SOLUSI & RUBRIK PENILAIAN
PR 2
Turunan dan Aplikasinya
Semester Gasal 2023/2024

1. **[18 poin]** Diberikan sebuah fungsi $f(x) = |x^2 - 4|$. Dengan menggunakan definisi turunan $f'(x) = \lim_{h \to 0} (\frac{f(x+h)-f(x)}{h})$, tentukan:
   a. [7 poin] Tentukan apakah fungsi f terdiferensiasi pada $x = 1$ dan f kontinu pada $x = 1$
      - Turunan fungsi f pada $x = 1$

        $f'(1) = \lim_{h \to 0} (\frac{f(1+h)-f(1)}{h}) = \lim_{h \to 0} (\frac{|(1+h)^2-4|-|1^2-4|}{h})$

        $f'(1) = \lim_{h \to 0} (\frac{|h^2+2h+1-4|-|-3|}{h}) = \lim_{h \to 0} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h})$

        $\lim_{h \to 0} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h})$ ada jika $\lim_{h \to 0^+} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h})$, maka:

        (Perhatikan bahwa karena $h \to 0^+$ maka $h^2 + 2h - 3$ bernilai negatif)

        $\lim_{h \to 0^+} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h}) = \lim_{h \to 0^+} (\frac{-(h^2+2h-3)-3}{h}) = \lim_{h \to 0^+} (\frac{-h^2-2h}{h})$

        $\lim_{h \to 0^+} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h}) = \lim_{h \to 0^+} (\frac{h(-h-2)}{h}) = \lim_{h \to 0^+} (-h-2) = -2$

        $\lim_{h \to 0^-} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (\frac{-(h^2+2h-3)-3}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (\frac{-h^2-2h}{h})$

        $\lim_{h \to 0^-} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (\frac{h(-h-2)}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (-h-2) = -2$

        Karena $\lim_{h \to 0^+} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (\frac{|h^2+2h-3|-3}{h}) = -2$, maka f terdiferensiasi pada $x = 1$

      - Menentukan apakah f kontinu pada $x = 1$

        $f(1) = |1^2 - 4| = |-3| = 3$

        Karena $f(1)$terdefinisi, maka f kontinu pada $x = 1$

Keterangan	Poin
Mencari kekontinuan dengan tepat	+2
Mencari turunan dengan tepat	+5

b. [7 poin] Tentukan apakah fungsi f terdiferensiasi pada $x = 2$ dan f kontinu pada $x = 2$

- Turunan fungsi f pada $x = 2$

  $f'(2) = \lim_{h \to 0} (\frac{f(2+h)-f(2)}{h}) = \lim_{h \to 0} (\frac{|(2+h)^2-4|-|2^2-4|}{h})$

  $f'(2) = \lim_{h \to 0} (\frac{|h^2+4h+4-4|-0}{h}) = \lim_{h \to 0} (\frac{|h^2+4h|}{h})$

  $\lim_{h \to 0} (\frac{|h^2+4h|}{h})$ ada jika $\lim_{h \to 0^+} (\frac{|h^2+4h|}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (\frac{|h^2+4h|}{h})$, maka:

  (Perhatikan bahwa karena $h \to 0^+$ maka $h + 4$ bernilai positif)

  $\lim_{h \to 0^+} (\frac{|h^2+4h|}{h}) = \lim_{h \to 0^+} (\frac{|h||h+4|}{h}) = \lim_{h \to 0^+} (\frac{h|h+4|}{h}) = \lim_{h \to 0^+} (h + 4)$

  $\lim_{h \to 0^+} (h + 4) = 4$

  (Perhatikan bahwa karena $h \to 0^-$ maka $h^2 + 4h$ bernilai negatif)

  $\lim_{h \to 0^-} (\frac{|h^2+4h|}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (\frac{-(h^2+4h)}{h}) = \lim_{h \to 0^-} (\frac{-h^2-4h}{h})$

