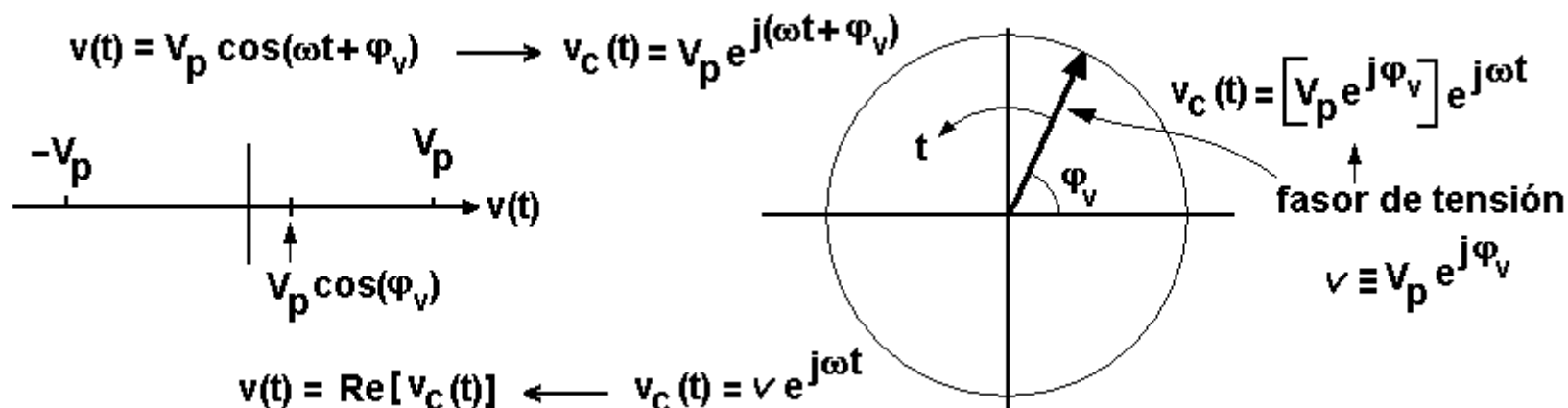
$$\begin{array}{lll} v(t) = R \cdot i(t) & \text{(resistencias)} \\ v(t) = L \frac{di(t)}{dt} & \text{(bobinas)} \\ i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt & \text{(condensadores)} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} v(t) = R \cdot i(t) \\ v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \end{array}} \right\} \quad \begin{array}{c} \text{Circuit diagram showing a voltage source } v_s(t) \text{ in series with a resistor } R, \text{ an inductor } L, \text{ and a capacitor } C. \text{ The current } i(t) \text{ flows clockwise through the loop.} \end{array}$$


$$v_s(t) - R \cdot i(t) - L \frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0$$

Sin embargo, cuando las fuentes independientes son sinusoidales, mediante la **formulación fasorial**, la **ley de Ohm** puede extenderse también a bobinas y condensadores.

TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

Cuando la única fuente independiente es sinusoidal, la resolución de las ecuaciones del circuito se puede trasladar al espacio complejo, de tal modo que las ecuaciones integro-diferenciales se convierten en ecuaciones algebraicas, y se recuperan las relaciones óhmicas entre corrientes y tensiones (complejas), y, sobre todo, podemos utilizar los métodos aplicables a sistemas lineales: superposición, Thévenin y Norton.



En el espacio complejo, y para funciones con dependencia temporal $e^{j\omega t}$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} [v e^{j\omega t}] = j\omega [v e^{j\omega t}] \\ \int [v e^{j\omega t}] dt = \frac{1}{j\omega} [v e^{j\omega t}] \end{array} \right.$$

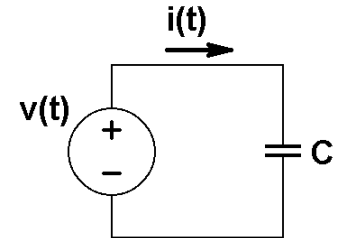
TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

Veamos qué forma adoptan las relaciones v-i cuando se extiende al espacio complejo la resolución de algunos circuitos sencillos:

- **Circuito capacitivo de señal alterna**

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \phi_v) \rightarrow v_c(t) = v e^{j\omega t}, \text{ siendo } v \equiv V_p e^{j\phi_v}$$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \rightarrow i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt} = j\omega C v_c(t) = j\omega C V_p e^{j\phi_v} e^{j\omega t} = \imath e^{j\omega t}, \text{ con } \imath \equiv j\omega C V_p e^{j\phi_v}$$



Con una fuente sinusoidal de frecuencia ω , todas las señales del circuito varían con la misma dependencia temporal

$$\frac{v_c(t)}{i_c(t)} = \frac{v}{\imath} = \frac{V_p e^{j\phi_v}}{j\omega C V_p e^{j\phi_v}} = \frac{1}{j\omega C} \equiv Z_C : \text{Impedancia del condensador}$$

De forma inversa, mediante la ley de Ohm (compleja) $\boxed{v = \imath \cdot Z}$, se podría obtener el fasor corriente:

$$\begin{cases} |\imath| = \frac{|v|}{|Z_C|} = V_p \cdot \omega C \\ \phi(\imath) = \phi_v - \phi(Z_C) = \phi_v + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Y la variable temporal se puede obtener como $i(t) = \text{Re}\{\imath e^{j\omega t}\}$

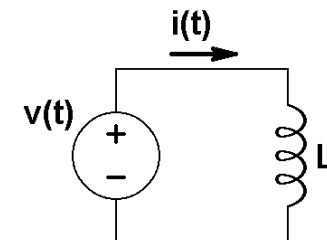
TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

- Circuito inductivo de señal alterna**

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \phi_v) \rightarrow v_c(t) = v e^{j\omega t}; \quad i(t) \rightarrow i_c(t) = i e^{j\omega t}$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \rightarrow v e^{j\omega t} = L j\omega i e^{j\omega t} \rightarrow \frac{v}{i} = j\omega L \equiv Z_L : \text{Impedancia de la bobina}$$

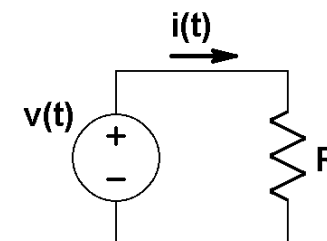
$$\begin{cases} |i| = \frac{|v|}{|Z_L|} = \frac{V_p}{\omega L} \\ \phi(i) = \phi_v - \phi(Z_L) = \phi_v - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



- Circuito resistivo de señal alterna**

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \phi_v) \rightarrow v_c(t) = v e^{j\omega t}; \quad i(t) \rightarrow i_c(t) = i e^{j\omega t}$$

$$v(t) = R \cdot i(t) \rightarrow v = R \cdot i \rightarrow \frac{v}{i} = R : \text{Impedancia de la resistencia}$$



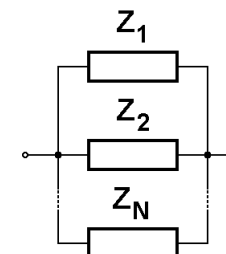
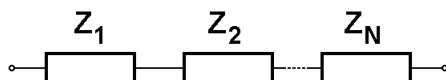
–Se puede demostrar que la ley de Ohm generalizada es también válida para cualquier asociación de elementos pasivos:

$$v = i Z_{eq}$$

(pero por comodidad, usaremos “v” e “i” de forma habitual para designar los fasores tensión y corriente)

TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

- La obtención de la impedancia equivalente de una asociación serie o de una asociación paralelo, se calcula de manera análoga a la de las respectivas asociaciones de resistencias:



- ♣ Ejemplo: Hallar el valor nominal de dos elementos pasivos tales que su impedancia equivalente sea $Z_{eq} = (7 - 3j)\Omega$ para la frecuencia de la red eléctrica

$$Z_{eq} = \sum Z_k \qquad Z_{eq} = \left(\sum Z_k^{-1} \right)^{-1}$$

- Si los dos elementos están en serie,

$$Z_1 = 7\Omega = R_1; \quad Z_2 = -3j\Omega = 1/j\omega C \Rightarrow C = 1/3\omega;$$

$$C = 1/300\pi = 1,06\text{mF}$$

- Si los dos elementos están en paralelo,

$$\frac{1}{7-3j} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_2}; \quad \frac{7+3j}{58} = \frac{7}{58} + \frac{3}{58}j = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{58}{7}\Omega, \quad Z_2 = \frac{58}{3j}\Omega = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow C = \frac{3}{58\omega} = 164,6\mu\text{F}$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

