Nama:____ NPM:___________ Kelas:__

Contoh Solusi Kuis 1 Kalkulus 1 (25 September 2023)
Materi: Limit, Kontinuitas, & Turunan

Petunjuk Penilaian:

- Berkas ini merupakan contoh solusi, mahasiswa bisa saja mengerjakan dengan cara lain. Selama penjelasannya runut dan memadai masih diperbolehkan.
- Jika ada kesalahan yang belum tertera pada panduan penilaian, silakan menentukan kira2 setara dengan kesalahan yang mana pada berkas panduan.
- Tim asisten diperbolehkan menambahkan aturan penilaian yang disepakati dan diketahui bersama oleh semua asisten.
- Khusus untuk soal limit, tidak diperkenankan menggunakan teorema L'Hopital.

---

1. **[20 poin]** Buktikan limit berikut menggunakan definisi formal limit (epsilon delta). Pembuktian dilakukan cukup sampai analisis pendahuluan (mencari nilai delta yang memenuhi definisi limit) tidak perlu sampai bukti formal.

$$\lim_{x\to 2}\left(9-2x^2\right)=1$$

Jawaban

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, akan dicari $\delta > 0$ supaya jika x memenuhi $|x-2| < \delta$ maka

$$\left|\left(9-2x^2\right)-1\right| < \varepsilon.$$

Pertama - tama, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\left|\left(9-2x^2\right)-1\right| &= \left|8-2x^2\right| \\ &= 2|2-x||2+x| \\ &= 2|x-2||x+2| \quad (*)\end{aligned}$$

Persamaan di atas disimpan terlebih dahulu. Selanjutnya, jika diasumsikan bahwa

$$|x-2| < 1\ (**)$$

Maka

$$|x+2| = |x-2+4| < |x-2| + |4| = 1+4 = 5\ \ (***)$$

Dengan demikian, berdasarkan (*) dan (***) diperoleh

$$\left|\left(9-2x^2\right)-1\right| < 2\cdot 5\cdot |x-2| = 10|x-2|.$$

Oleh karena itu, jika kita buat

$$|x-2| < \varepsilon/10 \quad (* * **)$$

maka akibatnya

$$\left|\left(9-2x^2\right)-1\right| < \varepsilon$$

Berdasarkan (**) dan (****), nilai δ yang dicari agar memenuhi definisi limit adalah $\delta = \min(\varepsilon/10, 1)$.

Catatan : Bila nilai δ yang diambil adalah $\delta = \varepsilon/10$ (tidak dipilih minimum antara $\varepsilon/10$ dan 1) maka jawaban tetap dianggap benar.

2. **[20 poin]** Definisikan

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4-3x^3+x-3}{x^3-2x^2-5x+6}}$$

Tentukanlah :

a. **(10 poin)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Jawaban

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\frac{x^4-3x^3+x-3}{x^3-2x^2-5x+6}} = \lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\frac{(x^3+1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)}}$$

$$= \lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\frac{(x^3+1)}{(x-1)(x+2)}} = \sqrt[3]{\frac{27+1}{2\cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{28}{10}}$$

b. **(5 poin)** Tentukanlah semua titik diskontinuitas f pada interval $(-\infty, \infty)$ dan berikan alasan mengapa di titik tersebut f diskontinu.

Jawaban

Fungsi f dikatakan diskontinu di $x = c$, jika tidak memenuhi salah satu dari kondisi di bawah ini : $f(c)$ ada

- $lim_{x\to c} f(x) = f(c)$..

