Ejercicios EDyL

1) ¿Cuántos números entre 100 y 1000 se pueden formar con dígitos entre 0 y 4 con todas sus cifras distintas?

pueden elegir entre 0 y 4 - el numero elegido antes

$4 \cdot 4 \cdot \overset{-2}{3} = 48$

pueden elegir 1, 2, 3, 4

Otra forma, todos los numeros de 3 cifras con dígitos entre 0 y 4 menos los números de 3 cifras que empiezan por 0 (todos con cifras diferentes (sin repeticion))

$5 \cdot 4 \cdot 3 - \underline{1} \cdot 4 \cdot 3 = 60 - 12 = 48$

2) ¿Cuántas palabras de longitud 8 pueden formarse con las 5 vocales si la "a" debe aparecer 3 veces y la "u" 2 veces exactamente?

Caso particular

a	a	a	u	u			

quedan 3 vocales posibles, por la regla del producto 3^3

¿Cuántos casos particulares hay?

1- Colocamos las a, como no importa el orden $C(8,3)$

2- Colocamos las u en los espacios restantes $C(5,2)$

Aplicamos la regla del producto $C(8,3) \cdot C(5,2) \cdot 3^3 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot 3^3$

3) En un ascensor de un edificio de 5 plantas viajan cuatro personas (A, B, C, D). Sabiendo que todas las personas se bajan en alguna planta, ¿cuántas opciones hay?

4 personas cada una tiene 5 opciones para bajarse

5^4 ya que hay que elegir 4 numeros entre 5 cifras con rep

4) ¿De cuántas maneras es posible distribuir una moneda de 20 céntimos, una de 10, una de 5 y 25 de 1 entre cinco niños, de forma que el mayor reciba 15 o 20 cent

15 cent → $10+5$ ó $10+1+1+1+1+1$ ó $\overbrace{1+1+1+1+1\dots}^{10}+5$ ó $\underbrace{1111\dots1}_{15}$

20 cent → 20 ó $\overbrace{1+1+1+\dots+1}^{20 \text{ veces}}$ ó $10+\overbrace{1+1\dots+1}^{10 \text{ veces}}$ ó $5+\underbrace{1+1\dots+1}_{15 \text{ veces}}$ ó $10+5+\underbrace{1\dots+1}_{5 \text{ veces}}$

la des a cualquiera de los 4

$20 \to 4 \cdot 4 \cdot C_R(4,25)$ y así con todas con la regla de la suma

la moneda de 10 se puede dar a 4 personas

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra RIFIRRAFE de manera que las dos "I" vayan siempre juntas?

R × 3
II × 1
F × 2
A × 1
E × 1

Consideramos las dos I como un bloque

1- Colocamos las II $C(8,1)$, luego colocamos las R $C(7,3)$, luego las F, $C(4,2)$, las A $C(2,1)$ y la E $C(1,1)$

$$\frac{8!}{(8-1)!}\cdot\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{(2-1)!\cdot 1!}=\frac{8!\cdot\cancel{7!}\cdot\cancel{4!}\cdot\cancel{2!}}{\cancel{7!}\cdot\cancel{4!}\cdot 3!\cdot 2!\cdot\cancel{2!}}=$$

$$=\frac{8!}{3!\cdot 2!}$$ //

(También vale pensar 8 letras con repeticiones 3 R y 2 F)

Se distribuyen 100 sellos iguales entre 5 seminarios. En los 2 mayores se colocan 50 de esos sellos, ¿Cuántas distribuciones distintas se pueden plantear?

1- 50 sellos a dos seminarios
2- 50 sellos a los 3 restantes

$CR(2,50) + CR(3,50) = C(2+50-1,\ 50) + C(3+50-1,\ 50) = C(51,50) + C(52,5$…

En un grupo de n hombres y n mujeres ¿De cuántas maneras se puede hacer una fila que no deje a nadie fuera y donde hombres y mujeres van alternando?

$\underline{n}\cdot\underline{n}\cdot(n-1)\cdot(n-1)$

elegir un hombre entre los que hay — elegir una mujer — hombre entre los que quedan — mujer entre los que quedan

1º O empezamos eligiendo mujer o empezamos eligiendo hombre por la regla de la suma

$n!\,n!\cdot 2$

¿Cuántos bytes tienen exactamente 2 unos?

byte == 8 bits   caso part. | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1

Casos particulares: $C(8,2)$

¿Al menos cuatro 1's?

