COMPUTER SCIENCE & MATHEMATICS

Review Limit

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

TABLE OF CONTENTS

1. Definisi Limit

Masalah yang Mengarah ke Konsep Limit

Bagaimana cara menyelesaikan: $f(x) = (x^3 - 1) / (x - 1)$; $x = 1$

1. Definisi Limit

Masalah yang Mengarah ke Konsep Limit

Bagaimana cara menyelesaikan: $f(x) = (x^3 - 1) / (x - 1)$; $x = 1$

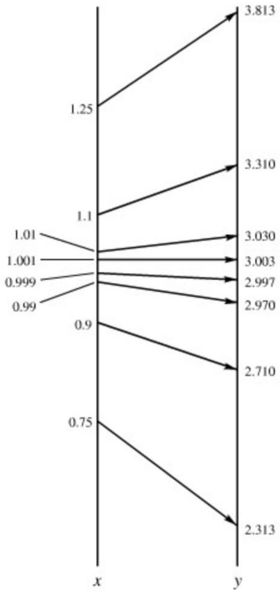
a) Menghitung beberapa nilai $f(x)$; $x \to 1$

b) Memetakan nilai $f(x)$ untuk $x \to 1$ dalam diagram

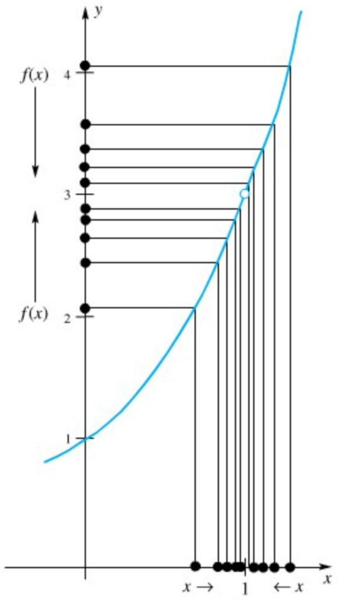
c) Menggambarkan nilai $f(x)$ untuk $x \to 1$ dalam suatu graf

$\therefore$ **Kesamaan**: $f(x) \to 3$ untuk $x \to 1$

x	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313



Schematic diagram



Graph of $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

1. Definisi Limit

Masalah yang Mengarah ke Konsep Limit

Bagaimana cara menyelesaikan: $f(x) = (x^3 - 1) / (x - 1)$; $x = 1$

a) Menghitung beberapa nilai $f(x)$; $x \to 1$

b) Memetakan nilai $f(x)$ untuk $x \to 1$ dalam diagram

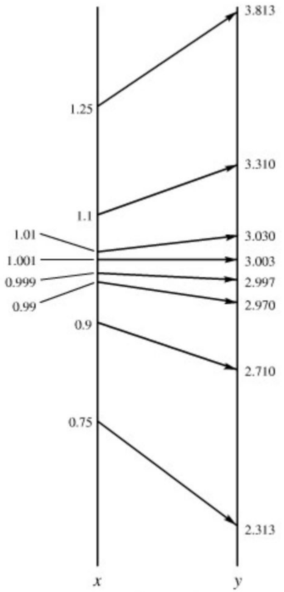
c) Menggambarkan nilai $f(x)$ untuk $x \to 1$ dalam suatu graf

∴ **Kesamaan**: $f(x) \to 3$ untuk $x \to 1$

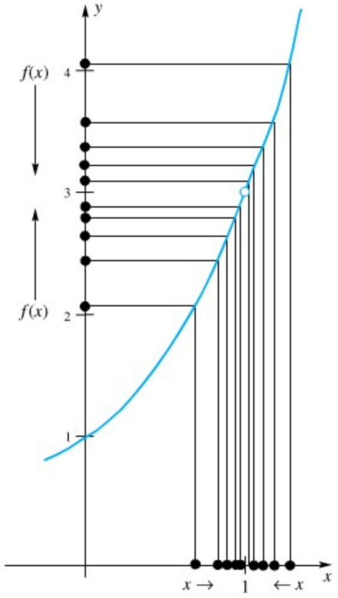
Secara intuisi:

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti untuk x mendekati c tapi bukan $x = c$, $f(x)$ dekat ke L.

x	$y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313



Schematic diagram



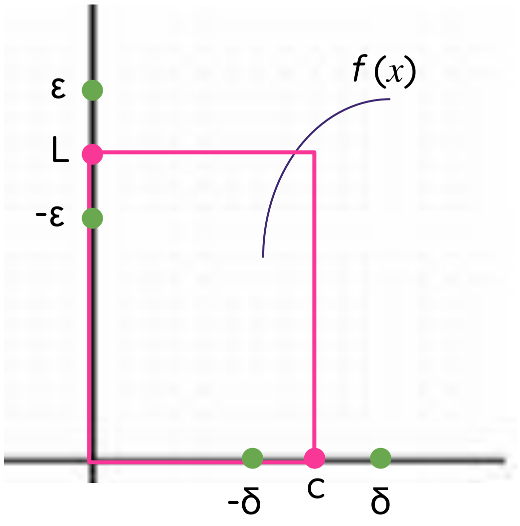
Graph of $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

1. Definisi Limit

Definisi Limit secara formal:

Mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$; yakni,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



atau dapat ditulis juga sebagai:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0:\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

1. Definisi Limit

Latihan:

1. Buktikan: $\lim_{x \to 2} 5x - 2 = 9$ adalah salah
2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4} (2x - 7) = 1$ benar
3. Buktikan: $\lim_{x \to 3} 3x - 1 = 7$ adalah salah

Limit Satu Sisi

Limit Kiri

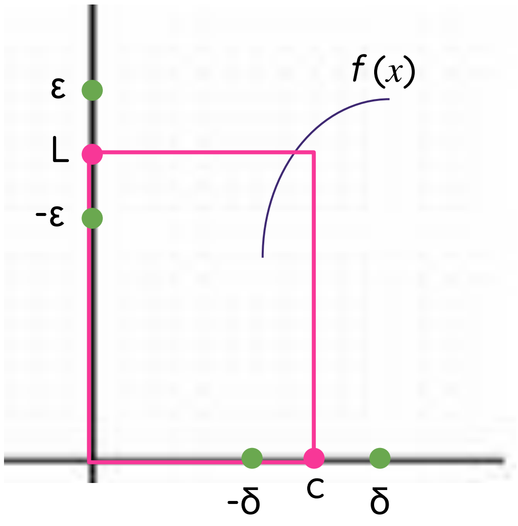
Limit kiri suatu fungsi $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ didefinisikan sebagai, untuk setiap nilai ε > 0 yang diberi terdapat δ > 0 sedemikian sehingga:

$$0 < (c - x) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limit Kanan

Limit kanan suatu fungsi $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ didefinisikan sebagai, untuk setiap nilai ε > 0 yang diberi terdapat δ > 0 sedemikian sehingga:

$$0 < (x - c) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



2. Teorema Limit

Teorema Limit Utama (Teorema 2.1)

Misalkan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f & g adalah fungsi yang berlimit di c, maka

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k,$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c,$
3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x),$
4. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x),$
5. $\lim\limits_{x \to c} [f(x).\, g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to c} g(x),$
6. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$; di mana $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0,$
7. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n,$
8. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$; di mana $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ jika n genap.

2. Teorema Limit

Teorema Limit (Teorema 2.2)

Jika f merupakan fungsi polinomial atau fungsi rasional, maka : $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$,

di mana $f(c)$ terdefinisi.

Teorema Limit (Teorema 2.3)

Jika $f(x) = g(x)$ untuk semua nilai x di selang terbuka yang memuat c, kecuali mungkin pada c.

Dan jika $\lim_{x \to c} f(x)$ ada, maka : $\lim_{x \to c} g(x)$ ada, dan $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$.