  $\lim_{h \to 0^-} (\frac{h(-h-4)}{h}) = \lim_{h \to 0^+} (-h - 4) = -4$

  Karena $\lim_{h \to 0^+} (\frac{|h^2+4h|}{h}) \neq \lim_{h \to 0^-} (\frac{|h^2+4h|}{h})$, maka f tidak terdiferensiasi pada $x = 2$

- Menentukan apakah f kontinu pada $x = 2$

  $f(2) = |2^2 - 4| = |0| = 0$

  Karena $f(2)$ terdefinisi, maka f kontinu pada 2

Keterangan	Poin
Mencari kekontinuan dengan tepat	+2

Mencari turunan dengan tepat	+5

c. [4 poin] Apa kesimpulan yang kamu dapatkan mengenai hubungan antara turunan dan kekontinuan?

Pada titik $x = 1$, f terdiferensiasi dan kontinu. Sedangkan, pada titik $x = 2$, f tidak terdiferensiasi tetapi tetap kontinu. Hal ini menunjukkan bahwa jika $f(c)$ terdiferensiasi, maka $f(c)$ kontinu. Tetapi, $f(c)$ belum tentu terdiferensiasi walaupun $f(c)$ kontinu.

Jika sudah menyatakan "Jika $f(c)$ terdiferensiasi, maka $f(c)$ kontinu", maka jawaban sudah dianggap benar.

Keterangan	Poin
Kesimpulan tepat	+4
Mencoba menjawab namun belum tepat	+2

2. **[15 poin]**Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan-persamaan berikut.

a. [9 poin] Kerjakan soal berikut hanya dengan manipulasi aljabar, turunan trigonometri, dan fungsi invers (**tanpa bantuan tabel turunan *invers***).

=> $y = tan^{-1}(e^{x^2})$

Dengan definisi invers fungsi, maka didapati:

$$e^{x^2} = tan\,(y) \text{ ...... } (1)$$

$$\frac{d}{dx}e^{x^2} = \frac{d}{dx}\,tan\,(y)$$

$$2xe^{x^2} = sec^2(y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2}}{sec^2(y)}$$

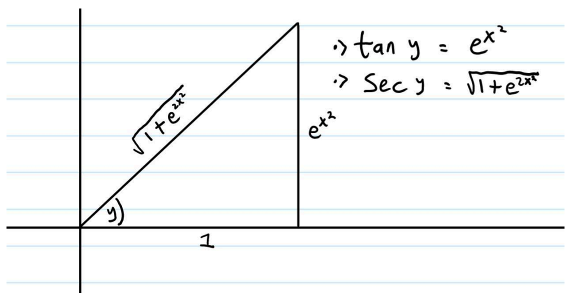
Dari persamaan (1) kita dapat mendapatkan nilai $sec^2(y)$ dari rumus pytagoras :

$$\frac{e^{x^2}}{1} = tan\,(y)$$

$$\frac{\sqrt{1 + e^{2x^2}}}{1} = sec\,(y)$$

$$1 + e^{2x^2} = sec^2\,(y)$$

Ilustrasi:



Maka didapati,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2}}{sec^2(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2}}{1 + e^{2x^2}}$$

Keterangan	**Poin**
Jika menjawab hanya sebagian atau menjawab sampai akhir tapi salah	2-5
Jika menjawab dengan cara benar tapi jawaban akhir salah	6-8
Jika menjawab benar dan sesuai kunci	9
Jika menjawab benar hanya menggunakan tabel turunan invers	1

b. [6 poin]

$$y = \frac{cot^2(2x-1)\ sec(2x-1)}{cos(2x-1)}$$

$$y = \frac{cos^2(2x-1)}{sin^2(2x-1)\ cos^2(2x-1)}$$

$$y = \frac{1}{sin^2(2x-1)}$$

$$y = cosec^2(2x-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ cosec(2x-1).(-\ cosec\ (2x-1).\ cot\ (2x-1))(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\ 4\ cosec(2x-1)\ cosec\ (2x-1)\ cot\ (2x-1)$$

