



COMPUTER SCIENCE & MATHEMATICS

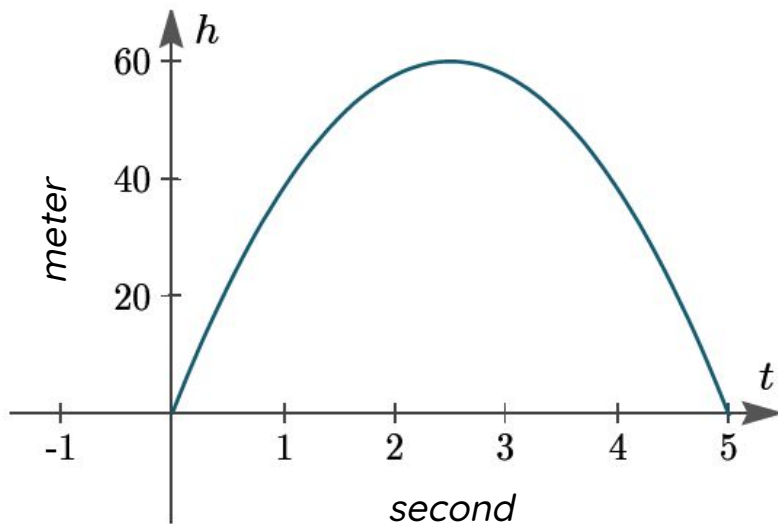
Turunan

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

1. Pengenalan Turunan

Masalah yang Mengarah ke Konsep Turunan

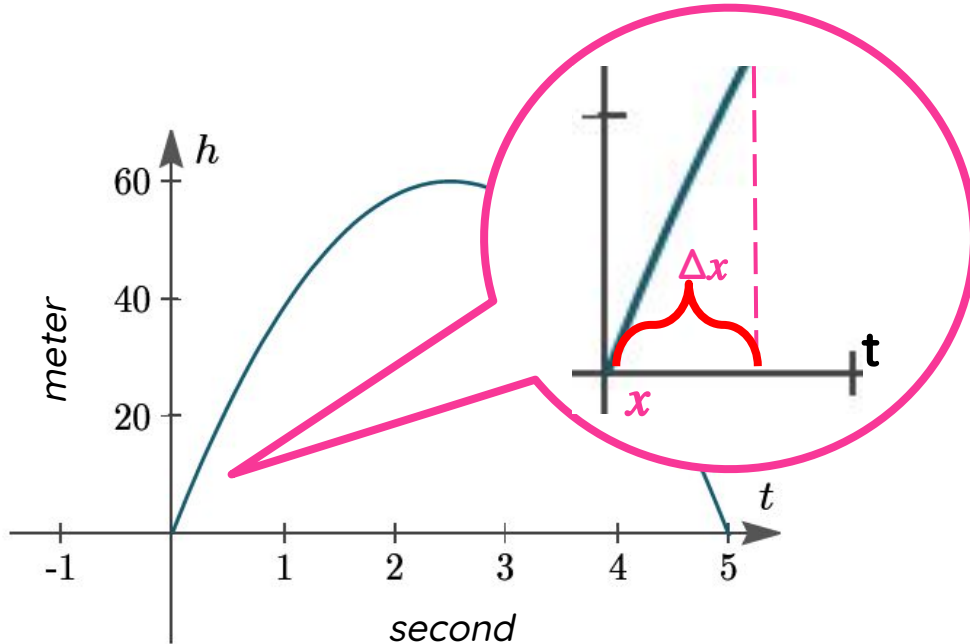
- Kecepatan rata-rata dan sesaat



1. Pengenalan Turunan

Masalah yang Mengarah ke Konsep Turunan

- Kecepatan rata-rata dan sesaat



Kecepatan rata-rata:

$$V_{rata-rata} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

*Anggap $s = f(t)$, maka

$$V_{rata-rata} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Kecepatan sesaat:

$$V_{sesaat} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1. Pengenalan Turunan

Definisi Turunan

Turunan (*derivative*) fungsi f terhadap x dapat didefinisikan sebagai:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Jika lim ada, maka f = differentiable

