Media → $\mu = E|X| = \sum_{i=1}^{K} x_i P(x_i)$ Varianza $\sigma^2 = V(x) = \sum_{i=1}^{K} (x_i - E|X|)^2 P(x_i) = E(x^2) - E(x)^2$

En modelo continuo es similar cambiando p por función de densidad $f(x)$

DT → Desviación típica, sirve para medir la dispersión respecto a los datos originales, es la raíz cuadrada de la varianza

CA → ~~Cot~~ covarianza muestral $cov_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ si el crecimiento de x implica crecimiento de y $cov > 0$, a la inversa $cov < 0$, si es 0 indica que no parecen estar relacionadas si son ind $cov = 0$

La suma de todas las probabilidades debe ser 1 y las probabilidades deben ser estrictamente positivas

Si $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$; $P(A^c) = 1 - P(A)$; $P(\emptyset) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

→ Sean $A_1, \ldots, A_n$ sucesos entonces $P(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1 \leq j < l \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\cap_{j=1}^{n} A_j)$

Si 2 sucesos son independientes → $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; si son independientes $P(A|B) = P(A)$

$P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$

Función de distribución != función de masa ; $F_X(x) = P(X \leq x)$

$P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$

Vectores aleatorios:

función de probabilidad conjunta $P(x,y) = P(X=x, Y=y)$ debe cumplir que $p(x,y) \geq 0$ y $\sum_{x_0} \sum_{y} P(x,y) = 1$

función de distribución conjunta $F(x_0, y_0) = P(X \leq x_0, Y \leq y_0)$

→ Las distribuciones marginales están asociadas a las variables del vector por separado — probabilidad de que X tome x valor sin importar de y

$P_x(x) = P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ — si $f_T(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ → independientes

→ Distribuciones condicionadas

$$P(y|x_0) = P(Y=y | X=x_0) = \frac{P(X=x_0, Y=y)}{P(X=x_0)} = \frac{P(x_0, y)}{P_X(x_0)}$$

→ Esperanza, la esperanza de un vector aleatorio es otro vector con las esperanzas de cada variable

→ Covarianza, medidor de relación lineal entre 2 variables

$cov(x,y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

→ Correlación, medida de relación lineal entre 2 variables

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}}$$

Convolución

Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con funciones de densidad $f_{X_1}(x_1)$ y $f_{X_2}(x_2)$, la función de densidad $Y = X_1 + X_2$ $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-x) f_{X_2}(x)\,dx$

Modelos de distribución

Pruebas de Bernoulli, experimentos aleatorios con $P(E)$ y $P(F)$ excluyentes

$P(x_1, \dots, x_n) = p^K (1-p)^{n-K}$

- Variables binomiales $X \sim B(1,p)$ si toma valor 1 en caso de éxito con probabilidad p y 0 si fracasa con $1-p$

  $P_X(K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} p^K (1-p)^{n-K}$ K es número de éxitos

  Si $X \sim B(n,p)$ $n \geq 1$, $p \in (0,1) \rightarrow E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$, $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$

- Modelo de Poisson $X \sim P(\lambda)$ si tienes binomial $n >> 1$ y $0 < p << 1$ entonces puedes aproximar a Poisson $\lambda = np$

  $P_X(K) = P(X=K) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$ En poisson media $= \lambda$

- Modelo geométrico, X representa el nº fracasos hasta 1º op con éxito

  $P_X(n) = (1-p)^n p$, la esperanza $= \frac{1-p}{p}$; $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n = \frac{p(1-p)^0}{1-(1-p)}$

- Modelo uniforme, sea $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ decimos $X \sim U(a,b)$ si X es continua con densidad constante dentro del intervalo $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

  $\sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$ $V(X) = E((X-E(X))^2) = -[a-(a+b)/2]^3$

- Modelo exponencial, sea X una V. A continua y ≥ 0. Decimos que $X \sim exp(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ si su densidad $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

  $E(X) = 1/\lambda$ $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1/\lambda^2$ $\sigma(X) = 1/\lambda$

- Modelo normal

  $F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

  si $X \sim N(\mu=0, \sigma=1)$ decimos X normal estándar tipificada

  Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, $E(X) = \mu$, $\sigma_X = \sigma$

  Si $X \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (tipificar variable)

  Si X sigue una distribución binomial con $n > 10$, $np > 5$ y $nq > 5$ $(q = 1-p)$ entonces se puede aproximar a la normal $N(np, \sqrt{npq})$

  Si $X = \sum_{\gamma=1}^{10.000} X_\gamma$ por el TCL lo puedes aproximar $N(\mu = \text{media}, \sigma = \sqrt{nV(X)})$ $nE[X]$

Función característica de una V. A

$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))^2$

$= \varphi_X(t) = \sum_{x \in A} e^{itx} p_X(x)$

Función erf

$erf(x) = F_{N(0,1)}(x) = P(N(0,1) \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Sea $\lambda, \mu > 0$ decimos que una VAX es de tipo $\Gamma(\lambda, \mu)$ si

$F_{\lambda,\mu}(x) = \begin{cases} C_{\lambda,\mu}\, x^{\lambda-1} e^{-\mu x} & x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$ $C_{\lambda,\mu} = \frac{\mu^\lambda}{\Gamma(\lambda)}$

$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx = \mu^\lambda \Gamma(\lambda)$

Si $X \sim \Gamma(\lambda, \mu)$ $E(X) = \frac{\lambda}{\mu}$ $V(X) = \frac{\lambda}{\mu^2}$

El peso de una galleta $\sim N(50, 6)$ 10 galletas $\sim N(50 \cdot n, \sqrt{n} \cdot \sigma)$

ruleta rusa, sigues tirando mientras media > 0