SOLUSI & RUBRIK PENILAIAN
PR 3
Integral dan Aplikasinya
Semester Gasal 2023/2024

1. **[10 poin - XRW]** Selesaikan integral tak tentu berikut

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\ \sqrt{x}+1}dx$$

Jawaban

Dengan melakukan substitusi $u\ =\ \sqrt{x}$, kita bisa memperoleh:

$$\begin{aligned} u\ &=\ \sqrt{x} \qquad \Longrightarrow \qquad x\ =\ u^2 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ dx &= 2\sqrt{x}\,du \\ &= 2u\,du \end{aligned}$$

Sehingga persoalan integral tersebut berubah menjadi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\ \sqrt{x}+1}dx\ &=\ \int \frac{2u}{\sqrt{u^2+1}+u+1}du \\ &= 2\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}+u+1}du \\ &= 2\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}+(u+1)}du \end{aligned}$$

Kalikan dengan bentuk sekawannya, yaitu: $\sqrt{u^2+1}-(u+1)$

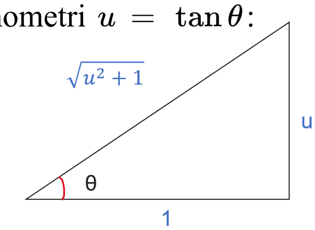
$$
\begin{aligned}
2\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}+(u+1)}du &= 2\int \frac{u\left(\sqrt{u^2+1}-(u+1)\right)}{\left(\sqrt{u^2+1}+(u+1)\right)\left(\sqrt{u^2+1}-(u+1)\right)}du \\
&= 2\int \frac{u\sqrt{u^2+1}-u^2-u}{u^2+1-(u^2+2u+1)}du \\
&= 2\int \frac{u\sqrt{u^2+1}-u^2-u}{-2u}du \\
&= \int -\frac{u\sqrt{u^2+1}-u^2-u}{u}du \\
&= \int -\sqrt{u^2+1}+u+1\,du \\
&= \int u+1-\sqrt{u^2+1}\,du
\end{aligned}
$$

Selesaikan $\int \sqrt{u^2+1}\,du$ melalui substitusi trigonometri $u = \tan\theta$:

$$u = \tan\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \tan^{-1} u$$

$$\frac{du}{d\theta} = \sec^2\theta$$

$$du = \sec^2\theta\, d\theta$$



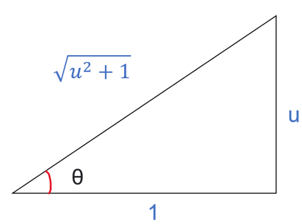
$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{u^2+1}\,du &= \int \sqrt{\tan^2\theta + 1}\,\left(\sec^2\theta\, d\theta\right) \\
&= \int \sec^2\theta\sqrt{\sec^2\theta}\,d\theta \\
&= \sec^3\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

Gunakan integration by parts untuk menyelesaikan $\int \sec^3\theta\, d\theta$

$$
\begin{aligned}
\int \sec^3\theta\,d\theta &= \int \sec\theta\sec^2\theta\,d\theta \qquad \Longrightarrow \qquad u = \sec\theta\,;\; dv = \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta(\tan\theta\sec\theta)d\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta\,d\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta - \int \left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta\,d\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta - \sec\theta\,d\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| \\
2\int \sec^3\theta\,d\theta &= \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| \\
\int \sec^3\theta\,d\theta &= \frac{\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|}{2} + C
\end{aligned}
$$

Substitusi balik θ ke u dengan mengacu pada segitiganya, sehingga dihasilkan:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{u^2+1}\,du &= \sec^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{\sec\theta\,\tan\theta}{2} + \frac{\ln|\sec\theta + \tan\theta|}{2} \\
&= \frac{u\sqrt{u^2+1} + \ln\left(\sqrt{u^2+1} + u\right)}{2}
\end{aligned}
$$



Maka:

$$
\int u + 1 - \sqrt{u^2+1}\,du = \frac{u^2}{2} + u - \frac{u\sqrt{u^2+1} + \ln\left(\sqrt{u^2+1} + u\right)}{2}
$$

Substitusi balik u ke x sehingga diperoleh hasil akhir:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1}dx &= \int u + 1 - \sqrt{u^2+1}\,du \\
&= \frac{u^2}{2} + u - \frac{u\sqrt{u^2+1} + \ln\left(\sqrt{u^2+1} + u\right)}{2} \\
&= \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1} + \ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{2} + C
\end{aligned}
$$

Keterangan	Poin
Mensubstitusikan nilai yang tepat sehingga fungsinya menjadi lebih sederhana. Jika tidak menyederhanakan tidak apa-apa asalkan jawaban akhirnya benar	1
Mengintegralkan bentuk $u+1-\sqrt{u^2+1}$ dengan tepat (tidak harus substitusi trigonometri). Jika bentuk integralnya lain tidak masalah asalkan jawaban akhirnya benar	5
Hasil integral $\sec^3\theta$ benar. Jika bentuk integralnya berbeda tidak apa-apa asalkan jawaban akhirnya benar	4

Solusi yang diberikan di atas hanyalah salah satu penyelesaiannya. Apabila ada yang mengerjakan dengan cara lain, selama masih masuk akal dan jawabannya benar, tidak masalah. Tetap berikan saja nilai penuh.

2. **[15 poin - LBW]** Selesaikan integral tak tentu berikut:

$$\frac{5x^2 - 2x + 3}{(1-x)(2x^2+1)}$$

a. **[5 Poin]** Ubahlah bentuk di atas menjadi bentuk pecahan parsial (*partial fraction*)

Jawaban:

$$5x^2 - 2x + 3 = A\left(2x^2+1\right) + (Bx+C)(1-x)$$

$$\frac{5x^2 - 2x + 3}{(1-x)(2x^2+1)} \equiv \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$$

$$= 2Ax^2 + A + Bx - Bx^2 + C - Cx$$
$$= (2A - B)x^2 + (B - C)x + (A+C)$$

Gunakan $x = 1$ untuk menemukan nilai A

$$5(1)^2 - 2(1) + 3 = (2A - B)(1)^2 + (B - C)(1) + (A+C)$$
$$6 = 3A$$
$$A = 2$$

Gunakan $x = 0$

$5(0) - 2(0) + 3 = (2A - B)(0) + (B - C)(0) + (A + C)$

$3 = A + C$

Substitusikan A = 2

$3 = 2 + C$

$C = 1$

Gunakan $x = -1$

$5(-1)^2 - 2(-1) + 3 = (2A - B)(-1)^2 + (B - C)(-1) + (A + C)$

Substitusi A = 2 dan C = 1

$10 = (2(2) - B) - (B - 1) + (2 + 1)$

$10 = (4 - B) - B + 1 + 2 + 1$

$10 = 8 - 2B$

$2 = -2B$

$B = -1$

Kita dapat tulis kembali persamaan di atas menjadi bentuk seperti ini:

$$\frac{5x^2 - 2x + 3}{(1-x)(2x^2 + 1)} \equiv \frac{2}{1-x} + \frac{-x+1}{2x^2 + 1} \equiv \frac{2}{1-x} + \frac{1 - x}{2x^2 + 1}$$