Keterangan	**Poin**
Jika menjawab hanya sebagian atau menjawab sampai akhir tapi salah	2-3
Jika menjawab dengan cara benar tapi jawaban akhir salah	4-5
Jika menjawab benar dan sesuai kunci	6

3. **[20 poin]** Tentukan solusi dari persamaan-persamaan berikut menggunakan cara **implisit** dan atau **aturan rantai**.

a. [10 poin] $2\left(x^2 + y^2\right)^2 = 25\left(x^2 - y^2\right) + 2^x$. Cari nilai $\frac{dy}{dx}$ pada persamaan tersebut.

$$\frac{d}{dx}\left[2(x^2+y^2)^2\right] = \frac{d}{dx}\left[25(x^2-y^2) + 2^x\right], \quad \frac{dy}{dx} \text{ pada } (1,2)?$$

1) $$\frac{d}{dx}\left[2(x^2+y^2)^2\right] = 2.2(x^2+y^2) \cdot \frac{d}{dx}\left[(x^2+y^2)\right]$$

Power rule

$$= 4(x^2+y^2) \cdot \left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= 8x(x^2+y^2) + 8y(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}$$

2) $$\frac{d}{dx}\left[25(x^2-y^2) + 2^x\right]$$

$$= 50x - 50y\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left[2^x\right]$$

$$= 50x - 50y\frac{dy}{dx} + 2^x \ln(2)$$

$\frac{d}{dx}\left[2^x\right] \rightarrow$ misal $y = 2^x$

$\ln y = \ln 2^x$

$d = u'v + uv'$

$\frac{d}{dx}\left[\ln y\right] = \frac{d}{dx}\left[x \ln 2\right]$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(2)$

$\frac{dy}{dx} = \ln(2) \cdot 2^x$

3) $$8x(x^2+y^2) + 8y(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 50x - 50y\frac{dy}{dx} + 2^x\ln(2)$$

$$\left(8y(x^2+y^2) + 50y\right)\frac{dy}{dx} = 50x + 2^x\ln(2) - 8x(x^2+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{50x + 2^x\ln(2) - 8x(x^2+y^2)}{8y(x^2+y^2) + 50y}$$

Keterangan	Poin
Jika menjawab hanya sebagian atau menjawab sampai akhir tapi salah	2-5

Jika menjawab dengan cara benar tapi jawaban akhir salah	6-8
Jika menjawab benar dengan cara lengkap sesuai kunci	10
Jika menjawab benar tanpa cara	1

b. [10 poin] Diberi suatu persamaan implisit yaitu $2x\sin(y) + 2\cos(2y) = 1 \text{ , } 0 \leq y \leq 2\pi$. Carilah 2 persamaan garis lurus yang paralel dengan axis-y, dan merupakan garis singgung fungsi di atas. (hint : $\frac{dy}{dx} = \infty$).

Pertama, kita cari nilai $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi diatas secara implisit.

$$\frac{\mathrm{d}(2x\sin(y))}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(2\cos(2y))}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$2\sin(y) + 2x\cos(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 4\sin(2y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2\sin(y)}{4\sin(2y) - 2x\cos(y)} = \frac{\sin(y)}{2\sin(2y) - x\cos(y)}$$

Lalu, karena yang dicari merupakan persamaan garis lurus paralel dengan axis-y dan garis singgung fungsi diatas. Maka, kita perlu mencari nilai y dan x dimana $\frac{dy}{dx} = \infty$(tangen 90 derajat).

Dengan cara membuat penyebut nya yaitu 2sin(2y) - xcos(y) = 0. Dari sini kita bisa mendapatkan bentuk persamaan garis singgungnya adalah x = $\frac{1 - 2\cos(y)}{2\sin(2y)}$.

