CERTAMEN 1

Profesor: Juan Crisóstomo

JAVIER ESTEBAN CHANDIA VALDES
CIENCIAS FISICAS
DEPARTAMENTO
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

2025
Concepción, Chile

Índice general

Ejercicio 1

Considera las coordenadas oblatas esferoidales:

$$\mathbf{r}(v,\theta,\phi) = a\left(\cosh(v)\sin\phi(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) + \sinh(v)\cos\phi\hat{z}\right)$$

Con $v \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), \phi \in (0, \pi)$.
Notación: remarcar que, se hicieron las transformaciones

$$\begin{aligned}
&\theta \to -\phi + \frac{\pi}{2} \\
&\phi \to \theta
\end{aligned}$$

en comparación con el ejercicio del certamen original, por conveniencia. No afecta al procedimiento.
Encuentra:

Las líneas coordenadas

Observamos que:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cosh^2(v)\cos^2(\phi)) \\
&= a^2\cosh^2(v)\sin^2(\phi) \\
&= R^2(v,\phi)
\end{aligned}$$

es decir, para $(v,\phi) = (v_0,\phi_0)$ fijos:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= R^2(v_0,\phi_0) \\
&= R_0^2
\end{aligned}$$

que corresponde a la curva de una circumferencia de radio R_0 en la gráfica (desmos)
Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\sinh^2(v)R^2(v,\phi) + \cosh^2(v)z^2 &= a^2\cosh^2(v)\sinh^2(v)(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\
&= a^2\cosh^2(v)\sinh^2(v) \\
&= F^2(v)
\end{aligned}$$

es decir, para $v = v_0$ fijo, tenemos una elipsoide. Sean

$$\begin{aligned}
F^2(v_0) &= c^2 \\
\sinh^2(v_0) &= a^2 \\
\cosh^2(v_0) &= b^2
\end{aligned}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ numeros reales arbitrarios. Entonces, tenemos la ecuación:

$$\frac{a^2}{c^2}(x^2 + y^2) + \frac{b^2}{c^2}(z^2) = 1$$

que se corresponde a la ecuación de superficie de una elipsoide (desmos). Cuando

$$x^2 + y^2 = R^2$$

podemos reducir el problema al espacio (R, z), donde usamos las parametrizaciones

$$\begin{aligned} R &= \frac{c}{a} \sin \phi \\ z &= \frac{c}{b} \cos \phi \\ \frac{R}{z} &= \frac{b}{a} \tan \phi \end{aligned}$$

tal que, si:

$$\frac{a^2}{c^2} R^2 + \frac{b^2}{c^2} z^2 = 1$$

entonces:

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

que, en efecto, corresponde a una familia de elipses (desmos). Requerimos que $R \geq 0$ para representarlas de forma única.

Finalmente, necesitamos volver a la ecuación dependiente de v y encontrar su parametrización natural.

Recordemos que, si:

$$x^2 - y^2 = 1$$

entonces, $x = \cosh(v), y = \sinh(v)$ surgen como parametrización natural, donde:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4}(2 - (-2)) \\ &= 1 \quad \square \end{aligned}$$

Esto sugiere que usemos:

$$\begin{aligned} \cos^2(\phi) R^2(v, \phi) - \sin^2(\phi) z^2 &= a^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) \left(\cosh^2(v) - \sinh^2(v)\right) \\ &= a^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ &= G^2(\phi) \end{aligned}$$

Luego, sean $\phi = \phi_0$ fijo, tales que:

$$\begin{aligned} a^2 &= \cos^2 \phi_0 \\ b^2 &= \sin^2 \phi_0 \\ c^2 &= G^2(\phi_0) \end{aligned}$$

con $a, b \in [-1,1], c \in \mathbb{R}$. De modo que:

$$\frac{a^2}{c^2}(x^2+y^2) - \frac{b^2}{c^2}(z^2) = 1$$

que corresponde a la ecuación de un hiperboloide (desmos)

De forma similar, podemos parametrizar la curva en el espacio (R, z), donde

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= R^2 \\ R &= \frac{c}{a}\cosh(v) \\ z &= \frac{c}{b}\sinh(v) \end{aligned}$$

que corresponde a una familia de hipérbolas en el plano (R, z) (desmos), donde requerimos que $R \geq 0$, $v \geq 0$ para representarlas de forma única.