1. Pengenalan Turunan

Latihan Soal

“Jika lim ada, maka f = differentiable”

1. Apakah $f(x)$ differentiable untuk:
 - a. $f(x) = [[x]]$
 - b. $f(x) = x^3$

2. Operator dan Sifat-Sifat Turunan

Turunan Sebagai Operator (notasi Leibniz)

Laju perubahan dapat ditulis sebagai: $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow d(x^2) = 2x dx$

Sifat-sifat Operator Turunan

1. $d(k) = 0$, jika $f(x) = k$; $k = \text{konstanta}$, $\forall x \rightarrow f'(x) = 0$
2. $d(x) = 1$, jika $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
3. $d(x^n) = nx^{n-1}$, jika $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
4. Untuk $f, g = \text{fungsi terdiferensialkan}$; $k = \text{konstanta}$:
 - a. $d[k \cdot f(x)] = k \cdot d f(x)$, jika $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$
 - b. $d[f(x) \pm g(x)] = d f(x) \pm d g(x)$, jika $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
 - c. $d[f(x) \cdot g(x)] = f(x) dg(x) + g(x) d f(x)$, jika $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
 - d. $d[f(x) / g(x)] = \frac{g(x) df(x) - f(x) dg(x)}{g^2(x)}$, jika $(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

2. Operator dan Sifat-Sifat Turunan

Teorema Aturan Rantai

$y=f(u)$, $u=g(x)$, g terdiferensialkan di x , f terdiferensialkan di $u=g(x) \rightarrow (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Sehingga,

$$d(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

2. Operator dan Sifat-Sifat Turunan

Latihan Soal

1. Carilah dy/dx untuk:

a. $y = \frac{3x}{(1-x)}$

b. $y = x^4 \sqrt[3]{x^3 - 1}$

3. Turunan dan Kekontinuan

Keterdiferensialan Mengimplikasikan Kontinuitas

Jika f adalah fungsi yang differentiable di $x=c$, maka f kontinu di $x=c$.

Latihan Soal

1. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{jika } x < 1 \\ x - 1 & \text{jika } 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$

Apakah kontinu di $x = 2$?

2. $f(x) = [[x]]$.

Apakah kontinu di $x = 2$?

4. Turunan Fungsi Transendental

Teorema Turunan Fungsi Transendental dan Inversnya

1. $d(\sin x) = \cos x dx \Rightarrow d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $d(\cos x) = -\sin x dx \Rightarrow d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $d(e^x) = e^x dx \Rightarrow d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$

Bilangan euler (e) dan logaritma natural (ln)

$$\log_a(cd) = \log_a c + \log_a d$$

$$\log_a(c/d) = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_a c^d = d \log_a c$$



$$\ln(cd) = \ln c + \ln d$$

$$\ln(c/d) = \ln c - \ln d$$

$$\ln c^d = d \ln c$$

4. Turunan Fungsi Transendental

Latihan Soal

1. Dengan teorema turunan fungsi transendental, buktikan:

a. $d(\tan x) = \sec^2 x$

b. $d(\sec x) = \sec x \tan x$

c. $d(\cot x) = -\csc^2 x$

d. $d(\csc x) = -\csc x \cot x$

4. Turunan Fungsi Transendental

Latihan Soal

2. Carilah dy untuk:

a. $y = e^x \arcsin x - e^x \arccos x - \arcsin x + \arccos x$

b. $y = \frac{x \cos x + \sin x}{x^2 + 1}$

c. $y = \ln x \cos^2 x$

5. Rolle's Theorem, Teorema Nilai Tengah

Rolle's Theorem

MVT:

f = fungsi yang differentiable di $[a,b] \Rightarrow$ ada c di $[a,b]$ sedemikian hingga:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Rolle's Theorem = MVT kasus spesial

f = fungsi yang differentiable di $[a,b]$ & $f(a) = f(b) \Rightarrow$ ada c di $[a,b]$ sedemikian hingga:

$$f'(c) = 0$$

6. Turunan Implisit

Fungsi Eksplisit

“Fungsi yang direpresentasikan secara eksplisit” $\Rightarrow y=f(x)$

Fungsi Implisit

“Fungsi yang tidak terlalu kentara”