Kita faktorkan persamaan 2sin(2y) - xcos(y) = 0 untuk mendapatkan nilai titik-titiknya.

2sin(2y) - xcos(y) = 0
4sin(y)cos(y) - xcos(y) = 0
cos(y)(4sin(y)- x) = 0 , faktornya adalah cos(y) = 0 dan 4sin(y) = x

Kasus 1: x = 4sin(y). Kita bisa masukkan nilai x ke persamaan implisit awal sehingga	Kasus 2: cos(y) = 0. Dari range y yang diberi soal. Nilai y yang memungkinkan adalah

$2(4\sin(y))\sin(y) + 2\cos(2y) = 1$ $8\sin^2 y \ + 2\left(1 - 2\sin^2 y\right) \ = \ 1$ $8\sin^2 y + \ 2 \ - \ 4\sin^2 y \ = \ 1$ $4\sin^2 y \ = \ -1$ Dari kasus ini kita ada solusi karena tidak ada nilai sin kuadrat yang bernilai minus.	$\frac{\pi}{2}\ dan\ \frac{3\pi}{2}$. • y = $\frac{\pi}{2}$. x = $\frac{1 - 2\cos\left(2.\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1\ + 2}{2} = \frac{3}{2}$ • y = $\frac{3\pi}{2}$ x = $\frac{1 - 2\cos\left(2.\frac{3\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1\ + 2}{-2} = -\ \frac{3}{2}$

Sehingga didapat solusi 2 persamaan lurusnya adalah $x = \frac{3}{2}\ dan\ x\ = -\frac{3}{2}$.

Keterangan	Poin
Jika menjawab hanya sebagian atau menjawab sampai akhir tapi salah	2-5
Jika menjawab dengan cara benar tapi jawaban akhir salah	6-8
Jika menjawab benar dengan cara lengkap sesuai kunci	10
Jika menjawab benar tanpa cara	1

4. **[15 poin]** Suatu turunan fungsi orde tinggi dilambangkan dengan $f^{(n)}(x)$, di mana n menunjukkan berapa kali fungsi tersebut diturunkan. Tentukan $f^{(n)}(x)$, jika diketahui fungsi $f(x)$ sebagai berikut.

$$f(x) = e^{x}\sin(x)$$

$misalkan\ u\ = sin(x)$

$u' \ = \ cos(x)$

$u'' \ = \ -\ sin(x)$

$u''' \ = \ -\ cos(x)$

$u^{(4)} \ = sin(x)$

(pola berulang setiap kelipatan 4)

$misalkan\ v = e^x$

$v' = e^x = v$ *(pola berulang setiap kali)*

INGAT RUMUS

$(u(x) \times v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$f'(x) = u'v + uv$

$f''(x) = (u'v + uv)' = (u''v + u'v) + (u'v + uv) = 2(u'v)$ *(u''v + uv saling menghilangkan)*

$f'''(x) = 2(u'v)' = 2(u''v + u'v)$

$f^{(4)}(x) = 2(u''v + u'v)' = 2((u'''v + u''v) + (u''v + u'v)) = 2(2u''v) = -4(uv)$

(u'''v + u'v saling menghilangkan dan u'' = -u)

(pola kembali ke awal, yaitu turunan dari uv, tetapi terdapat konstanta -4)

$f^{(5)}(x) = -4\,(uv)' = -4(u'v + uv)$

$f^{(6)}(x) = -4\,(u'v + uv)' = -4(2u'v) = -8(u'v)$

$f^{(7)}(x) = -8\,(u'v)' = -8(u''v + u'v)$

$f^{(8)}(x) = -8\,(u''v + u'v)' = -8(2u''v) = 16(uv)$

(pola kembali ke awal, yaitu turunan dari uv, tetapi terdapat konstanta 16 (bisa dipecah menjadi (-4)*(-4))

.

.

