Obtener la constante de aceleracion gravitatoria g mediante el movimiento de un objeto en un plano inclinado

Autor: Javier Chandía

06 de octubre, 2024

Resumen

Mediante la toma de mediciones de la posición, ángulo de inclinación y el tiempo transcurrido de un objeto moviendose en un plano inclinado, determinamos mediante un ajuste de minimos cuadrados un valor para g

1. Introduccion

Los planos inclinados son conocidos desde la era de Galileo Galilei; se conocía que la velocidad dependía del ángulo de inclinación.

Hoy en día, podemos obtener un desarrollo más riguroso del origen de esa velocidad, y determinar las magnitudes relacionadas entre sí.

2. Teoría

Empezemos analizando la dinámica de nuestro sistema. (ver fig. 1)
En el cuerpo de interés de masa m, actúan las siguientes fuerzas:

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &: \text{ La fuerza de gravedad} \\ \vec{F}_\mu &: \text{ La fuerza de roce} \\ \vec{N} &: \text{ La fuerza normal} \end{aligned}$$

Si queremos analizar la posición desde la pared perpendicular al plano en el tiempo (vector $\vec{r}(t)$), con un ángulo de inclinación θ, nos conviene usar coordenadas polares (descritas por $\hat{r}, \hat{\theta}$), desde $\vec{r}$, para analizar el sistema. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F}_\mu &= N\mu\ \hat{r} \\ \vec{N} &= N\hat{\theta} \\ \vec{F}_g &= mg(-\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}) \end{aligned}$$

Luego, por la segunda ley de Newton:

$$N - mg\cos\theta = 0 \qquad (\cdot\hat{\theta})$$

$$N\mu - mg\sin\theta = m\frac{d^2r(t)}{dt^2} \qquad (\cdot\hat{r})$$

Sustituyendo terminos conocidos en $(\cdot\hat{r})$:

$$mg\cos\theta\mu - mg\sin\theta = m\frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

$$\frac{1}{cos\theta\mu - \sin\theta}\frac{d^2r}{dt^2}(t) = g$$

Si la velocidad inicial es 0, y la posición inicial en $t = 0$ es r_0:

$$g = 2\frac{(r(t) - r_0)}{t^2(\cos\theta\mu - \sin\theta)}$$

Cuando $\theta \to \pi/2$, tenemos caída libre, es decir:

$$g \to -2\frac{r(t) - r_0}{t^2}$$

dado que $\forall t > 0 : r(t) < r_0$, la magnitud de g es positiva en esta definición. Si el ángulo es pequeño ($\sin\theta \approx \theta$), entonces:

$$\begin{aligned} g &\approx 2\frac{r(t) - r_0}{t^2(\mu - \theta)} \\ &= -2\frac{r(t) - r_0}{t^2(\mu - \theta)} \end{aligned}$$

Es decir, si medimos la posición en un tiempo final t_f, que es cuando $r = 0$ entonces g está en función de θ

$$g(\theta) = \frac{-2r_0}{t_f^2}\frac{1}{\mu - \theta}$$

Que es lo que mediremos en nuestro experimento.
*Nota: Supondremos que $\mu \in (0, 3 * \frac{2\pi}{180})$, de modo que $\theta \geq 3[deg]$ esté dentro de un rango medible de error, respecto a la función original de g

3. Procedimiento experimental

3.1. Materiales

i) 1 Auto de juguete

ii) 1 Plano inclinado, de ancho mayor que el del auto de juguete y largo $r_0 + \Delta A$, donde ΔA es el largo del auto, y r_0 es el punto de medición desde el parachoques