Keterangan	Poin
Membentuk persamaan menjadi pecahan parsial $\frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$ dengan tepat	2
Memperoleh nilai A atau B atau C dengan benar (Masing - masing 1 poin)	3

b. **[10 Poin]** Integralkan persamaan di atas menggunakan bentuk pecahan parsial yang telah ditemukan pada sub soal (a)

Jawaban

$$\int \frac{5x^2 - 2x + 3}{(1-x)(2x^2 + 1)} = \int \frac{2}{1-x} + \frac{1 - x}{2x^2 + 1}$$

$$= \int \frac{2}{1 - x} + \int \frac{1}{2x^2 + 1} - \int \frac{x}{2x^2 + 1}$$

Mari kita cari terlebih dahulu integral dari masing - masing persamaan.

Integral pertama:

$misalkan : u = 1 - x$

$du = -dx$

$-du = dx$

$$\int \frac{2}{1 - x} dx = \int \frac{2}{u} (-du)$$

$$\int \frac{2}{1 - x} dx = -2 \int \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{2}{1 - x} dc = -2 \ln |u|$$

$$\int \frac{2}{1 - x} dx = -2 \ln |1 - x| + C_1$$

Integral kedua:

$$\int \frac{1}{2x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{1 + 2x^2}$$

$misalkan :$

$u = \sqrt{2}x$

$du = \sqrt{2}\, dx$

$\frac{du}{\sqrt{2}} = dx$

$$\int \frac{1}{2x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + u^2} du$$

$ingat\, bentuk\ integral\, berikut \int \frac{1}{1 + u^2} dx = \tan^{-1}(u)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + u^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}(u)$$

$$\int \frac{1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{2}x\right) + C_2$$

Integral ketiga:

$$misalkan\ :\ u = 2x^2\ +\ 1$$
$$du = 4x\,dx$$
$$\frac{du}{4x} = dx$$

$$\int \frac{x}{2x^2\ -\ 1} = \int \frac{x}{u}\,\frac{du}{4x}$$
$$\int \frac{x}{2x^2\ -\ 1} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du$$
$$\int \frac{x}{2x^2\ -\ 1} = \frac{1}{4}\ln|u|$$
$$\int \frac{x}{2x2\ -\ 1} = \frac{1}{4}\ \ln\left|2x^2\ +\ 1\right|\ +\ C_3$$

Hasil Akhir:

$$\int \frac{5x^2\ -2x\ +\ 3}{(1-x)(2x^2\ +\ 1)} = \int \frac{2}{1\ -\ x} + \int \frac{1}{2x^2\ +\ 1} - \int \frac{x}{2x^2\ +\ 1}$$
$$\int \frac{5x^2\ -2x\ +3}{(1-x)(2x^2\ +\ 1)} = -2\ \ln|1-x|\ +\ \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)\ -\ \frac{1}{4}\ \ln\left|2x^2\ +1\right|\ +C$$

Keterangan	Poin
Mencoba mengerjakan secara tidak asal	1
Memperoleh hasil integral pertama dengan benar	3
Memperoleh hasil integral kedua dengan benar	3
Memperoleh hasil integral ketiga dengan benar	3

3. [15 poin - SYR]
    a. **[12 poin]** Menentukan bentuk eksplisit fungsi $L(n)$

    Dik:

$$f(x) = x^3 - 5x + 4 \text{ , interval } [3, 7]$$

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Penentuan Δx dan x_i.

$$\Delta x = \frac{7-3}{n}$$
$$x_i = 3 + i\Delta x$$
$$x_i = 3 + i\frac{4}{n}$$

Subtitusi x_i ke fungsi $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x_i) &= x_i^3 - 5x_i + 4 \\ &= (3 + i\frac{4}{n})^3 - 5(3 + i\frac{4}{n}) + 4 \\ &= 3^3 + 3^3 i\frac{4}{n} + 9(i\frac{4}{n})^2 + (i\frac{4}{n})^3 - 5(3 + i\frac{4}{n}) + 4 \\ &= 27 + \frac{108}{n}i + \frac{144}{n^2}i^2 + \frac{64}{n^3}i^3 - 15 - \frac{20}{n}i + 4 \\ &= 16 + \frac{88}{n}i + \frac{144}{n^2}i^2 + \frac{64}{n^3}i^3 \end{aligned}$$

Subtitusi $f(x_i)$ dan Δx ke fungsi $L(n)$.

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n}(16 + \frac{88}{n}i + \frac{144}{n^2}i^2 + \frac{64}{n^3}i^3)\frac{4}{n}$$

$$L(n) = \frac{4}{n}(\sum_{i=1}^{n} 16 + \sum_{i=1}^{n} \frac{88}{n}i + \sum_{i=1}^{n} \frac{144}{n^2}i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{64}{n^3}i^3)$$

$$L(n) = \frac{4}{n}(16n + \frac{88}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{144}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3)$$

Menggunakan sifat jumlahan deret khusus untuk mensubstitusi suku yang mengandung $\sum_{i=1}^{n}$.

$$L(n) = \frac{4}{n}(16n + \frac{88}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{144}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{64}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4})$$
$$L(n) = 64 + \frac{176(n+1)}{n} + \frac{96(n+1)(2n+1)}{n^2} + \frac{64(n+1)^2}{n^2}$$
$$L(n) = 64 + \frac{176(n+1)}{n} + \frac{96(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{64(n^2+2n+1)}{n^2}$$
$$L(n) = 64 + 176 + \frac{176}{n} + 192 + \frac{288}{n} + \frac{96}{n^2} + 64 + \frac{128}{n} + \frac{64}{n^2}$$
$$L(n) = 496 + \frac{592}{n} + \frac{160}{n^2}$$

Keterangan	Poin
Tidak Menunjukan Langkah-Langkah Pengerjaan. Baik jawaban benar atau salah	0
Berhasil menentukan nilai x_i dan Δx, dan $f(x)_i$	4
Berhasil menentukan nilai $L(n)$ tapi belum bisa menyederhanakan suku-suku yang mengandung $\sum_{i=1}^{n}$	8
Jawaban akhir salah. Namun, langkah-langkah yang dilakukan sudah tepat.	10
Tidak menggunakan Jumlahan Riemann Kanan, ie menggunakan Riemann Kiri, Riemann Tengah, atau Trapezoid. Dapat dilihat dari penentuan x_i dan Δx yang berbeda. Namun, jawaban akhir masih benar. Dapat dilihat dari konstanta fungsi $L(n)$ yang diperoleh = 496.	11
Jawaban akhir sudah benar dan langkah-langkah pengerjaan sudah tepat	12

b. **[3 poin]** Menentukan error aproksimasi menggunakan $L(n)$ dengan n=2000.