- ♣ Ejemplo: Deducir la expresión de la corriente que circula por la siguiente malla, sabiendo que $v_s(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$

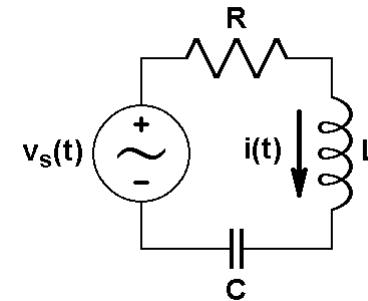
Puesto que la fuente independiente es sinusoidal, utilizamos la **formulación fasorial** para analizar el circuito:

$$v_s(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\{V_m \cdot e^{j(\omega t + \phi)}\} \Rightarrow v_s = V_m \cdot e^{j\phi}$$

$$v_R = R \cdot i \quad (R, \text{ resistencia o impedancia resistiva})$$

$$v_L = Z_L \cdot i \quad (Z_L = j\omega L, \text{ impedancia inductiva})$$

$$v_C = Z_C \cdot i \quad (Z_C = \frac{1}{j\omega C}, \text{ impedancia capacitiva})$$



$$v_s - R \cdot i - Z_L \cdot i - Z_C \cdot i = 0 \Rightarrow i = \frac{v_s}{R + Z_L + Z_C} = \frac{v_s}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{v_s}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j \cdot \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

siendo: $v_s = V_m \cdot e^{j\phi}$

luego:
$$i = \frac{V_m e^{j\phi}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j \cdot \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

Finalmente, la expresión temporal de la corriente:

$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re}\{i \cdot e^{j\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\phi} e^{-j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} e^{j\omega t} \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j \left(\omega t + \phi - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)} \right\} \\ i(t) &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left(\omega t + \phi - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{aligned}$$

Leyes de Kirchhoff en notación fasorial:

1) L.K.N.: en un nodo, $\Sigma i_k(t) = 0$ (Conservación de la carga)

$$\Rightarrow \Sigma \text{Re}\{I_k \exp(j\omega_k t) \exp(j\phi_k)\} = \text{Re}\Sigma\{I_k \exp(j\omega_k t) \exp(j\phi_k)\} = 0;$$

esto se sigue verificando si imponemos que $\Sigma I_k \exp(j\omega_k t) \exp(j\phi_k) = 0$;

y si $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N = \omega \Rightarrow \Sigma I_k \exp(j\phi_k) = 0$;

finalmente, definiendo los fasores corriente como $i_k \equiv I_k \exp(j\phi_k) \Rightarrow \boxed{\Sigma i_k = 0}$

2) L.K.M.: en una malla, $\Sigma v_k(t) = 0$ (Potencial eléctrico, conservativo)