O tiene 4 unos o tiene 5 unos … o tiene 8 unos
Regla de la suma

→ ¿Cuántas maneras se pueden repartir 10 monedas iguales en cinco recipientes distintos?

monedas iguales → indistinguibles

$CR(5,10) = C(14,10)$

¿Si las monedas son diferentes?

$PR(5,10) = 5^{10}$

→ Si hay 36 formas de escoger 2 personas de un colectivo, ¿cuál es el tamaño del colectivo?

Seleccionar dos personas → no importa el orden

$C(x,2) = 36$ $\qquad \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = 36$ $\qquad \frac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} = 36 \cdot 2!$

$x^2 - x = 78$ $\qquad x^2 - x - 72 = 0$

$\frac{+1 \pm \sqrt{1-4(-72)}}{2}$ $\rightarrow 9$, $\cancel{-8}$ No puede haber soluciones < 0

→ Supongamos que cada persona tiene tres iniciales en un alfabeto de 26 letras ¿Cuántos habitantes tiene que tener una población para estar seguro que 2 habitantes tienen mismas letras?

Importa el orden, no es lo mismo DAV que AVD

$PR(26,3)$ = todas las formas de ordenar esas 26 letras la siguiente si o si debe tener iniciales repetidas

$26^3 + \underline{1}$

→ Las matrículas de los coches consisten en tres consonantes y 4 dígitos, en ese orden, si hay 21 consonantes y 10 dígitos ¿cuántas matrículas distintas hay?

1- Consonantes $\qquad$ 2- los números

$PR(21,3)$ $\qquad PR(10,4) \xrightarrow{\text{producto}} 21^3 \cdot 10^4$

Si no se permite repetir consonantes

$P(21,3) \cdot PR(10,4) = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 10^4$

→ ¿Cuántas formas distintas hay de rellenar una quiniela con 14 partidos si

ⓐ Se marcan 14 simples

Por cada marcada hay 3 opciones $PR(3,14) = 3^{14}$

(*) → ¿Cuántos resultados distintos pueden darse en un partido a 3 sets? Puede suponerse que cada set lo gana el primero que alcance 7 juegos sin importar la diferencia de puntuaciones

tienes que meter 7 pelotas para ganar un juego

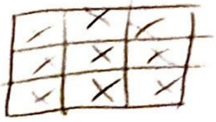
Para asegurar que hay ganador 7 pelotas

$PR(2,8) * PR(2,7) * PR(2,3)$

→ Un examen consta de 10 preguntas tipo test con dos posibles respuestas ¿Cuántos alumnos deben hacer el examen para garantizar al menos dos exámenes iguales

$\underbrace{PR(2,10)}_{\text{Posibles exámenes}} + \underbrace{1}_{\text{uno más que debe ser el que repita}}$

→ Cuántas formas distintas hay de terminar un tres en raya con solo 5 casillas



hay 8 formas de ganar para cada una de ellas, las O se pueden colocar en cualquiera de las posiciones no ocupadas por las O $C(6,2)$

$8 * C(6,2)$

→ Estamos en el Angry Birds suponiendo dos pájaros y cinco cerdos indistinguibles, ¿cuántas opciones hay?

$CR(5,3)$ tres casos la de los que tira el pájaro uno, los que tira el pájaro 2 y los que no tira ninguno

→ Siete mujeres y nueve hombres son profesores de departamento ¿De cuántas formas se puede escoger una comisión de departamento si debe de haber mínimo una mujer? comisión → 5 miembros

Todas las combinaciones posibles menos las que tienen todo hombres

$$C(7+9,5) - C(9,5)$$

→ ¿Cuántas soluciones hay para la ecuación $x+y+z+t=10$?

4 elementos (x,y,z,t) se seleccionan 10 veces

$$CR(4,10) = C(4+9,10) = C(13,10)$$

→ ¿Cuántas formas se pueden colocar 10 canicas indistinguibles en 5 recipientes distintos?

$$CR(5,10)$$

¿Si las canicas son distinguibles?

$$PR(5,10) = 5^{10}$$

→ ¿Cuántas cadenas de 10 bits empiezan por "000" o acaban por "00"?