Dik:
Error = | Luas Asli - Luas Aproksimasi|

$$Error(n) = |\lim_{x\to\infty} L(x) - L(n)|$$
$$Error(2000) = \left|\lim_{x\to\infty}(496 + \frac{592}{x} + \frac{160}{x^2}) - (496 + \frac{592}{2000} + \frac{160}{2000^2})\right|$$
$$Error(2000) = \left|-\frac{592}{2000} - \frac{160}{2000^2}\right|$$
$$Error(2000) = 0.29604$$

Note: Jawaban masih benar apabila mencari Luas Asli dengan integral tentu.

Keterangan	Poin
Tidak Menunjukan Langkah-Langkah Pengerjaan. Baik jawaban benar atau salah	0
Jawaban akhir salah, tapi langkah-langkah yang dilakukan sudah tepat.	2
Jawaban akhir sudah benar dan langkah-langkah pengerjaan sudah tepat	3

4. **[15 poin - RUL]** Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini:
   a. **[8 poin]** Carilah nilai rataan dari fungsi berikut pada interval [0.5, 1]!

$$f(x) = \frac{1 - x^4}{x^4 + x^2 + 1}$$

Jawaban:
Nilai rata-rata dari fungsi $f(x)$ menurut MVT adalah f(c) sebagai berikut:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$f(c) = \frac{1}{1-0.5} \cdot \int_{0.5}^{1} \frac{1-x^4}{x^4+x^2+1}\,dx \quad = 2\int_{0.5}^{1} \frac{1-x^4}{x^4+x^2+1}\,dx \quad = 2I$$

Sehingga kita akan menyelesaikan integral $I = \int_{0.5}^{1} \frac{1-x^4}{x^4+x^2+1}\,dx$.

: $$\frac{1-x^4}{x^4+x^2+1} = \frac{x^2+2}{(x^2+1+x)(x^2+1-x)} - 1$$

Dengan dekomposisi parsial akan didapat fungsi sebagai berikut:

: $$\frac{x^2+2}{(x^2+1+x)(x^2+1-x)} = \frac{Ax+B}{x^2+1+x} + \frac{Cx+D}{x^2+1-x}$$

$$x^2+2 = (Ax+B)\cdot(x^2+1-x) + (Cx+D)\cdot(x^2+1+x)$$

$$x^2+2 = Ax^3+Ax-Ax^2+Bx^2+B-Bx+Cx^3+Cx+Cx^2+Dx^2+D+Dx$$

$$x^2+2 = (A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2+(A-B+C+D)x+(B+D)$$

Koefisien dari dua polinom harus sama, sehingga kita mendapatkan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} A+C & = 0 \quad ...(1) \\ -A+B+C+D & = 1 \quad ...(2) \\ A-B+C+D & = 0 \quad ...(3) \\ B+D & = 2 \quad ...(4) \end{cases}$$

Mari kita selesaikan SPL tersebut:

- Tambahkan persamaan (1) ke persamaan (2):
  (−A + B + C + D) + (A + C) = 1 + 0 ⇒ B + 2C + D = 1 …(5)
- Kurangi persamaan (3) dengan persamaan (1):
  (A − B + C + D) − (A + C) = 0 − 0 ⇒ − B + D = 0 …(6)
- Kurangi persamaan (5) dengan persamaan (6):
  (B + 2C + D) − (− B + D) = 1 − 0 ⇒ 2B + 2C = 1 …(7)
- Kurangi persamaan (4) dengan persamaan (6):
  (B + D) − (− B + D) = 2 − 0 ⇒ 2B = 2 ⇒ B = 1 …(8)
- Substitusikan B ke persamaan (7):
  2B + 2C = 1 ⇒ 2(1) + 2C = 1 ⇒ C = -½ …(9)
- Substitusikan C ke persamaan (1):
  A + C = 0 ⇒ A + (-½) = 0 ⇒ A = ½ …(10)
- Substitusikan B ke persamaan (6):
  − B + D = 0 ⇒ − (1) + D = 0 ⇒ D = 1 …(11)

Setelah kita mendapatkan nilai dari A, B, C, dan D, kita substitusikan balik ke pecahan parsial.

$\frac{1-x^4}{x^4+x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x+1}{x^2-x+1} - 1$

$\frac{1-x^4}{x^4+x^2+1} = \frac{x+2}{2(x^2+x+1)} + \frac{2-x}{2(x^2-x+1)} - 1$

Sehingga untuk menyelesaikan I kita bisa menyelesaikannya integralnya bagian demi bagian.

$$\boldsymbol{I = \int_{0.5}^{1} \left(\frac{2-x}{2(x^2-x+1)} + \frac{x+2}{2(x^2+x+1)} - 1 \right) dx}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0.5}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{4}\int_{0.5}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}\int_{0.5}^{1} \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0.5}^{1} \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx - \int_{0.5}^{1} 1\,dx}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{0.5}^{1} \left(\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} + \frac{3}{2(x^2+x+1)} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{0.5}^{1} \left(\frac{3}{2(x^2-x+1)} - \frac{2x-1}{2(x^2-x+1)} \right) dx - \int_{0.5}^{1} 1\,dx$$

$$-\frac{1}{4}\int_{0.5}^{1} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{4}\int_{0.5}^{1} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx - \int_{0.5}^{1} 1\,dx$$

Mari kita hitung satu persatu integral di atas

Integral pertama:

$$\frac{1}{4}\int_{0.5}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

Misalkan $p = x^2 + x + 1$, maka $\frac{dp}{dx} = 2x + 1$, sehingga:

$$\frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{p} \times \frac{1}{2x+1}\,dp = \frac{1}{4}\int \frac{1}{p}\,dp = \frac{1}{4}\ln|p| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x^2+x+1| + C$$

Dengan demikian, kita peroleh:

$$\frac{1}{4}\int_{0.5}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x^2+x+1|\Big|_{0.5}^{1} = \frac{1}{4}\ln|1^2+1+1| - \frac{1}{4}\ln|0.5^2+0.5+1|$$

$$= \frac{1}{4}(\ln(3) - \ln\left(\frac{7}{4}\right)) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{12}{7}\right)$$

Integral kedua:

$$\frac{3}{4}\int_{0.5}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

Misalkan $q = x + \frac{1}{2}$, maka:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \frac{3}{4}\int \frac{1}{q^2+\frac{3}{4}}\,dq \\
&= \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \times \tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + C \\
&= \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + C
\end{aligned}$$

Dengan demikian, integralnya menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\int_{0.5}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\right]_{0.5}^{1} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0.5+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Menggunakan sifat $\tan^{-1}(\alpha) - \tan^{-1}(\beta) = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right)$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{3-2}{\sqrt{3}}\Big/\left(1+\frac{3\times 2}{(\sqrt{3})^2}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)
\end{aligned}$$

Integral ketiga:

$$\frac{1}{4}\int_{0.5}^{1}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$$

