Nama:____ NPM:___________ Kelas:__

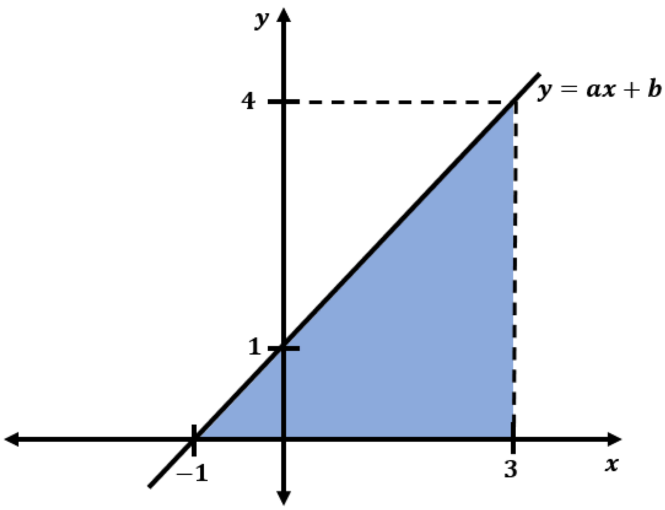
Contoh Solusi Kuis 3 Kalkulus 1 (6 Desember 2023)
Materi: Integral Tentu dan Aplikasi Integral

Petunjuk Pengerjaan:

- Waktu pengerjaan: 60 menit
- Kuis ini bersifat individu dan tidak menggunakan media bantu apapun (catatan, slide, alat bantu hitung, dan sebagainya).
- Tuliskan jawaban pada ruang yang telah disediakan pada soal. Anda dapat menggunakan ruang kosong yang tersisa pada lembar soal jika ruang yang disediakan tidak cukup.
- Jawaban harus disertai dengan cara atau penjelasan yang mendukung. Jawaban yang tidak disertai dengan cara atau penjelasan tidak akan dinilai.

---

1. **(20 poin)** Tentukanlah luas daerah berbentuk segitiga di bawah ini dengan menggunakan definisi integral tentu (jumlah Riemann).



Contoh Solusi:

- Garis yang melalui titik (0,1) dan (-1,0) adalah garis $y = x + 1$
- Misalkan area segitiga akan dibagi ke dalam partisi berisi n buah sub area dengan lebar setiap sub area sama, sebesar $\Delta x_i = 4/n$ dengan $i = 1, 2, 3,... n$.
- Misalkan diambil sample point $(\overline{x}_i)$ berupa right end poin (riemann kanan), sehingga $\overline{x}_i = x_i = \frac{4i}{n} - 1$.
- Dengan demikian jumlahan riemann dapat didefinisikan sebagai:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\tfrac{4i}{n} - 1)\tfrac{4}{n}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{4i}{n})\tfrac{4}{n}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{16i}{n^2})$$
$$= \frac{16}{n^2}(\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{8n+8}{n}$$

- Luas area segitiga jika dihitung menggunakan integral riemann diperoleh sebagai berikut:

$$Luas = \int_{-1}^{3} x\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n+8}{n}\right) = 8$$ satuan luas (dengan menggunakan L'Hopital)

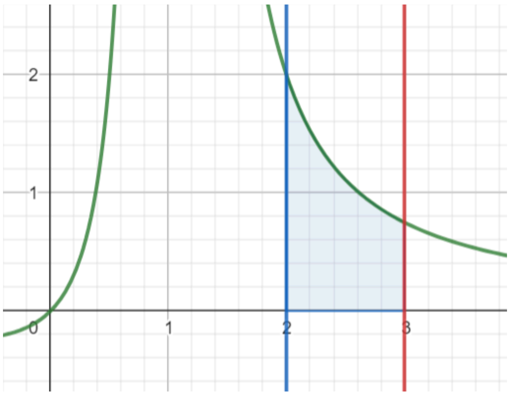
2. Misalkan D adalah daerah yang dibatasi oleh

$$x = 2; \quad x = 3; \quad y = 0; \quad y = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$$

   a. **(5 poin)** Gambarkan daerah D
   b. **(15 poin)** Tentukanlah luas daerah D tersebut.

Contoh Solusi:

a. Gambar daerah D:



b. Luas daerah D, misalnya dinyatakan dalam $A(D)$

$$A(D) = \int_2^3 \frac{x}{x^2-2x+1} dx = \int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx$$

Dekomposisi parsial untuk memecah $\frac{x}{(x-1)^2}$:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$x = A(x - 1) + B$$

$$x = Ax + (- A + B)$$

$$A = 1,\ B = 1$$

Sehingga kembali ke bentuk integral:

$$\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

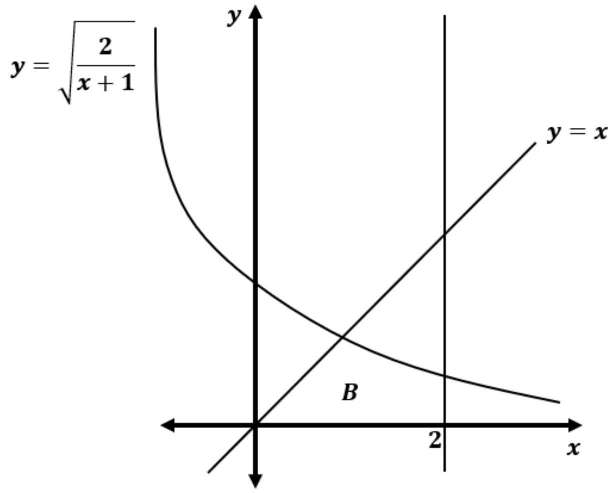
$= [ln\,|x - 1|]_2^3 + [\frac{-1}{x-1}]_2^3 = ln\,2 + \frac{1}{2}$ satuan luas

Nama:____ NPM:___________ Kelas:__

3. **(20 poin)** Misalkan B adalah daerah yang dibatasi oleh

$$x = 2; \;\; y = 0; \;\; y = \sqrt{\frac{2}{x+1}}; \;\; y = x$$

Tentukanlah volume benda putar yang terbentuk apabila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu x.