Los vectores direccionales tangentes a las líneas coordenadas

Podemos encontrar los vectores tangentes diferenciando $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(v,\theta,\phi) &= a\left(\cosh(v)\sin\phi(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}) + \sinh(v)\cos\phi\hat{z}\right) \\ d\mathbf{r}(v,\theta,\phi) &= \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dv + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}d\phi\right) \\ &= a(\sinh(v)\sin\phi(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}) + \cosh(v)\cos\phi\hat{z})dv \\ &+ a\cosh(v)\sin\phi(-\sin\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y})d\theta \\ &+ a(\cosh(v)\cos\phi(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}) - \sinh(v)\sin\phi\hat{z})d\phi \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(v,\theta,\phi) &= a\left(\sinh(v)\sin\phi(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}) + \cosh(v)\cos\phi\hat{z}\right) \\ \boldsymbol{\theta}(v,\theta,\phi) &= a\cosh(v)\sin\phi(-\sin\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y}) \\ \boldsymbol{\phi}(v,\theta,\phi) &= a(\cosh(v)\cos\phi(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}) - \sinh(v)\sin\phi\hat{z}) \end{aligned}$$

los vectores tangentes a las curvas

La métrica, métrica inversa, coeficientes de Christoffel

Recordemos que la métrica (en 3 dimensiones) es la matriz G que caracteriza:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}^2 &= [dx]^T G [dx] \\ [dx]^T &= (dx_1\ dx_2\ dx_3) \end{aligned}$$

donde

$$G = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)_{(i,j)}$$

es una matriz simétrica, de modo que, para nuestras coordenadas:

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\theta} & \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{v} & \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{v} & \boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi} \end{pmatrix}$$

Calculando G (ignoramos a^2 por ahora, pues es un factor constante a la métrica):

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \left(\sinh^2(v)\sin^2\phi\cancel{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}+\cosh^2(v)\cos^2\phi\right)\\
&= \sinh^2(v)\sin^2\phi+\cosh^2(v)\cos^2\phi\\
g_{21} &= \cosh(v)\sin\phi\cosh(v)\sin\phi\cancel{(-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta)}\\
&= 0\\
g_{22} &= \cosh^2(v)\sin^2\phi\\
g_{31} &= \cosh^2(v)\sin\phi\cos\phi\cancel{(-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta}\\
&= 0\\
g_{32} &= \cos^2(v)\sin\phi\cos\phi\cancel{(-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)}\\
&= 0\\
g_{33} &= \cosh^2(v)\cos^2\phi\cancel{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}+\sinh^2(v)\sin^2\phi\\
&= \cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi
\end{aligned}
$$

observamos que $g_{11}=g_{33}$. Usamos la propiedad de que $g_{ij}=g_{ji}$ para calcular inmediatamente el resto.

Luego, tenemos una matriz tal que:

$$
G(v,\theta,\phi)=a^2\begin{pmatrix} g_{11}(v,\phi) & 0 & 0\\ 0 & g_{22}(v,\phi) & 0\\ 0 & 0 & g_{33}(v,\phi)\end{pmatrix}
$$

que corresponde a una métrica diagonal. Luego, el sistema es ortogonal, y se satisface que:

$$
\begin{aligned}
G^{-1} &= (g^{ij})_{3\times 3}\\
&= (g_{ij}^{-1})_{3\times 3}
\end{aligned}
$$

por lo tanto:

$$
G^{-1}=\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{g_{22}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{33}}\end{pmatrix}
$$

