

KALKULUS 1
PR 3
Integral dan Aplikasinya
Semester Gasal 2023/2024

Informasi Umum

Jenis PR : Individu

Deadline : Sabtu, 2 Desember 2023 23:55 (SCeLE Time)

Nama Format File : Nama_NPM_PR 3.pdf (e.g. Chris Martin_2300000000_PR 3.pdf)

Petunjuk Pengerjaan

- Berkas PR Anda harus dibuat dengan cara **ditulis tangan (penggunaan pena digital diperbolehkan)** dan disimpan sebagai satu berkas PDF (bukan di-zip).
- Tuliskan semua jawaban Anda dengan **detil (langkah demi langkah)**.
- Anda diperbolehkan untuk berdiskusi dengan peserta lain atau menggunakan sumber dari internet, tetapi **Anda harus menjamin bahwa setiap pekerjaan yang diserahkan adalah hasil karya Anda sendiri** (Terlibat dalam bentuk plagiarisme atau ketidakjujuran akademik akan ditindaklanjuti sesuai peraturan).
- Jika Anda berkolaborasi dengan peserta lain, mohon **tuliskan nama mereka dalam file tugas Anda**.
- Tim pengajar berhak meminta penjelasan jika dicurigai terdapat plagiarisme atau ketidakjujuran akademik, tergantung pada tingkat keparahannya, dapat memberikan **sanksi atau membatalkan nilai (ditetapkan menjadi 0)** untuk pekerjaan yang terbukti terlibat dalam keadaan tersebut.
- Kesalahan penamaan berkas akan dikenakan pengurangan **-5 poin**
- Keterlambatan akan dikenakan sanksi pengurangan **-1 poin** per menit dengan aturan *rounding* ke atas. Maksimum keterlambatan adalah **1 jam (-60 poin)**, lewat dari 1 jam tidak akan dinilai!

-
1. **[10 poin]** Selesaikan integral tak tentu berikut,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1} dx$$

2. **[15 poin]** Diberikan suatu fungsi sebagai berikut:

$$\frac{5x^2 - 2x + 3}{(1-x)(2x^2 + 1)}$$

- a. **[5 Poin]** Ubahlah bentuk fungsi di atas menjadi bentuk pecahan parsial (*partial fraction*)
 - b. **[10 Poin]** Integralkan persamaan di atas menggunakan bentuk pecahan parsial yang telah ditemukan pada sub soal (a)
3. **[15 poin]** $L(n)$ adalah aproksimasi hasil integral tentu dari fungsi $f(x) = x^3 - 5x + 4$ dalam interval $[3, 7]$, dengan menggunakan **Jumlahan Riemann Kanan**,
- a. **[12 poin]** Tentukan bentuk eksplisit fungsi $L(n)$, dimana n adalah jumlah partisi.
 - b. **[3 poin]** Hitunglah nilai error aproksimasi luas menggunakan $L(n)$ untuk $n = 2000$.
4. **[15 poin]** Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini:
- a. **[8 poin]** Carilah nilai rata-rata dari fungsi berikut pada interval $[0.5, 1]!$

$$f(x) = \frac{1 - x^4}{x^4 + x^2 + 1}$$

Hint: Gunakan dekomposisi pecahan parsial
 - b. **[7 poin]** Carilah nilai rata-rata dari fungsi berikut pada interval $[3, 5]!$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 15x + 32}{x^3 + 6x^2 + x - 34}$$

Hint: Gunakan dekomposisi pecahan parsial
5. **[12 poin]** Tentukanlah panjang kurva untuk fungsi-fungsi berikut:
- a. **[6 poin]** $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ dari $x = 2$ sampai $x = 5$
 - b. **[6 poin]** $x = \cos(t) + 9$; $y = \sin(t) - t$ dengan $0 \leq t \leq 2\pi$
6. **[21 poin]** Perusahaan X menawarkan jasa pembuatan piala untuk keperluan perlombaan. Kak Kulus yang sedang menjadi bagian operasional pada perlombaan matematika tingkat regional meminta perusahaan X untuk membuat piala yang bentuknya mengikuti persamaan-persamaan berikut dalam satuan cm.

$$x = 12, y \in [0, 5] \dots (1)$$

$$x = \left(\frac{y}{8} - 3\right)^2 + 2, y \in [5, 15] \dots (2)$$

$$y = \left(\frac{x}{8}\right)^4 + 15, y \in [15, 40] \dots (3)$$

Kurva-kurva ini akan diputar terhadap sumbu y untuk membentuk piala. (Silakan menggunakan *graphing calculator* untuk *plotting* persamaan-persamaan di atas agar mendapatkan visualisasi bentuk piala yang lebih jelas). Anda selaku pekerja pada perusahaan X akan ditugaskan untuk pembuatan pialanya.

