COMPUTER SCIENCE & MATHEMATICS

Aplikasi Turunan

(1 &2)

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

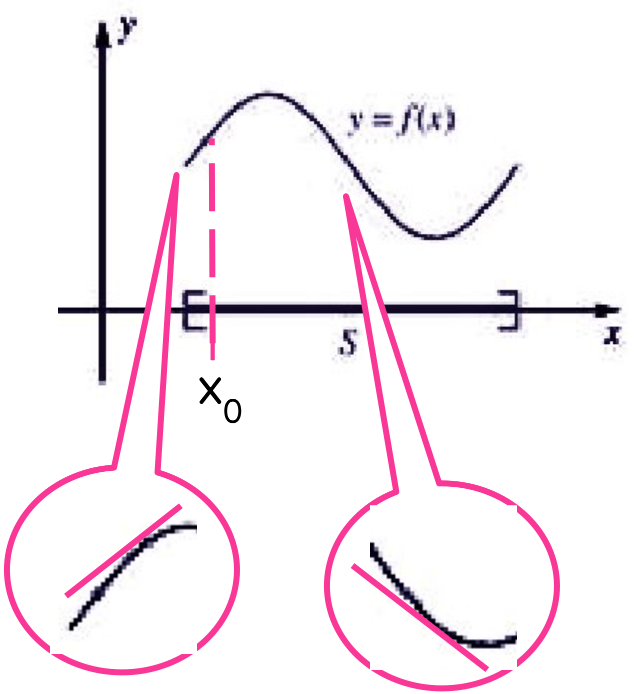
TABLE OF CONTENTS

1. Karakteristik Grafik Fungsi

Titik Ekstrem, Kecekungan

Misalkan $y=f(x)$ adalah suatu fungsi $f:R\rightarrow R$, maka:
$f'(x_0)$ = gradien garis singgung $f(x)$ di x_0
$\therefore$ pers. garis singgung $\Rightarrow$ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

[*merujuk ke perilaku gradien*] $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ naik, $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ turun
Bagaimana dengan $f'(x_0) = 0$?



1. Karakteristik Grafik Fungsi

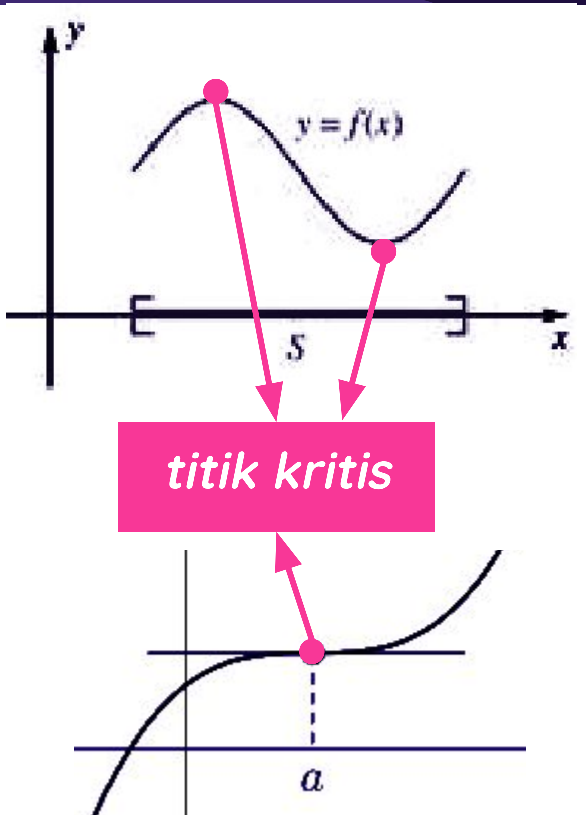
Titik Ekstrem, Kecekungan

Misalkan y=f(x) adalah suatu fungsi f:R→R, maka:
$f'(x_0)$ = gradien garis singgung f(x) di x_0
∴ pers. garis singgung ⇒ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

[*merujuk ke perilaku gradien*] $f'(x_0) > 0$ → naik, $f'(x_0) < 0$ → turun
Bagaimana dengan $f'(x_0) = 0$? $f'(x_0) = 0$ ⇒ **titik kritis (stasioner)**