.

sehingga untuk x ϵ W (W merupakan whole numbers / bilangan cacah) berlaku:

1. Jika n memenuhi n = 4x + 1, maka pola yang terbentuk adalah

$f^{(n)} = (-4)^{(\frac{n-1}{4})}(u'v + uv) = (-4)^{(\frac{n}{4})}(e^x cos(x) + e^x sin(x))$

2. Jika n memenuhi n = 4x + 2, maka pola yang terbentuk adalah

$f^{(n)} = (-1)^{\frac{n-2}{4}}(2)^{(\frac{n}{2})}(u'v) = (-1)^{\frac{n-2}{4}}(2)^{(\frac{n}{2})}(e^x cos(x))$

3. Jika n memenuhi n = 4x + 3, maka pola yang terbentuk adalah

$f^{(n)} = (-1)^{\frac{n-2}{4}}(2)^{(\frac{n}{2})}(u''v + u'v) = (-1)^{\frac{n-2}{4}}(2)^{(\frac{n}{2})}(e^x cos(x) - e^x sin(x))$

4. Jika n memenuhi n = 4x, maka pola yang terbentuk adalah

$f^{(n)} = (-4)^{(\frac{n}{4})}(uv) = (-4)^{(\frac{n}{4})}(e^x sin(x))$

(nilai 2000 dapat diabaikan karena sudah pasti kelipatan 4 sehingga dapat cek pola pada XX saja)

(contoh di atas merupakan salah satu solusi pola turunan tingkat tinggi dari f(x). Dengan pola yang berbeda, tetapi disertai dengan pemodelan yang logis dan valid akan tetap dibenarkan)

Referensi:
https://math.stackexchange.com/questions/1629155/finding-the-n-th-derivative-of-fx-ex-sinx

Keterangan	**Poin**
Menjawab asal / menuliskan jawaban akhir tanpa cara	1-2
Sudah mencoba mencari pola pada f(x) dengan melakukan iterasi tiap turunan, tetapi terdapat kesalahan dalam menurunkannya	3-9
Cara memodelkan pola sudah tepat tetapi terdapat kekeliruan dalam menyimpulkan rumus pola	10-13
Berhasil menentukan pola dengan tepat tetapi salah dalam mencari nilai turunan tingkat tinggi ke-20XX berdasarkan pola yang ditemukan	14
Berhasil menentukan pola dengan tepat dan mampu mencari nilai turunan tingkat tinggi ke-20XX berdasarkan pola yang ditemukan	15

5. **[14 poin]** Hitung nilai limit berikut dengan menerapkan **L'Hopital's Rule**
   a) [7 poin] $\lim_{x \to 0} \left(\frac{7x - tan(7x)}{3x^3}\right) = \frac{0}{0}$

   (tidak tentu sehingga dapat menggunakan aturan L'Hopital)

   $= \lim_{x \to 0} \left(\frac{7 - 7sec^2(7x)}{9x^2}\right)$

   $= \lim_{x \to 0} \left(\frac{7(1 - sec^2(7x)}{9x^2}\right)$

(ingat rumus $sec^2 x = tan^2 x + 1 \Leftrightarrow 1 - sec^2 x = -tan^2 x$*)*

$$= \frac{7}{9} \lim_{x \to 0} \left(\frac{-tan^2(7x)}{x^2}\right)$$

$$= \frac{7}{9} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{-sin^2(7x)}{cos^2(7x)}}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{7}{9} \left(\lim_{x \to 0} \left(\frac{sin(7x)}{x}\right) \times \lim_{x \to 0} \left(\frac{sin(7x)}{x}\right) \times \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{cos^2(7x)}\right)\right)$$

$$= -\frac{7}{9}\left(7 \times 7 \times \frac{1}{1}\right)$$

$$= -\frac{343}{9}$$

Keterangan	Poin
Jawab dengan asal	1
Tidak menerapkan aturan L'Hopital	2
Menerapkan aturan L'Hopital dengan tepat, namun terdapat perhitungan yang salah	3-6
Menerapkan aturan L'Hopital dengan tepat dan hasil akhir benar	7

b) [7 poin] $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x + ln(\sqrt{x^2+1} - x)}{2x^3}\right) = \frac{0}{0}$

