ESTRUCTURAS DISCRETAS Y LÓGICA, 2020-2021

Parcial 2, 2020/12/09

Publicación de calificaciones: 2020/12/16

E1	**E2**	**E3**	**TOTAL**
Apellidos:			
Nombre:			

INSTRUCCIONES: Escribe la respuesta final a cada ejercicio en los huecos facilitados, y añade los desarrollos y explicaciones necesarios en hojas adicionales. Un ejercicio cuya respuesta sea correcta pero que no incluya explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1 (1 punto): En mi familia somos 4 personas, en casa de mi tío Juan son 3, en casa de mi tía Julia 5, mis abuelos son dos y mis primos de Ávila son 5. Teniendo en cuenta que estas navidades nos podremos reunir como mucho 10 personas:

a. ¿De cuántas maneras diferentes podremos reunirnos en dos casas distintas?
b. ¿De cuántas maneras diferentes podremos reunirnos en dos casas distintas de modo que un grupo de convivientes siempre esté en la misma casa?

SOLUCIÓN:

a. Necesariamente 9 personas deben ir a una casa y 10 a la otra. Hacemos grupos de 10 y multiplicamos por 2 (casas): $2 \cdot C(19, 10)$.

b. Los abuelos (2) y la familia del tío Juan (3) tienen que ir juntos (de otro modo es imposible formar un grupo de 9 y otro de 10 personas). Tenemos por tanto 4 grupos de personas con 4, 5, 5 y 5 (3+2) personas cada uno. Elegimos dos de estos grupos para ir a la primera casa (el resto van a la segunda): $C(4, 2) = 6$.

EJERCICIO 2 (1 punto): En las elecciones a delegado de clase se han presentado 5 candidatos. Si votan 32 estudiantes, no hay ningún voto en blanco ni nulo y el voto es secreto:

a. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden dar? Ten en cuenta que, como el voto es secreto y no se sabe a quién ha votado cada estudiante, lo único que importa es la distribución de votos entre los candidatos.
b. ¿Y si el voto es a mano alzada? Ten en cuenta que ahora sí se sabe a quién ha votado cada estudiante. Dos resultados se consideran distintos si cambia el voto de algún estudiante, aunque la distribución final de los votos entre los candidatos sea la misma.
c. ¿Y si cada elector debe votar a dos candidatos (distintos) con voto secreto?

SOLUCIÓN:

a. Distribuimos 32 votos entre 5 candidatos: $CR(5, 32) = C(36, 32) = 58905$.

b. Cada estudiante puede votar a 5 candidatos distintos: 5^{32}.

c. Distribuimos 64 votos entre 5 candidatos, y restamos los casos en los que un candidato tiene más de 32 votos: $CR(5, 64) - 5 \cdot CR(5, 31)$

EJERCICIO 3 (1 punto): Un viajero quiere visitar 5 ciudades diferentes (A, B, C, D y E), dos veces cada una en un orden arbitrario.

a. ¿De cuántas maneras diferentes puede visitar las ciudades?
b. ¿De cuántas maneras diferentes puede visitar las ciudades si no quiere hacer dos visitas consecutivas a la ciudad A?
c. ¿De cuántas maneras diferentes puede visitar las ciudades si no quiere hacer dos visitas consecutivas a la ciudad A ni a la ciudad B?

SOLUCIÓN:

a. Permutamos las ciudades teniendo en cuenta que cada una aparece 2 veces:

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

b. Del número anterior descontamos los casos en los que las 2 visitas a la ciudad A van seguidas:

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

c. Descontamos los casos en los que las 2 visitas a la ciudad A van seguidas, descontamos los casos en los que las 2 visitas a la ciudad B van seguidas, y sumamos la intersección de los dos casos anteriores:

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} - 2 \cdot \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

DISCRETE STRUCTURES AND LOGIC, 2020-2021

Second midterm exam, 2020/12/10

Grades published: 2020/12/16

E1	E2	E3	TOTAL
Last names:			
First name:			

INSTRUCTIONS: Write your final answers in the tables below, and include explanations for your answers in additional sheets. A correct answer without an explanation may not receive full credit.

EXERCISE 1 (1 point): (Adapted from Rosen) How many strings of six uppercase letters from the English alphabet (which contains 26 letters) contain

a. the letter `A`?
b. the letters `A` and `B` in consecutive positions with `A` preceding `B`, with all the letters distinct?
c. the letters `A` and `B`, where `A` is somewhere to the left of `B` in the string, with all the letters distinct?

SOLUTION:

a. From the total we discount those strings that do not contain the letter a: $26^6 - 25^6$.

b. We first choose the position of the ab pair (5 possibilities) and then select the remaining 4 letters: $5 \cdot P(24,4) = 5 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$.

c. As before, we first choose the position of a and b ($C(6,2)$) and then select the remaining 4 letters: $C(6,2) \cdot P(24,4)$.

EXERCISE 2 (1 point): (Adapted from Rosen) Thirteen people on a softball team show up for a game.

a. How many ways are there to choose 10 players to take the field?
b. How many ways are there to assign the 10 positions by selecting players from the 13 people who show up?
c. Of the 13 people who show up, three are women. How many ways are there to choose 10 players to take the field if at least one of these players must be a woman?

SOLUTION:

a. Choose a group of 10 out of a set of 13: $C(13, 10)$.

b. Choose an ordered group of 10 (the position in the field matters) out of a set of 13: $P(13, 10)$.

c. From the solution to question (a) discount the number of cases where all the 10 players are men: $C(13, 10) - 1$.

