oducto $\quad T_1$ and $T_2 \quad n_1 \cdot n_2$

suma $\quad T_1$ or $T_2 \quad n_1 + n_2$

resta (PPio exclusión, inclusión) $\quad |T_1 \cup T_2| = |T_1| + |T_2| - |T_1$

n cadenas de 8 bits empiezan por 1 o acaban por

$\underbrace{\boxed{\quad}}_{7}\ n_1 \quad T_2: \boxed{\quad |0|0}\ n_2 \qquad T_3: \boxed{1| \quad |0|0}$

$n_2^{=2^6} - n_3 = 2^5$

casillas en cada una puedes poner un 0 o un 1 Regla p

ducción

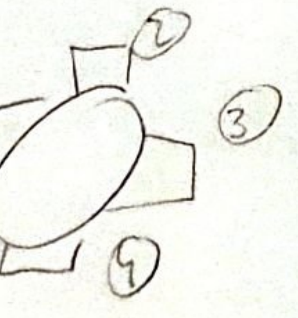
uento: n maneras, grupos de d equivalentes

no de formas n/d

4 personas (A, B, C, D)

maneras se pueden sentar en la mesa?

orta orden relativo



4! regla producto = 24

Solo importa orden relativo

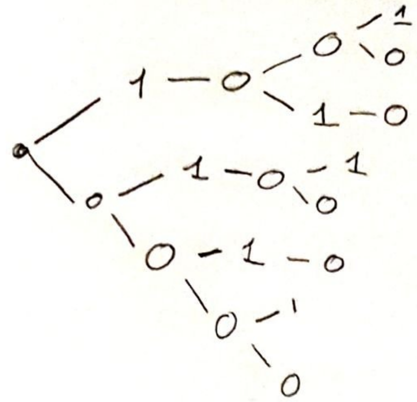
$$\begin{array}{ccc} & A & \\ D & & B \\ & C & \end{array} = \begin{array}{ccc} & D & \\ C & & A \\ & B & \end{array} = \begin{array}{ccc} & C & \\ B & & D \\ & A & \end{array}$$

pos de 4 equivalentes

$= \frac{24}{4} = 6$

Diagramas de árbol

¿Cuántas cadenas de 4 bits no tienen 2 1 seguidos



Principio de Dirichlet

K casas (palomares) K+1 objetos (palomas)

Si queremos ocupar las K casas con K+1 objetos al menos hay una casa con + de 1 objeto

Ej Demuestra que cualquier entero n tiene un múltiplo con solo 0s y 1s en su expresión decimal A

2 no $10 = 5 \cdot 2$

$n_1 = 1$
$n_2 = 11$
$n_3 = 111 \dots$

$n_{K-1} = \underbrace{111\dots1}_{K-1}$
$n_K = \underbrace{11\dots1}_{K}$

$n_{K+1} = \underbrace{111\dots1}_{K+1}$

$A_1 \% K = r_1$ $\quad n_2 \% K = r_2$ $\quad \dots n_K \% K = r_K$ $\quad n_{K+1} \% K = r_{K+1}$

K restos diferentes → K casas

número de restos que estoy calculando → K+1 palomas

por tanto hay al menos dos restos iguales

$r_i = n_i \% K = r \rightarrow n_i = K \cdot \boxed{C_i} + r$

$r_j = n_j \% K = r \rightarrow n_j = K \cdot \boxed{C_j} + r$

entero

$n_j - n_i = 1111\dots1 - 111\dots1 = \underbrace{1111}_{j-i}\underbrace{0000}_{i}$

$(n_j - n_i) = K\overbrace{(C_j - C_i)}^{\text{Entero}>0}$ $\quad n_j - n_i$ es múltiplo de K

Permulación → variación de elementos lomados de m en r 19-11-20

Ej $m=5$, $\{A,B,C,D,E\}$ 3-permulaciones de 5 elementos | ABC ABD ABE ACB

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ej: How many ways are there to select a first, second and third from 100 people

$$100 \cdot 99 \cdot 98 = \frac{100!}{97!} = \frac{100!}{(100-3)!} = 9'702 \cdot 10^5$$

Ej: Si hay 8 corredores ¿Cuántas opciones tienes para los ganadores?

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = \frac{8!}{(8-3)!} = 3'36 \cdot 10^2$$

Combinación → como permulación pero aquí no importa el orden

Ej ¿De cuántas maneras podemos elegir a 3 estudiantes de un grupo de 5?