(tidak tentu sehingga dapat menggunakan aturan L'Hopital)

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x}}{6x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x}}{6x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \frac{\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1} - x}}{6x^2}\right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1} - x)}}{6x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \frac{-1}{(\sqrt{x^2+1})}}{6x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{6x^2}\right) = \frac{0}{0}$$

*(**masih** tidak tentu sehingga dapat menggunakan **lagi** aturan L'Hopital)*

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{0 - \left(\frac{-1}{2}\right)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(2x)}{12x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}}{12x}\right) = \frac{0}{0}$$

*(**masih** tidak tentu sehingga dapat menggunakan **lagi** aturan L'Hopital)*

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 \times (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} + x \times (\frac{-3}{2})(x^2+1)^{\frac{-5}{3}}(2x)}{12} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} + (-3x^2)(x^2+1)^{\frac{-5}{3}}}{12} = \frac{1}{12}$$

Keterangan	**Poin**
Jawab dengan asal	1
Tidak menerapkan aturan L'Hopital / menerapkannya dengan salah	2
Menerapkan aturan L'Hopital dengan tepat, namun terdapat perhitungan yang salah	3-6
Menerapkan aturan L'Hopital dengan tepat dan hasil akhir benar	7

6. **[18 poin]**
   a. [10 poin] Pertama-tama, tentukan nilai p = f(x) yang dapat menyatakan *demand equation* untuk toko tersebut. Karena diasumsikan bahwa *demand equation* toko tersebut bersifat linear, maka kita dapat mencari gradien nya terlebih dahulu. Ketika porsi yang terjual sebanyak 170, harga ayam per porsinya adalah 10 mora (170, 10). Ketika porsi yang terjual adalah 168, harga ayam per porsi adalah 16 mora (168, 16). Maka nilai gradien (m) = $\frac{16 - 10}{168 - 170} = -3$

   Maka, p = -3x + c

   Masukkan salah satu titik diatas untuk mendapat nilai c, misal (170, 10)

$$10 = -3 . 170 + c$$
$$c = 520$$

   Maka p = -3x + 520

   Maka nilai pendapatan (*Revenue*) dapat dinyatakan dalam:

   $R(x) = x\,p$

   $R(x) = x(-3x + 520)$

   $R(x) = -3x^2 + 520x$

   $P(x) = R(x) - C(x)$

   $P(x) =- 3x^2 + 520x - (75 + 80x - x^2)$

   $P(x) = -2x^2 + 440x - 75$

   Profit maksimum saat P'(x) = 0

$P'(x) = -4x + 440$
$-4x + 440 = 0$
x = 110
Maka profit akan maksimum ketika yang terjual adalah 110 porsi.
Masukkan ke *p* untuk menentukan harga setiap porsinya ketika yang terjual sebanyak 110 porsi.
$p = -3 . 110 + 520$
$p = 190$

Maka untuk mendapat keuntungan maksimum, dapat dilakukan dengan menjual 110 porsi ayam geprek dengan harga per porsi nya adalah 190 mora

Keterangan	Poin
Berhasil mencari p	3
Berhasil mencari R(x) dan P(x)	5
Berhasil menjawab dengan benar	10

b. [8 poin] Karena ada tambahan pajak sebesar 40 untuk setiap porsi, maka C(x) akan bertambah menjadi
$C(x) = 75 + 80x - x^2 + 40x$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$P(x) = -3x^2 + 520x - (75 + 80x - x^2 + 40x)$$
$$P(x) = -2x^2 + 400x - 75$$

