PREST (Grado en Ingeniería Informática) 2020-21

Examen Parcial, 19 de abril de 2021

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: _________________________________

Problema 1: Sea X una V.A con distribución $\exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, cuya densidad está dada por $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

a) (1p) Probar que $2X$ es también una V.A exponencial y determinar su parámetro.

b) (1p) Determinar su función de distribución $F_\lambda(x)$ y encontrar la *mediana* de X, esto es, el valor x para el cual $F_\lambda(x) = 1/2$, así como la media o valor valor esperado $E(X)$; ¿qué relación hay entre esas dos cantidades?

c) (0,5p) La cantidad de cierto isótopo radiactivo, para un tiempo $t > 0$, en términos de la cantidad inicial C_0, es $C_0 X$, siendo X una V.A de tipo $\exp(\lambda)$. Sabiendo que el tiempo medio de existencia de tal isótopo es de 100 años, determinar cuánto tiempo ha de pasar para que la cantidad de tal material radiactivo se haya reducido a la mitad.

Solución:

a) La función de distribución de $2X$ es

$$\begin{aligned}
F_{2X}(x) &= P(2X \leq x);\ x > 0 \text{ (0 en otro caso)} \\
&= P(X \leq x/2) \\
&= \int_0^{x/2} \lambda e^{-\lambda y}\, dy;\ \lambda y = u \\
&= \int_0^{\lambda x/2} e^{-u}\, du
\end{aligned}$$

luego su función de densidad $f_{2X}(x)$ será 0 si $x \leq 0$, y para $x > 0$

$$f_{2X}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{\lambda x/2} e^{-u}\, du = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x/2}$$

que es la densidad de una exponencial de parámetro $\lambda/2$.

b) La función de distribución de $X \sim \exp(\lambda)$ es 0 si $x \leq 0$, y para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
F_\lambda(x) &= \int_0^x \underbrace{\lambda e^{-\lambda y}\, dy}_{=d(-e^{-\lambda y})} \\
&= 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Por tanto, la mediana m de tal distribución cumple

$$\frac{1}{2} = F_\lambda(m) = 1 - e^{-\lambda m} \Rightarrow e^{-\lambda m} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

de dónde

$$-\lambda m = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Del mismo modo, apelando a lo visto en teoría, o haciendo el cálculo directo de $E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1/\lambda$, tenemos que $m = (\ln 2)E(X)$.

c) De acuerdo a lo visto en a) y b), si el tiempo medio de vida del isótopo es de años, la V.A que describe cuánto vive es una exponencial con $\lambda = 100$ (en años), luego el tiempo que ha de pasar para tener la mitad de isótopo corresponde a la mediana de tal V.A, cuyo valor será

$$m = (\ln 2)100 \approx 69,3 \text{ años}$$

Problema 2: Un vector aleatorio continuo $T = (X, Y)$ tiene densidad $f_T(x, y)$ dada por

$$f_T(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & 0 < x < 1,\, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \; ; \; c > 0 \text{ constante}$$

a) (0,5p) Determinar el valor de c.

b) (1p) Determinar las densidades marginales de X e Y y decidir si son o no independientes.

c) (1p) Determinar $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$ y $cov(X, Y)$.

Solución:

a) La función de densidad conjunta será siempre ≥ 0 para cualquier $c > 0$, luego de la condición de normalización obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{0<x,y<1} cxy^2 \, dxdy \\ &= \int_0^1 cx \underbrace{\int_0^1 y^2 \, dy}_{=1/3} \, dx \\ &= \frac{c}{3} \underbrace{\int_0^1 x \, dx}_{=1/2} \\ &= \frac{c}{6} \end{aligned}$$

luego $c = 6$.

b) Puesto que la densidad de T es no-nula sólo si $0 < x, y < 1$, las densidades marginales de X e Y sólo serán no-nulas en el intervalo $(0, 1)$. Para $x \in (0, 1)$ tenemos

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 6xy^2 \, dy \\ &= 2x \end{aligned}$$

De modo similar, para $y \in (0, 1)$ tenemos

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 6xy^2 \, dx \\ &= 3y^2 \end{aligned}$$

y puesto que para x, y cualesquiera se cumple $f_T(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, X e Y son independientes.

c) Usando las densidades marginales determinadas en b), tenemos

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x f_X(x) \, dx = \int_0^1 2x^2 \, dx \\ &= 2/3 \\ E(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x) \, dx = \int_0^1 2x^3 \, dx \\ &= 1/2 \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

De modo similar,

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 y f_Y(y)\, dy = \int_0^1 3y^3\, dy \\
&= 3/4 \\
E(Y^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^1 3x^4\, dx \\
&= 3/5 \\
V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\
&= \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}
\end{aligned}
$$

En cuanto la covarianza, notando que X e Y son independientes, se deduce inmediatamente que su covarianza es nula.

Problema 3: El número N de llamadas telefónicas por intervalos de 10 minutos que recibe una centralita telefónica se modeliza por una V.A de tipo Poisson: $N \sim P(\lambda)$, $\lambda = 3$.

a) (1p) Determinar la probabilidad p de que en un intervalo de 10 minutos la centralita haya recibido al menos 2 llamadas.

b) (0,5p) ¿Cuál es el número esperado de llamadas en un período de una hora?

c) (1p) Caracterizar la V.A que da el número de llamadas en un día, con una jornada activa de 10 horas, y calcular aproximadamente la probabilidad de que la centralita haya recibido al menos 200 llamadas. Explicar qué tipo de aproximación se ha usado.

d) (1p) Caracterizar la V.A que representa la probabilidad de que en una jornada de 10 horas, el número de intervalos de 10 minutos en los cuales ha recibido al menos dos llamadas y calcular aproximadamente la probabilidad de que ese número de intervalos sea al menos de 50. Explicar qué tipo de aproximación se ha usado.