2. Teorema Limit

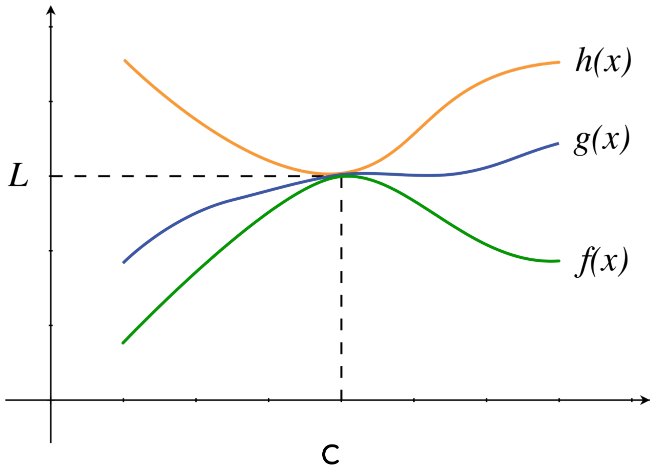
Teorema Apit (*Squeeze Theorem*)

Misalkan *f*, *g*, dan *h* merupakan fungsi yang memenuhi

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua nilai x mendekati c, kecuali

mungkin pada c. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka :

$$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$



Latihan Soal

Definisi dan Teorema Limit

1. $\lim_{t \to 7} \; (t^3 - 5t^2 - 13t - 7) / (t - 7) = \ldots$

2. $\lim_{x \to 2} \; [[\, x \,]] = \ldots$

   Petunjuk. $[[\, x \,]]$:
   $\rightarrow$ bilangan bulat terbesar lebih kecil dari x; atau
   $\rightarrow$ bilangan bulat terbesar sama dengan x.

Latihan Soal

Definisi dan Teorema Limit

1. Selesaikan pengerjaan soal berikut dengan juga turut menuliskan nama teorema yang digunakan.

   a. $$\lim_{y \to 2} \left(\frac{4y^3 + 8y}{y + 4} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

   b. $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}.$$

2. Berdasarkan teorema apit, tentukan penyelesaian dari $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x)$.

Latihan Soal

Limit Satu Sisi

a. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} -x & jika\ x < 0 \\ x & jika\ 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & jika\ x \geq 1 \end{cases}$

Carilah nilai $\lim_{x \to 0} f(x)$ dan $\lim_{x \to 1} f(x)$.

b. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & jika\ x < 1 \\ x - 1 & jika\ 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & jika\ x \geq 2 \end{cases}$

Carilah nilai $\lim_{x \to 1} f(x)$ dan $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Latihan Soal

Limit Satu Sisi

a. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} -x & jika\ x < 0 \\ x & jika\ 0 \le x < 1 \\ 1 + x & jika\ x \ge 1 \end{cases}$

Carilah nilai $\lim_{x \to 0} f(x)$ dan $\lim_{x \to 1} f(x)$.

b. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & jika\ x < 1 \\ x - 1 & jika\ 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & jika\ x \ge 2 \end{cases}$

Carilah nilai $\lim_{x \to 1} f(x)$ dan $\lim_{x \to 2} f(x)$.

a.a> $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

a.b> $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -x = -1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) =$ *tidak ada*

3. Limit dan Kontinuitas

Definisi

Fungsi f dikatakan kontinu di x=c jika:

1. $f(c)$ ada; dan
2. $\lim_{x \to 0} f(x)$ ada; dan
3. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(c)$

Contoh

Apakah fungsi berikut dikatakan kontinu:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = [[\, x \,]]$

3. Limit dan Kontinuitas

Removable Discontinuity

Jika $\lim_{x \to 0} f(x)$ ada dan f tidak kontinu di $\lim_{x \to 0} x = c$ tetapi kita bisa membuat f menjadi kontinu

dengan cara memilih $f(c) = \lim_{x \to 0} f(x)$, maka f bisa disebut removable discontinuity