Agar keuntungan tetap maksimum, P'(x) harus tetap sama dengan 0

$P'(x) = -4x + 400$
$0 = -4x + 400$
x = 100 porsi
Masukkan ke *p* untuk menentukan harga setiap porsinya ketika yang terjual sebanyak 100 porsi.
$p = -3 . 100 + 520$
$p = 220$

Keterangan	Poin
Berhasil mencari nilai C(x) yang baru	2
Berhasil mencari R(x) dan P(x) yang baru	4
Menjawab dengan lengkap dan benar	8

7. **[BONUS (10 poin)]** Persoalan berikut bersifat bonus, sehingga apabila anda tidak mengerjakan maka tidak akan mempengaruhi nilai PR anda. Anggap soal berikut sebagai pengayaan.

   Selesaikan persoalan turunan berikut:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\left(\sin x + x^{x^2}\right)^{\ln^2 x}}{\sqrt[\pi]{e^x + \sqrt{\tan^3 x \sec x}}}\right)$$

   Jawaban:

   Kita dapat memecah fungsi tersebut menjadi fungsi-fungsi kecil, dan mencari turunan dari masing-masingnya sbb.

$a(x) = \sin x \to a'(x) = \cos x$

$b(x) = x \to b'(x) = 1$

$c(x) = x^2 \to c'(x) = 2x$

$d(x) = \ln^2 x \to d'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$

$e(x) = e^x \to e'(x) = e^x$

$f(x) = \tan^3 x \to f'(x) = 3\tan^2 x \sec^2 x$

$g(x) = \sec x \to g'(x) = \sec x \tan x$

   Oke, selanjutnya kita akan mencari turunan dari operasi-operasi turunan yang ada pada soal, kita mulai dari $h(x) = (b(x))^{c(x)}$.

$h(x) = x^{x^2}$

   Untuk problem ini, kita dapat mengakalinya dengan sifat natural logarithm/euler, di mana $a^b = e^{b\ln(a)}$.

$$\begin{aligned} e^{\ln(h(x))} &= e^{\ln x^{x^2}} \\ &= e^{x^2 \ln x} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita cari $\frac{d}{dx}$ nya, ingat bahwa $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}h(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^2 \ln x\right)e^{x^2 \ln x} \\ &= \left(2x\ln x + \frac{x^2}{x}\right)e^{x^2 \ln x} \\ &= x^{x^2}(2x\ln x + x) \end{aligned}$$

Dengan metode yang sama, kita bisa mencari turunan dari $i(x) = (a(x) + h(x))^{d(x)}$.

$$\begin{aligned} e^{\ln(i(x))} &= e^{\ln\left(\sin x + x^{x^2}\right)^{\ln^2 x}} \\ &= e^{\ln^2 x \ln\left(\sin x + x^{x^2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}i(x) &= \frac{d}{dx}\left(\ln^2 x \ln\left(\sin x + x^{x^2}\right)\right)e^{\ln^2 x \ln\left(\sin x + x^{x^2}\right)} \\ &= \left(\frac{2\ln x \ln\left(\sin x + x^{x^2}\right)}{x} + \frac{\left(\cos x + x^{x^2}(2x\ln x + x)\right)\ln^2 x}{\sin x + x^{x^2}}\right)e^{\ln^2 x \ln\left(\sin x + x^{x^2}\right)} \\ &= \left(\frac{2\ln x \ln\left(\sin x + x^{x^2}\right)}{x} + \frac{\left(\cos x + x^{x^2}(2x\ln x + x)\right)\ln^2 x}{\sin x + x^{x^2}}\right)\left(\sin x + x^{x^2}\right)^{\ln^2 x} \end{aligned}$$

Bagian pembilang sudah selesai, kita akan lanjut ke bagian penyebut. Kita mulai dari $j(x) = \sqrt{f(x)g(x)}$.