Misalkan $r = x^2 - x + 1$ dan $\frac{dr}{dx} = 2x - 1$

$$\frac{1}{4}\int\frac{2x-1}{r}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{r}\,dr = \frac{1}{4}\ln|r| = \frac{1}{4}\ln|x^2-x+1|$$

$$\frac{1}{4}\int_{0.5}^{1}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x^2-x+1|\Big|_{0.5}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|1^2-1+1| - \ln|0.5^2-0.5+1|\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln\left|\frac{3}{4}\right|\right) = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Integral keempat:

$$\frac{3}{4}\int_{0.5}^{1}\frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

Misalkan $s = x - \frac{1}{2}$, maka:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx &= \frac{3}{4}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \frac{3}{4}\int\frac{1}{s^2+\frac{3}{4}}\,ds \\
&= \frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\times\tan^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)+C \\
&= \frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)+C
\end{aligned}$$

Dengan demikian, integralnya menjadi:

$$\frac{3}{4}\int_{0.5}^{1}\frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{3}{2\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\right]_{0.5}^{1}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0.5-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\right)$$

Menggunakan sifat $\tan^{-1}(\alpha) - \tan^{-1}(\beta) = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right)$:

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1/2}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) - \tan^{-1}(0)\right)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

Integral kelima:

$$\int_{0.5}^{1} 1\,dx = x\Big|_{0.5}^{1} = 1 - 0.5 = 0.5$$

Sekarang kita jumlahkan semuanya

$$I = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{12}{7}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) - \left(-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - 0.5$$

$$I = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{12}{7}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - 0.5$$

Sehingga nilai dari *f*(c) adalah

$$f(c) = 2I = 2\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{12}{7}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - 0.5\right)$$

= 0,361864

Keterangan	Poin
Berhasil mendekomposisi fungsi	2
Mendapatkan nilai f(c) dengan langkah-langkah yang masuk akal	6

b. **[7 poin]** Carilah nilai rataan dari fungsi berikut pada interval [3, 5]!

$$f(x) = \frac{3x^2 + 15x + 32}{x^3 + 6x^2 + x - 34}$$

Jawaban:

Nilai rata-rata dari fungsi *f*(*x*) menurut MVT adalah *f*(c) sebagai berikut:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$f(c) = \frac{1}{5-3}\int_3^5 \frac{3x^2 + 15x + 32}{x^3 + 6x^2 + x - 34}\,dx$$

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{3x^2 + 15x + 32}{x^3 + 6x^2 + x - 34}\,dx$$

Pertama, kita akan mendekomposisi fungsi menjadi pecahan parsial:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 15x + 32}{x^3 + 6x^2 + x - 34} = \frac{3x^2 + 15x + 32}{(x-2)(x^2 + 8x + 17)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 8x + 17}$$

$$3x^2 + 15x + 32 = A(x^2 + 8x + 17) + (Bx + C)(x - 2)$$
$$3x^2 + 15x + 32 = Ax^2 + 8Ax + 17A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$
$$3x^2 + 15x + 32 = (A + B)x^2 + (8A - 2B + C)x + (17A - 2C)$$

Dari persamaan yang diberikan, kita mendapatkan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} A + B = 3 & ...(1) \\ 8A - 2B + C = 15 & ...(2) \\ 17A - 2C = 32 & ...(3) \end{cases}$$

Dengan menggantikan nilai dari persamaan (1) ke dalam persamaan (2) dan (3), kita peroleh:

$$8(3 - B) - 2B + C = 15 \quad ...(2)$$
$$17(3 - B) - 2C = 32 \quad ...(3)$$

$$-10B + C = -9 \quad ...(2)$$
$$-17B - 2C = -19 \quad ...(3)$$

Menggandakan persamaan (2) dan menjumlahkannya dengan persamaan (3):

$$-20B + 2C = -18 \quad ...(2)$$
$$-17B - 2C = -19 \quad ...(3)$$
$$\Rightarrow -37B = -37$$

Dari sini kita dapatkan B = 1.

Substitusikan nilai B = 1 ke persamaan (2) untuk mendapatkan nilai C:

$$-10(1) + C = -9$$
$$C = 1$$

Substitusikan nilai B = 1 ke persamaan (1) untuk mendapatkan nilai A:

$$A + 1 = 3$$
$$A = 2$$

Dengan demikian, pecahan parsial dari *f*(*x*) adalah:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 15x + 32}{x^3 + 6x^2 + x - 34} = \frac{2}{x - 2} + \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 17}$$

Sehingga integral dari *f*(*x*) yang diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{3x^2 + 15x + 32}{x^3 + 6x^2 + x - 34}\, dx &= \int_3^5 \frac{2}{x - 2}\, dx + \int_3^5 \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 17}\, dx \\ &= \int_3^5 \frac{2}{x - 2}\, dx + \int_3^5 \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 17}\, dx\end{aligned}$$

Dengan substitusi $t = x - 2$, $dt = dx$.

Kemudian kita akan menyesuaikan batasnya, $x = 3 \to t = 1$, dan $x = 5 \to t = 3$:

$$\begin{aligned}&= \int_1^3 \frac{2}{t}\, dt + \int_3^5 \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 17}\, dx \\ &= 2 \ln |t| \Big|_1^3 + \int_3^5 \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 17}\, dx \\ &= 2 \ln |3| - 2 \ln |1| + \int_3^5 \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 17}\, dx \\ &= 2 \ln(3) + \int_3^5 \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 17}\, dx\end{aligned}$$

Sekarang, fokus pada integral kedua:

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 17}\, dx &= \int_3^5 \frac{2x + 8}{2(x^2 + 8x + 17)}\, dx - \int_3^5 \frac{3}{x^2 + 8x + 17}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{2x + 8}{x^2 + 8x + 17}\, dx - 3 \int_3^5 \frac{1}{x^2 + 8x + 17}\, dx\end{aligned}$$

Dengan substitusi $u = x^2 + 8x + 17$, $du = (2x + 8)\, dx$.