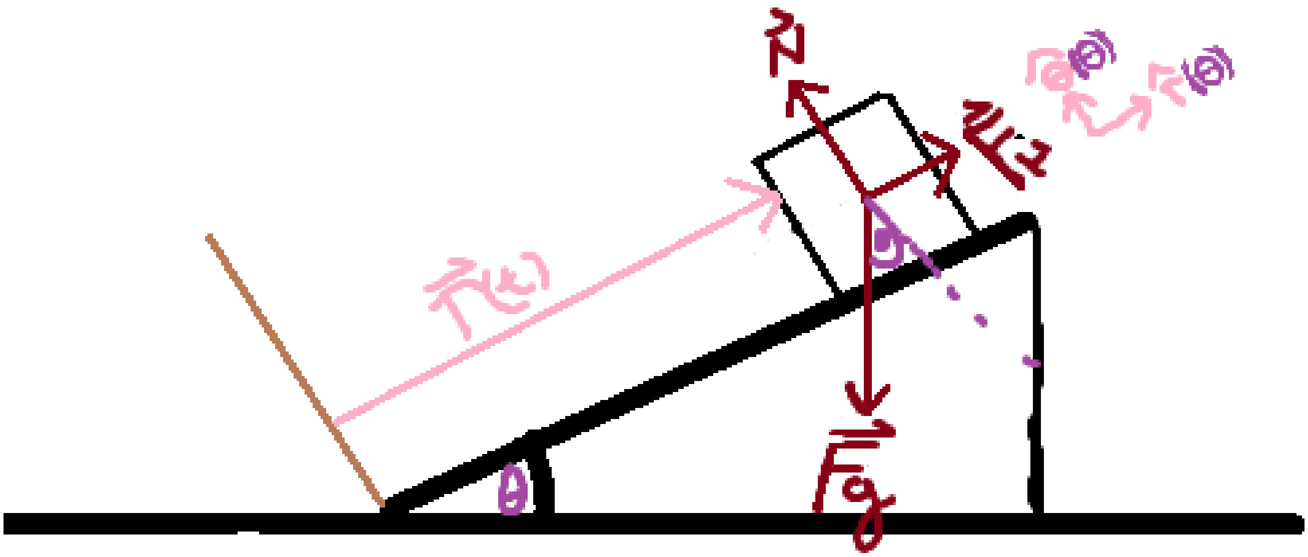

Figura 1: Diagrama del sistema teórico

iii) 1 Cronometro

iv) 1 Regla de la longitud del plano inclinado

v) Una pared (opcional: amortiguada) para detener el auto

vi) 1 transportador

vii) Soportes y estabilizadores a discresión

3.2. Montaje

Se monta el plano inclinado con los soportes adecuados, de tal forma que esté estable, y su ángulo de inclinación pueda ser modificable. Se ensambla la pared en la base del plano, perpendicular a este mísmo. Se inserta el transportador paralelo al plano, de tal forma, que podemos medir el ángulo de inclinación respecto al suelo. Alternativamente, se mide $\theta = \sin^{-1}(\frac{h}{r_0+\Delta A})$. (Ver fig. 2)
Finalmente, con las manos, se sujeta el auto y el cronómetro. Se empieza a medir el tiempo cuando se suelta el vehículo, y se termina de medir cuando choca con la pared. Asegurarse que la trayectoria del auto sea en linea recta.

4. Resultados

Se midieron los siguientes datos:

$$\Delta A = 19{,}9 \pm 0{,}05[cm]$$
$$r_0 = 87{,}5 \pm 0{,}05[cm]$$

Para el resto de datos, se hizo lo siguiente:

- Si hubieron varias mediciones de tiempo $[s]$, se considera el tiempo medio, con un error dado por la desviación estandar
- Los ángulos fueron medidos directamente mediante la escuadra, o mediante el cálculo de $\sin^{-1}$. Para ambos casos, solo consideramos la parte entera $[deg]$, y luego realizamos la conversión a $[rad]$ en el gráfico, con un error de $\pm 0{,}5[deg]$

El gráfico $g - \theta$ está en la figura

5. Discusión

6. Conclusiones

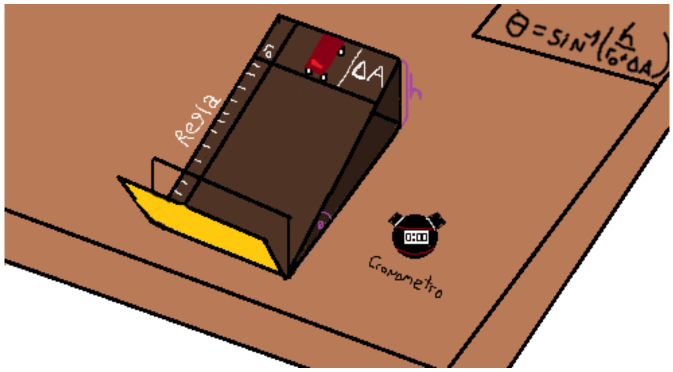

Figura 2: Setup y materiales, Plano inclinado (Dramatización)

7. Apéndice

Descargar código fuente: Github/JavyChan