6. Turunan Implisit

Latihan Soal

1. Carilah dy untuk:

a. $5y^{xy} + \cos(x \ln x) = 2^x$

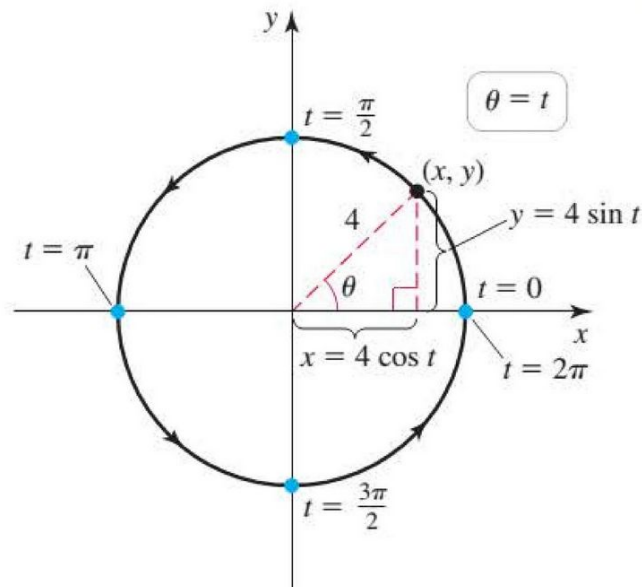
b. $\cos(xy^2) = y^2 + x$

c. $x^2y = \cos(x + 2y) + y^2x$

7. Turunan Fungsi Parametrik

Definisi Fungsi Parametrik

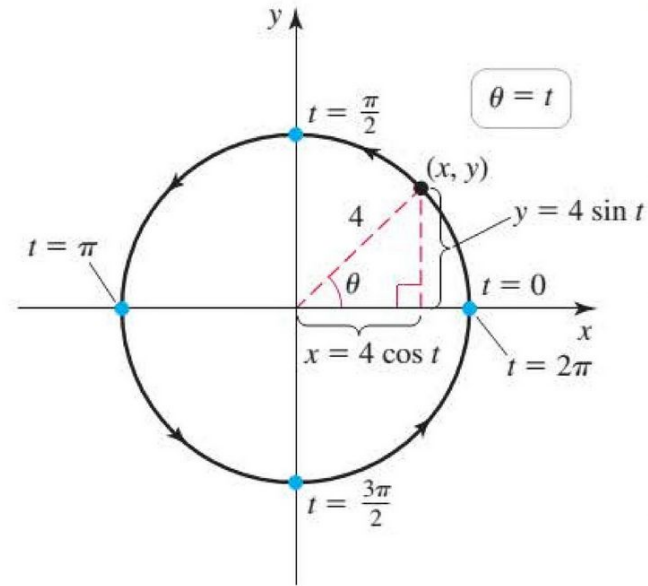
Jika perahu motor bergerak berlawanan arah jarum jam mengelilingi jalur melingkar dengan radius 4 mil, menyelesaikan satu putaran setiap 2π jam dengan kecepatan konstan. \Rightarrow Lintasan perahu $(x(t), y(t))$ pada setiap waktu $t > 0$ (t diukur dalam jam) dengan asumsi perahu dimulai pada sumbu x positif di titik $(4, 0)$



7. Turunan Fungsi Parametrik

Definisi Fungsi Parametrik

Jika perahu motor bergerak berlawanan arah jarum jam mengelilingi jalur melingkar dengan radius 4 mil, menyelesaikan satu putaran setiap 2π jam dengan kecepatan konstan. \Rightarrow Lintasan perahu $(x(t), y(t))$ pada setiap waktu $t > 0$ (t diukur dalam jam) dengan asumsi perahu mulai pada sumbu x positif di titik $(4, 0)$



Sudut θ sesuai dengan posisi perahu yang meningkat 2π rad setiap 2π jam dimulai dengan $\theta = 0 \Rightarrow t = 0$;
 $\therefore \theta = t, t \geq 0$