Kemudian kita akan menyesuaikan batasnya, $x = 3 \to u = 50$ dan $x = 5 \to u = 82$:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \int_{50}^{82} \frac{1}{u}\, du - 3 \int_3^5 \frac{1}{x^2 + 8x + 17}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_{50}^{82} - 3 \int_3^5 \frac{1}{x^2 + 8x + 17}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(82) - \frac{1}{2} \ln(50) - 3 \int_3^5 \frac{1}{(x + 4)^2 + 1}\, dx\end{aligned}$$

Substitusi, $t = x + 4$, $dt = dx$

Kemudian kita akan menyesuaikan batasnya, $x = 3 \rightarrow t = 7$, dan $x = 5 \rightarrow t = 9$:

$$= 2\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(82) - \frac{1}{2}\ln(50) - 3\int_7^9 \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(82) - \frac{1}{2}\ln(50) - 3\tan^{-1}(t)\Big|_7^9$$

$$= 2\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(82) - \frac{1}{2}\ln(50) - 3\tan^{-1}(9) + 3\tan^{-1}(7)$$

$$= \ln(3^2) + \ln(82^{1/2}) - \ln(50^{1/2}) - 3\tan^{-1}(9) + 3\tan^{-1}(7)$$

$$= \ln\left(\frac{3^2 \times \sqrt{82}}{\sqrt{50}}\right) - 3\tan^{-1}(9) + 3\tan^{-1}(7)$$

Dengan demikian, nilai rata-rata dari fungsi $f(x)$ menurut Mean Value Theorem (MVT) adalah f(c) sebagai berikut:

$$f(c) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3^2 \times \sqrt{82}}{\sqrt{50}}\right) - 3\tan^{-1}(9) + 3\tan^{-1}(7)\right)$$

$$= 1.175$$

Keterangan	Poin
Berhasil mendekomposisi fungsi	2
Mendapatkan nilai f(c) dengan langkah-langkah yang masuk akal	5

15

5. **[12 poin - NFN]** Tentukanlah panjang kurva untuk fungsi-fungsi berikut:
   a. **[6 poin]**

$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ dari $x = 2$ sampai $x = 5$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}$$

$$L = \int_2^5 \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{1 + (\frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{x^2}))^2}\,dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4})}\ dx$$
$$= \int_2^5 \sqrt{\frac{1}{4}(4 + x^4 - 2 + \frac{1}{x^4})}\ dx$$
$$= \int_2^5 \frac{1}{2}\sqrt{(2 + x^4 + \frac{1}{x^4})}\ dx$$
$$= \int_2^5 \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{2x^4+x^8+1}{x^4})}\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{x^2}\sqrt{(2x^4 + x^8 + 1)}\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{x^2}\sqrt{(x^4 + 1)^2}\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{x^2}(x^4 + 1)\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_2^5 x^2 + \frac{1}{x^2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_2^5$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\frac{125}{3} - \frac{1}{5}) - (\frac{8}{3} - \frac{1}{2})\right]$$
$$= \frac{393}{20}$$

Keterangan	**Poin**
Menemukan bentuk turunan dari f(x) dengan benar	1
Melakukan subtitusi ke rumus panjang kurva dengan benar	1
Menyelesaikan integral ke bentuk yang benar dan subtitusi batas-batasannya dengan benar	4

b. [6 poin]

$x = cos(t) + 9;\ y = sin(t) - t$ dengan $0 \leq t \leq 2\pi$

$\frac{dx}{dt} =- sin(t)$

$$\frac{dy}{dt} = cos(t) - 1$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(sin(t))^2 + (cos(t) - 1)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{sin^2(t) + cos^2(t) - 2cos(t) + 1}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2cos(t) + 1}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2cos(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\left(\frac{1-cos(t)}{2}\right)}\, dt \qquad gunakan\ identitas\ sin^2(t) = \frac{1-cos(2t)}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$= \left[- 4cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= - 4cos(\pi) - (- 4cos(0))$$

$$= 4 + 4$$

$$= 8$$

Keterangan	Poin
Menemukan bentuk turunan dari f(x) dengan benar	1
Melakukan subtitusi ke rumus panjang kurva dengan benar	1
Menyelesaikan integral ke bentuk yang benar dan subtitusi batas-batasannya dengan benar	4

6. [21 poin - JOE]

a. [7 poin]

V1: Volume tabung

$V_1 = \pi r^2 h \;=\; \pi\,.\;12^2.\;5 \;=\; 720\pi\, cm^3$

V2: Metode cakram

$$V_2 \;= \pi \int_5^{15} \left(\left(\frac{y}{8} - 3\right)^2 + 2 \right)^2 dy$$

$$= 8\pi \int_5^{15} \left(\left(\frac{y}{8} - 3\right)^4 + 4\left(\frac{y}{8} - 3\right)^2 + 4 \;\right) \; d\left(\frac{y}{8} - 3\right)$$

$$= 8\pi \left[\frac{1}{5}\left(\frac{y}{8} - 3\right)^5 + \frac{4}{3}\left(\frac{y}{8} - 3\right)^3 + 4\left(\frac{y}{8} - 3\right) \right] \Big|_5^{15}$$

$$= 8\pi \left[\left(\frac{1}{5}\left(-\frac{9}{8}\right)^5 + \frac{4}{3}\left(-\frac{9}{8}\right)^3 + 4\left(-\frac{9}{8}\right) \right) - \left(\frac{1}{5}\left(-\frac{19}{8}\right)^5 + \frac{4}{3}\left(-\frac{19}{8}\right)^3 + 4\left(-\frac{19}{8}\right) \right) \right]$$

$$= \frac{1755515}{6144}\pi \approx 285.728\,\pi\, cm^3$$

V3 Metode kulit cincin:

Mencari batas atas integral:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^4 + 15 = 40$$

$$x \;= 8\sqrt{5}$$

Menghitung V3:

$$V_3 = 2\pi \int_0^{8\sqrt{5}} x\left(40 - \left(\frac{x}{8}\right)^4 - 15\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^{8\sqrt{5}} -\frac{1}{4096}x^5 + 25x \;\; dx$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{24576}x^6 + \frac{25}{2}x^2 \right] \Big|_0^{8\sqrt{5}}$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{24576}8^6\,.\;5^5 + \frac{25}{2}.320 \right]$$

$$= \frac{16000}{3}\pi\, cm^3$$

Volume total:

$V \ = V_1 + V_2 \ + V_3 \ \approx 6339,062\,\pi \approx 19914,751\,cm^3$

Massa total:

$m \ \approx \ 0,8 \ . \ 19914,751 \ \approx \ 15931,801\,g \approx 15,932\,kg$

Keterangan	Poin
Perumusan integral dan batas-batasnya	5
Mendapatkan hasil akhir yang benar	2

b. [7 poin] Menghitung V potong

Mencari batas atas integral:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x}{7.75}\right)^4 + 16 &= 40 \\
\left(\frac{4x}{31}\right)^4 &= 24 \\
\frac{4x}{31} &= \sqrt{2\sqrt{6}} \\
x &= \frac{31\sqrt{2\sqrt{6}}}{4}
\end{aligned}
$$

Menghitung Vpotong

$$
\begin{aligned}
V_3 &= 2\pi \int_0^{\frac{31\sqrt{2\sqrt{6}}}{4}} x\left(40 - \left(\frac{4x}{31}\right)^4 - 16\right) dx \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{31\sqrt{2\sqrt{6}}}{4}} -\left(\frac{4x}{31}\right)^4 x^5 + 24x \quad dx \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{6}\left(\frac{4}{31}\right)^4 x^6 + 12x^2\right]\Bigg|_0^{\frac{31\sqrt{2\sqrt{6}}}{4}} \\
&= 1922\pi\sqrt{6} \approx 4707.919\pi \ cm^3
\end{aligned}
$$