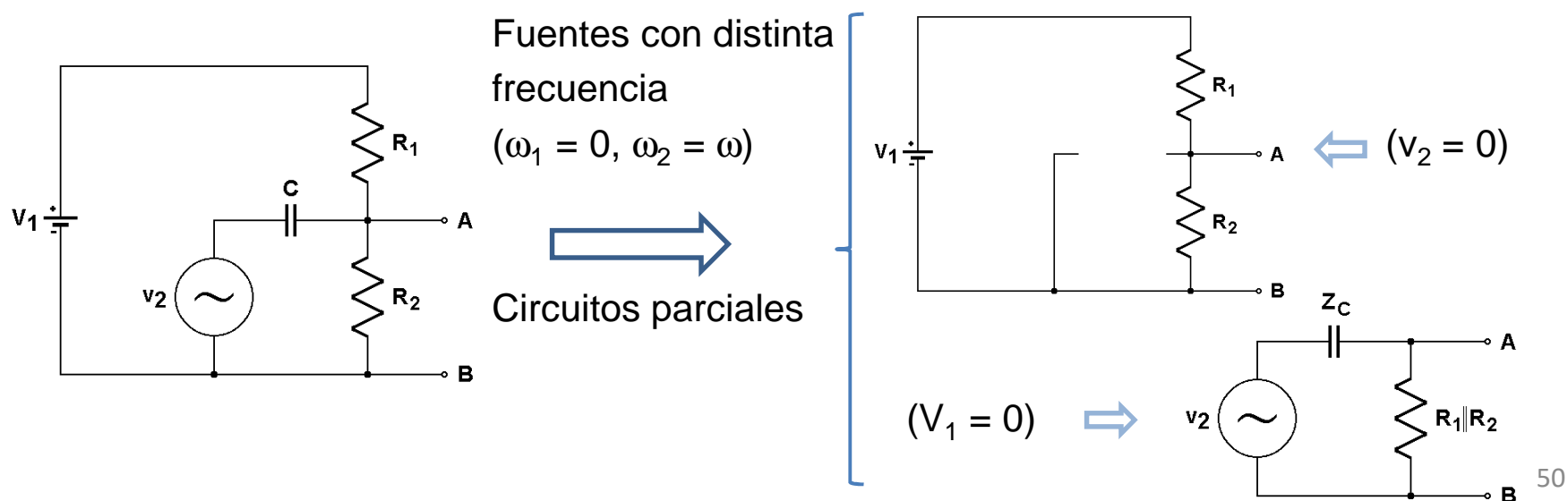
y mediante el mismo proceso se obtiene que si $v_k \equiv V_k \exp(j\phi_k) \Rightarrow \boxed{\Sigma v_k = 0}$

Observación: Las leyes de Kirchhoff en notación fasorial sólo son válidas en circuitos con **fuentes sinusoidales de la misma frecuencia**

Resolución de circuitos de corriente alterna (c.a.)

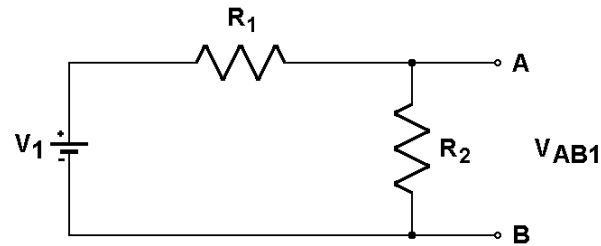
- 1) Si hay elementos no resistivos, se expresan las señales de las fuentes en forma fasorial
- 2) Se aplican los métodos de resolución de circuitos considerando la ley de Ohm generalizada y las impedancias de los elementos pasivos
- 3) Si el circuito tiene fuentes de distintas frecuencias, simultáneamente se debe hacer uso del principio de superposición
- 4) A partir de los resultados en notación fasorial, se obtienen las expresiones temporales

♣ Ejemplo: Obtener la expresión temporal de la tensión en la resistencia R_2 , siendo la fuente de tensión alterna $v_2 = v_2(t) = V_p \cos(\omega t)$



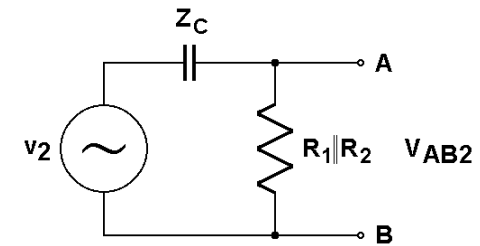
TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

$$V_{AB1} = I R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1$$



Expresando $v_2(t)$ en forma fasorial, $v_2 = V_p e^{j0} = V_p$

$$v_{AB2} = i R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \parallel R_2}{Z_C + R_1 \parallel R_2} v_2 = \frac{1}{\frac{1}{j\omega(R_1 \parallel R_2)C} + 1} V_p =$$



$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega(R_1 \parallel R_2)C)^2}}} V_p = V_m e^{-j\varphi}, \quad \text{siendo} \quad \varphi \equiv \arctg \frac{-1}{\omega(R_1 \parallel R_2)C}$$

$$\text{fasor} \times e^{j\omega t} \rightarrow v_{AB2}(\omega) = V_m e^{j(\omega t - \varphi)} \rightarrow \text{Re}\{v_{AB2}(\omega)\} = v_{AB2}(t)$$

$$v_{AB}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 + V_m \cos(\omega t - \varphi)$$

