Probabilidad y Estadística - 2020-2021

Grado en Ingeniería Informática

Trabajo 2

Ejercicio 1. Tiramos tres dados de colores: rojo, azul y blanco. Son dados de 6 caras cada uno. El dado rojo y el dado azul son dados normales. El dado blanco está trucado de manera que la probabilidad de obtener un número entre 1 y 5 es la misma, mientras que la probabilidad de obtener un 6 es el triple de la probabilidad de obtener un 1.

Sea A el suceso "la suma de las caras de los dados rojo y azul es 11" Sea B el suceso "en el dado blanco sale la cara 6".

(a) Calcula $P(A)$.

Este apartado se puede resolver de dos formas, calculando los casos favorables y dividiendo por los casos posibles o, por probabilidad condicionada

Siendo X la variable aleatoria asociada a la cara del dado rojo e Y, la variable aleatoria asociada a la cara del dado azul;

Son dados normales por tanto es equiprobable P(Y = i) = 1/6 para cualquier i perteneciente al intervalo [1, 6]:

P(X+Y=11) = $\sum_1^6 P(X = 11 - Y) * P(Y = i)$ = 1/6 * $\sum_5^6 P(X = i)$ = 1/6 * 2 * 1/6 = 1/18

(b) Calcula $P(B)$.

Son sucesos independientes, la probabilidad de que salga la cara 6 es 3 veces la probabilidad de que salga la cara 1, y la probabilidad de obtener números entre el 1 y 5 es equiprobable entonces:

La suma de las probabilidades debe ser 1;

1 = $\sum_1^6 P(X)$ -> 1 = $\sum_1^5 P(X)$ + 3 * P(1) -> 1 = 5*P(1) + 3*P(1) -> 1/8 = P(1)

P(6) = 3*P(1) -> P(6) = 3 * 1/8

Ejercicio 2. La prevalencia de la diabetes en una población es del 8%. Una prueba diagnostica correctamente al 98% de las personas diabéticas (es decir, la prueba da positivo en el 98% de las personas diabéticas) pero da un 3% de falsos positivos (es decir, la prueba da positivo en el 3% de las personas no diabéticas).

(a) Calcula la probabilidad de que la prueba dé positiva a una persona elegida al azar;

Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de dé positivo una persona al azar es la suma de la probabilidad de que tenga diabetes por la probabilidad de que dé positivo teniendo diabetes sumada a la probabilidad de que no tenga diabetes por la probabilidad de que dé positivo sabiendo que no tiene diabetes

P(+) = P(D) * P(+|D) + P(ND) * P(+|ND) = 8% * 98% + (100-8)% * 3% = 10.6%

(b) Si la prueba le da positiva a una persona elegida al azar, calcula la probabilidad de que esa persona sea diabética.

P(D|+) =P(D ∩+) /P(+) = (P(D) * P(+|D)) / P(+) = 73.9622%

Ejercicio 3. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas con función de masa conjunta

		Y			
		1	2	3	4
X	-1	0.05	0	0.15	0.1
	0	0.1	0.05	0.05	0.05
	1	0.1	0.15	0.1	0.1

(a) Calcula la función de masa marginal de X y su esperanza, $E(X)$.

P(X=x) = $\sum_{y} P(X = x, Y = y)$

P(X=-1)	0.3
P(X=0)	0.25
P(X=1)	0.45

E(X) = 0.15

(b) Calcula la varianza de Y.

E(Y) = 2.55

V(Y) = $\sum_{1}^{n}\left(Yi - E(Y)\right)^{2} * P(Yi)$ = 1.2475

(c) Calcula la probabilidad de que $X \leq 0$ dado que $Y \leq 3$, esto es $P(X \leq 0|Y \leq 3)$.

$P(X \leq 0|Y \leq 3)$ = P($X \leq 0 \cap Y \leq 3$)/P($Y \leq 3$) = 0.4/0.75=0.53

(d) ¿Son independientes X e Y?