Volume total setelah dipotong:

$V \ \approx \ (6339,062 \ - \ 4707,919)\pi = 1631,143\pi \ cm^3 \approx 5124,387\,cm^3$

Massa piala setelah dipotong:

$m \approx 0,8 \,.\, 5124,387 \approx 4099,5096\, g \approx 4.1\, kg$

Keterangan	Poin
Perumusan integral dan batas-batasnya	4
Mendapatkan hasil akhir yang benar	2
Perhitungan volume dan massa setelah dipotong	1

C. [7 poin] Gunakan rumus luas permukaan benda putar:

$$\begin{aligned}
L &= 2\pi \int_a^b f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_5^{15} \left(\left(\frac{y}{8} - 3\right)^2 + 2\right)\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{y}{8} - 3\right)\right)^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_5^{15} \left(\left(\frac{y-24}{8}\right)^2 + 2\right)\sqrt{1 + \left(\frac{y-24}{32}\right)^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_5^{15} \left(\frac{1}{64}(y-24)^2 + 2\right)\sqrt{1 + \frac{y^2 - 48y + 576}{1024}}\, dy \\
&= \frac{\pi}{1024}\int_5^{15} \left((y-24)^2 + 128\right)\sqrt{y^2 - 48y + 1600}\, dy \\
&= \frac{\pi}{1024}\int_5^{15} \left((y-24)^2 + 128\right)\sqrt{(y-24)^2 + 1024}\, dy \\
& \quad misal\, u = y - 24 \implies du = dy \\
&= \frac{\pi}{1024}\int_5^{15} \left(u^2 + 128\right)\sqrt{u^2 + 1024}\, du
\end{aligned}$$

$$misal\ \frac{u}{32} = \tan v \implies du = 32\ \sec^2 v\, dv$$

$$\int \left(u^2+128\right)\sqrt{u^2+1024}\ du$$

$$= \int \left(32^2 \tan^2 v \sqrt{32^2 \tan^2 v + 32^2} + 128\ .\ \sqrt{32^2 \tan^2 v + 32^2}\right) 32 \sec^2 v\, dv$$

$$= \int 32^4 \sec^3 v\ \tan^2 v\ +\ 128\ .\ 32^2\ \sec^3 v\, dv$$

$$= \int 32^4 \sec^3 v\left(\sec^2 v - 1\right)\ +\ 128\ .\ 32^2\ \sec^3 v\, dv$$

$$= 32^4 \int \sec^5 v - \int \sec^3 v\ +\ 128\ .\ 32^2 \int \sec^3 v\, dv$$

reduction formula

$$= 32^4 \left(\left(\frac{\sec^3 v \tan v}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 v\, dv\right) - \int \sec^3 v\right) + 128\ .\ 32^2 \int \sec^3 v\, dv$$

$$= 32^4 \left(\frac{\sec^3 v \tan v}{4} - \frac{1}{4}\int \sec^3 v\, dv\right) + 128\ .\ 32^2 \int \sec^3 v\, dv$$

$$= 32^4 \left(\frac{\sec^3 v \tan v}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sec v\ \tan v}{2} + \frac{1}{2}\int \sec v\, dv\right)\right) + 128\ .\ 32^2 \left(\frac{\sec v\ \tan v}{2} + \frac{1}{2}\int \sec v\, dv\right)$$

$$= 32^4 \left(\frac{\sec^3 v \tan v}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sec v\ \tan v}{2} + \frac{\ln\left(\sec v\ +\ \tan v\right)}{2}\right)\right) + 128\ .\ 32^2 \left(\frac{\sec v\ \tan v}{2} + \frac{\ln\left(\sec v\ +\ \tan v\right)}{2}\right) + C$$

ingat: $\tan v\ =\ \frac{u}{32}\ \rightarrow\ \sec v\ =\ \sqrt{\frac{u^2}{32^2}+1}$

setelah *disubstitusi ulang* hasilnya menjadi:

$$\int_5^{15} \left(u^2+128\right)\sqrt{u^2+1024}\ du$$

$$= 8192u\left(\frac{u^2}{1024}+1\right)^{3/2} - 2048u\sqrt{\frac{u^2}{1024}+1} - 65536\ln\left(\sqrt{\frac{u^2}{1024}+1} + \frac{u}{32}\right) + C$$

ingat: $u = y - 24$

setelah *disubstitusi ulang* hasilnya menjadi:

$$8192(y-24)\left(\frac{(y-24^2)}{1024}+1\right)^{3/2} - 2048(y-24)\sqrt{\frac{(y-24)^2}{1024}+1} - 65536\ln\left(\sqrt{\frac{(y-24)^2}{1024}+1} + \frac{(y-24)}{32}\right) + C$$

Jadi:

$$\frac{\pi}{1024}\int \left((y-24)^2+128\right)\sqrt{(y-24)^2+1024}\, dy$$

$$=$$

$$8\pi(y-24)\left(\frac{(y-24^2)}{1024}+1\right)^{3/2} - 2\pi(y-24)\sqrt{\frac{(y-24)^2}{1024}+1} - 64\pi\ln\left(\sqrt{\frac{(y-24)^2}{1024}+1} + \frac{(y-24)}{32}\right) + C$$

Jadi:

$$\frac{\pi}{1024}\int_5^{15} \left((y-24)^2+128\right)\sqrt{(y-24)^2+1024}\, dy$$

$$= 8\pi(y-24)\left(\frac{(y-24^2)}{1024}+1\right)^{3/2} - 2\pi(y-24)\sqrt{\frac{(y-24)^2}{1024}+1} - 64\pi\ln\left(\sqrt{\frac{(y-24)^2}{1024}+1} + \frac{(y-24)}{32}\right)\Bigg|_5^{15}$$

$$= 8\pi(y-24)\left(\frac{(y-24^2)}{1024}+1\right)^{3/2} - 2\pi(y-24)\sqrt{\frac{(y-24)^2}{1024}+1} - 64\pi\ln\left(\sqrt{\frac{(y-24)^2}{1024}+1} + \frac{(y-24)}{32}\right)\Bigg|_5^{15}$$

$$= 8\pi(15-24)\left(\frac{(15-24^2)}{1024}+1\right)^{3/2} - 2\pi(15-24)\sqrt{\frac{(15-24)^2}{1024}+1} - 64\pi\ln\left(\sqrt{\frac{(15-24)^2}{1024}+1} + \frac{(15-24)}{32}\right)$$

$$- 8\pi(5-24)\left(\frac{(5-24^2)}{1024}+1\right)^{3/2} - 2\pi(5-24)\sqrt{\frac{(5-24)^2}{1024}+1} - 64\pi\ln\left(\sqrt{\frac{(5-24)^2}{1024}+1} + \frac{(5-24)}{32}\right)$$

$$\approx \quad 360.0213$$

Biaya total polishing:

$$Biaya = 100\ .\ 360.0213 = Rp.\ 36\,002$$

Keterangan	Poin
Perumusan integral dan batas-batasnya	5
Mendapatkan hasil akhir yang benar	2

7. **[12 poin - REQ]** Setelah menjadi panitia perlombaan matematika, Kak Kulus beristirahat dan mengamati langit malam sembari mendengarkan *A Sky Full of Stars*. Tidak lama kemudian, ada satu bintang yang menarik perhatian dari Kak Kulus

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

Menurut astronom setempat, persamaan tersebut adalah representasi dari bentuk bintang yang dilihat oleh Kak Kulus. Ia tertarik untuk mencari berapa luas permukaan bintang tersebut apabila diputar terhadap **sumbu vertikal**. Kak Kulus membutuhkan bantuanmu untuk mencari luas permukaan bintang tersebut. Oleh karena itu, gambarlah representasi bintang tersebut, dan cari luas permukaannya!