Cadenas que empiezan por "000" + cadenas que acaban por "00"

− cadenas que empiezan por 000 y acaban por 00

| 0 | 0 | 0 | ... | $1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot2\ldots2 = 2^{10-3}$ regla del producto

| ... | 0 | 0 | $2\cdot2\cdot2\cdots1\cdot1 = 2^{10-2}$ regla del producto

| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | $1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot2\cdots2\cdot1\cdot1 = 2^{10-5}$ regla del producto

$$2^7 + 2^8 - 2^5$$

→ ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación si x_1 tiene que ser ≥ 1?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

$CR(5,20)$ Poner 1 en x_1 y las 20 restantes las repartes entre x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5

→ ¿De cuántas maneras se pueden colocar 20 libros en tres estanterías distinguibles

ⓐ si los libros son copias indistigibles

Si son indistinguibles no importa el orden 123 == 213

CR(3,20)

ⓑ Si todos los libros son distintos y se tiene en cuenta las posiciones en las estanterías

PR(3,20) No

→ De entre las cadenas tres dígitos decimales

ⓐ ¿Cuántas no contienen el mismo dígito 3 veces?

Todas las cadenas de tres dígitos − las cadenas con el mismos

PR(3,10) − 10

ⓑ ¿Cuántas comienzan con un dígito impar

entre 0 y 9 hay 5 dígitos impares

$5 \cdot 10^2$

ⓒ ¿Cuántas contienen exactamente 2 cuatros?

1º Ponemos los dos 4 | 4 | 4 | C(3,2)

2º Ponemos el resto de elementos 9 opciones porque el 4 no es opc

9·C(3,2)

912

→ ¿Cuántas cadenas de 10 bits contienen al menos

3 1s y 3 0s

1º Colocar los 3 1s | 1 | 1 | 1 | C(10,3) la

2º Colocar los 3 0s | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | C(7,3)

3º El resto de elementos

2^4 A todas las cadenas posibles les restas las que no valen

→ ¿De cuántas maneras se pueden asignar tres incentivos iguales a cinco empleados, si a cada empleado se le puede asignar más de un incentivo?

Incentivos iguales → indistinguibles

CR(5,3)

→ ¿Cuántas cadenas de 8 caracteres (no de 9) se pueden formar empleando las 9 letras que componen la palabra EVERGREEN? te

E × 4 Puedes dejar fuera la E, V, R, G, N

V × 1 Si dejas fuera una E Igual con todas

R × 2 1- Poner las E $C(3,8)$

G × 1 2- Poner las R $C(2,5)$

N × 1 3- Poner el resto $P(3,1)$

→ Un ayuntamiento tiene 24 concejales, 14 de ellos mujeres. La mitad de los hombres y la mitad de las mujeres son del partido Amarillo, el resto son del Naranja

ⓐ ¿Cuántas maneras hay de confeccionar un grupo de trabajo de 8 concejales mitad mujeres mitad hombres?

1º Seleccionar las mujeres 2- Seleccionar los hombres

$C(14,4) * C(24-14, 4)$?

ⓑ ¿Cuántas maneras hay de elegir a tres mujeres para ocupar ~~dos~~ cargos de alcaldesa, secretaria y tesorera?

Tienes tres huecos [| |] el 1- hueco será alcaldesa, el 2º será secretaria y el último tesorera y por tanto importa el orden $P(14,3)$, 14 mujeres a elegir y grupos de 3

ⓒ ¿De cuántas maneras se puede cubrir el apartado b, si se quiere evitar que todos los cargos los ocupe un mismo sexo? $9'24 \cdot 10^3$

$1'39 \cdot 10^3$

$1h + 2m \to 3 \cdot 10 \cdot P(14,2)$ Todas las posibilidades -

ó

$2h + 1m \to 3 \cdot 14 \cdot P(10,2)$ las opciones no válidas

→ ¿De cuántas maneras se pueden disponer las cifras 1 2 3 4 4 4 4 4 5 de forma que no haya dos 4 juntos

1 2 3 4 5

3 opc 10 opc

1 bits. en total | 4 | | 4 | | 4 | | 4 | | 4 | La única forma de colocar los 4 separados es esta

40 opc 20 opc

Por la regla del producto 4!

→ ¿Cuántos enteros positivos pueden formarse con las cifras 2334467 y que sean mayores que 4.000.000?

Todas las opciones posibles menos las que comienzan por números < 4

$7! - (2\cdot 6! + 6!) = 2'88\cdot 10^3$

→ Suponiendo que el alfabeto tiene 26 letras, cuántas palabras de 6 letras minúsculas contienen

ⓐ exactamente 2 vocales

1º Elegimos en qué posición colocar la 2 vocales
$C(6,2)$ 2º Elegimos las vocales 5^2 3º elegimos el resto 21^{6-2}

ⓑ al menos 2 vocales

$26^6 - [21^6 + (21^5\cdot 5\cdot 6)]$

todas las posibilidades

las que no tienen vocales o solo 1

→ ¿De cuántas formas se pueden elegir ocho monedas de una hucha que contiene 100 monedas de un euro y 80 monedas de dos euros?