Dos variables aleatorias son independientes si el valor que toma una no aporta información sobre el valor que tomará la otra.

E(X) = 0.15

E(Y) = 2.55

Cov(X, Y) = E [(X − E[X])(Y − E[Y])] = -1.5525*10^-1 + 1.3125*10^-2 – 4.0375*10^-2!=0 por tanto no son variables independientes

Ejercicio 4. Una máquina de envasado llena sacos de fertilizante de aproximadamente 25 kg. La cantidad (en kg) de fertilizante por saco sigue una distribución normal $N(25, 1)$.

(a) Calcula la probabilidad de que la cantidad de fertilizante en un saco esté entre 24 y 26 kgs.

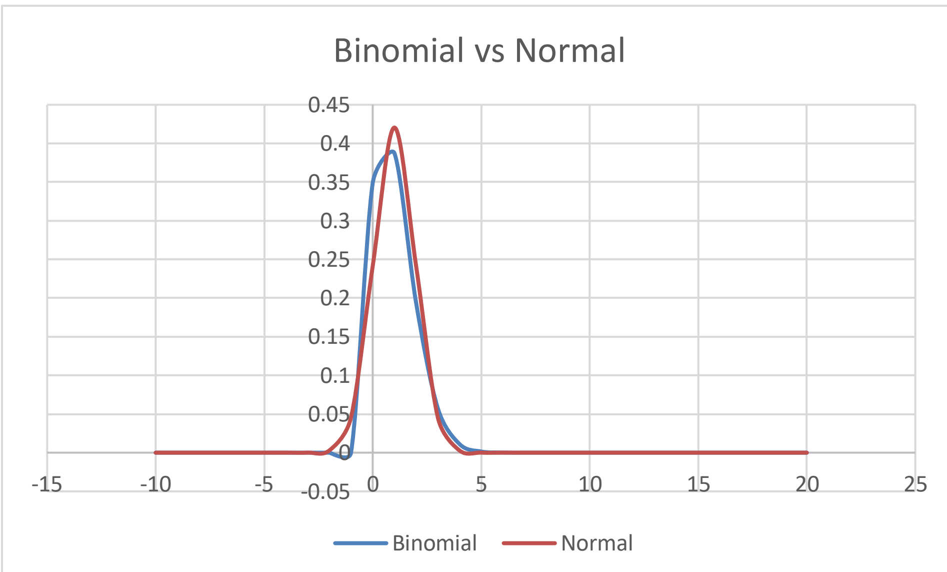
P(24≤X≤26) -> tipificamos la variable -> P((24-25)/1≤Z≤(26-25)/1) = P(-1≤Z≤1) = P(Z≤1) – P(Z≤-1) = P(Z≤1) – P(Z≥1) = P(Z≤1) – [1-P(Z≤1)] = 2*P(Z≤1) – 1 = 2 * 0.8413 – 1 = 6.826*10^(-1)

(b) Una empresa realiza un pedido de 80 de estos sacos de fertilizante. Calcula la probabilidad de que más de 50 de ellos estén entre 24 y 26 kgs.
El número de sacos sigue una distribución binomial B(80, 6.826*10^(-1))
Nos preguntan por P(B(80, 6.826*10^(-1))>50).
Por el teorema de Movire-Laplace; podemos hacer la aproximación a la distribución normal N(np, $\sqrt{npq}$) =
N(80 *6.826*10^(-1), $\sqrt{80 * 6.826 * 10^{-1} * (1 - 6.826 * 10^{-1})}$) =
N(54.608, 4.16324143)

