Ejercicios Lógica Proposicional

- Sean w_1, w_2 y w FBFS que cumplen
  $\{w_1, w_2, w\}$ es UNSAT
  $\{w_1, w_2, \neg w\}$ es SAT
  Empleando la definición de consecuencia lógica, e inferencia explica cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas, incorrectas o no se puede determinar

ⓐ $\{w_1, w_2\} \models \neg w$

$\{w_1, w_2\} \models \neg w \leftrightarrow \{w_1, w_2, w\}$ es UNSAT por tanto es cierto, por comprobación de modelos, al ser unsat $\{w_1, w_2, w\}$ quiere decir que w tiene un valor de verdad falso para todos los modelos de $\{w_1, w_2\}$, por tanto, $\neg w$ tendrá un valor de verdad verdadero para todos los modelos de $\{w_1, w_2\}$ y por ende es consecuencia lógica

ⓑ $\{w_1, w_2\} \not\models w$

Es verdadero ya que $\{w_1, w_2, \neg w\}$ es SAT lo que indica que w no tiene un valor de verdad verdadero para todas las interpretaciones modelo de $\{w_1, w_2\}$

ⓒ $\{w_1, w_2\} \vdash_R \neg w$

No se puede determinar dado que el conjunto de reglas de inferencia es correcto pero no completo, al ser correcto $\{w_1, w_2\} \vdash_R \neg w \rightarrow \{w_1, w_2\} \models \neg w$ pero, al ser incompleto $\{w_1, w_2\} \models \neg w \not\rightarrow \{w_1, w_2\} \vdash_R \neg w$

ⓓ $\{w_1, w_2\} \not\vdash w$

Correcto, dado que $\{w_1, w_2, \neg w\}$ es Satisfacible, es imposible inferir w de $\{w_1, w_2\}$ dado que si pudieras implicaría que $\{w_1, w_2\} \models w$ y eso ocurre si y solo si $\{w_1, w_2, \neg w\}$ es UNSAT

- Supongamos una base de conocimiento Δ y una FBF w, en términos de consecuencia lógica, explica la relación en los siguientes casos

$\{\Delta, \neg w\}$ es SAT y $\{w, \Delta\}$ SAT

$\Delta \not\models \neg w$, $\Delta \not\models w$ al ser ambas satisfacibles ninguna es consecuencia lógica ya que habrá modelos de Δ que no lo sean en $\neg w$ y modelos de Δ que no lo sean en w

$\Delta \models w \leftrightarrow \{\Delta, \neg w\}$ es UNSAT

$\{\Delta, \neg w\}$ es SAT y $\{\Delta, w\}$ UNSAT

$\Delta \models \neg w$ $\Delta \not\models w$

$\{\Delta, \neg w\}$ es UNSAT y $\{\Delta, w\}$ es SAT

$\Delta \models w$ $\Delta \not\models \neg w$

$\{\Delta, \neg W\}$ UNSAT y $\{\Delta, W\}$ UNSAT

$\Delta \models \neg W$ ya que $\{\Delta, W\}$ es UNSAT, y, $\Delta \models W$ ya que $\{\Delta, \neg W\}$ es UNSAT. en este caso Δ es UNSAT y de una base de conocimiento UNSAT se puede deducir cualquier cosa, es decir Δ no tiene modelos y por tanto cualquier FBF será modelo para las interpretaciones modelo de Δ

- Sean W_1, W_2 y W FBFS que cumplen que $\{W_1, W_2, W\}$ es UNSAT y $\{W_1, W_2, \neg W\}$ es UNSAT, determine qué afirmaciones son correctas, incorrecta o indeterminadas

ⓐ $\{W_1, W_2\} \models W$

Correcto $\{W_1, W_2\} \models W \leftrightarrow \{W_1, W_2, \neg W\}$ es UNSAT

ⓑ $\{W_1, W_2\} \models \neg W$

Correcto $\{W_1, W_2\} \models \neg W \leftrightarrow \{W_1, W_2, W\}$ es UNSAT

ⓒ O bien $\{W_1\}$ o bien $\{W_2\}$ o ambas por separado son UNSAT

Es seguro que $\{W_1, W_2\}$ es UNSAT, pero no se puede afirmar que $\{W_1\}$ sea UNSAT o que $\{W_2\}$ sea UNSAT ya que también podría ser la intersección de ambas lo que sea UNSAT aunque W_1 y W_2 fueran SAT

