Pop Quiz 3 - 2206820352 - Juan Maxwell Tanaya

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1a. $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, \ldots$

$a_n = \frac{n+1}{n^2}, \quad n \geq 1$

Untuk menguji konvergensi/divergensi barisan tersebut kita gunakan fakta jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \to \lim_{n\to\infty} a_n = f(n) = L$

$f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2} \to \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x}$

$= 0$

Karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} f(n)$ juga 0 sehingga barisan tersebut ~~divergen~~ konvergen ke 0

2a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2+3n-n^2}$

~~Untuk menguji konvergensi/divergensi deret berikut, saya akan gunakan uji integral yang menyatakan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika dan hanya jika $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergen.~~

$\cancel{f(x) = \frac{2x-1}{2+3x-x^2}}$

$\cancel{\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{2x-1}{-x^2+3x+2}\,dx}$

$\cancel{= \lim_{a\to\infty} \int_1^{a}}$

Untuk menguji konvergensi deret berikut, saya akan gunakan ordinary comparison test

$a_n = \frac{2n-1}{2+3n-n^2}$

$\frac{2n-1}{2+3n-n^2} < \frac{2n}{-n^2} = -2 \cdot \frac{1}{n}$

Karena

3a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$

Untuk menguji konvergensi deret berikut, saya gunakan ratio test, yaitu $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$

$p < 1$, maka konvergen

$p > 1$ atau limit tidak ada $\to$ divergen

$p = 1$ inconclusive.

$a_n = \frac{n^2}{e^{n^3}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{e^{(n+1)^3}} \times \frac{e^{n^3}}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{e^{n^3+3n^2+3n+1}} \times \frac{e^{n^3}}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{(e^{n^3})(e^{3n^2+3n+1})} \times \frac{\cancel{e^{n^3}}}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{e^{3n^2+3n+1}} \times \frac{1}{n^2}$

Perhatikan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ adalah p-series yang mengatakan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergen jika $p > 1$.

p pada $\frac{1}{n^2}$ adalah 2, sehingga deret $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2} e^{3n^2+3n+1}} + \frac{2n}{n^2 e^{3n^2+3n+1}} + \frac{1}{n^2 e^{3n^2+3n+1}}$

$= 0$

Sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$ konvergen juga.

4b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+2)!}$

Untuk mengecek konvergensi deret berikut, saya gunakan absolute convergence test dimana jika $\sum |u_n|$ konvergen, maka $\sum u_n$ juga konvergen.

Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = p$

Jika $p < 1 \to$ konvergen

$p > 1 \to$ divergen

$p = 1 \to$ inconclusive

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-3)^{n+2}}{(n+3)!}\right| \times \left|\frac{(n+2)!}{(-3)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+3)(n+2)!} \times \frac{(n+2)!}{3^{n+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3^{n+1})(3)}{n+3} \times \frac{1}{3^{n+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+3} = 0$

Karena $p = 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+2)!}$ konvergen.