Contoh Solusi:

Dimisalkan P adalah titik potong kurva $y = x$ dengan kurva $y = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$ yaitu:

$$x = \sqrt{\frac{2}{x+1}} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

Titik potong di $x = 1$

Menggunakan metode cakram, akan dihitung volume bangun putar yang terbentuk pada rentang 0 hingga 1 (misalkan V_1) ditambah dengan volume bangun putar yang terbentuk pada rentang 1 hingga 2 (misalkan V_2).

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 \\
&= \int_0^1 \pi(x)^2 dx + \int_1^2 \pi\left(\sqrt{\frac{2}{x+1}}\right)^2 dx \\
&= \pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \int_1^2 \pi\left(\frac{2}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\pi + 2\pi\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\pi + 2\pi[ln|x+1|]_1^2 \\
&= \frac{1}{3}\pi + 2\pi\left(ln\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{3} + ln\frac{9}{4}\right)\pi \text{ satuan volume}
\end{aligned}$$

4. **(20 poin)** Tentukan panjang kurva yang diberikan oleh persamaan parametrik berikut

$$x = t - \sin(t); \quad y = 1 - \cos(t); \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$$

Contoh Solusi:

Diketahui $\frac{dx}{dt} = 1 - cos\, t$, sedangkan $\frac{dy}{dx} = sin\, t$

Misalkan dS adalah panjang antara dua titik pada kurva yang diberikan, maka:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \sqrt{(1 - cos\, t)^2 + (sin\, t)^2} dt$$

$$= \sqrt{1 - 2cos\, t + cos^2 t + sin^2 t}\, dt$$

$$= \sqrt{2 - 2cos\, t}\, dt$$

Sehingga panjang kurvanya dirumuskan sebagai berikut:

$$S = \int_{\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2 - 2cos\, t}\, dt$$

$$= \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1 - cos\, t}\, dt$$

$= \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2}\, sin\, \frac{t}{2}\, dt$ (Half angle formula: $sin\, \frac{t}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - cos\, t}{2}}$)

$$= 2 \int_{\pi/2}^{2\pi} sin\, \frac{t}{2}\, dt = 2 \int_{\pi/2}^{2\pi} sin\, \frac{t}{2}\, (2\, d\frac{t}{2}) = 4 \int_{\pi/2}^{2\pi} sin\, \frac{t}{2}\, (d\frac{t}{2}) = 4\left([- cos\, \frac{t}{2}]_{\pi/2}^{2\pi}\right)$$

$= 4(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ satuan panjang

5. **(20 poin)** Hitunglah luas permukaan benda putar yang terbentuk apabila kurva

$$y = \sqrt{1-x}$$

diputar mengelilingi sumbu x pada interval $0 \leq x \leq 1/4$.

Contoh Solusi:

Misalnya dA adalah luas potongan kulit bangun ruang dengan lebar Δx dan panjang sama dengan keliling lingkaran.

- $\Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{d\sqrt{1-x}}{dx}\right)^2} dx$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4(1-x)}} dx = \sqrt{\frac{5-4x}{4(1-x)}} dx$$

- Karena bangun ruang diputar mengelilingi sumbu x, maka jari-jari lingkaran atau r sama dengan jarak dari sumbu x ke kurva y. Sehingga keliling lingkaran adalah $2\pi\sqrt{1-x}$

Sehingga luas permukaan benda putar sebagaimana dibatasi oleh kurva-kurva di atas adalah:

$$A = \int_0^{1/4} 2\pi\sqrt{1-x} \cdot \Delta x = 2\pi \int_0^{1/4} \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{\frac{5-4x}{4(1-x)}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{1/4} \sqrt{\frac{5-4x}{4}} dx = \pi \int_0^{1/4} \sqrt{5-4x}\, dx$$

Dengan substitusi sederhana:

$$\pi \int_0^{1/4} \sqrt{5-4x}\, dx = \pi \int_0^{1/4} \sqrt{5-4x} \left(-\frac{1}{4} d(5-4x)\right) = -\frac{1}{4}\pi \int_0^{1/4} \sqrt{5-4x}\, d(5-4x)$$

$$= -\frac{1}{4}\pi\left[\frac{1}{2\sqrt{5-4x}}\right]_0^{1/4} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{8\sqrt{5}} - \frac{1}{8} \text{ satuan luas}$$

Standard Integral Forms

1. $\int k\,du = ku + C$

2. $\int u^r\,du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln|u| + C & r = -1 \end{cases}$

3. $\int e^u\,du = e^u + C$

4. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

Pythagorean identities

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Double-angle identities

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$