Kemungkinan titik kritis: ***[kemunculan: $f'(x_0)=0$ atau titik ujung]***

a) **merupakan titik maksimum**; jika $f'(x_0)=0$ dan $f''(x_0)<0$;
b) **merupakan titik minimum**, jika $f'(x_0)=0$ dan $f''(x_0)>0$
c) **bisa jadi titik maks., min., belok**, $f'(x_0)=0$ dan $f''(x_0)=0$



1. Karakteristik Grafik Fungsi

Titik Ekstrem, Kecekungan

Misalkan $y=f(x)$ adalah suatu fungsi $f:R\to R$, maka:
$f'(x_0)$ = gradien garis singgung $f(x)$ di x_0
$\therefore$ pers. garis singgung $\Rightarrow$ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

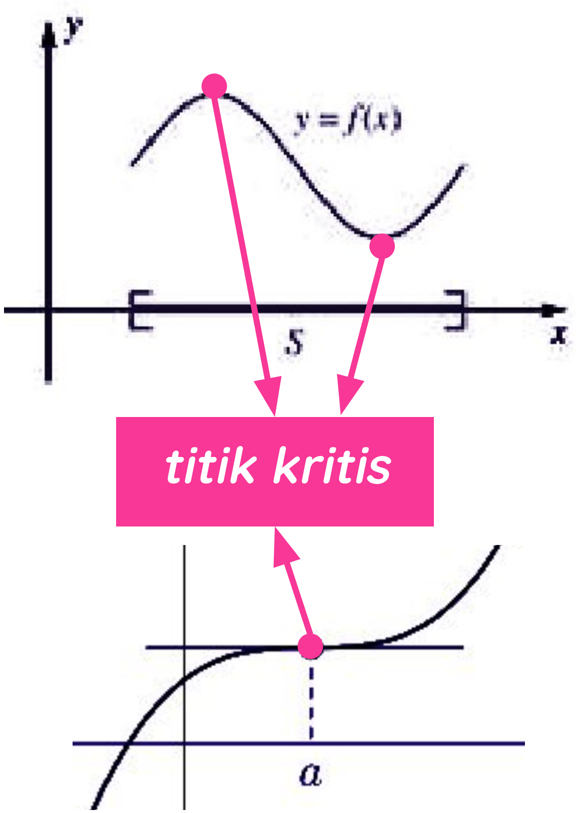
[*merujuk ke perilaku gradien*] $f'(x_0) > 0 \to$ naik, $f'(x_0) < 0 \to$ turun
Bagaimana dengan $f'(x_0) = 0$? $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ **titik kritis (stasioner)**

Kemungkinan titik kritis: ***[kemunculan: $f'(x_0)=0$ atau titik ujung]***

a) **merupakan titik maksimum**; jika $f'(x_0)=0$ dan $f''(x_0)<0$;
b) **merupakan titik minimum**, jika $f'(x_0)=0$ dan $f''(x_0)>0$
c) **bisa jadi titik maks., min., belok**, $f'(x_0)=0$ dan $f''(x_0)=0$

Kecekungan:

a) $f''(x) > 0 \to$ f cekung (concave) di sekitar x
b) $f''(x) < 0 \to$ f cembung (convex) di sekitar x



1. Karakteristik Grafik Fungsi

Latihan Soal

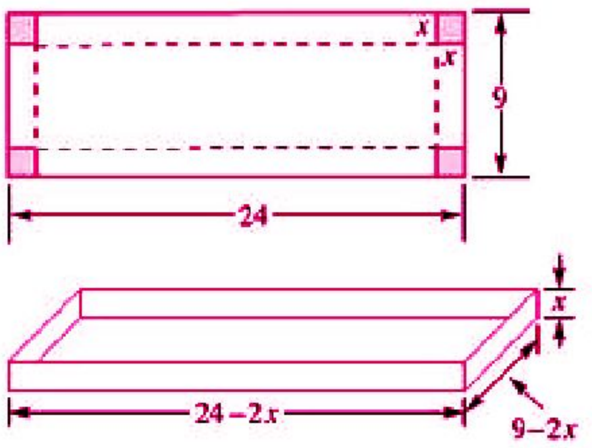
1. Berdasarkan fungsi berikut, tentukan di mana x naik/ turun/cembung/cekung dan mencapai titik maksimum:

   a. $f(x) = \dfrac{2}{x^3 - 5}$

   b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$

1. Karakteristik Grafik Fungsi

Latihan Soal



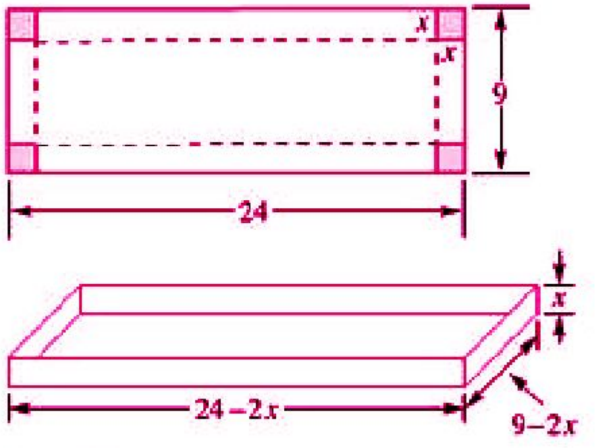
1. Berdasarkan fungsi berikut, tentukan di mana x naik/ turun/cembung/cekung dan mencapai titik maksimum:
   a. $f(x) = \dfrac{2}{x^3 - 5}$
   b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$

2. Kotak segiempat akan dibuat dari selembar papan, panjang 24 inch dan lebar 9 inch, dengan memotong segiempat identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya. Cari ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapa vol. maksimumnya?

1. Karakteristik Grafik Fungsi

Latihan Soal

1. Berdasarkan fungsi berikut, tentukan di mana x naik/turun/cembung/cekung dan mencapai titik maksimum:
   a. $f(x) = \dfrac{2}{x^3 - 5}$
   b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$



2. Kotak segiempat akan dibuat dari selembar papan, panjang 24 inch dan lebar 9 inch, dengan memotong segiempat identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya. Cari ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapa vol. maksimumnya? *Cari volumenya terlebih dahulu ⇒ cari intervalnya[0, 4.5] & titik kritisnya (x_0) ⇒ hitung volume berdasar x_0 yang didapat*

2. Optimisasi & Aplikasi Turunan

Optimisasi Dengan Kalkulus

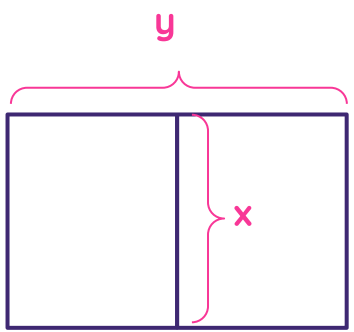
Pedoman untuk Masalah Pengoptimalan:

1. Baca masalah dengan cermat, identifikasi variabel, dan atur informasi yang diberikan dengan gambar.
2. Identifikasi fungsi yang akan dioptimalkan.
3. Identifikasi *constraint*.
4. Gunakan *constraint* untuk menghilangkan semua kecuali satu variabel independen dari fungsi yang dioptimalkan,
5. Dengan fungsi yang dinyatakan dalam variabel tunggal, temukan interval untuk variabel tersebut.
6. Gunakan metode kalkulus untuk menemukan nilai maksimum atau minimum absolut dari fungsi tujuan pada interval yang diinginkan. Jika perlu, periksa titik ujung (titik di batas interval)