Jawaban:

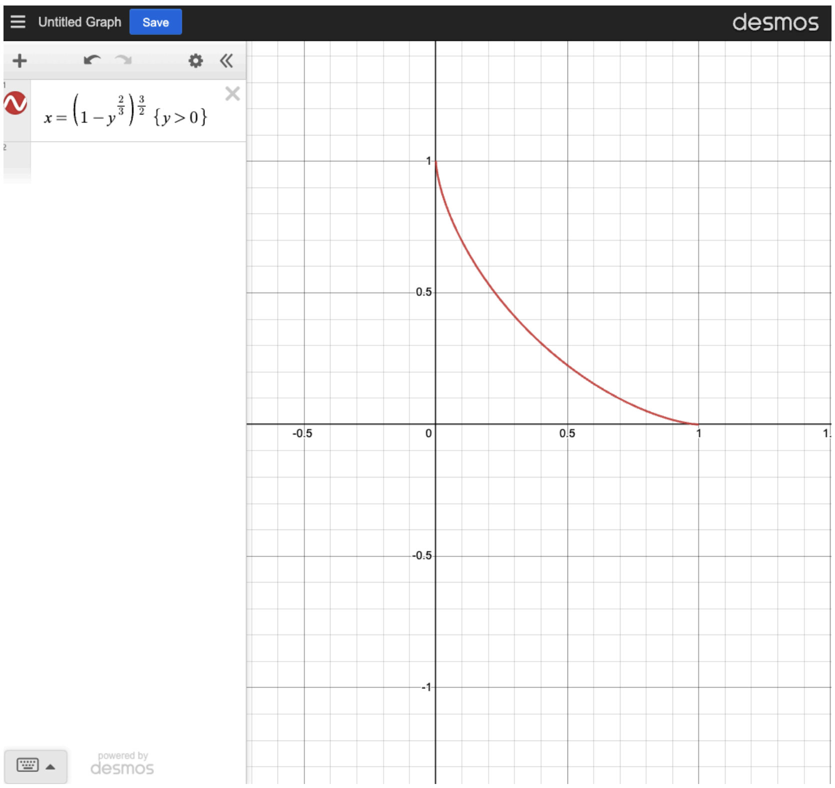
Ubah persamaan ke dalam bentuk *x*

$$x = \left(1 - y^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}(1 - y^{2/3})^{1/2} \cdot \frac{-2}{3} y^{-1/3}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-(1 - y^{2/3})^{1/2}}{y^{1/3}}$$

Visualisasi persamaan:



Untuk mencari luas permukaan dari bintang, cari luas permukaan dari *top-half* sebagai hasil rotasi terhadap sumbu-y, kemudian hasil tersebut dikali 2 untuk memperoleh luas permukaan penuh.

$$Surface\ Area = 2\pi \cdot 2 \int_0^1 (radius)\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 4\pi \int_0^1 (1 - y^{2/3})^{3/2} \sqrt{1 + \left(\frac{-(1 - y^{2/3})^{1/2}}{y^{1/3}}\right)^2}\, dy$$

$$= 4\pi \int_0^1 (1 - y^{2/3})^{3/2} \sqrt{1 + \frac{1 - y^{2/3}}{y^{2/3}}}\, dy$$

$$= 4\pi \int_0^1 (1 - y^{2/3})^{3/2} \sqrt{\frac{y^{2/3} + (1 - y^{2/3})}{y^{2/3}}}\, dy$$

$$= 4\pi \int_0^1 (1 - y^{2/3})^{3/2} \sqrt{\frac{1}{y^{2/3}}}\, dy$$

$$= 4\pi \int_0^1 (1 - y^{2/3})^{3/2} \cdot \frac{1}{y^{1/3}}\, dy$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{(1 - y^{2/3})^{3/2}}{y^{1/3}}\, dy$$

Lakukan substitusi

$u = (1-y^{2/3})$

$du = (-2/3)y^{-1/3}dy$

Perhatikan batas atas dan batas bawah dari integral

$y = 0 \rightarrow u = 1$

$y = 1 \rightarrow u = 0$

Evaluasi kembali integral setelah dilakukan substitusi dan penyesuaian batas atas dan batas bawah:

$$= 4\pi \int_{1}^{0} u^{3/2}\ (-3/2)du$$

$$= 4\pi(-3/2) \int_{1}^{0} u^{3/2}\ du$$

$$= -6\pi \cdot (2/5)u^{5/2}\Big|_{1}^{0}$$

$$= -6\pi\Big((2/5)(0)^{5/2} - (2/5)(1)^{5/2}\Big)$$

$$= -6\pi(0 - 2/5)$$

$$= (12/5)\pi$$

Hingga akhirnya diperoleh luas permukaannya **(12/5)π**

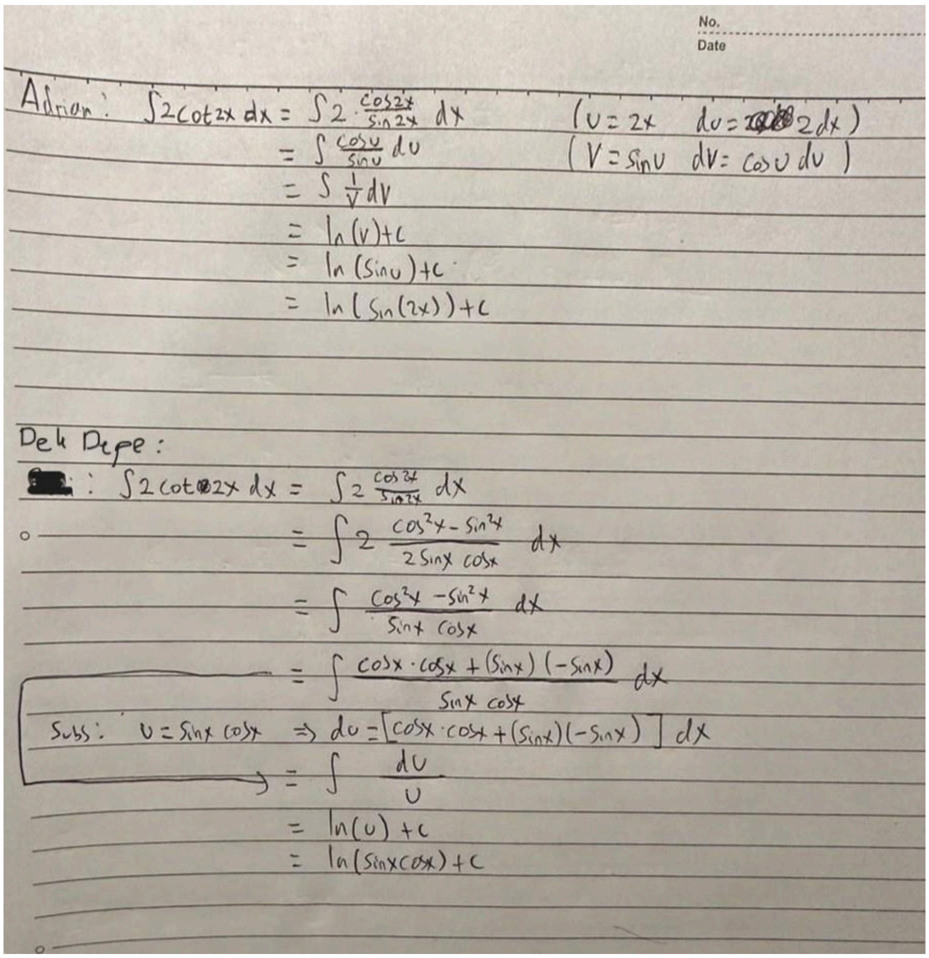
Keterangan	Poin
Hanya berhasil mengubah bentuk persamaan	1
Berhasil mengubah bentuk persamaan dan menemukan turunannya	3
Berhasil menuliskan bentuk integral untuk mencari luas daerah	5
Mencoba menyelesaikan integral tetapi tidak memperoleh jawaban akhir	6-10
Berhasil menyelesaikan integral tetapi ada ketidaktelitian minor	11
Berhasil menyelesaikan soal dengan langkah yang sistematis dan jelas	12

8. **[BONUS (10 poin) - BN]** Persoalan berikut bersifat bonus, sehingga apabila anda tidak mengerjakan maka tidak akan mempengaruhi nilai PR anda. Anggap soal berikut sebagai pengayaan.

Kak Kulus selaku asisten dosen Kalkulus 1 sedang *sit in* kelas Kalkulus 1-X yang diampu Pak Esde. Pada akhir kelas, Kak Kulus memberikan persoalan integral sbb.

$$\int 2\cot(2x)\, dx$$

Adrian dan Dek Depe yang sangat menyukai Kalkulus langsung mengerjakannya di ruang kelas setelah sesi kelas berakhir. Adrian dan Dek Depe masing-masing telah mendapatkan jawabannya serta mereka telah menuliskan pengerjaannya (Lihat gambar di bawah).



No.
Date

Adrian: $\int 2\cot 2x\, dx = \int 2\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\, dx$ $\quad (u = 2x \quad du = 2\,dx)$

$= \int \frac{\cos u}{\sin u}\, du$ $\quad (v = \sin u \quad dv = \cos u\, du)$

$= \int \frac{1}{v}\, dv$

$= \ln(v) + c$

$= \ln(\sin u) + c$

$= \ln(\sin(2x)) + c$

Dek Depe:

[redacted]: $\int 2\cot 2x\, dx = \int 2\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\, dx$

$= \int 2\,\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x}\, dx$

$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x}\, dx$

$= \int \frac{\cos x\cdot\cos x + (\sin x)(-\sin x)}{\sin x\cos x}\, dx$

Subs: $u = \sin x\cos x \Rightarrow du = [\cos x\cdot\cos x + (\sin x)(-\sin x)]\, dx$

$= \int \frac{du}{u}$

$= \ln(u) + c$

$= \ln(\sin x\cos x) + c$

Terlihat bahwa hasil akhir yang mereka dapatkan berbeda, hal ini memicu perdebatan diantara mereka berdua karena masing-masing yakin bahwa cara pengerjaannya sudah benar. Adrian dan Dek Depe meminta tolong padamu sebagai sahabat untuk membantu mereka menyelesaikan permasalahan ini.

Oleh karena itu, tentukanlah jawaban siapa yang benar di antara jawaban Adrian dan Dek Depe! Berikan alasan logis dan pembuktian kesamaan hasil akhir apabila jawaban keduanya benar. Akan tetapi, jika terdapat cara yang keliru diantara mereka, jelaskan mengapa cara pengerjaannya keliru!

Jawaban:

[9 Poin] Metode 1 (*Backtracking*):

Metode ini cukup *simple*, apabila sudah diintegralkan, sudah seharusnya turunan dari hasil akhirnya sama dengan fungsi awal (TDK I).

Adrian:

$$\begin{aligned}2\cot(2x) &= \frac{d}{dx}(\ln(\sin(2x)) + C)\\ &= \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2\\ &= \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}\\ &= 2\cot(2x)\end{aligned}$$

Dek Depe:

$$\begin{aligned}2\cot(2x) &= \frac{d}{dx}(\ln(\sin(x)\cos(x)) + C)\\ &= \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} \cdot (\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x)))\\ &= \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}\\ &= \frac{\cos(2x)}{\sin(x)\cos(x)} \cdot \frac{2}{2}\\ &= \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}\\ &= 2\cot(2x)\end{aligned}$$

Metode ini dapat menyimpulkan bahwa keduanya benar, tetapi tidak dapat menjelaskan mengapa hasil akhir keduanya bisa berbeda

[10 Poin] Metode 2 (Penyamaan hasil akhir):

Apabila ditinjau hasil akhir keduanya, terdapat perbedaan yang cukup unik di mana hasil akhir Adrian adalah $\ln(\sin(2x)) + C$ dan hasil akhir Dek Depe adalah $\ln(\sin(x)\cos(x)) + C$.

Sebenarnya keduanya sama aja. Ingat bahwa $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ dan $\ln(f(x) \cdot g(x)) = \ln(f(x)) + \ln(g(x))$, sedemikian sehingga:

Dek Depe vs. Adrian:

$\ln(\sin(x)\cos(x)) + C = \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)) + C$

$\ln(\sin(2x)) = \ln(2\sin(x)\cos(x)) = \ln(2) + \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)) + C$

Perhatikan bahwa hasil milik Adrian memiliki tambahan nilai $\ln(2)$. Mungkin Anda berpikir keduanya jelas berbeda, namun ingat bahwa $\ln(2)$ termasuk KONSTANTA dengan nilai aproksimasi $\ln(2) = 0.69314718056$, sehingga kita dapat menganggapnya sebagai bagian dari konstanta C.

Keterangan	**Poin**
Hanya menjawab SAMA tanpa penjelasan	1
Menggunakan Metode 1	2 - 9
Menggunakan Metode 2	2 - 10