$$j(x) = \sqrt{\tan^3 x \sec x}$$

$$
\begin{aligned}
j'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}\left(\tan^3 x \sec x\right)}{2\sqrt{\tan^3 x \sec x}} \\
&= \frac{3\tan^2 x \sec^3 x + \sec x \tan^4 x}{2\sqrt{\tan^3 x \sec x}} \\
&= \frac{\left(3\sec^2 x + \tan^2 x\right)\sec x \tan^2 x}{2\sqrt{\tan^3 x \sec x}} \cdot \frac{\sqrt{\tan^3 x \sec x}}{\sqrt{\tan^3 x \sec x}} \\
&= \frac{\left(3\sec^2 x + \tan^2 x\right)\sec x \tan^2 x\sqrt{\tan^3 x \sec x}}{2\tan^3 x \sec x} \\
&= \frac{\left(3\sec^2 x + \tan^2 x\right)\sec x \tan^3 x\sqrt{\tan x \sec x}}{2\tan^3 x \sec x} \\
&= \frac{\left(3\sec^2 x + \tan^2 x\right)\sqrt{\tan x \sec x}}{2}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, kita akan mencari turunan full dari penyebut, di mana $k(x) = \sqrt[\pi]{e(x)+j(x)}$.

$$k(x) = \sqrt[\pi]{e^x+\sqrt{\tan^3 x \sec x}} = \left(e^x + \sqrt{\tan^3 x \sec x}\right)^{\frac{1}{\pi}}$$

$$
\begin{aligned}
k'(x) &= \frac{\left(e^x + \sqrt{\tan^3 x \sec x}\right)^{\frac{1-\pi}{\pi}}}{\pi} \frac{d}{dx}\left(e^x + \sqrt{\tan^3 x \sec x}\right) \\
&= \frac{\left(e^x + \sqrt{\tan^3 x \sec x}\right)^{\frac{1-\pi}{\pi}}}{\pi}\left(e^x + \frac{\left(3\sec^2 x + \tan^2 x\right)\sqrt{\tan x \sec x}}{2}\right) \\
&= \frac{\left(2e^x + \left(3\sec^2 x + \tan^2 x\right)\sqrt{\tan x \sec x}\right)\left(e^x + \sqrt{\tan^3 x \sec x}\right)^{\frac{1-\pi}{\pi}}}{2\pi}
\end{aligned}
$$

Terakhir, selesaikan turunan dari $l(x) = \frac{i(x)}{k(x)}$. Ingat bahwa $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$.

$$l(x) = \frac{\left(\sin x + x^{x^2}\right)^{\ln^2 x}}{\sqrt[\pi]{e^x+\sqrt{\tan^3 x \sec x}}}$$

Dengan mensubstitusikan

$$i'(x) = \left(\frac{2\ln x \ln\left(\sin x + x^{x^2}\right)}{x} + \frac{\left(\cos x + x^{x^2}(2x\ln x + x)\ln^2 x\right)}{\sin x + x^{x^2}}\right)\left(\sin x + x^{x^2}\right)^{\ln^2 x}$$

dan

$$k'(x) = \frac{\left(2e^x + \left(3\sec^2 x + \tan^2 x\right)\sqrt{\tan x \sec x}\right)\left(e^x + \sqrt{\tan^3 x \sec x}\right)^{\frac{1-\pi}{\pi}}}{2\pi},$$

maka akan didapatkan:

$$l'(x) = \frac{i'(x)\left(\sqrt[\pi]{e^x+\sqrt{\tan^3 x \sec x}}\right) - \left(\sin x + x^{x^2}\right)^{\ln^2 x} k'(x)}{\left(e^x + \sqrt{\tan^3 x \sec x}\right)^{\frac{2}{\pi}}}$$

Keterangan	**Poin**
Hanya menulis soal	0
Turunan fungsi-fungsi kecil benar/teknik pengerjaan dinilai sesuai	1-5
Menemukan nilai $h'(x)$, $i'(x)$, $j'(x)$ dan/atau $k'(x)$ dengan benar	+1 per fungsi (1-4, akumulasi dengan poin di atas)
Jawaban akhir benar	10