Contoh

Apakah fungsi berikut dapat dikatakan removable discontinuity:

1. $$f(x) = \begin{cases} -x & jika\ x < 0 \\ x & jika\ 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & jika\ x \geq 1 \end{cases}$$

2. $f(x) = [[\, x \,]]$

3. Limit dan Kontinuitas

Removable Discontinuity

Jika $\lim_{x \to 0} f(x)$ ada dan f tidak kontinu di $\lim_{x \to 0} x = c$ tetapi kita bisa membuat f menjadi kontinu

dengan cara memilih $f(c) = \lim_{x \to 0} f(x)$, maka f bisa disebut removable discontinuity

Contoh

Apakah fungsi berikut dapat dikatakan removable discontinuity:

1. $$f(x) = \begin{cases} -x & jika\ x < 0 \\ x & jika\ 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & jika\ x \geq 1 \end{cases}$$

2. $f(x) = [[\, x \,]]$ ⇒ *jump discontinuity*

3. Limit dan Kontinuitas

Kontinuitas

1. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & jika\ x < 1 \\ x - 1 & jika\ 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & jika\ x \geq 2 \end{cases}$

   Carilah nilai $\lim_{x \to 1} f(x)$ dan $\lim_{x \to 2} f(x)$.

2. Diberikan fungsi:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ r, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

- Carilah nilai $\lim_{x \to 0} f(x)$

- Berapa nilai r agar f kontinu di x=0.

3. Limit dan Kontinuitas

Kontinuitas Fungsi Pada Suatu Interval

Fungsi f dikatakan kontinu pada interval [a,b] jika f kontinu di sembarang titik di dalam [a,b]. Dalam hal f kontinu di setiap titik pada domain, maka f dikatakan fungsi kontinyu.

Dengan kata lain, jika f memenuhi:

a) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ → f **kontinu kanan** pada a
b) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ → f **kontinu kiri** pada b
c) f kontinu pada setiap titik dari interval → f **kontinu pada sebuah interval terbuka**

maka f **kontinu pada interval tertutup.**

contoh fungsi polinomial

3. Limit dan Kontinuitas

Teorema Nilai Antara (*Intermediate Value Theorem*)

Untuk f terdefinisi pada [a,b] dan W=bilangan antara f(a) dan f(b). Jika f kontinu di [a,b], maka ada paling sedikit sebuah bilangan c di antara a dan b sehingga f(c) = W.

Contoh:

Gunakan Intermediate Value Theorem untuk menunjukkan bahwa persamaan $x - \cos x = 0$ memiliki solusi pada interval $[0, \pi / 2]$

4. Limit Melibatkan Fungsi Trigonometri

Teorema Limit Fungsi Trigonometri

1. $\lim\limits_{t \to c} \sin t = \sin c$
2. $\lim\limits_{t \to c} \tan t = \tan c$
3. $\lim\limits_{t \to c} \sec t = \sec c$
4. $\lim\limits_{t \to c} \cos t = \cos c$
5. $\lim\limits_{t \to c} \cot t = \cot c$
6. $\lim\limits_{t \to c} \csc t = \csc c$

Teorema Limit Trigonometri Khusus

1. $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
2. $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

4. Limit Melibatkan Fungsi Trigonometri

Latihan Soal

1. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} = \ldots$

2. $\lim_{t \to 0} \dfrac{1 - \cot t}{1/t} = \ldots$

4. Limit Melibatkan Fungsi Trigonometri

Latihan Soal

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos\left(x^2+3\right)-\cos(3)}{x^2} =$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x-k)-\frac{1}{2}\sin(3x-k)-\frac{1}{2}\sin(x-k)}{2x^2-kx} =$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sec(y+x)-\sec(y+x)-e^x \sec(y)+\sec(y)}{x^2} =$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^{x+k}-2+2e^x+e^k}{x} =$