$W_1 = A$ $W_2 = B \wedge \neg A$

A B	W_1	W_2	$\{W_1, W_2\}$
0 0	0	0	0
0 1	0	1	0
1 0	1	0	0
1 1	1	0	0

Por separado ambas son SAT, sin embargo, $\{W_1, W_2\}$ es UNSAT

- Convierte a FNC la siguiente base de conocimiento

$\Delta = \{A \wedge B,\ (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg C),\ \neg C \rightarrow (\neg A \vee \neg B)\}$

1) $A \wedge B \equiv A, B$

2) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg C) \equiv [(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg C)] \wedge [(A \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \leftrightarrow B)] \equiv$

2.1) $[[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)] \rightarrow (A \rightarrow \neg C)] \wedge [(A \rightarrow \neg C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]]$

$\neg[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)] \vee (\neg A \vee \neg C) \equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A) \vee (\neg A \vee \neg C) \equiv$

$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A) \vee (\neg A \vee \neg C) \equiv (A \vee B) \wedge \cancel{(A \vee \neg A)} \wedge \cancel{(\neg B \vee B)} \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (\neg A \vee \neg C)$

$\equiv (A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (\neg A \vee \neg C) \equiv [\cancel{\neg A \vee \neg C \vee (A \vee B)}] \wedge [\neg A \vee \neg C \vee (\neg B \vee \neg A)]$

2.2 $[(A \rightarrow \neg C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]] \equiv \neg(\neg A \vee \neg C) \vee [(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)] \equiv$

$(A \wedge C) \vee [(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)] \equiv \cancel{(A \vee \neg A \vee B)} \wedge (A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg B \vee A)$

total $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$

$\neg C \to (\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(\neg C) \vee (\neg A \vee \neg B) = C \vee \neg A \vee \neg B$

Determine por consecuencia lógica empleando resolución entre cláusulas si la base tiene como consecuencia lógica C o ¬C

1) A
2) B
3) ~~$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$~~
4) ~~$C \vee \neg A \vee \neg B$~~
5) ~~$\vdash$ res 1+3 en A $\neg B \vee \neg C$~~
6) ~~$\vdash$ res 1+4 en A $C \vee \neg B$~~
7) ~~$\vdash$ res 2+3 en B $\neg A \vee \neg C$~~
8) ~~$\vdash$ res 2+4 en B $C \vee \neg A$~~
9 $\vdash$ res 2+5 en B $\neg C$
10 $\vdash$ res 2+6 en B C
$\vdash$ res 9+10 $\square$

llegamos a la cláusula vacía por ende es UNSAT y se puede derivar tanto C como ¬C

- Nos encontramos tres criaturas de dos especies diferentes Falacius que siempre mienten o veraxus que siempre dicen la verdad. El primero dice que las otras dos pertenecen a otra especie, el segundo dice lo mismo. ¿Podemos anticipar la respuesta del tercero si le preguntamos de qué especie son el resto

$A \equiv$ "A es veraxus" $B \equiv$ "B es veraxus" $C \equiv$ "C es veraxus"

$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ $\quad$ $B \leftrightarrow (A \leftrightarrow C)$

$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv A \leftrightarrow ((B \to C) \wedge (C \to B)) \equiv A \leftrightarrow [(\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)] \equiv$

$A \leftrightarrow [(\neg B \wedge \neg C) \vee \overset{F}{\cancel{(\neg B \wedge B)}} \vee \overset{F}{\cancel{(C \wedge \neg C)}} \vee (C \wedge B)] \equiv A \leftrightarrow ((\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge B))]$

$A \to ((\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge B)) \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge B)) \to A \equiv$

$\underline{A \to ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))} \wedge ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \to A$

1.1) $\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \equiv (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B)$

$\neg[(\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)] \vee A \equiv \neg(\neg B \vee C) \vee \neg(\neg C \vee B) \vee A \equiv$