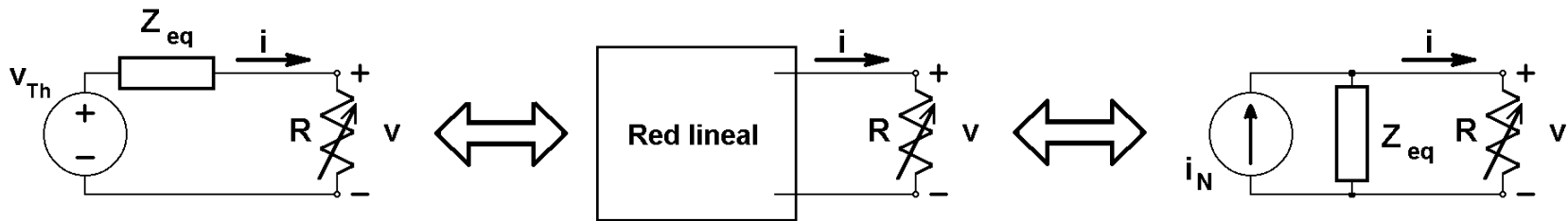
TEMA 1: Teoría de redes lineales. e) Impedancia y análisis fasorial

¡Atención!:

- La impedancia de un elemento pasivo no resistivo depende de la frecuencia de la fuente que actúa sobre él
- En el circuito parcial que resulta al anular V_1 , se puede simplificar el paralelo de las resistencias porque no se pide la corriente por ninguna de ellas
- Para pasar a la expresión temporal, basta con recuperar la función trigonométrica de partida, y añadir en el argumento la fase del fasor solución

Teoremas de Thévenin y Norton en circuitos de corriente alterna (frecuencia única)

- Todo circuito lineal se comporta de la misma manera que un circuito formado por una fuente de tensión en serie con una impedancia
- Todo circuito lineal se comporta de la misma manera que un circuito formado por una fuente de corriente en paralelo con una impedancia



Algunas definiciones de uso frecuente en señales dependientes del tiempo

Dada una señal $v(t)$ periódica, con periodo T , se definen:

- Valor medio (o “valor de continua”): $\tilde{v} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt$

Para señales sinusoidales, $\tilde{v} = 0$

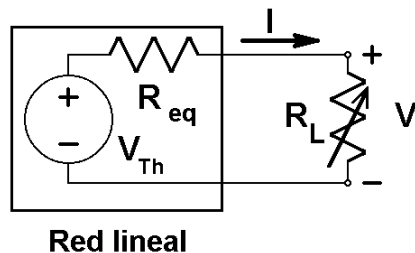
- Valor eficaz (o valor “rms”): $V_{ef} = v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt}$

Para señales sinusoidales, $V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$, siendo V_p la amplitud o valor de pico de la señal.

Significado del valor eficaz: en el caso de que la señal sea una corriente $i(t)$, es el valor que tendría que tener una corriente continua I_{ef} para producir la misma disipación de calor que $i(t)$ en un periodo.

Transferencia de señal a una carga

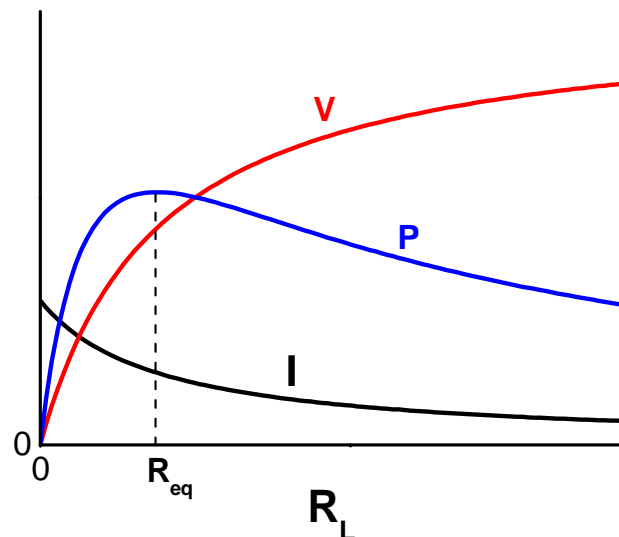
Al conectar una resistencia de carga R_L entre dos puntos o terminales de una red lineal, se produce la transferencia de corriente, tensión y potencia de la red a la carga:



$$I(R_L) = \frac{V_{Th}}{R_{eq} + R_L}; \quad V(R_L) = \frac{R_L}{R_{eq} + R_L} V_{Th};$$

$$P(R_L) = I^2 R_L = \frac{R_L}{(R_{eq} + R_L)^2} V_{Th}^2$$

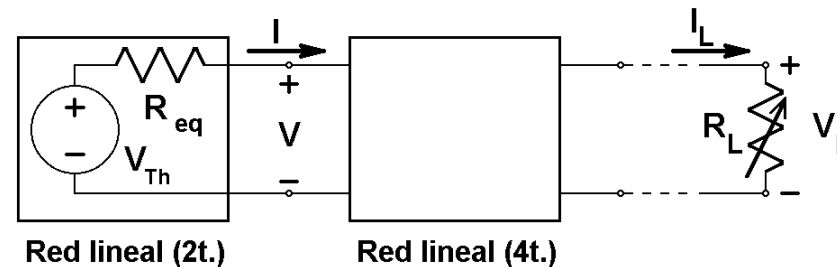
Si representamos estas dependencias frente a R_L , se observa que:



- La transferencia de corriente es máxima si $R_L=0$
- La transferencia de tensión es máxima si $R_L \rightarrow \infty$
- La transferencia de potencia es máxima si $R_L = R_{eq}$
- En el caso de redes con impedancia de Thévenin no resistiva la transferencia de potencia es máxima si $Z_L = Z_{eq}^*$

Transferencia de señal a un circuito de cuatro terminales

En ocasiones, el receptor de la señal entregada por una red lineal de dos terminales no es una carga, sino otro circuito intermedio de cuatro terminales que a su vez se encarga de transferir la señal a la carga o bien a etapas posteriores de un circuito más complejo:



En este caso, los criterios de transferencia máxima de señal a la red de cuatro terminales son los mismos, si se considera que la carga que ve la red de dos terminales es la “resistencia de entrada” de la segunda red.

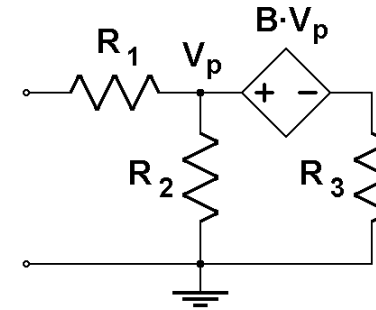
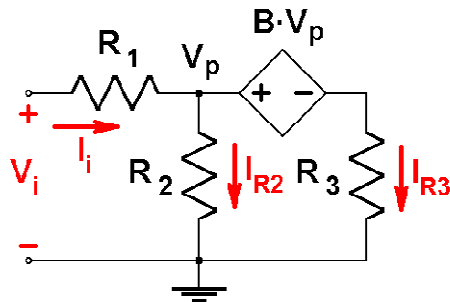
- ¿Cómo se calcula la resistencia de entrada de un circuito?: $R_i = \frac{V_i}{I_i}$

siendo V_i e I_i la tensión y la corriente en el puerto de entrada de ese circuito.

Si el circuito tiene elementos no resistivos, entonces se habla de impedancia de entrada.

TEMA 1: Teoría de redes lineales. f) Máxima transferencia de señal en la interconexión de circuitos

♣ Ejemplo: Hallar la resistencia de entrada del circuito



$$R_i = \frac{V_i}{I_i}; \quad I_i = I_{R2} + I_{R3} = \frac{V_p}{R_2} + \frac{V_p - BV_p}{R_3} = V_p \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1-B}{R_3} \right);$$

$$V_i = I_i R_1 + V_p = I_i R_1 + I_i \frac{R_2 R_3}{R_2(1-B) + R_3} = I_i \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2(1-B) + R_3} \right);$$

$$\Rightarrow R_i = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2(1-B) + R_3}$$