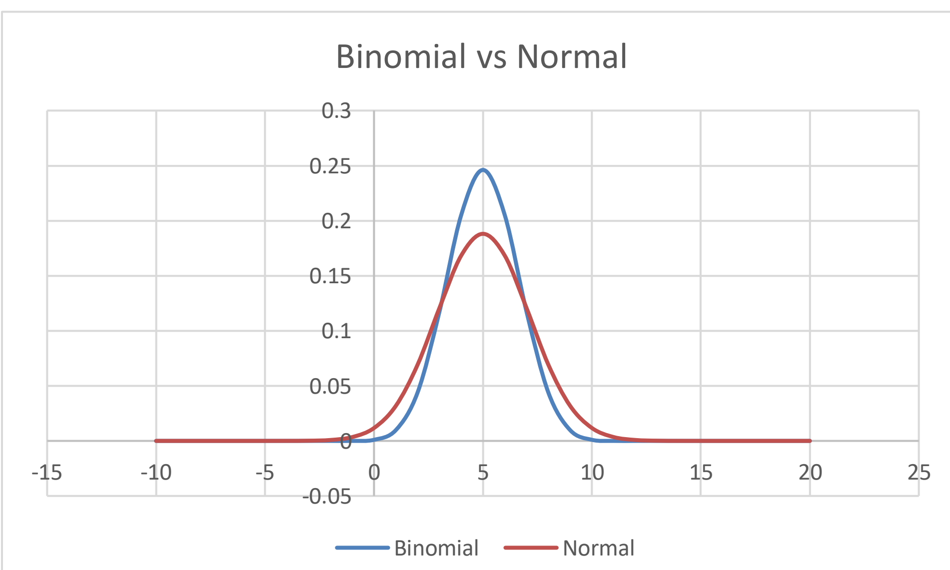
P(B(80, 6.826*10^(-1))>50) = P(N(54.608, 4.16324143) > 50)
Tipificamos la variable
P(X>50) = P(Z>(50-54.608)/ 4.16324143) = P(Z>-1.10682988) ≈ P(Z<1.107) = 87.9%

Ejercicio 5. Consideremos una distribución binomial con parametros n y p:

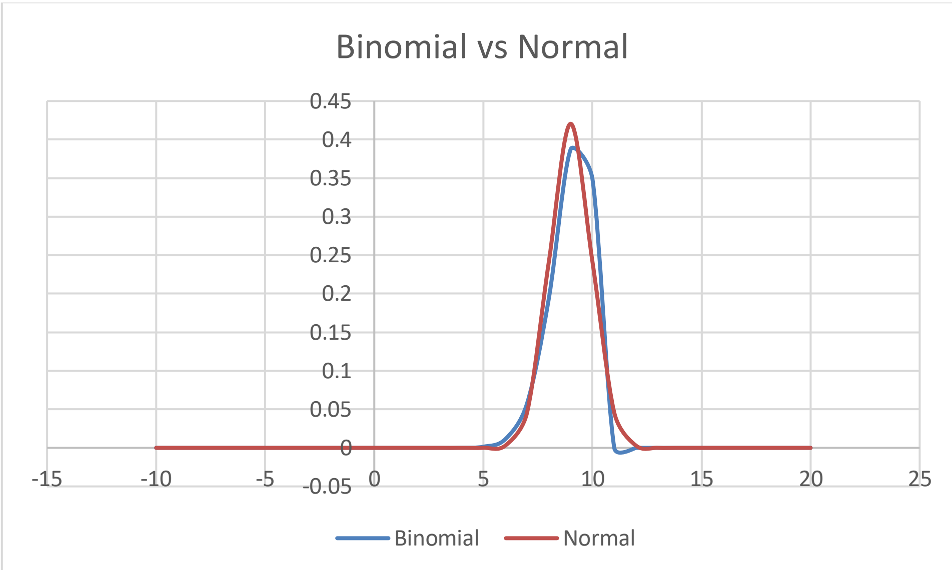
(a) Para $p = 0.1$ y $n = 10$, haga un gráfico de la función de masa de la distribucion binomial en los puntos $k = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, 2n$, junto con la función de densidad de una distribución normal con media 1 y varianza 0.9.



