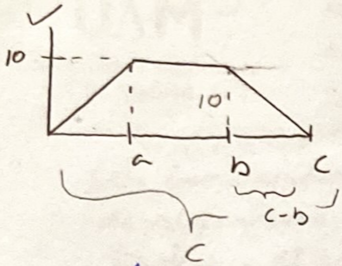
Representación de la ley de variación de potencial a lo largo del eje x

1: Obtener la expresión analítica del potencial en cada una de las tres regiones definidas en la figura



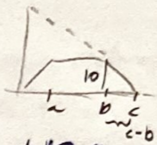
$y = mx + n$ en $0<x<a$ $\quad m>0 \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad n = 0$

$y = \frac{10}{a}x$

$y = mx+n$ en $a<x<b$ $\quad m=0 \quad n=10$

$y = 10$

$y = mx+n$ en $b<x<c$ $\quad m<0 \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



en el punto $x = c \cancel{-b}$ $y=0$ $\quad 0 = mc+n \quad m = -\frac{10c}{c-b}+n \quad n = \frac{+10c}{c-b}$

$y = \frac{-10}{c-b}x + \frac{10}{c-b}c \qquad y = \frac{+10}{c-b}(c-x)$

$$V(x) = \begin{cases} \frac{10}{a}x & 0<x<a \\ 10 & a<x<b \\ \frac{10}{c-b}(c-x) & b<x<c \end{cases}$$

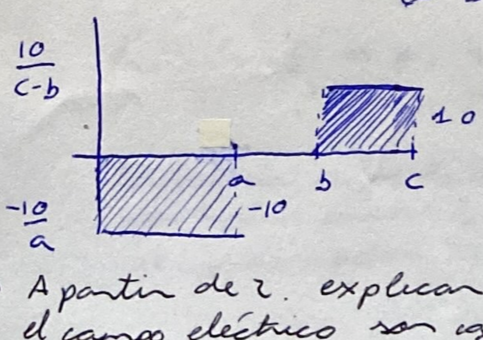
2: Calcular el campo eléctrico en las citadas tres regiones y efectuar una representación gráfica de la misma

$$E(x) \quad \begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{10}{a}x\right) = -\frac{10}{a} && 0<x<a \\ &-\frac{\partial}{\partial x}(10) = 0 && a<x<b \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{10}{c-b}(c-x)\right) = \frac{10}{c-b} && b<x<c \end{aligned}$$

$$\int_0^a \frac{10}{a}dx = \frac{10x}{a}\Big|_0^a = \frac{10\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}} - \frac{10\cdot 0}{a} = 10$$

$$\int_b^c \frac{-10}{c-b} = \frac{-10x}{c-b}\Big|_b^c = \frac{-10\cdot c}{c-b} - \frac{-10\cdot b}{c-b} = \frac{-10\cdot c}{c-b} + \frac{10b}{c-b} =$$

$$= \frac{-10c+10b}{c-b} = \frac{-10\cancel{(c-b)}}{\cancel{(c-b)}} = -10$$



3 A partir de 2. explicar por qué las dos áreas abarcadas por el campo eléctrico son iguales y de diferente signo

Esto se debe a que el campo eléctrico es conservativo

Hoja nº ....

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

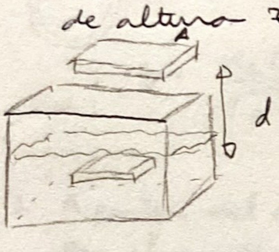
Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) ÚNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Un condensador plano paralelo formado por dos placas rectangulares de superficie A, separadas una distancia d, y el dieléctrico es aire. El condensador se carga con una densidad superficial de carga σ. A continuación se sumerge lentamente en glicerina, un dieléctrico de permitividad ε, manteniendo las placas horizontales. Calcular:

1º La energía electrostática cuando el líquido ocupa un espacio de altura z, (z<d)



$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon|\vec{E}|^2 \quad \text{dentro de un dieléctrico } |\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$U_T = U_G + U_a = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}\int_0^z dV + \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}\int_z^d dV \Rightarrow$$

$$U_T = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}\cdot A\cdot z + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}A(d-z)$$

2º Cuando el condensador se encuentra todavía en el aire

$z=0 \Rightarrow$ Volumen de glicerina $=0$

$U = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}Ad$ $\quad\varepsilon_0$ = permitividad eléctrica del aire

3º Cuando está completamente sumergido

$z=d$

$U = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}Ad$ $\quad\varepsilon$ = permitividad eléctrica de la glicerina

4º Calcular la fuerza y la presión que realiza el campo eléctrico sobre el condensador al sumergirlo en el líquido. La fuerza eléctrica ¿Tiende a introducirlo o, por el contrario, tiende a expulsarlo de la glicerina?

$z=d \quad |\vec{E}| = \frac{dU}{\partial d} \quad U = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}Ad \rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}A$

$$\text{Presión} = \frac{F}{S} \rightarrow p = \frac{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}A}{A} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}$$

La fuerza, sigue la dirección del campo eléctrico el cual va hacia arriba y por tanto, la fuerza tenderá a expulsar al condensador del líquido

Hoja nº ....

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

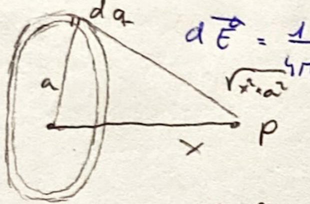
Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Calcular el Campo Eléctrico E en un punto $P(x,0,0)$ cualquiera del eje de un anillo de radio a y carga total Q de las dos formas siguientes:

1 Cálculo directo a partir de la ley de Coulomb



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{x^2+a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\,dq}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$V = \frac{K_e Q}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \vec{E} = \frac{x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}} \cdot \int_0^Q dq = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}} \vec{i}$$

2 A partir del gradiente de la función potencial $V(x)$ creado por el anillo en un punto del eje

$$V(x) = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \int_0^Q dq = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+a^2}}$$

$$E = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{Q}{(x^2+a^2)^{3/2}} \cdot 2x\,\vec{i}\right) = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}} \vec{i}$$

3 Desde el resultado 2, extender los cálculos de V y E en un punto del eje cuando tenemos un disco uniformemente cargado de radio R y densidad superficial de carga σ

$$dV = \frac{K\,dq}{\sqrt{x^2+a^2}} = K \frac{\sigma 2\pi\, a\,da}{(x^2+a^2)^{1/2}} \qquad V(x) = \int_0^R K\sigma\pi (x^2+a^2)^{-1/2}\, 2a\,da$$

$$V(x) = 2K\pi \cdot \left[\sqrt{x^2+R^2} - x\right]$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} = -2\pi K\sigma \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+R^2}} - 1\right) = 2\pi K\sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) \vec{i}$$

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

ÚNICAMENTE PARA USO ESCOLAR