COMPUTER SCIENCE & MATHEMATICS

Integral Tentu

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

TABLE OF CONTENTS

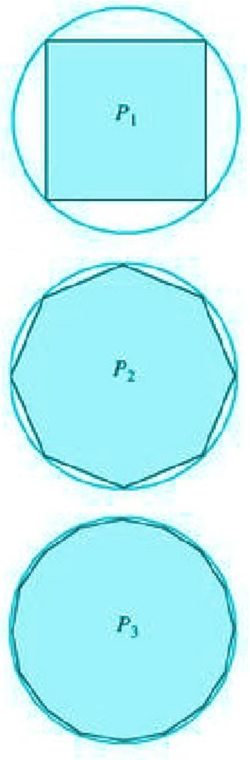
1. Notasi Sigma

Notasi Sigma

dapat diformulasikan sebagai: $\sum_{i=1}^{n} a_i$

Penentuan Luas Daerah Bidang Datar

1. Aproksimasikan daerah R oleh n segiempat dengan n segiempat yang diambil bersama-sama mengandung R, menghasilkan polygon luar, atau terkandung di dalam R, menghasilkan poligon dalam.
2. Tentukan luas daerah masing-masing segiempat.
3. Jumlahkan semua luas daerah n segiempat, dengan menggunakan ***notasi sigma***.
4. Tentukan nilai limitnya pada saat n → ∞.
5. Jika hasil nilai limit luas daerah poligon dalam dan poligon luarnya sama, maka hasil limit tersebut merupakan luas daerah R.



1. Notasi Sigma

Kelinearan Notasi Sigma

1. $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

2. $$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Contoh Soal

1. Misal $\sum_{i=1}^{100} a_i = 70; \sum_{i=1}^{100} b_i = 20$. Hitunglah $\sum_{i=1}^{100}(5a_i + 3b_i - 4)$

2. Tunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - i^2 = (n+1)^2 - 1$

1. Notasi Sigma

Bentuk Khusus Notasi Sigma

1. $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

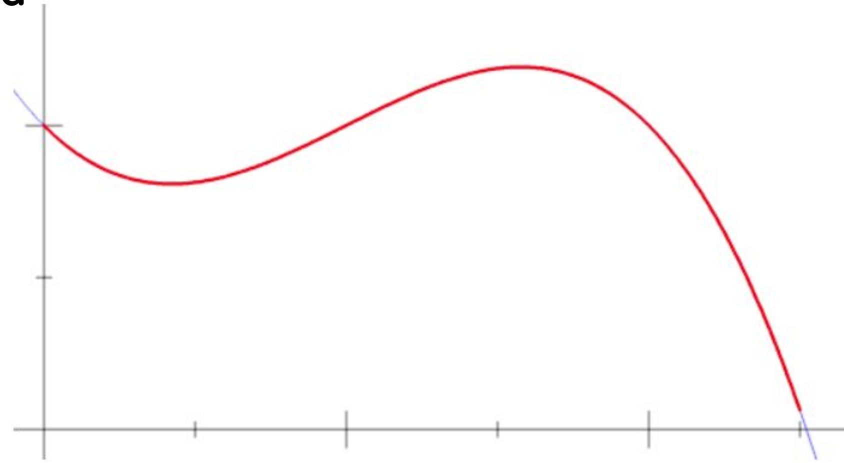
2. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$$