EXERCISE 3 (1 point): There are 10 different tasks and 10 indistinguishable incentives to be distributed among 3 students. All the tasks must be done, each task can be done by only one student, and all the incentives must be given.

a. In how many different ways can the tasks and the incentives be distributed among the students if there are no additional restrictions?
b. In how many different ways can the tasks and the incentives be distributed among the students if each student must do at least one task?
c. In how many different ways can the tasks and the incentives be distributed among the students if an incentive can be assigned to a student only if that student has done at least one task?

SOLUTION:

a. Distribute the 10 distinguishable tasks: 3^{10}. Distribute the 10 indistinguishable incentives: $CR(3, 10)$. The result is the product of both: $3^{10} \cdot CR(3, 10) = 3^{10} \cdot C(12, 10)$.

b. When distributing the tasks, discount the cases where at least one student does not do any task: $3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3$. The distribution of incentives is as berfore. The result is then: $(3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3) \cdot CR(3, 10) = (3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3) \cdot C(12, 10)$.

c. We consider 3 different cases: (i) all the students do at least one task (the incentives are distributed among the 3 students), (ii) exactly two students do tasks (the incentives are distributed between these 2 students), and (iii) only one student does all the tasks (and receives all the incentives). The solution is then: $(3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3) \cdot CR(3, 10) + (3 \cdot 2^{10} - 6) \cdot CR(2, 10) + 3$.

ESTRUCTURAS DISCRETAS Y LÓGICA, 2020-2021

Parcial 2, 2020/12/15

Publicación de calificaciones: 2020/12/16

E1	**E2**	**E3**	**TOTAL**
Apellidos:			
Nombre:			

INSTRUCCIONES: Escribe la respuesta final a cada ejercicio en los huecos facilitados, y añade los desarrollos y explicaciones necesarios en hojas adicionales. Un ejercicio cuya respuesta sea correcta pero que no incluya explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1 (1 punto): Cuatro amigos van a una fiesta de disfraces. Tienen 6 máscaras distintas, 3 capas distintas y 5 sombreros distintos. Si todos se disfrazan con una máscara, una capa y un sombrero (salvo uno que no lleva capa):

a. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay?
b. ¿Y si dos de ellos no llevan máscara?
c. ¿Cuál es la solución al apartado (a) si en lugar de 6 hay 8 máscaras de dos tipos distintos (4 de cada tipo, con las máscaras de un mismo tipo indistinguibles entre sí)?

SOLUCIÓN:

a. Repartimos las máscaras: $P(6,4)$. Repartimos los sombreros: $P(5,4)$. Repartimos las capas: $P(4,4)$. Nótese que podemos considerar que hay 4 capas (las 3 reales y la cuarta que es ir sin capa). Total:

$$P(6,4) \cdot P(5,4) \cdot P(4,4) = \frac{6!}{2!} \cdot 5! \cdot 4!$$

b. Los sombreros y las capas se reparten igual que antes. Para repartir las máscaras primero elegimo a las 2 personas que llevan máscara y luego asignamos una máscara a cada uno: $C(4,2) \cdot P(6,2)$. Total

$$C(4,2) \cdot P(6,2) \cdot P(5,4) \cdot P(4,4) = C(4,2) \cdot \frac{6!}{4!} \cdot 5! \cdot 4!$$

c. Los sombreros y las capas se reparten igual que antes. Para repartir las máscaras tenemos 2^4 posibilidades. Total:

$$2^4 \cdot P(5,4) \cdot P(4,4) = 2^4 \cdot 5! \cdot 4!$$

EJERCICIO 2 (1 punto): (Adaptado de Rosen) En un departamento hay 10 hombres y 15 mujeres.

a. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar una comisión de 6 miembros con el mismo número de hombres y mujeres?
b. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar una comisión de 6 miembros con más mujeres que hombres?

SOLUCIÓN:

a. Elegimos 3 hombres entre 10 y 3 mujeres entre 15: $C(10,3) \cdot C(15,3)$.

b. Elegimos la comisión con 4, 5 o 6 mujeres: $C(10,2) \cdot C(15,4) + C(10,1) \cdot C(15,5) + C(10,0) \cdot C(15,6)$.

EJERCICIO 3 (1 punto): Tenemos 50 tarjetas etiquetadas con los números del 1 al 10, 5 tarjetas con cada número. Las tarjetas con el mismo número se consideran indistinguibles.

a. Si elegimos 4 tarjetas al azar (no importa el orden), ¿cuántos grupos distintos podemos obtener?
b. Si elegimos 7 tarjetas al azar (no importa el orden), ¿cuántos grupos distintos podemos obtener?
c. Si elegimos 7 tarjetas al azar y las ponemos en una fila, ¿cuántas filas distintas podemos obtener?

SOLUCIÓN:

a. Elegimos 4 tarjetas entre 10 tipos de tarjetas, con repetición: $CR(10,4) = C(13,4)$.

b. Elegimos 7 tarjetas con repetición, y descontamos los casos en los que hay más de 5 tarjetas con el mismo número: $CR(10,7) - 10 \cdot 10 = C(16,7) - 100$.

c. Elegimos 7 tarjetas ordenadas, con repetición, y descontamos los casos en los que hay más de 5 tarjetas con el mismo número: $10^7 - 7 \cdot 10 \cdot 9 - 10$.