Nos falta encontrar los símbolos de Christoffel. Tenemos que:

$$
\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l}\right)
$$

cuando tenemos coordenadas (q_1, q_2, q_3) y conocemos las métricas. En este caso:

$$\begin{aligned}
2\Gamma^k_{11} &= g^{k1}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right) \\
&+ g^{k2}\left(\cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{21}}{\partial v}} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta}\right) \\
&+ g^{k3}\left(\cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial v} + \frac{\partial g_{31}}{\partial v}} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Gamma^k_{21} &= g^{k1}\left(\cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial v}} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} - \cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial v}}\right) \\
&+ g^{k2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{21}}{\partial \theta}}\right) \\
&+ g^{k3}\cancel{\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial v} + \frac{\partial g_{31}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{21}}{\partial \phi}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Gamma^k_{22} &= g^{k1}\left(\cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \theta}} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v}\right) \\
&+ g^{k2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}\right) \\
&+ g^{k3}\left(\cancel{\frac{\partial g_{23}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{32}}{\partial \theta}} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Gamma^k_{31} &= g^{k1}\left(\cancel{\frac{\partial g_{31}}{\partial v}} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \phi} - \cancel{\frac{\partial g_{31}}{\partial v}}\right) \\
&+ g^{k2}\cancel{\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial v} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{31}}{\partial \theta}\right)} \\
&+ g^{k3}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial v} + \cancel{\frac{\partial g_{31}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{31}}{\partial \phi}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Gamma^k_{32} &= g^{k1}\cancel{\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{32}}{\partial v}\right)} \\
&+ g^{k2}\left(\cancel{\frac{\partial g_{32}}{\partial \theta}} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \phi} - \cancel{\frac{\partial g_{32}}{\partial \theta}}\right) \\
&+ g^{k3}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \cancel{\frac{\partial g_{32}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{32}}{\partial \phi}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\Gamma^k_{33} = g^{k1} &\left(\cancel{\frac{\partial g_{31}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{13}}{\partial \phi}} - \frac{\partial g_{33}}{\partial v} \right) \\
&+ g^{k2} \left(\cancel{\frac{\partial g_{32}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{23}}{\partial \phi}} - \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right) \\
&+ g^{k3} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} \right)
\end{aligned}
$$

Notar que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, por lo que no hay que calcular todos los términos. Además, $g^{ij} = g^{ii}\delta^j_i$ para $i \neq j$. Y puesto que $G = G(v, \phi)$, las derivadas parciales con respecto a ϕ son cero. Finalmente:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} (2\cosh(v)\sinh(v)\cancel{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}) \\
&= \frac{\sinh(v)\cosh(v)}{\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi} \\
\Gamma^2_{11} &= 0 \\
\Gamma^3_{11} &= \frac{-1}{2g^{33}} (2\sin\phi\cos\phi)(\cosh^2 v - \sinh^2 v) \\
&= -\frac{\sin\phi\cos\phi}{\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi} \\
\Gamma^1_{21} &= 0 \\
\Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2g^{22}} 2\cosh(v)\sinh(v)\sin^2\phi \\
&= \frac{\sinh(v)}{\cosh(v)} \\
&= \tanh(v) \\
\Gamma^3_{21} &= 0 \\
\Gamma^1_{22} &= -\frac{\cancel{2}\cosh(v)\sinh(v)\sin^2\phi}{\cancel{2}(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)} \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2\cosh^2(v)\sin^2\phi} \cdot 0 \\
&= 0 \\
\Gamma^3_{22} &= \frac{-1}{\cancel{2}(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)} \cancel{2}\sin\phi\cos\phi\cosh^2(v) \\
\Gamma^1_{31} &= \frac{\cancel{2}\sin\phi\cos\phi}{\cancel{2}(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)} \\
\Gamma^2_{31} &= 0 \\
\Gamma^3_{31} &= \frac{\cancel{2}\cosh(v)\sinh(v)}{\cancel{2}(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)} \\
\Gamma^1_{32} &= 0 \\
\Gamma^2_{32} &= \frac{\cancel{2\sin\phi}\cos\phi\cancel{\cosh^2(\phi)}}{\cancel{2(\cosh^2(v)}\sin^{\cancel{2}}\phi)} = \frac{1}{\tan\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{32} &= 0\\
\Gamma^1_{33} &= -\frac{\cancel{2}\sinh v\cosh v}{\cancel{2}(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}\\
\Gamma^2_{33} &= 0\\
\Gamma^3_{33} &= \frac{\cancel{2}\sin\phi\cos\phi(\sinh^2(v)-\cosh^2(v))}{\cancel{2}(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}\\
&= -\frac{\sin\phi\cos\phi}{(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^3_{21}=\Gamma^2_{22}=\Gamma^2_{31}=\Gamma^1_{32}=\Gamma^3_{32}=\Gamma^2_{33}=0$, que constituyen $5\cdot 2+3=13$ símbolos de Christoffel, mientras que:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{\sinh(v)\cosh(v)}{\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi}\\
\Gamma^3_{11} &= -\frac{\sin\phi\cos\phi}{\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi}\\
\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12} &= \tanh(v)\\
\Gamma^1_{22} &= -\frac{\cosh(v)\sinh(v)\sin^2\phi}{(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}\\
\Gamma^3_{22} &= \frac{-\sin\phi\cos\phi\cosh^2(v)}{(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}\\
\Gamma^1_{31}=\Gamma^1_{13} &= \frac{\sin\phi\cos\phi}{\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi}\\
\Gamma^3_{31}=\Gamma^3_{13} &= \frac{\cosh(v)\sinh(v)}{\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi}\\
\Gamma^2_{32}=\Gamma^2_{23} &= \frac{1}{\tan\phi}\\
\Gamma^1_{33} &= \frac{\sinh(v)\cosh(v)}{\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi}\\
\Gamma^3_{33} &= -\frac{\sin\phi\cos\phi}{\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi}
\end{aligned}
$$

