Débruitage de signaux aléatoires par filtrage de Wiener

Dans ce mini-projet, on s'intéresse au débruitage de signaux aléatoires en utilisant un filtre de Wiener de type RIF.

Partie préliminaire

Rappelons qu'un filtre de Wiener à RIF $H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l z^{-l}$ a pour but la poursuite d'un certain signal de référence inconnu $d(n)$ en filtrant un signal observable $x(n)$, lié statistiquement à $d(n)$. Les coefficients du filtre de Wiener optimal sont choisis de façon à minimiser l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM).

$$J(h) = E[e^2(n)] = E\left[\left(d(n) - \hat{d}(n)\right)^2\right]$$

Ainsi, a-t-on montre, dans le cours, que le vecteur des coefficients de la RI du filtre de Wiener noté h_{opt} obéit aux équations de Wiener-Hopf comme suit :

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{opt}} = \boldsymbol{p}$$

où $\boldsymbol{R}$ est la matrice d'autocorrélation de $x(n)$ et $\boldsymbol{p}$ est le vecteur d'intercorrélation du couple $(d(n), x(n))$.

1. Rappeler la forme de $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{p}$.
2. Ecrire la sortie du filtre de Wiener optimal $\hat{d}(n)$ en fonction de h_{opt} et $\mathbf{x}(n) = [x, \dots, x(n-L+1)]^T$
3. Pour l'application du filtrage de Wiener en débruitage, il est clair que le signal à traiter n'est que $x(n) = d(n) + u(n)$ avec $u(n)$ un bruit blanc, centré, décorrélé de $d(n)$ et de variance σ_u^2 .
   Expliciter dans ce cas $\boldsymbol{R}$ en fonction de $\boldsymbol{R}_d$ et $\boldsymbol{R}_u$, les matrices d'autocorrélation respectives de $d(n)$ et $u(n)$, ainsi que le vecteur d'intercorrélation $\boldsymbol{p}$. on notera $r_d(l)$ l'autocorrélation du signal de référence et on précisera la valeur de $\boldsymbol{R}_u$.
4. On appelle Rapport Signal à Bruit (RSB) avant débruitage le rapport de puissance du signal utile (de référence donc) et de celle du bruit qui l'a entaché ($u(n)$) en dB calculé comme suit
   $$RSB_{dB} = 10\log_{10}\frac{E[d^2(n)]}{E[u^2(n)]}$$
   Après débruitage, $d(n)$ et $u(n)$ auront subi le filtrage deWiener pour se transformer en respectivement, $d'(n) = h_{opt}(n) * d(n)$ et $u'(n) = h_{opt}(n) * u(n)$. Ainsi, le RSB après débruitage devient
   $$RSB'_{dB} = 10\log_{10}\frac{E[d'^2(n)]}{E[u'^2(n)]}$$
   Exprimer RSB' en fonction de $\boldsymbol{h}_{opt}, \boldsymbol{R}_d$ et $\boldsymbol{R}_u$.
5. Montrer que la valeur de l'EQM minimale atteinte par le filtre de Wiener est

$$J_{min} = r_d(0) - \boldsymbol{h}_{opt}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{p}$$

Implémentation

1. Générer $N = 10^3$ échantillons d'un signal de référence

   $d(n) = \sin(\omega_0 n + \phi(n))$, $\quad n = 1, \dots, N$, $\quad \omega_0 = 0.05\pi$ $\quad$ où $\quad \phi(n) \sim U([0,2\pi])$

2. Générer le signal bruité $x(n)$ en utilisant un bruit blanc du type gaussien centré de puissance $\sigma_u^2 = 0.1$. Stocker le dans un vecteur x.
3. Déterminer le vecteur des coefficients de la RI du filtre de Wiener d'ordre $L = 3, \boldsymbol{h}_{opt}$.
4. Générer la sortie du filtre de Wiener $\hat{d}(n)$ qu'on stockera dans un vecteur $dhat$.
5. Afficher le signal de référence, celui bruité et le signal ainsi débruité sur le même graphe. Qu'est ce que vous remarquez?
6. Déterminer ainsi les valeurs des RSB avant et après débruitage ainsi que la valeur de J_{min}
7. Afin d'étudier l'effet de l'ordre L du filtre de Wiener sur la performance de l'opération de débruitage ainsi menée, visualiser les variations de RSB' et J_{min} en fonction de L. Interpréter.
   Maintenant, nous allons considérer un signal de r´ef´erence de type audio.
8. Ouvrir un fichier audio *.wav sous MATLAB avec la commande wavread et reprendre les mêmes étapes (2)-(7). Essayer plusieurs fichiers.
9. Afin de tenir compte de la non stationnarité du signal audio, faites un découpage de ce signal en fenêtres d'analyses de durée 3ms et refaire le débruitage par fenêtre.
10. Comparer ainsi les deux procédés de débruitage.