2. Optimisasi & Aplikasi Turunan

Latihan Soal - Optimisasi

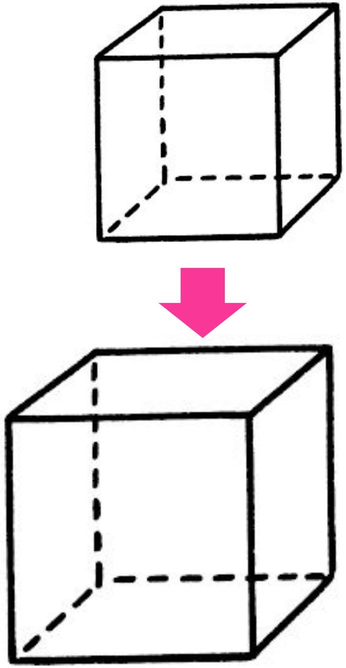
1. Seorang tukang kebun memiliki 300 meter kawat yang akan dipergunakan untuk membuat pagar dari dua lahan perkebunan identik yang berdampingan, seperti diperlihatkan pada gambar. Berapa lebar dan panjang pagar secara keseluruhan sehingga memiliki luas maksimum?



2. Optimisasi & Aplikasi Turunan

Latihan Soal - Aplikasi Turunan dalam Fisika

1. Sebuah kotak dengan sisi 20 cm diperbesar sehingga volumenya membesar dengan kecepatan: 3 cm^3/detik. Berapa laju perubahan luas permukaannya? *[dV/dt = laju perubahan volume per detik]*



2. Optimisasi & Aplikasi Turunan

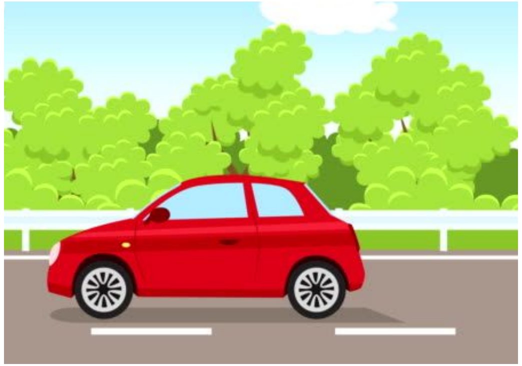
Latihan Soal - Optimisasi + Aplikasi Turunan dalam Fisika

1. Seorang pelari sedang berlari dalam suatu jalur lari yang mengitari titik tengahnya dengan radius awal sebesar 30 cm. Namun, seiring pertambahan detik, radius jalur bertambah 3 cm/detik. Berapa kecepatan minimum agar pelari dapat menyelesaikan satu putaran?

2. Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan tiap detiknya sebesar:

   $$x(t) = e^{-2\cos t}$$

   Tentukan kapan mobil akan mencapai kecepatan maksimum (atau minimum jika ada)?



2. Optimisasi & Aplikasi Turunan

Latihan Soal

1. Untuk:
   - p = harga untuk 1 unit
   - $C(x)$ = biaya untuk memproduksi unit sejumlah x;
     - $C'(x)$ = laju biaya terhadap produksi 1 unit = biaya tambahan saat unit bertambah (marginal cost);
   - $R(x)$ = pendapatan/*revenue* dari penjualan unit sejumlah x
     - $R'(x)$ = laju pendapatan terhadap penjualan 1 unit ⇒ $R(x) = p \cdot x$
   - Fungsi kebutuhan [*demand function*/seberapa tinggi produk diinginkan konsumen] $f(x)$ = harga per unit jika menjual x unit.
     - persamaan kebutuhan $p = f(x) \Rightarrow R(x) = xf(x)$
   - $P(x) = R(x) - C(x)$ ⇒ profit keuntungan jika x unit diproduksi dan terjual

   Tentukan titik minimum marginal cost dan profit maksimum, jika:

   a. $C(x) = 100x - 0.03x^2 + 0,0001x^3$ dan $f(x) = 10 - 0,5x$

3. Aturan L'Hopital

L'Hopital

- Jika $\frac{f(x)}{g(x)}$ berbentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ maka $lim \frac{f(x)}{g(x)} = lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Bentuk-bentuk tak tentu (*indeterminate form*) lainnya dapat dibawa ke bentuk di atas misalnya:
  $\infty - \infty$ atau $0 \cdot \infty$ atau 0^{∞} atau ∞^{0}.

3. Aturan L'Hopital

Latihan Soal

1. Dengan teorema L'Hopital, evaluasi limit berikut:

   a. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

   b. $\lim_{x \to 0} (\sin x)^{\frac{1}{x}}$

   c. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x + \cos x}{x}$

   d. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

End