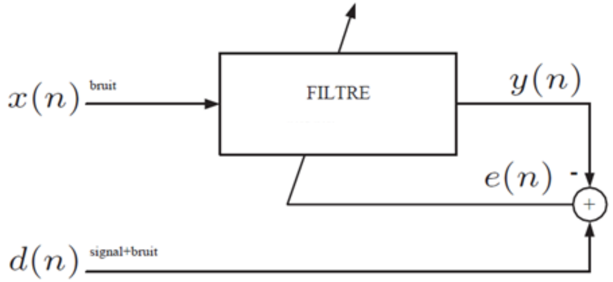
Chap 2: Filtrage de Wiener

Plan:

- Formulation du problème
- Principe d’orthogonalité
- Equation de Wiener-Hopf
- Surface de l’Erreur Quadratique Moyenne (EQM)
- EQM minimale
- Forme canonique de l’EQM
- Exemples

Formulation du problème

On a un ensemble d'échantillons d'un signal d'entrée $\{x(0), x(1), x(2), \ldots\}$ et un ensemble d'échantillons d'une réponse désirée $\{d(0), d(1), d(2), \ldots\}$



Dans la famille des filtres linéaire calculant leur sortie selon:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(n-l), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Trouver les paramètres $\{h_0, h_1, h_2, \ldots\}$ de telle manière de minimiser l'erreur quadratique moyenne (EQM ou MSE mean-square-error) ou critère

$$J = E\{e^2(n)\}$$

où le signal d'erreur est:

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(n-l)$$

En notation matricielle on a :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(n-l) \\ &= \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{h} \end{aligned}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{L-1} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-L+1) \end{bmatrix}^T$$

Principe d'orthogonalité

Le vecteur optimum $\boldsymbol{h}_{opt}$ est celui qui annule le gradient du critère:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0}_{L\times 1}$$

On a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}} &= 2E\left\{e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{h}}\right\} \\ &= -2E\left\{e(n)\mathbf{x}(n)\right\}\end{aligned}$$

Par conséquent, à l'optimum, on a:

$$E\left\{e_{\min}(n)\mathbf{x}(n)\right\} = \mathbf{0}_{L\times 1}$$

où $e_{\min}(n)$ est l'erreur pour laquelle J est minimisée .

C'est *le principe d'orthogonalité* signifiant que toutes les entrées $x(n-l)$, $0 \leq l \leq L-1$, sont décorrélées de l'erreur $e_{\min}(n)$.

En d'autres termes, le critère J atteint son minimum si et seulement si l'erreur $e(n)$ est orthogonale aux échantillons du signal d'entrée $x(n-l)$.

Principe d'orthogonalité

A l'optimum, on a aussi:

$$\begin{aligned} E\{e_{\min}(n)y(n)\} &= E\left\{e_{\min}(n)\sum_{l=0}^{L-1} h_{\text{opt},l}\,x(n-l)\right\} \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} h_{\text{opt},l}\,E\{e_{\min}(n)x(n-l)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est le corollaire du principe d'orthogonalité. $\mathbf{h}_{opt,\,l}$ sont les coefficients du filtre optimal $\mathbf{h}_{\text{opt}}$:

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} h_{\text{opt},0} & h_{\text{opt},1} & \cdots & h_{\text{opt},L-1} \end{bmatrix}^T$$

En d'autres termes, quand le critère J atteint son minimum alors l'erreur $e_{\min}(n)$ est orthogonale à la sortie du filtre $y(n)$.

Equation de Wiener-Hopf

Nous savons que pour le filtre optimum $\mathbf{h}_{\mathrm{opt}}$, nous avons $E\{e_{\min}(n)\mathbf{x}(n)\} = \mathbf{0}_{L\times 1}$. En développant cette équation, nous obtenons:

$$E\left\{\mathbf{x}(n)\left[d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{h}_{\mathrm{opt}}\right]\right\} = \mathbf{0}_{L\times 1}$$

Soit

$$E\left\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right\}\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} = E\left\{\mathbf{x}(n)d(n)\right\}$$

Ou encore

$$\mathbf{R}\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} = \mathbf{p} \quad \text{avec solution} \quad \mathbf{h}_{\mathrm{opt}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\}$ est la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée $x(n)$. Cette matrice est définie positive, de Toeplitz et symétrique. $\mathbf{p} = E\{\mathbf{x}(n)d(n)\}$ est le vecteur d'intercorrélation entre la sortie désirée $d(n)$ et l'entrée $x(n)$.

Cette équation est appelée l'équation de Wiener-Hopf.

Surface de l'erreur quadratique moyenne (EQM)

Rappelons que le signal d'erreur est: $e(n) = d(n) - \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n)$, donc la fonction coût peut encore s'écrire:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= J = E\{e^2(n)\} \\ &= E\{d^2(n)\} - 2E\{d(n)\mathbf{x}^T(n)\}\mathbf{h} \\ &\quad + \mathbf{h}^T E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\}\mathbf{h} \\ &= \sigma_d^2 - 2\mathbf{p}^T\mathbf{h} + \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h} \end{aligned}$$

où $\sigma_d^2 = E\{d^2(n)\}$ est la variance du signal désiré.