1: Calculo las permulaciones $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

2: Elimino permutaciones equivalentes $ABC = BAC = BCA = ACB = CBA = CAB$

6 equivalentes por tanto por regla de la división $\frac{60}{6} = 10$

* $6 = 3! \cdot 2! \cdot 1! = 3$ Permulaciones de r elementos

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ → permulaciones n, r → permulaciones r, r

Ej ¿Cuántas manos de 5 cartas distintas puedes conseguir con 52 cartas

Combinaciones de 5 con grupos de 52 $\frac{52!}{5!(52-5)!}$

Ej ¿Cuántas cadenas de bits contienen r 1s?

n = lenght of bit strings

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Binomial coefficients

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

1 $C(4,4)$, 4 $C(4,1)$, 6 $C(4,2)$, 4 $C(4,3)$, 1 $C(4,4)$

Teorema $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$ $\binom{n}{j} = C(n,j)$

Ej Cuántos números entre 100 y 1000 se pueden formar con los números 0,1,2,3,4 con todos los números distintos

$4 \cdot 4 \cdot 3$

4 números posibles porque el 0 no te vale

4 5 números posibles menos 1 escogido al principio

3 5 números posibles menos los 2 gastados

¿Cuántas palabras de long 8 pueden formarse con las 5 vocales, si se impone la restricción que la letra "a" aparezca 3 veces y la u 2 veces

$3 \cdot 3 \cdot 3$

UA _ A _ _ _ UA

3^3 por cada una de las formas en las que pueden colocar las UA

$3^3 \cdot C(8,3) \cdot C(5,2)$ ← maneras de colocar las U

↑ colocar AEIO

↑ colocar las A

Resumen permutaciones y combinaciones

N elementos forman grupos de n

Ordenados
permutaciones

ABC ≠ BAC

$$P(N,r) = \frac{N!}{(N-r)!}$$

No ordenados
combinaciones

ABC = BAC

$$C(N,r) = \frac{N!}{r!(N-r)!}$$

Permutaciones con repetición

- Grupos ordenados
- Los elementos se pueden repetir

¿Cuántas palabras (cadenas) de tres letras se pueden formar con las letras A, B y C?

AAA
AAB
ABA...

1: Elementos repetidos
2: El orden importa

$\square \; \square \; \square$
3opc 3opc 3opc } Regla Producto = 3^3

El numero de r-permutaciones de un conjunto n donde la permutación está permitida es n^r

¿ Cada día un estudiante coge un sandwich de una pila de 6, cuántas maneras puede escoger los el estudiante los sandwich en una semana

$n=6$
$r=7$

6^7

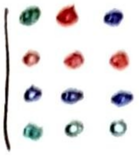
Cuántas formas hay de asignar 3 trabajos a 5 trabajadores

$n=5$
$r=3$

5^3

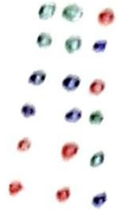
Combinaciones con repetición
- Grupos no ordenados
- Los elementos se pueden repetir

Ej Tenemos canicas de 3 colores (R, A, V) y queremos coger 3 canicas, ¿cuántas formas distintas hay de coger las canicas?



(1 de cada color) [1]

(Todas del mismo color) [3]



2 de un color y 1 de otro color [6]

R A V

| 0 | 00 | |

01001

El problema lo podemos descomponer en las cadenas de 6 bits con N-1 = 2 1s

$\underbrace{C(5,3)}_{\text{Son formas de poner los 0}} = 10$

$$CR(n,r) = C(n+r-1, r)$$

Cuántas formas hay de seleccionar 4 piezas de fruta en un bol que contiene 3 diferentes frutas

$CR(3,4) = C(6,4)$

3 tipos de fruta a elegir $N=3$

Cogemos 4 frutas $R=4$

Ej Supongamos una tienda con 4 tipos de galleta ¿Cuántas formas hay para elegir 6?

$CR(4,6) = C(9,6)$

4 tipos de galleta = N

Grupos de 6 = r

| 00 00 | | | | | |

$C(9,6)$

0000 1 1 1 1 1 1

Resumen

permutación → importa orden   combinación → no importa orden

Tipo	Repetición	fórmula
r-permutación	No	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinación	No	$\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$
r-permutación	Sí	n^r
r-combinación	Sí	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

Ej Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

3 cajas en las que meter 11 pelotas $CR(11, 3)$

Permutaciones con objetos indistinguibles

Ej

SUCCESS

S×3
C×2
U×1
E×1

USSECCS   7! → Hay permutaciones equivalentes

3!   2! Cuando permuto las C tengo soluciones equivalentes

Cuando permuto las S entre sí tengo soluciones eq

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!} = \text{Solución del problema}$$

El numero de permutaciones de n objetos en las que hay n_1 objetos indistinguibles, n_2 objetos indistinguibles...

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!}$$