Nama:____ NPM:___________ Kelas:__

Contoh Solusi Kuis 2 Kalkulus 1 (8 November 2023)
Materi: Integral Tak Tentu dan Teknik Pengintegralan

Petunjuk Pengerjaan:

- Waktu pengerjaan: 50 menit
- Kuis ini bersifat individu dan tidak menggunakan media bantu apapun (catatan, slide, alat bantu hitung, dan sebagainya).
- Tuliskan jawaban pada ruang yang telah disediakan pada soal. Anda dapat menggunakan ruang kosong yang tersisa pada lembar soal jika ruang yang disediakan tidak cukup.
- Jawaban harus disertai dengan cara atau penjelasan yang mendukung. Jawaban yang tidak disertai dengan cara atau penjelasan tidak akan dinilai.

---

1. **(20 poin)** Didefinisikan

$$f(x) = \sqrt{x}\sin^2(x)$$

dan

$$g(x) = \frac{\sin^2(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\sin(2x) + \pi$$

Contoh solusi :

Apakah fungsi f adalah **anti turunan** dari fungsi g ? Jelaskan jawaban Anda.

TIPS:
$2\,\sin(x)\,\cos(x) = \sin(2x)$

f dikatakan anti turunan dari g jika $f'(x) = g(x)$. Karena

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin^2(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,2\sin(x)\cos(x) \\ &= \frac{\sin^2(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\sin(2x) \\ &\neq \frac{\sin^2(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\sin(2x) + \pi = g(x) \end{aligned}$$

maka f bukan anti turunan dari fungsi g.

2. **(20 poin)** Tentukan:

$$\int \frac{\tan^2 (\ln(x))}{x} dx$$

Contoh solusi :

Misalkan $u = \ln(x)$ sehingga $du = 1/x\, dx$, maka

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^2 (\ln(x))}{x} dx &= \int \tan^2 (u) du \\
&= \int \left(\sec^2 (u) - 1\right) du \\
&= \int \sec^2 (u) du - \int 1\, du \\
&= \tan(u) - u + C \\
&= \tan(\ln(x)) - \ln(x) + C
\end{aligned}$$

3. **(20 poin)** Tentukan

$$\int x e^{x^2} \cos\left(x^2\right) dx$$

Contoh solusi :

Misalkan $w = x^2$ sehingga $dw = 2x\, dx$, maka

$$\int x e^{x^2} \cos\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2} \int e^w \cos(w)\, dw$$

Terapkan teknik pengintegralan parsial dengan

$$\begin{array}{ll} u = e^w & dv = \cos(w)\, dw \\ du = e^w dw & v = \sin(w) \end{array}$$

sehingga persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\cos\left(x^2\right)dx &= \frac{1}{2}\int e^w\cos(w)\,dw\\ &= \frac{1}{2}\left(e^w\sin(w)-\int e^w\sin(w)\,dw\right)\\ &= \frac{1}{2}e^w\sin(w)-\frac{1}{2}\int e^w\sin(w)\,dw\end{aligned}$$

Terapkan teknik pengintegralan parsial kembali dengan

$$\begin{aligned} u &= e^w & dv &= \sin(w)\,dw\\ du &= e^w dw & v &= -\cos(w)\end{aligned}$$

sehingga persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\cos\left(x^2\right)dx &= \frac{1}{2}\int e^w\cos(w)\,dw\\ &= \frac{1}{2}\left(e^w\sin(w)-\int e^w\sin(w)\,dw\right)+C\\ &= \frac{1}{2}e^w\sin(w)-\frac{1}{2}\int e^w\sin(w)\,dw+C\\ &= \frac{1}{2}e^w\sin(w)-\frac{1}{2}\left(-e^w\cos(w)+\int e^w\cos(w)\,dw\right)+C\\ &= \frac{1}{2}e^w\sin(w)+\frac{1}{2}e^w\cos(w)-\frac{1}{2}\int e^w\cos(w)\,dw+C\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2}\sin\left(x^2\right)+\frac{1}{2}e^{x^2}\cos\left(x^2\right)-\int xe^{x^2}\cos\left(x^2\right)dw+C\end{aligned}$$

Dari bentuk terakhir persamaan di atas diperoleh

$$\int xe^{x^2}\cos\left(x^2\right)dx = \frac{1}{4}e^{x^2}\sin\left(x^2\right)+\frac{1}{4}e^{x^2}\cos\left(x^2\right)+C$$

4. **(20 poin)** Tentukan

$$\int \sin(x)\cos(x)\sqrt[3]{\sin^2(x)}\,dx$$

Contoh solusi :

Misalkan $u = \sin^2(x)$ sehingga $du = 2\sin(x)\cos(x)\,dx$, maka

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)\sqrt[3]{\sin^2(x)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}\,du \\ &= \frac{1}{2}\int u^{1/3}\,du \\ &= \frac{3}{8}u^{4/3} + C \\ &= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\sin^8(x)} + C\end{aligned}$$

5. **(20 poin)** Tentukan

$$\int \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} dx$$

Contoh solusi :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} dx &= \int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{-(x^2 - 4x + 3)}} dx \\ &= \int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{-(x^2 - 4x + 4 - 1)}} dx \\ &= \int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} dx\end{aligned}$$

Substitusikan $x - 2 = \sin(\theta)$ sehingga $dx = \cos(\theta)\, d\theta$, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} dx &= \int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{-(x^2 - 4x + 3)}} dx \\ &= \int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{-(x^2 - 4x + 4 - 1)}} dx \\ &= \int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} dx \\ &= \int \frac{\sin^2(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\ &= \int \sin^2(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \int \frac{1}{2} d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(2\theta)}{4} + C \\ &= \frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\arcsin(x-2) - \frac{(x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}}{2} + C\end{aligned}$$

Standard Integral Forms

1. $\int k\,du = ku + C$
2. $\int u^r\,du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln|u| + C & r = -1 \end{cases}$
3. $\int e^u\,du = e^u + C$
4. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
11. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
12. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

Pythagorean identities

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Double-angle identities

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$