J (**h**) est une fonction quadratique des paramètres $\{h_0, h_1, \ldots, h_{L-1}\}$.

J (**h**) est une paraboloide de dimension L qui a un minimum unique obtenu en prenant le gradient égal à zero

Il s'agit de la surface de l'EQM.

Erreur quadratique moyenne (EQM) minimal

La fonction coût s'écrit: $$J(\mathbf{h}) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{p}^T\mathbf{h} + \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h}$$

A l'optimum, sachant que $\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$, nous avons:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= J(\mathbf{h}_{\mathrm{opt}}) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{p}^T\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} + \mathbf{h}_{\mathrm{opt}}^T\mathbf{R}\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} \\ &= \sigma_d^2 - \mathbf{h}_{\mathrm{opt}}^T\mathbf{R}\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \\ &= \sigma_d^2 - \sigma_{d_{\mathrm{opt}}}^2 \end{aligned}$$

où $d_{opt}(n) = \mathbf{h}_{opt}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{x}(n)$ est le signal filtré optimal et $\sigma_{dopt}^2 = E\{d_{opt}^2(n)\}$ la variance de ce signal. Cette relation montre que pour le filtre optimal, l'EQM est la différence entre la variance du signal désiré et celle de l'estimée de ce signal produite par le filtre.

Ainsi, la valeur de l'EQM minimale (MMSE – minimum mean-square-error) pour le filtre optimal de Wiener est:

$$J_{\min} = \min_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h}) = J(\mathbf{h}_{\mathrm{opt}})$$

On définit l'EQM minimale normalisée comme suit: $$\begin{aligned} \widetilde{J}_{\min} &= \frac{J_{\min}}{\sigma_d^2} \\ &= 1 - \frac{\sigma_{d_{\mathrm{opt}}}^2}{\sigma_d^2} \end{aligned}$$

Exemple

Soit $d(n)$ un signal observé dont la variance est $\sigma_d^2 = 0{,}9486$. On choisit un filtre de longueur $L = 2$, et :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.5272 \\ -0.4458 \end{bmatrix}$$

1/ Tracer la surface d'EQM

2/ Calculer les coefficients du filtre optimal

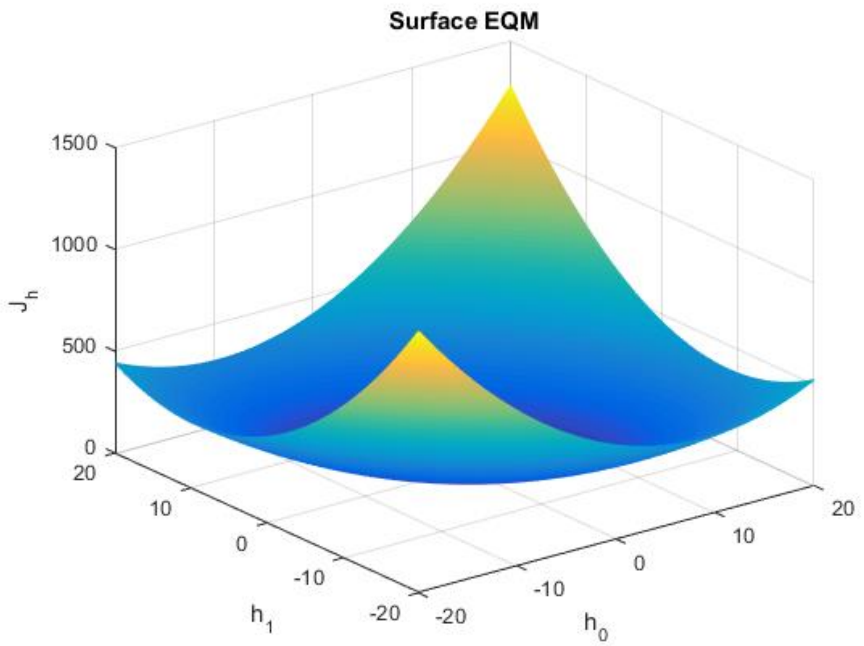
3/ Donner l'EQM minimale

Exemple

1/ Tracer la surface d'EQM

$$J(\mathbf{h}) \quad = \quad \sigma_d^2 - 2\mathbf{p}^T\mathbf{h} + \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h}$$

```
function Wiener_filter
sigmad=0.9486;
R=[1.1 0.5;0.5 1.1]
p=[0.5275;-0.4458]
h_0=-20:.1:20;
h_1=-20:.1:20
for i=1:length(h_0)
    for j=1:length(h_1)
        h=[h_0(i);h_1(j)];
        J(i,j)= sigmad-2*p'*h+h'*R*h;
    end
end
mesh(h_0,h_1,J)
```



Exemple

2/ Calculer les coefficients du filtre optimal

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

```
h_opt =

    0.8366
   -0.7856
```

3/ Donner l'EQM minimale

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{h}_{\text{opt}}^T \mathbf{R} \mathbf{h}_{\text{opt}}$$

```
Jmin =

   0.1571
```