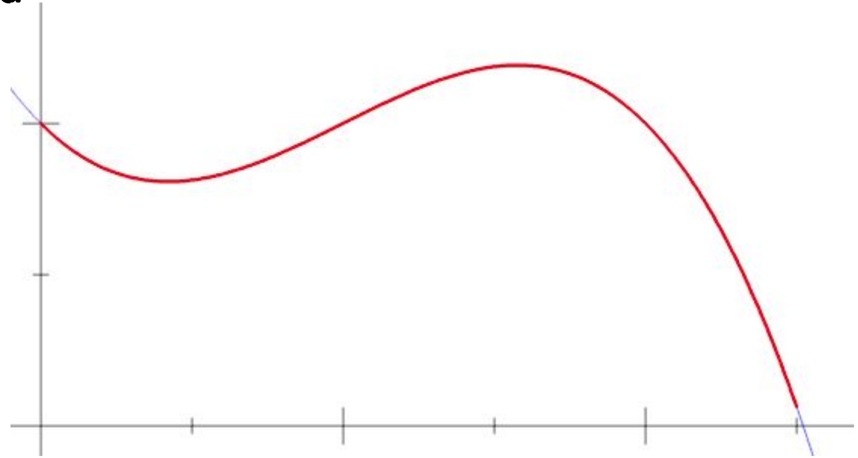
1. Notasi Sigma

Penggunaan Lainnya Konsep Notasi Sigma



1. Notasi Sigma

Penggunaan Lainnya Konsep Notasi Sigma



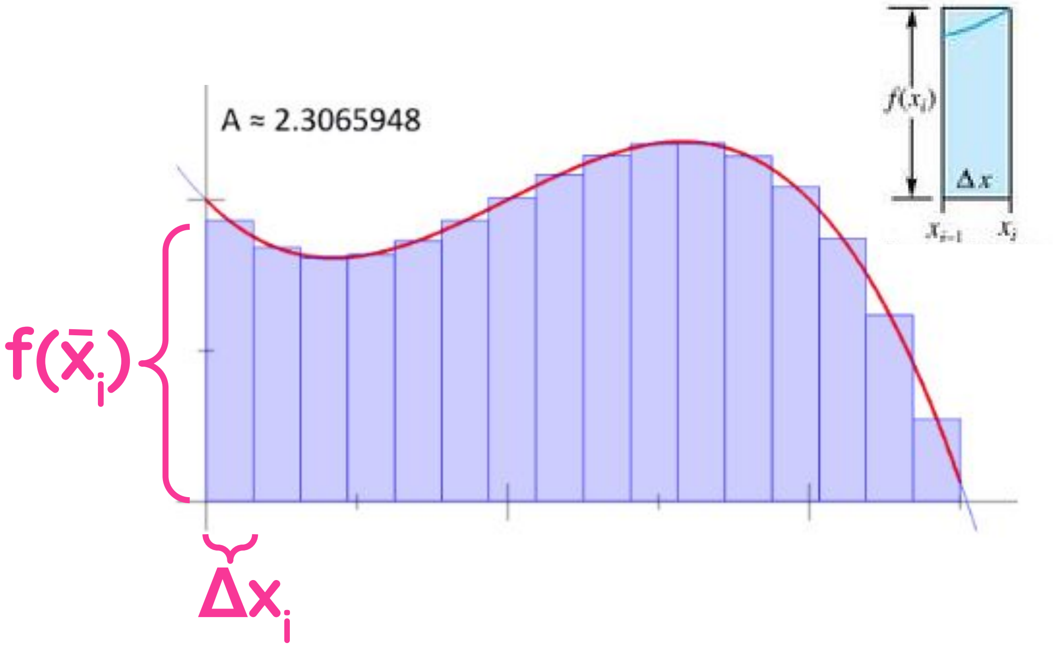
2. Integral Tentu

Jumlahan Riemann

dapat dinotasikan menjadi:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

untuk f fungsi pada [a,b],
dengan partisi P membagi interval tersebut menjadi n subinterval, di mana $a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ dan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
dan dipilih titik sampel $\bar{x}_i$ pada tiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$



2. Integral Tentu

Jumlah Riemann – Hitunglah jumlah Riemann untuk:

1. Misal kita memiliki fungsi f(x) = $x^2 + 1$ pada interval [-1,2] dengan menggunakan titik partisi berjarak sama -1 < -0,5 < 0 < 0,5 < 1 < 1,5 < 2, dengan titik sampel $\bar{x_i}$ berupa titik tengah dari interval bagian ke-i.

2. Misal kita memiliki fungsi f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3-5x^2+2x+8 pada interval [0,5] dengan menggunakan titik partisi 0 < 1,1 < 2 < 3.2 < 4 < 5 dan titik sampel yang berpadanan yaitu:

$$\bar{x}_1 = 0.5;\ \bar{x}_2 = 1.5; \bar{x}_3 = 2.5;\ \bar{x}_4 = 3.6;\ \bar{x}_5 = 5$$

2. Integral Tentu

Definisi Integral Tentu

- Misalkan f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup [a, b]. Jika

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

ada, maka kita katakan f terintegralkan pada [a, b].

- Integral tentu (integral Riemann) didefinisikan sebagai:

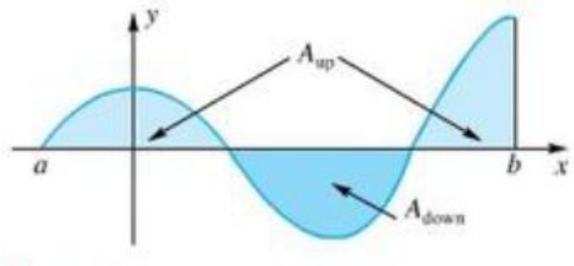
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

dengan $\|P\|$ adalah panjang P (subinterval partisi yang terpanjang).