- a. **[7 poin]** Hitung volume dari piala yang akan dibuat! Hitung pula massa piala bila massa jenis bahan yang digunakan sebesar 0.8 g/cm^3 !

Setelah pialanya selesai dibuat, Kak Kulus menyadari bahwa ada yang salah dari bentuk piala ini. Jika diperhatikan, bentuk ini belum berbentuk piala pada umumnya, karena biasanya bagian atas piala berbentuk cekung seperti mangkuk, sementara permukaan atas piala ini masih berbentuk datar. Maka akan dilakukan pemotongan dengan menggunakan kurva berikut yang diputar terhadap sumbu y :

$$y = \left(\frac{x}{7.75}\right)^4 + 16, y \in [16, 40]$$

- b. **[7 poin]** Hitung volume dari piala setelah dilakukan setelah pemotongan! Hitung pula massanya sekarang!

Kak Kulus sudah cukup puas dengan bentuk dan massa dari piala. Berikutnya, akan dilakukan polishing khusus pada bagian leher (persamaan 2) dari piala.

- c. **[7 poin]** Apabila biaya polishing adalah $\text{Rp } 100 / \text{cm}^2$, berapakah biaya polishing untuk bagian leher piala ini?
7. **[12 poin]** Setelah acara lomba matematika usai, Kak Kulus beristirahat dan mengamati langit malam sambil mendengarkan lagu '*A Sky Full of Stars*'. Tidak lama kemudian, ada satu bintang yang menarik perhatian Kak Kulus

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

Menurut astronom setempat, persamaan tersebut adalah representasi dari bentuk bintang yang dilihat oleh Kak Kulus. Ia tertarik untuk mencari berapa luas permukaan bintang tersebut apabila diputar terhadap **sumbu vertikal**. Kak Kulus membutuhkan bantuanmu

untuk mencari luas permukaan bintang tersebut. Oleh karena itu, gambarlah representasi bintang tersebut, dan cari luas permukaannya!

8. **[BONUS (10 poin)]** Persoalan berikut bersifat bonus, sehingga apabila anda tidak mengerjakan maka tidak akan mempengaruhi nilai PR anda. Anggap soal berikut sebagai pengayaan.

Kak Kulus selaku asisten dosen Kalkulus 1 sedang *sit in* kelas Kalkulus 1-X yang diampu Pak Esde. Pada akhir kelas, Kak Kulus memberikan persoalan integral sbb.

$$\int 2 \cot(2x) dx$$

Adrian dan Dek Depe yang sangat menyukai Kalkulus langsung mengerjakannya di ruang kelas setelah sesi kelas berakhir. Adrian dan Dek Depe masing-masing telah mendapatkan jawabannya serta mereka telah menuliskan pengerjaannya (Lihat gambar di bawah).

The image shows two handwritten solutions for the integral $\int 2 \cot(2x) dx$ on lined paper. The top solution is by Adrian, and the bottom is by Dek Depe.

Adrian:

$$\begin{aligned} \int 2 \cot 2x dx &= \int 2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx & (u = 2x \quad du = 2 dx) \\ &= \int \frac{\cos u}{\sin u} du & (v = \sin u \quad dv = \cos u du) \\ &= \int \frac{1}{v} dv \\ &= \ln(v) + C \\ &= \ln(\sin u) + C \\ &= \ln(\sin(2x)) + C \end{aligned}$$

Dek Depe:

$$\begin{aligned} \int 2 \cot 2x dx &= \int 2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx \\ &= \int 2 \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x \cdot \cos x + (\sin x)(-\sin x)}{\sin x \cos x} dx \\ \text{Subs: } u &= \sin x \cos x \Rightarrow du = [\cos x \cdot \cos x + (\sin x)(-\sin x)] dx \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln(u) + C \\ &= \ln(\sin x \cos x) + C \end{aligned}$$

Terlihat bahwa hasil akhir yang mereka dapatkan berbeda, hal ini memicu perdebatan diantara mereka berdua karena masing-masing yakin bahwa cara pengerjaannya sudah

benar. Adrian dan Dek Depe meminta tolong padamu sebagai sahabat untuk membantu mereka menyelesaikan permasalahan ini.

Oleh karena itu, tentukanlah jawaban siapa yang benar di antara jawaban Adrian dan Dek Depe! Berikan alasan logis dan pembuktian kesamaan hasil akhir apabila jawaban keduanya benar. Akan tetapi, jika terdapat cara yang keliru diantara mereka, jelaskan mengapa cara pengerjaannya keliru!

$$\text{😊} \text{ “} Life = \int_{birth}^{death} \frac{happiness}{time} \Delta time \text{” -Rebecca Dias 😊}$$