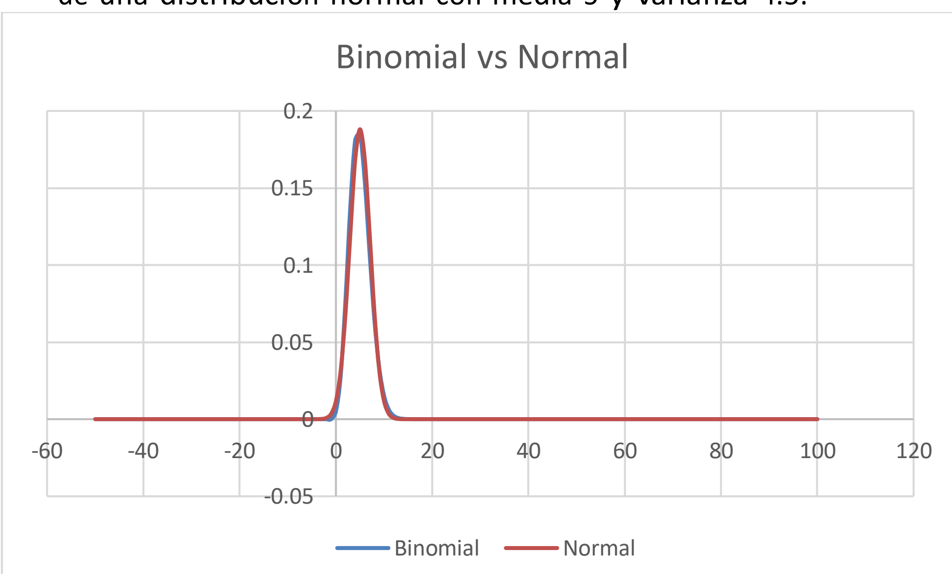
(b) Para $p = 0.5$ y $n = 10$, haga un gráfico de la función de masa de la distribucion binomial en los puntos $k = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, 2n$, junto con la función de densidad de una distribución normal con media 5 y varianza 2.5.



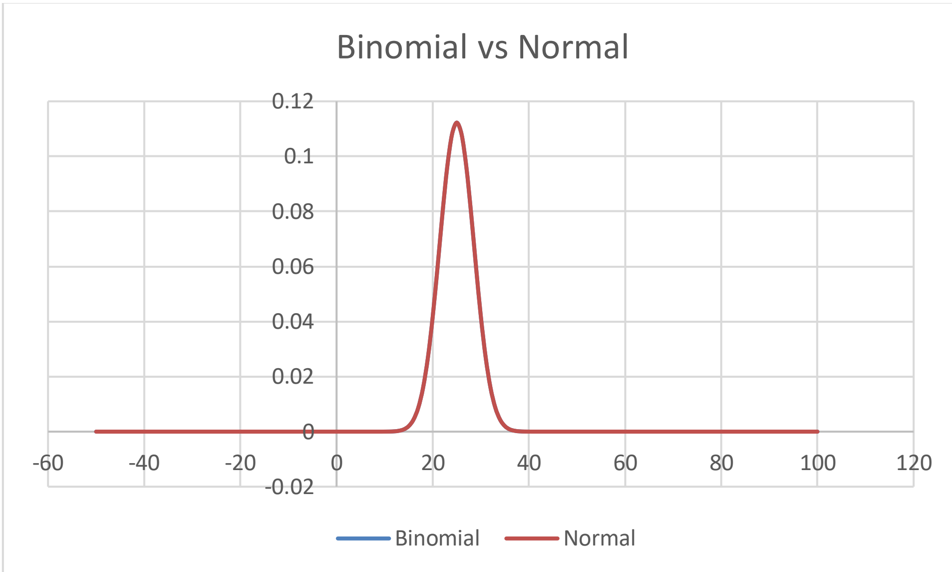
(c) Para $p = 0.9$ y $n = 10$, haga un gráfico de la función de masa de la distribucion binomial en los puntos $k = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, 2n$, junto con la función de densidad de una distribución normal con media 9 y varianza 0.9.