4. Limit Melibatkan Fungsi Trigonometri

Latihan Soal

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos\left(x^2+3\right) - \cos(3)}{x^2} = -\sin(3)$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x-k) - \frac{1}{2}\sin(3x-k) - \frac{1}{2}\sin(x-k)}{2x^2 - kx} =$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sec(y+x) - \sec(y+x) - e^x \sec(y) + \sec(y)}{x^2} = \tan y \sec y$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^{x+k} - 2 + 2e^x + e^k}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x-1)\left(2-e^k\right)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} . \lim\limits_{x \to 0}\left(2 - e^k\right)$

$= 1 . \left(2 - e^k\right) = 2 - e^k$

5. Limit di Tak Terhingga; Limit Tak Terhingga

Limit di Tak Terhingga

Definisi Limit Ketika $x \to \infty$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \gg 1,\ x > M \to |f(x) - L| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Definisi Limit Ketika $x \to -\infty$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \ll -1,\ x < M \to |f(x) - L| < \varepsilon \quad \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Teorema:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0\,, k > 0$$

N.b

$\forall$ $\to$ semua

$\exists$ $\to$ ada

$\gg$ $\to$ lebih besar (sangat besar) dari ....

$\ll$ $\to$ lebih kecil (sangat kecil) dari ....

5. Limit di Tak Terhingga; Limit Tak Terhingga

Latihan Soal

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{3x^4 + 1}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^5 - 1}{x^5 + 1}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^5 - 1}{x^4 - 1}$

5. Limit di Tak Terhingga; Limit Tak Terhingga

Latihan Soal

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{3x^4 + 1}$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 - 1}{x^5 + 1}$$

3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^5 - 1}{x^5}}{\frac{x^4 - 1}{x^5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^5}}$$

Berdasar teorema pada limit di tak terhingga, maka yang didapatkan adalah pembagian dengan 0.
∴Tidak terdefinisi

Jika dibagi dengan x^4, maka terbentuk:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^4}}$$

Terjadi operasi dengan *infinity* yang kita tidak tahu hasilnya apa.
∴Tidak terdefinisi

5. Limit di Tak Terhingga; Limit Tak Terhingga

Limit Tak Terhingga

Definisi Limit Tak Terhingga

- ❑ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ **jika** $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x - c| < \delta,\ f(x) \gg 1$

- ❑ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ **jika** $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x - c| < \delta,\ f(x) \ll -1$

N.b

$\forall$ → semua

$\exists$ → ada

$\gg$ → lebih besar (sangat besar) dari ....

$\ll$ → lebih kecil (sangat kecil) dari ....

5. Limit di Tak Terhingga; Limit Tak Terhingga

Latihan Soal

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{3x - 3}$

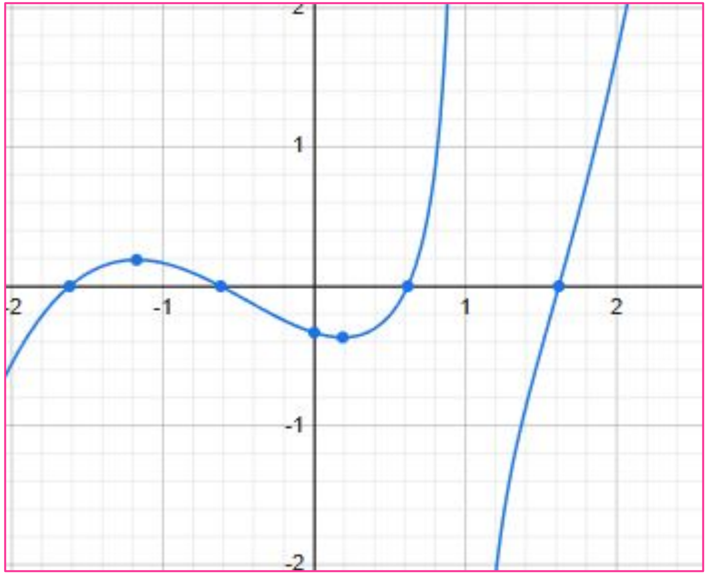
2. $\lim_{x \to 2} \frac{3x^5 - 1}{x^5 - 32}$