7. Turunan Fungsi Parametrik

Definisi Fungsi Parametrik

Bisa didapatkan:

$$x = 4 \cos t; \quad y = 4 \sin t$$

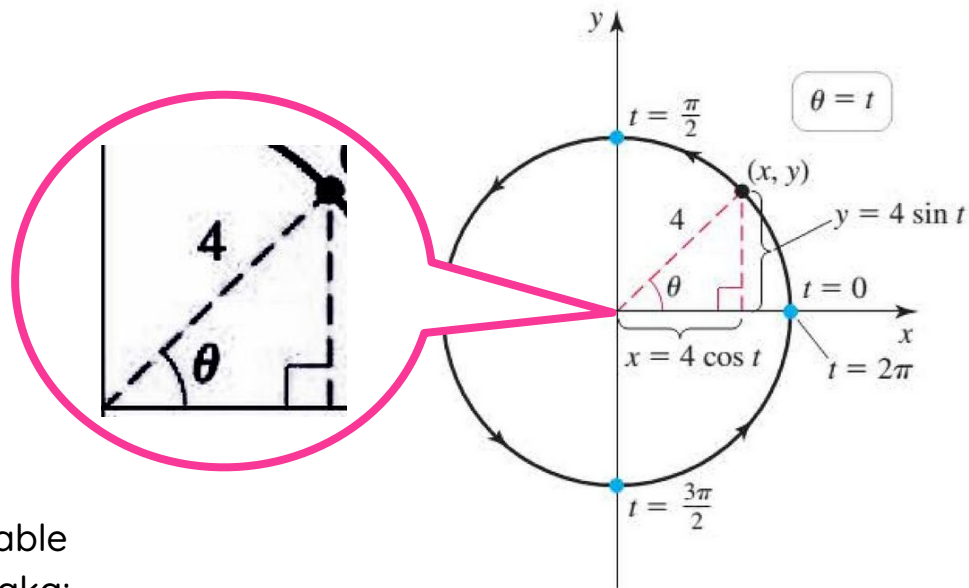
Fungsi parametrik dapat dituliskan dalam:

$$x = f(t); \quad y = g(t)$$

Turunan Fungsi Parametrik

Untuk $x = f(t)$ dan $y = g(t)$; f dan g differentiable di interval $[a, b]$, maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$



7. Turunan Fungsi Parametrik

Latihan Soal

1. Tentukan dy/dx dalam term t dari fungsi berikut:

a. $x = \cos t, y = 8 \sin t; t = \pi/2$

b. $x = 2t, y = t^3; t = -1$

c. $x = t + 1/t, y = t - 1/t; t = 1$

d. $x = \sqrt{t}, y = 2t; t = 4$

8. Turunan di Koordinat Polar

Koordinat Polar dan Kartesian

- Dinyatakan sebagai: $f = f(\theta) \rightarrow r = \text{jarak titik koordinat dari titik origin (pole)}; \theta = \text{sudut deviasi dari sumbu polar}$

- Mengubah koordinat polar \rightarrow kartesian

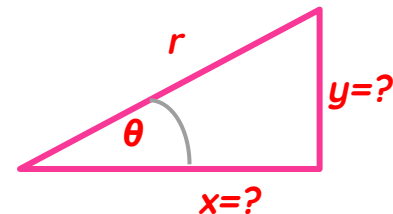
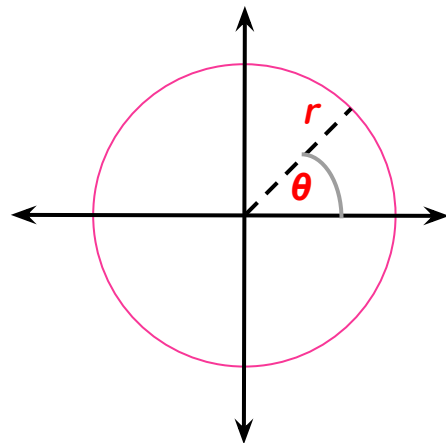
Titik di koordinat polar (r, θ) memiliki koordinat kartesian (x, y) :