Maka, perlu dicari titik dimana $f(c)$ menjadi tidak ada, yaitu ketika bagian penyebut dari f adalah 0.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$$

Berdasarkan pemfaktoran di atas, penyebut f akan 0 jika $x = 1$, $x = 3$, dan $x = -2$. Dengan demikian, titik - titik diskontinuitas f pada interval $(-\infty, \infty)$ yaitu pada $x = 1$, $x = 3$, dan $x = -2$ karena pada titik tersebut $f(x)$ tidak ada.

c. **(5 poin)** Berdasarkan jawaban poin b, apakah titik - titik tersebut tergolong titik diskontinuitas yang *removable* (dapat dihilangkan) atau tidak ? Jelaskan.
Selain tidak memiliki nilai fungsi pada titik $x = 1$ dan $x = -2$, f juga tidak memiliki nilai limit di sana karena $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ sehingga $x = 1$ dan $x = -2$ adalah titik diskontinuitas yang *non removable*.
Pada titik $x = 3$, walaupun f tidak memiliki nilai fungsi di sana, tetapi nilai limitnya masih ada, sehingga apabila didefinisikan nilai
$f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = \sqrt[3]{28/10}$ maka f akan menjadi kontinu.
nu di $x = 3$. Oleh karena itu $x = 3$ adalah titik diskontinuitas yang *removable*.

3. **[20 poin]** Tentukanlah nilai dari

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\ln^2(x) + \sqrt{\ln(2x)}} - \ln(x)$$

Jawaban

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{\ln^2(x) + \sqrt{\ln(2x)}} - \ln(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\ln^2(x) + \sqrt{\ln(2x)}} - \ln(x)\right) \frac{\sqrt{\ln^2(x) + \sqrt{\ln(2x)}} + \ln(x)}{\sqrt{\ln^2(x) + \sqrt{\ln(2x)}} + \ln(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(2) + \ln(x)}}{\sqrt{\ln^2(x) + \sqrt{\ln(2) + \ln(x)}} + \ln(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(2) + \ln(x)}}{\sqrt{\ln^2(x) + \sqrt{\ln(2) + \ln(x)}} + \ln(x)} \frac{1/\ln(x)}{1/\ln(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(2)/\ln(x) + 1/\ln(x)}}{\sqrt{1 + \sqrt{\ln(2)/\ln^4(x) + 1/\ln^3(x)}} + 1} \\
&= \frac{\sqrt{0+0}}{\sqrt{1+\sqrt{0+0}} + 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. **[20 poin]** Jika $f(x) = \sin(2x)$, tentukanlah $f'(x)$ dengan menggunakan definisi turunan.

Petunjuk :

Jawaban

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sin 2x}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 2(x+\Delta x)-\sin 2x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+2\Delta x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x+2\Delta x-2x}{2}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(2x+\Delta x\right)\sin\left(\Delta x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2\cos\left(2x+\Delta x\right).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} 2\cos\left(2x+\Delta x\right).1\\
&= 2\cos\left(2x+0\right) = 2\cos\left(2x\right)
\end{aligned}
$$

5. **(20 poin)** Tentukanlah dy/dx dari fungsi

$$
y=\frac{\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\left(x^2-1\right)}{x}
$$

$$
\begin{aligned}
dy &= \frac{x.\,d\left[\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\left(x^2-1\right)\right]-\left[\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\left(x^2-1\right)\right]dx}{x^2}\\
dy &= \frac{x.\,\left[\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)d\left(x^2-1\right)+\left(x^2-1\right)d\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\right]-\left[\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\left(x^2-1\right)\right]dx}{x^2}\\
dy &= \frac{x.\,\left[\left(\sin x+\cos x\right)2x\,dx+\left(x^2-1\right)\left(d\sin\left(x\right)+d\cos\left(x\right)\right)\right]-\left[\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\left(x^2-1\right)\right]dx}{x^2}\\
dy &= \frac{x.\,\left[\left(\sin x+\cos x\right)2x\,dx+\left(x^2-1\right)\left(\cos\left(x\right)dx-\sin\left(x\right)dx\right)\right]-\left[\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\left(x^2-1\right)\right]dx}{x^2}\\
dy &= \frac{\left[2x^2\left(\sin x+\cos x\right)+x\left(x^2-1\right)\left(\cos\left(x\right)-\sin\left(x\right)\right)\right]dx-\left[\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\left(x^2-1\right)\right]dx}{x^2}\\
dy/dx &= \frac{2x^2\left(\sin x+\cos x\right)+x\left(x^2-1\right)\left(\cos\left(x\right)-\sin\left(x\right)\right)-\left(\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)\left(x^2-1\right)}{x^2}
\end{aligned}
$$