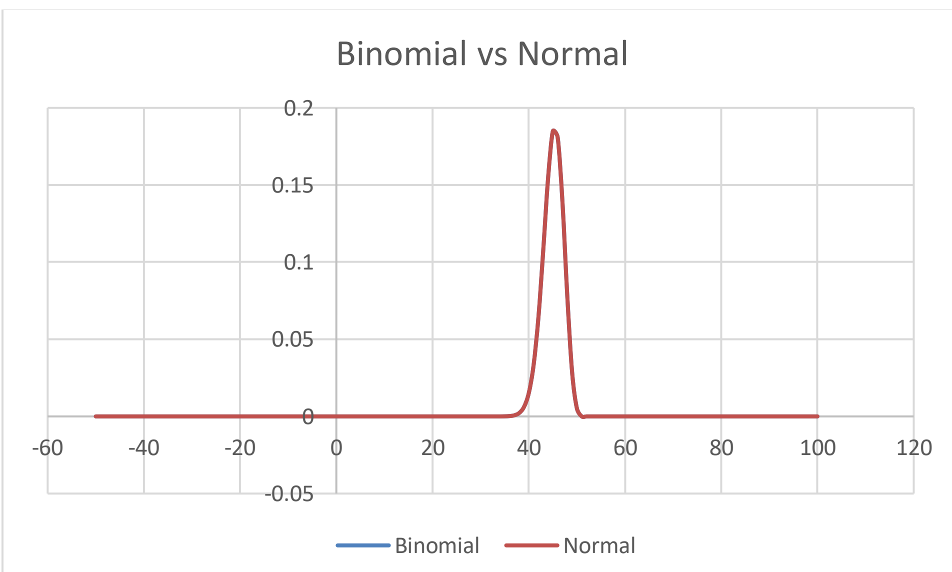
(d) Para $p = 0.1$ y $n = 50$, haga un gráfico de la función de masa de la distribucion binomial en los puntos $k = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, 2n$, junto con la función de densidad de una distribución normal con media 5 y varianza 4.5.



(e) Para $p = 0.5$ y $n = 50$, haga un gráfico de la función de masa de la distribucion binomial en los puntos $k = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, 2n$, junto con la función de densidad de una distribución normal con media 25 y varianza 12.5.



(f) Para $p = 0.9$ y $n = 50$, haga un gráfico de la función de masa de la distribucion binomial en los puntos $k = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, 2n$, junto con la función de densidad de una distribución normal con media 45 y varianza 4.5.



(g) Describa los gráficos obtenidos. ¿Cómo cambian los gráficos a medida que aumenta n? ¿Cómo dependen de la magnitud de p? ¿Qué sugieren los gráficos?
A medida que n aumenta los gráficos son cada vez más similares, las probabilidades bajas acercan la gráfica al eje de coordenadas mientras que las probabilidades altas la desplazan hacia la derecha, los gráficos sugieren la posibilidad de aproximar las variables con distribución binomial a aquellas de distribución normal

Reglas:

- El trabajo es indivudual.
- De una solución datallada para cada ejercicio.
- Resuelva el ejercicio 5 utilizando R (recomendado), Calc o Excel.
- Sólo se debe enviar una carpeta comprimida. Esta carpeta debe contener:
  - Un fichero pdf con las soluciones. Por favor, indique claramente el nombre completo en este fichero.
  - Al utilizar R, un fichero .R con todos los comandos que ha ejecutado para obtener las soluciones proporcionadas en el fichero pdf.
  - Al utilizar Calc o Excel, la hoja de cálculo de Calc o la hoja de cálculo de Excel.
- Entregue el trabajo a través del campus virtual Moodle.
- El nombre de la carpeta del archivo comprimido debe contener el nombre del autor. Por ejemplo: Trabajo2_Apellido1_Apellido2_Nombre
- Fecha l´ımite: 18 de abril de 2021