- $x = r \cos \theta$;
- $y = r \sin \theta$

- Mengubah kartesian \rightarrow koordinat polar

Titik di koordinat kartesian (x, y) memiliki koordinat polar (r, θ) :

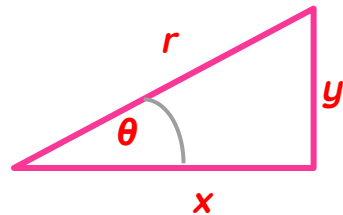
- $r^2 = x^2 + y^2$;
- $\tan \theta = y/x$



8. Turunan di Koordinat Polar

Latihan Soal

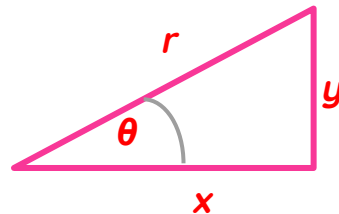
1. Tentukan titik kartesius dari persamaan berikut, persamaan polarnya dan cari turunannya.
 - a. persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, 2)$ dengan jari-jari 2



8. Turunan di Koordinat Polar

Latihan Soal

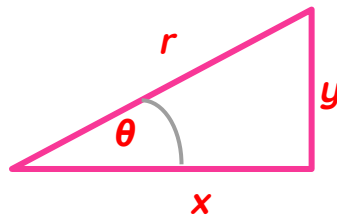
1. Tentukan titik kartesius dari persamaan berikut, persamaan polarnya dan cari turunannya.
 - a. persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, 2)$ dengan jari-jari 2
 - i. bagaimana persamaan lingkarannya?
 - ii. hint: $x^2+y^2 = r^2$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$
 - iii. bagaimana turunannya?



8. Turunan di Koordinat Polar

Latihan Soal

1. Tentukan titik kartesius dari persamaan berikut, persamaan polarnya dan cari turunannya.
 - a. persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, 2)$ dengan jari-jari 2
 - i. bagaimana persamaan lingkarannya?
 - ii. hint: $x^2+y^2 = r^2$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$
 - iii. bagaimana turunannya?
 - b. persamaan lingkaran yang berpusat di $(1, 2)$ dengan jari-jari 3
 - c. persamaan lingkaran yang berpusat di $(4, 5)$ dengan jari-jari 1



9. Turunan Tingkat Tinggi

Notasi

Derivative	f' Notation	y' Notation	D Notation	Leibniz Notation
First	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Second	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2} \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$
Third	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3} \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$
Fourth	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4} \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n th	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n} \rightarrow d^n f = d(d^{n-1} f)$

9. Turunan Tingkat Tinggi

Latihan Soal

1. Carilah d^2y/dx^2 untuk:

a. $x = 3 \cos^4(t); y = 4 \sin^3(t)$

b. $y = \frac{3x}{(1-x)}$

c. $3x^3y^2 = \sin^3(x) + 1$

9. Turunan Tingkat Tinggi

Latihan Soal

2. Carilah d^3y/dx^3 untuk:

a. $y = \sin(x^3)$

b. $y = \frac{3x}{(1-x)}$

c. $y = \sin 7x$

10. Turunan Parsial

Turunan Parsial

Jika f = fungsi dengan variabel independen >1 , cari derivative terhadap 1 variabel saja, perlakukan variabel sisanya sebagai konstanta.

Contoh: Carilah f_x untuk $f(x, y) \Rightarrow$ anggap x variabel, maka sisa variabelnya (y) dianggap konstanta. Dengan kata lain,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

10. Turunan Parsial

Latihan Soal

1. Carilah turunan parsial pertama untuk:

a. $f(x, y) = (4x - y^2)^{3/2} \Rightarrow f_x = ? \quad f_y = ?$

b. $f(x, y) = e^x \cos y \Rightarrow f_x = ? \quad f_y = ?$

c. $f(r, \theta) = 3r^3 \cos 2\theta \Rightarrow f_r = ? \quad f_\theta = ?$



End