que constituyen 14 símbolos de Christoffel. Por lo tanto, hemos calculado $14+13=27$ símbolos de Christoffel. (donde hemos ignroado el término a^2)

Los operadores diferenciales clásicos

Recordemos que:

$$\nabla=\sum_i \mathbf{E}^i\frac{\partial}{\partial q^i}$$

donde $\mathbf{E}^i$ es un vector del espacio dual, tal que:

$$\mathbf{E}^i=\sum_{k=1}^{3} g^{ik}\mathbf{e}_k$$

por lo tanto, en estas coordenadas ortogonales:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{v}}{a^2(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)}$$
$$\mathbf{\Theta} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{a^2\cosh^2(v)\sin^2\phi}$$
$$\mathbf{\Phi} = \frac{\boldsymbol{\phi}}{a^2(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)}$$

donde hemos reintroducido el término a^2 en g^{ij}. Por lo tanto, tenemos:

$$\nabla = \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial v} + \mathbf{\Theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{\Phi}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

El operador divergencia es tal que:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(v,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}\frac{f^i}{\sqrt{g_{ii}}}\right)$$

donde $\sqrt{g} = \sqrt{\det G}$. Así:

$$g = a^6(\cosh^2(v)\sin^2\phi)(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)^2$$

donde debemos reintroducir el término de a a cada g_{ij}.

Tras lo cual:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{f}(v,\theta,\phi) &= \frac{1}{a^3(\cosh(v)\sin\phi)(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)} \\
&\cdot \left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a^3(\cosh(v)\sin\phi)(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)}{a\sqrt{\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi}}f^v\right)\right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(a^3\cancel{(\cosh(v)\sin\phi)}(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)\frac{1}{a\cancel{\cosh(v)\sin\phi}}f^\theta\right) \\
&+ \left.\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{a^3(\cosh(v)\sin\phi)(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)}{a\sqrt{\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi}}f^\phi\right)\right) \\
&= \frac{1}{a(\cosh(v)\sin\phi)(\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)} \\
&\cdot \left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\cosh(v)\sin\phi\sqrt{\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi}f^v\right)\right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \theta}\left((\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi)f^\theta\right) \\
&+ \left.\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cosh(v)\sin\phi\sqrt{\cosh^2(v)\cos^2\phi + \sinh^2(v)\sin^2\phi}f^\phi\right)\right)
\end{aligned}$$

y por último, el laplaciano:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial q^j}\right)$$