5. Limit di Tak Terhingga; Limit Tak Terhingga

Latihan Soal

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{3x - 3}$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^5 - 1}{x^5 - 32}$



6. Asimtot Datar dan Tegak

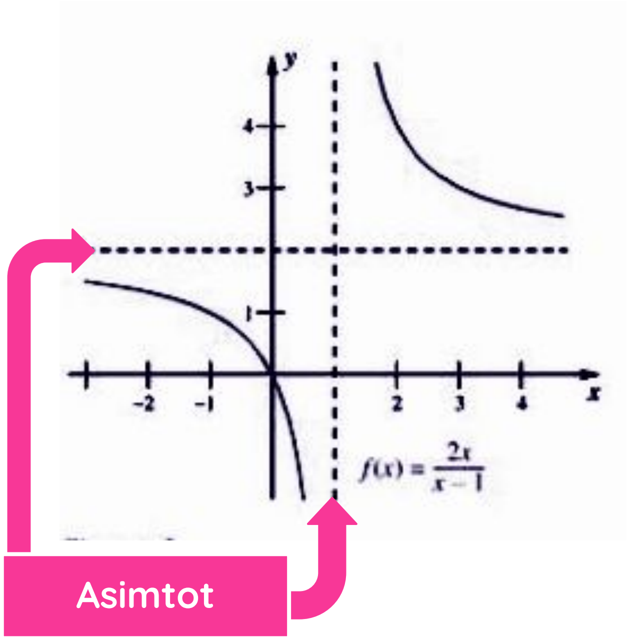
Pengenalan Asimtot

Ingat kembali tentang fungsi (relasi bilangan x terhadap y). Jika kita mendapatkan fungsi seperti:

$$g(x) = 2x / (x - 1)$$

dan kita gambarkan dalam bentuk grafik (buat tabel nilai, gambar titik yang berkorespondensi, hubungkan titik-titik ini dengan sebuah kurva mulus), maka kita dapat melihat sesuatu yang dramatis terjadi saat x mendekati 1.

Hal tersebut lebih diperjelas saat menarik garis tegak putus-putus (***asimtot***) di x = 1 atau garis tegak putus-putus (***asimtot***) di y = 2.



6. Asimtot Datar dan Tegak

Asimtot Tegak

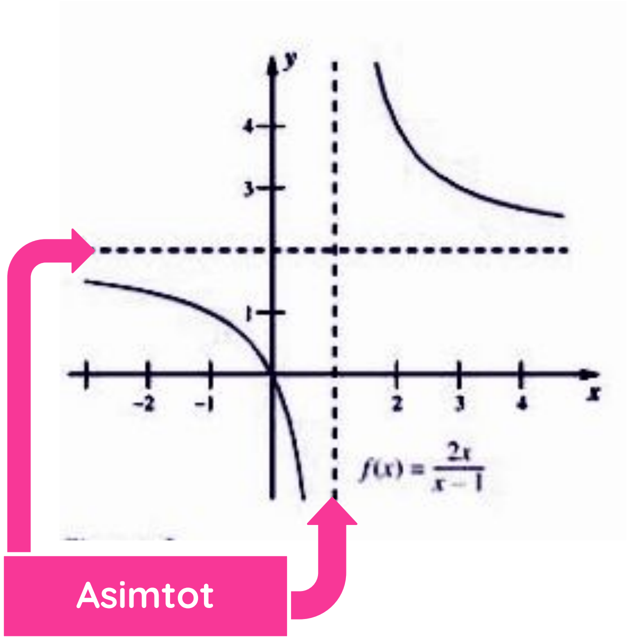
Garis x = c disebut ***asimtot tegak***, jika:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Asimtot Datar

Garis y = b disebut ***asimtot datar***, jika:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$



6. Asimtot Datar dan Tegak

Latihan Soal

Tentukan asimtot datar dan/atau tegak untuk:

1. $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

2. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

End