$CR(2,8) = CR(2+8-1, 8) = CR(9,8) = \frac{9!}{(9-8)!\cdot 8!} = 9$

8 monedas, cada una puede ser de un euro o de dos, no importa el orden y hay repeticiones

→ ¿De cuántas formas puedo distribuir las medallas de oro, plata y bronce sin empates?

$P(6,3)$

→ ¿De cuántas formas posibles pueden ponerse en fila un grupo de 10 mujeres y 6 hombres de forma que no haya dos hombres en posiciones consecutivas

| H | M | H | M | H | ' | H |

1º Elegir las posiciones del hombre o huecos entre mujeres
$C(11,6)$

2º Elegir qué hombre va en cada pos $6!$

3º Colocar las mujeres en los sitios que quedan

$10!$

→ Cuántas cadenas de bits contienen exactamente 10 unos y 8 ceros, si cada cero va siempre seguido de al menos un uno

(b) $10 - 8 = 2$ hay 2 unos que pueden ir en cualquier sitio de las 10 posiciones, (consideramos el 01 como bloque) $C(10, 2)$

→ De entre los números enteros no negativos menores de 1.000.000

(a) Cuántos hay tales que sus cifras sumen 9

menores de 1.000.000 → 6 cifras

$x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 = 9$ $CR(6, 9)$

(b) ¿Cuántos tienen entre sus cifras dos doses y un tres?

1: colocamos los doses → $C(6, 2)$
2: colocamos el tres → $C(4, 1)$

3: colocamos el resto de numeros $PR(3, 8)$

(c) ¿Cuántos son pares o múltiplos de 5?

Son pares todos los que terminan en múltiplos de 2

1: colocar el múltiplo de 2 → 5 opciones
2: El resto de números → $PR(5, 10)$
} Regla multiplicación

Son múltiplos de 5 los que terminan en 0 o 5

1: colocar el 0 o 5 → 2 opciones
2: El resto de números → $PR(5, 10)$
} Regla de la multiplicación

Quitar la intersección

Total $= 5\,PR(5, 10) + 2\,PR(5, 10) - PR(5, 10)$

→ En una modalidad del juego del póker se juega con cartas con los símbolos consecutivos 8, 9, 10, J, Q, K, A y perteneciente a cuatro palos distintos (28 cartas). Un jugador recibe 5 cartas, lo que llamaremos jugada, el orden de las cartas en la jugada es indiferente

ⓐ ¿Cuántas jugadas hay?

$C(28,5)$

ⓑ ¿Cuántas son escalera, es decir, entre las cinco cartas hay cinco símbolos consecutivos, o bien los símbolos A, 8, 9, 10, J

Escaleras posibles

$$\left.\begin{array}{l} 8\ 9\ 10\ J\ Q \\ 9\ 10\ J\ Q\ K \\ 10\ J\ Q\ K\ A \\ A\ 8\ 9\ 10\ J \end{array}\right\} \text{4 posibles escaleras}$$

$\underbrace{}_{4^5}$ y hay 4 casos particulares

$4 \cdot \underline{4}^5$

ⓒ De estas, ¿cuántas son color? mismo palo sin formar escalera

$$\underbrace{4}_{n^{\circ}\text{ de palos}} \cdot \underbrace{C(7,5)}_{\text{maneras de un mismo palo}} - \underbrace{4^2}_{\text{Escaleras de cada palo}}$$

ⓓ ¿Cuántas son "full": tres de un mismo símbolo y otras dos de otro símbolo?

1 Elegir el símbolo que se repite 3 veces y los palos

$7 \cdot C(4,3)$

2º Elegir el símbolo que se repite 2 veces y los palos

$6 \cdot C(4,2)$

→ ¿Cuántas maneras hay de repartir 12 libros iguales entre cinco alumnos, de manera que a ninguno le correspondan más de 7 libros?

$CR(5,12)$ → todas las opciones posibles

Menos las opciones en las que tiene 8 o más

1– Seleccionar al alumno 5

$x_1 + 8 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$

$CR(5,4)$

$CR(5,12) - 5 \cdot CR(5,4) = 1'47 \cdot 10^3$