reemplazando, y tomando en cuenta que las coordenadas son ortogonales, entonces:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(v,\theta,\phi) = &\frac{1}{a^2(\cosh(v)\sin\phi)(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)} \\
&\cdot\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(\cosh(v)\sin\phi)\cancel{(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}}{\cancel{\cosh^2(v)\sin^2\phi+\sinh^2(v)\cos^2\phi}}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right. \\
&+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cancel{(\cosh(v)\sin\phi)}(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}{\cosh^{\cancel{2}}(v)\sin^{\cancel{2}}\phi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(\cosh(v)\sin\phi)\cancel{(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}}{\cancel{\cosh^2(v)\sin^2\phi+\sinh^2(v)\cos^2\phi}}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\right)
\end{aligned}
$$

es decir:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(v,\theta,\phi) = \frac{1}{a^2}&\left(\frac{1}{\cosh(v)(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}\frac{\partial}{\partial v}\left((\cosh(v))\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right. \\
&+\frac{1}{\cosh^2(v)\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \\
&\left.+\frac{1}{\sin\phi(\cosh^2(v)\cos^2\phi+\sinh^2(v)\sin^2\phi)}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Podemos asegurarnos que está correcto, pues existe un paralelismo entre este laplaciano y el de las coordenadas polares esféricas, en las coordenadas θ, ϕ. La que difiere es la coordenada de v, la cual conlleva una ecuación diferente.

Esta comparación fue el motivo de la transformación de ángulos al inicio. Desplazar el argumento del ángulo solo cambia senos por cosenos, asi que el resultado sigue teniendo sentido.

Ejercicio 2

Una nave de masa m se aproxima a Marte, de masa M, mediante una órbita $A \to B$ parabólica, esto es, el camino que traza es una órbita parabólica, como muestra la figura.

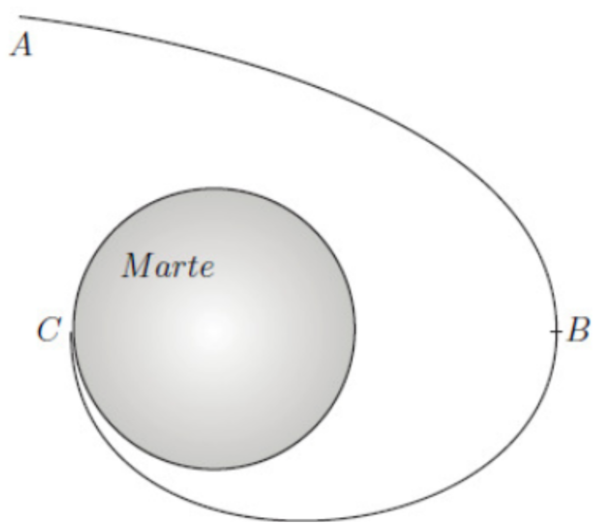

Figura 1: Figura 1

Cuando la nave alcanza el punto B de mínima distancia a Marte, frena usando sus cohetes, y pasa a una órbita elíptica $B \to C$ tan bien calculada que amartiza (aterriza en marte) en un punto C, opuesto a B, de forma tangencial.

Los datos conocidos son

$$\begin{aligned} m &\equiv \text{masa cohete} \\ M &\equiv \text{masa Marte} \\ r_B &\equiv \text{distancia del centro de Marte a B} \\ R_M &\equiv \text{radio de Marte} \end{aligned}$$

Obtenga:

La velocidad de la nave en B antes de frenar

Tenemos que la nave está sujeta a una fuerza central, pues la masa $M \gg m$, de la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{r}$$
$$F(r) = \frac{k}{r^2}$$
$$k = -GMm < 0$$

con el origen centrado sobre M. Por lo tanto, sigue las ecuaciones:

$$m\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = F(r)$$
$$\frac{dL}{dt} = 0$$

donde:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

tal que

$$L = \|\mathbf{r} \times \mathbf{p}\|$$
$$= mr^2\dot{\theta} = \text{cte}$$

Se cumple que las fuerzas centrales son conservativas, por lo tanto, podemos resolver para la integral de energía:

$$K(\mathbf{v}) + V(\mathbf{r}) = E$$

con E constante, que depende de las condiciones iniciales, tal que:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(\mathbf{r}) = E$$
$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - (V(r) + \frac{L^2}{2mr^2})$$

sea

$$\tilde{V}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

el potencial efectivo, entonces:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - \tilde{V}(r)}$$

es claro que $V(r) = \dfrac{k}{r}$, tal que:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - \tilde{V}(r)}$$

el problema nos dice que, antes de frenar, se sigue la trayectoria de una parábola.