2. Integral Tentu

Definisi Integral Tentu

- Perhatikan bahwa berdasarkan konsep jumlah Riemann:



$$\int_a^b f(x)dx = A_{atas} - A_{bawah}$$

Sifat-Sifat Integral Tentu

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,\ a > b$

2. Integral Tentu

Contoh Soal

1. $$\int_{4}^{4} x^3 dx =$$

2. $$\int_{6}^{1} x^3 dx =$$

3. $$\int_{2}^{5} (x^2 - 3x - 6) dx =$$

2. Integral Tentu

Contoh Soal II

1. Tentukan $\int_0^2 x^2 dx =$ dengan $\bar{x}_i = \frac{2i}{n}$

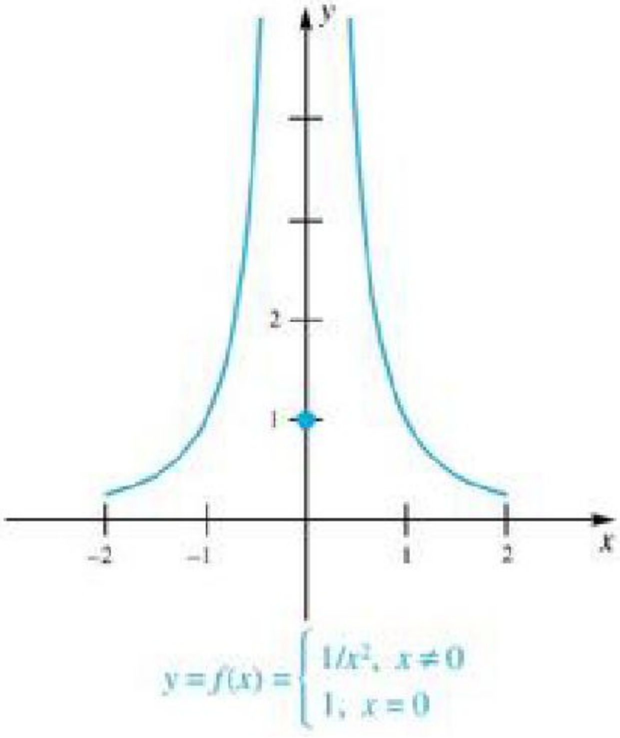
2. Integral Tentu

Fungsi Apa yang Dapat Diintegrasikan?

– Teorema Keintegralan

Untuk f terbatas pada [a, b]:

Jika f **kontinu** maka **f dapat diintegralkan pada [a,b]**.



3. Teorema Dasar Kalkulus

Kecepatan

Misal kita punya mobil yang berjalan dengan kecepatannya dapat kita gambarkan dalam kurva, maka kecepatannya dapat kita formulasikan menjadi:

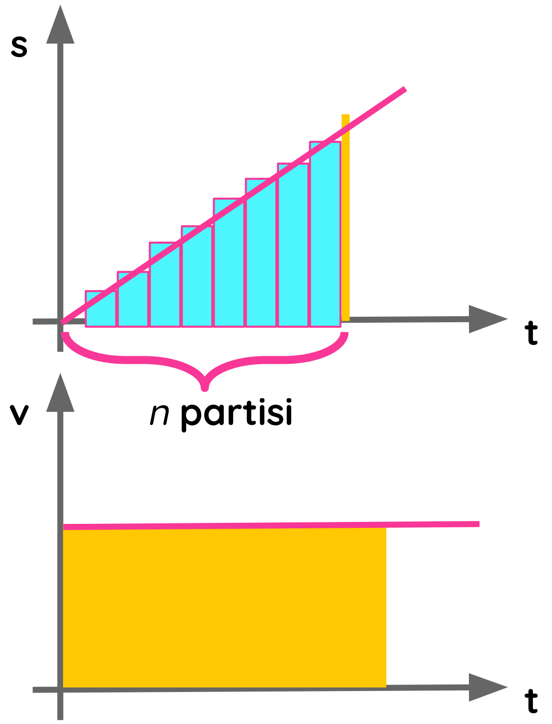
$$v = f(t)$$

dan dengan v yang ada, maka jarak s dengan waktu t = [0, 3] :

$$s = \int_0^3 f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Bagaimana kalau kita sudah punya jarak, tapi mau hitung kecepatan?

$$v = \frac{d}{dx}s(x) = \frac{d}{dx}\int_0^3 f(t)dt$$



3. Teorema Dasar Kalkulus

Area Function

Bagaimana jika batas atasnya bukanlah suatu angka fix, melainkan variabel x? *Butuh **accumulation function*** A(x).

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

dengan a = batas bawah dalam angka fix dan x=batas atas dalam bentuk variabel.