$[(B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B)] \vee A \equiv [A \vee (B \wedge \neg C)] \vee [A \vee (C \wedge \neg B)] \equiv$

1.2) $[(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C)] \vee [(A \vee C) \wedge (A \vee \neg B)] \equiv$

$[(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \vee (A \vee C)] \wedge [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \vee (A \vee \neg B)] =$

$(A \vee B \vee C) \wedge \overset{V}{\cancel{(A \vee A \vee \neg C \vee C)}} \wedge \overset{V}{\cancel{(A \vee \neg B \vee A \vee B)}} \wedge (A \vee \neg C \vee \neg B)$

Total: $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg C \vee \neg B)$

$(B \leftrightarrow (C \leftrightarrow A)) \equiv B \to (C \leftrightarrow A) \wedge (C \leftrightarrow A) \to B$

$B \to [(C \wedge A) \vee (\neg C \wedge \neg A)] \equiv \neg B \vee [(C \wedge A) \vee (\neg C \wedge \neg A)] \equiv$

$[\neg B \vee (C \wedge A)] \overset{\wedge}{\vee} [\neg B \vee (\neg C \wedge \neg A)] = [(\neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee A)] \vee [(\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg A)]$

$\cancel{(\neg B \vee C \vee \neg B \vee \neg C)} \wedge (\neg B \vee C \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge \cancel{(\neg B \vee A \vee \neg B \vee \neg A)}$

1.1) $(\neg B \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee A \vee \neg C)$

$(C \leftrightarrow A) \to B \equiv \neg[(C \wedge A) \vee (\neg C \wedge \neg A)] \vee B \equiv [\neg(C \wedge A) \wedge \neg(\neg C \wedge \neg A)] \vee B \equiv$

$[(\neg C \vee \neg A) \wedge (C \vee A)] \vee B \equiv (\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (C \vee A \vee B)$

Collar de ambar

repetida, repetida, repetida, repetida

$(\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (C \vee A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee A \vee \neg C) \wedge$

$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee A)$ ① $\wedge (B \vee C \vee A)$ ②

$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee A) \equiv \neg C \vee ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \equiv$

$\neg C \vee ((\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge \neg B)) \equiv \neg C \vee ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \equiv$

$C \to ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

· C decía A y B son de la misma especie

- Volvemos al país de los veraces y los falaces, criaturas que además pueden cambiar de color a voluntad, al llegar le preguntamos a una si cambiará de color a lo que responde, cambiaré de color solo y exclusivamente si digo la verdad
¿Cambiará de color la criatura

A Es veraz   C cambiará de color

$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow C) \equiv A \to (A \leftrightarrow C) \wedge (A \leftrightarrow C) \to A$

1.1) $A \to (A \to C \wedge C \to A) \equiv \neg A \vee (\neg A \vee C) \wedge (\neg C \vee A) \equiv (\neg A \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg C) \equiv$
$(\neg A \vee C)$

1.2 $(A \leftrightarrow C) \to A \equiv [(A \to C) \wedge (C \to A)] \to A \equiv \neg[(A \to C) \wedge (C \to A)] \quad A \equiv$

$\neg(\neg A \vee C) \vee \neg(\neg C \vee A) \vee A \equiv (A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg A) \vee A \equiv$

$\equiv (A \wedge \neg C) \vee (C \vee A \wedge \cancel{(\neg A \vee A)}) \equiv (A \wedge \neg C) \vee (C \vee A) \equiv ((C \vee A \vee A) \wedge \cancel{(C \vee A \vee \neg C)}) \equiv$

$\equiv (C \vee A)$ Resolución directa en A C por lo tanto cambiará de color

Empleando únicamente tablas de verdad, demuestre si la base de conocimiento tiene como consecuencia lógica $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$

$$\Delta = \{ A \leftrightarrow ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)) \}$$

A	B	C	$B \wedge C$	$\neg B \wedge \neg C$	$\overset{X}{\overline{(B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)}}$	$A \leftrightarrow X$	$A \leftrightarrow B$	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$
0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1

Por comprobación de modelos con la tabla de verdad se puede confirmar que $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$ es consecuencia lógica al ser verdadero en todas las interpretaciones modelo de $A \leftrightarrow ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$