A partir de la caracterización de los puntos de vira, encontramos que, al resolver la ecuación diferencial para

$$u(\theta(t)) = \frac{1}{r}$$

la cual posee soluciones

$$u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) - \frac{mK}{L^2}$$

donde

$$\begin{aligned} B &= -\frac{mK}{L^2} \\ A^2 &= B^2 + \frac{2mE}{L^2} \end{aligned}$$

La ecuación de u corresponde a la ecuación de una sección cónica, donde:

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + B$$

luego, es una parábola, si:

$$A = B$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{L^2} &= 0 \\ E &= 0 \end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{-\left(\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}\right)}$$

observemos que la trayectoria del punto B se detiene en un punto de vira a distancia $r_0 = r_B$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(r_B) &= 0 \\ \frac{k}{r_B} + \frac{L^2}{2mr_B^2} &= 0 \\ L^2 &= 2mr_B^2\frac{(-k)}{r_B} \\ L &= \sqrt{2mr_B(-k)} \end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} \dot{r}(r_B) &= \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{-\left(\frac{k}{r_B} + \frac{2mr_b(-k)}{2mr_b^2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{-\left(\frac{-GMm}{r_B} + \frac{GMm}{r_B}\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

mientras que la componente angular:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{L}{mr^2} \\ &= \frac{\sqrt{2\cancel{m}r_BGM\cancel{m}}}{\cancel{m}r_B^2} \\ &= \frac{\sqrt{2r_BGM}}{r_B^2} \end{aligned}$$

Puesto que:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(r_B) &= \frac{\sqrt{2r_B GM}}{r_B} \\
&= \sqrt{\frac{2GM}{r_B}}
\end{aligned}$$

La energía cuando llega a su órbita elíptica

Como la órbita es continua, con un punto de vira en C, podemos obtener su energía analizando el punto B. Cuando es una elipse, $E < 0$, y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tilde{V}(r) &= E < 0 \\
\tilde{V}(r_B) &= E < 0
\end{aligned}$$

puesto que aterriza en C, el cual es un punto de vira:

$$\tilde{V}(r_C) = \tilde{V}(R_M)$$

Ejercicio 3

Sea

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{r}$$

tal que la partícula describe una trayectoria circular

$$s(t) = R\hat{r}(\theta(t))$$

demostrar que

$$F \propto \frac{1}{r^5}$$

Demostración. Observamos que:

$$\frac{ds}{dt} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$\frac{d^2s}{dt^2} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

entonces, tenemos la ecuación diferencial:

$$m(-R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}) = F(r)\hat{r}$$

□

Ejercicio 4

Sea

$$r(\theta) = r_0 e^{\alpha\theta}$$

con $r_0, \alpha \in \mathbb{R}$. Si L es dado, encuentra el potencial $V(r)$

Solución:

Observemos que:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-m}{L^2u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

determina la trayectoria $u(\theta) = 1/r$. Por lo tanto, si $r(\theta)$ es dado, encontremos $u(\theta)$:

$$u(\theta) = \frac{1}{r_0} e^{-\alpha\theta}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\theta} &= -\alpha e^{-\alpha t} \\
&= -\frac{m}{L}\frac{dr}{dt} \\
\frac{d^2u}{d\theta^2} &= \alpha^2 e^{-\alpha t} \\
&= \frac{r^2m^2}{L^2}\frac{d^2r}{dt^2}
\end{aligned}$$

por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \frac{L^2}{m^2r^2}\alpha^2\frac{1}{r} \\
&= \frac{\alpha^2L^2}{r^3} \\
\dot{r} &= -
\end{aligned}$$