(Observación: Consideramos los sucesivos períodos de 10 minutos de la jornada como independientes),

Solución:

a) La probabilidad p pedida es

$$\begin{aligned} p &= P(P(\lambda) \geq 2) \\ &= 1 - P(P(\lambda) \leq 1);\ P(\lambda) \text{ es discreta con valores enteros} \\ &= 1 - \left[e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}\right] \\ &= 1 - e^{-\lambda}(1+\lambda);\ \lambda = 3 \\ &\approx 0,801 \end{aligned}$$

b) De acuerdo a lo visto en Teoría, la esperanza de una V.A de Poisson coincide con su parámetro, luego el número esperado de llamadas será de $3 \cdot 6 = 18$ (pues en una hora hay 6 intervalos de 10 minutos, en cada uno de los cuales esperamos 3 llamadas).

c) Si por cada período de 10 minutos la V.A que describe el número total de llamadas es una $X \sim P(\lambda = 3)$, en un día, con jornada activa de 10 horas, hay 60 períodos de 10 minutos, todos los cuales se considerarán independientes. Por tanto, el número total de llamadas en el día será una V.A S con

$$S = \sum_{j=1}^{60} X_j;\ X_1, \ldots, X_n \text{ iid}'\text{s con distribución } X$$

y por lo visto en Teoría, $S \sim P(\lambda = 60 \cdot 3 = 180)$. Puesto que el parámetro de S es grande, podemos aproximar S por una Normal:

$$S \approx N(\mu = 180, \sigma = \sqrt{180} = 13,42)$$

luego

$$\begin{aligned} P(S \geq 200) &\approx P\left(N(180, 13,42) \geq 200\right) \\ &= P\left(N(0,1) \geq \frac{200-180}{13,42} = 1,49\right) \approx 0,06811 \approx 6,8\% \end{aligned}$$

d) La V.A X que caracteriza el número de períodos de 10 minutos con al menos 2 llamadas en cada uno es una Binomial $B(n = 60, p = 0,801)$ (probabilidad calculada en a)). Como n es grande y p ni es pequeña ni muy próxima a 1, aproximamos X por una Normal:

$$X \approx N(\mu = np = 48,06, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3,09)$$

y entonces

$$\begin{aligned} P(X \geq 50) &\approx P\left(N(48,06,\, 3,09) \geq 50\right) \\ &= P\left(N(0,1) \geq \frac{48,06 - 50}{3,09} = -0,63\right) \\ &= 1 - P\left(N(0,1) \leq -0,63\right) \\ &= 1 - P\left(N(0,1) \geq 0,63\right) \approx 1 - 0,26435 \approx 0,73 \end{aligned}$$

Problema 4: El peso (en Kg.) X de un individuo elegido al azar en cierta población A es una $N(\mu = 85, \sigma = 10)$, mientras que el peso (en Kg.) Y de un individuo elegido al azar en otra población B es una $N(\mu = 95, \sigma = 11)$.

a) (0,5p) Calcular la probabilidad de que un individuo elegido al azar de la población A pese más que un individuo elegido al azar de la población B.

b) (1p) Elegimos 10 individuos al azar en la población A y otros 10 individuos (también al azar) de B. Calcular la probabilidad de que el peso conjunto de los 10 primeros supere al peso conjunto de los 10 últimos.

(deben especificarse las hipótesis implícitas que se usen).

Solución:

a) La probabilidad p pedida es

$$\begin{aligned} p &= P(X > Y) \\ &= P(X - Y > 0) \end{aligned}$$

pero considerando a las dos poblaciones como independientes, X e Y son independientes, y como son normales,

$$X - Y \sim N(\mu = 85 - 95 = -10, \sigma = \sqrt{10^2 + 11^2} = 14,87)$$

y entonces

$$\begin{aligned} P(X - Y > 0) &= P\left(N(-10,\, 14,87) \geq 0\right) \\ &= P\left(N(0,1) \geq \frac{10}{14,87} = 0,67\right) = 0,25143 \end{aligned}$$

b) El peso conjunto de 10 individuos elegidos al azar de la población A será una $P_A \sim N(\mu = 10{\cdot}85 = 850, \sigma = \sqrt{10}10 = 31,62)$, mientras que el peso conjunto de 10 individuos elegidos al azar de la población B será una $P_B \sim N(\mu = 10 \cdot 95 = 950, \sigma = \sqrt{10}11 = 33,17)$. P_A y P_B son independientes, de nuevo considerando a las respectivas poblaciones como independientes, luego

$$P_A - P_B \sim N(\mu = 850 - 950 = -100, \sigma = \sqrt{10(10^2 + 11^2)} = 47,01)$$

y entonces

$$\begin{aligned} P(P_A - P_B > 0) &= P\left(N(-100,\, 47,01) \geq 0\right) \\ &= P\left(N(0,1) \geq \frac{100}{47,01} = 2,13\right) = 0,01659 \end{aligned}$$