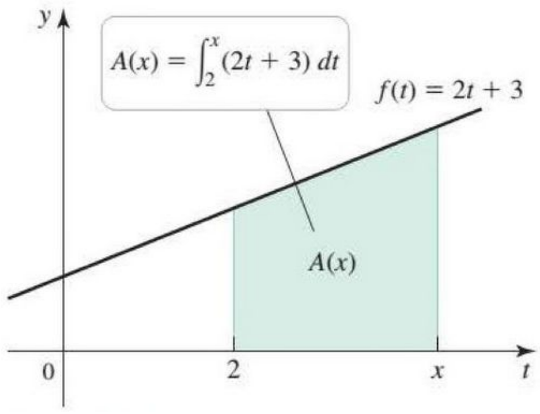


Fig. 8

3. Teorema Dasar Kalkulus

Contoh Soal

Perhatikan daerah yang dibatasi oleh kurva $f(t) = 2t+3$ dan sumbu axis t dari $t = 2$ ke $t = x$ yang membentuk trapesium, jika *accumulation function* (fungsi luas) mendefinisikan luas trapesium untuk $x \geq 2$:

a. evaluasi $A(5)$
b. carilah fungsi $A(x)$, untuk $x \geq 2$
c. bandingkan turunan $A(x)$ dengan fungsi $f(t)$

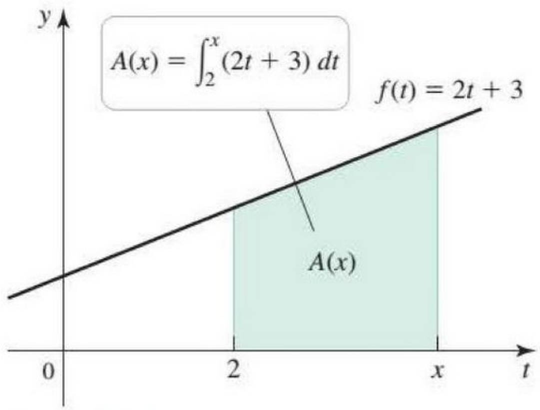


Fig. 8

3. Teorema Dasar Kalkulus

Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup [a, b] dan kontinu pada interval tersebut, dan misalkan x = variabel titik pada (a, b), maka:

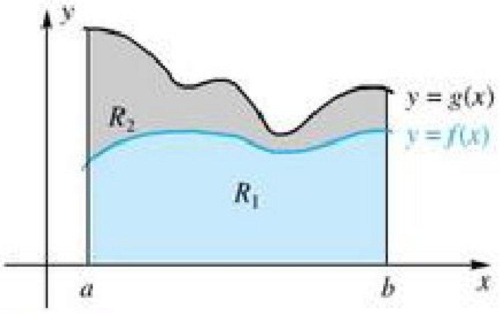
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

3. Teorema Dasar Kalkulus

Teorema B: Sifat Perbandingan

Jika f dan g terintegrasikan pada [a,b] dan jika f(x) ≤ g(x) untuk semua x dalam [a,b], maka

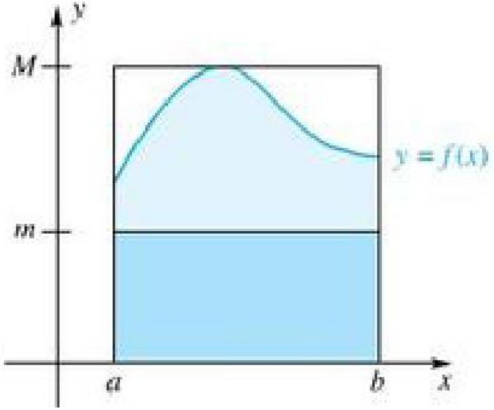
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$



Teorema C: Sifat Keterbatasan

Jika f terintegralkan pada [a,b] dan jika m ≤ f (x) ≤ M untuk semua x dalam [a,b], maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



3. Teorema Dasar Kalkulus

Integral Tentu Sebagai Operator Linier

Jika f dan g terintegrasikan pada [a,b] dan k = konstanta, maka kf serta f dan g terintegrasikan, dan:

1. $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Teorema Dasar Kalkulus

Teorema Dasar Kalkulus Kedua

Misalkan f kontinu (karenanya terintegrasikan) pada [a,b] dan misalkan F sebarang antiderivatif dari f pada [a,b]. Maka:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4. Teorema Nilai Rata-Rata

Teorema

Misalkan f kontinu (karenanya terintegrasikan) pada [a,b], maka dapat ditemukan bilangan c diantara a dan b sedemikian rupa sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

4. Teorema Nilai Rata-Rata

Latihan Soal

Tentukan c yang memenuhi:

1. $\int_a^b (x^2 + 5)dx = f(c)(b - a);\ a = 0,\ b = 1$

End