SOLUSI & RUBRIK PENILAIAN
PR 1
Sistem Bilangan, Limit, dan Kontinuitas
Semester Gasal 2023/2024

1. a. **[5 poin]** Diberikan $k = \frac{2x^2 + 3x}{2x-3}$, carilah interval di mana log(1-$|k|$) terdefinisi !

Supaya suatu logaritma terdefinisi, terdapat ketentuan numerusnya harus lebih dari nol. Maka syarat yang harus dipenuhi adalah $1 - |k| > 0$ atau dengan kata lain $|k| < 1$

$\left|\frac{2x^2 + 3x}{2x-3}\right| < 1$

$|2x^2 + 3x| < |2x - 3|$

$(|2x^2 + 3x|)^2 < (|2x - 3|)^2$
$(|2x^2 + 3x|)^2 - (|2x - 3|)^2 < 0$

Gunakan sifat $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$((2x^2 + 3x) + (2x - 3))((2x^2 + 3x) - (2x - 3)) < 0$
$(2x^2 + 5x - 3)(2x^2 + x + 3) < 0$

Perhatikan bahwa $2x^2 + x + 3$ merupakan *definit positif* karena memiliki $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$ dan a = 2 > 0
Oleh sebab itu, $(2x^2 + x + 3)$ bisa diabaikan karena tidak menyebabkan ruas kiri bernilai < 0

$2x^2 + 5x - 3 < 0$
$(2x - 1)(x + 3) < 0$
Maka batas-batas intervalnya $\frac{1}{2}$ dan -3
Kemudian dengan melakukan uji tanda, diperoleh himpunan penyelesaiannya $\{x| -3 < x < \frac{1}{2}\}$

Kesimpulannya, $\log_{(1 - |k|)}$ akan terdefinisi pada interval $-3 < x < \frac{1}{2}$

Keterangan	**Poin**
Hanya memberi jawaban langsung dan	1

benar, tetapi tidak pakai cara	
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	2-4
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara	5

b. **[5 poin]** Tentukan nilai a jika diketahui himpunan penyelesaian dari $\left|\frac{ax^2 - ax}{x^2}\right| \geq 2$ adalah $\{ x \mid x \leq \frac{3}{5}\ atau\ x \geq 3,\ x \neq 0 \}$

$\left|\frac{ax^2-ax}{x^2}\right| \geq 2$ dapat disederhanakan menjadi

$\left|\frac{ax - a}{x}\right| \geq 2$

Ingat bahwa $|x| \geq a$ ekuivalen dengan $x \leq -a$ atau $x \geq a$, maka

$$\left|\frac{ax - a}{x}\right| \geq 2$$

ekuivalen dengan $\frac{ax-a}{x} \leq -2$ atau $\frac{ax-a}{x} \geq 2$

- $\frac{ax-a}{x} \leq -2$

  $\frac{ax-a}{x} + 2 \leq 0$

  $\frac{ax-a+2x}{x} \leq 0$

  $\frac{(a+2)x - a}{x} \leq 0$

  Batas-batasnya:
  - $x \neq 0$
  - (a+2)x - a = 0

    (a+2)x = a

    x = $\frac{a}{a+2}$

- $\frac{ax-a}{x} \geq 2$

  $\frac{ax-a}{x} - 2 \geq 0$

  $\frac{ax-a-2x}{x} \geq 0$

  $\frac{(a-2)x - a}{x} \geq 0$

  Batas-batasnya:
  - $x \neq 0$
  - (a-2)x - a = 0

    (a-2)x = a

$x = \frac{a}{a-2}$

Dari himpunan penyelesaian pada soal, kita tahu bahwa batas interval himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak tersebut adalah $x = \frac{3}{5}$ atau $x = 3$

Maka kita bisa memasangkan:

- $\frac{3}{5} = \frac{a}{a+2}$ dan $\frac{3}{1} = \frac{a}{a-2}$, diperoleh a = 3
- $\frac{3}{5} = \frac{a}{a-2}$ dan $\frac{3}{1} = \frac{a}{a+2}$, diperoleh a = -3

Sehingga kita peroleh *nilai a = 3* atau *a = -3*

Cara alternatif

Untuk menyelesaikan soal ini, kita tidak perlu terlalu memusingkan tanda pertidaksamaannya karena informasi yang kita butuhkan dari himpunan penyelesaian yang diberikan hanyalah batas intervalnya.

Anggaplah seperti menyelesaikan persamaan nilai mutlak.

$$\left|\frac{ax^2 - ax}{x^2}\right| = 2$$

$$\left|\frac{ax - a}{x}\right| = 2$$

$$|ax - a| = 2|x|$$

$$(ax-a)^2 = (2x)^2$$

$$(ax-a)^2 - (2x)^2 = 0$$

Gunakan sifat $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$((ax-a)+2x)((ax-a)-2x) = 0$$

$$((a+2)x - a)((a-2)x - a) = 0$$

- $(a+2)x - a = 0$
  $(a+2)x = a$
  $x = \frac{a}{a+2}$

- $(a-2)x - a = 0$
  $(a-2)x = a$
  $x = \frac{a}{a-2}$

Dari himpunan penyelesaian pada soal, kita tahu bahwa solusi persamaan nilai mutlak tersebut adalah $x = \frac{3}{5}$ atau $x = 3$

Maka kita bisa memasangkan:

- $\frac{3}{5} = \frac{a}{a+2}$ dan $\frac{3}{1} = \frac{a}{a-2}$, diperoleh a = 3

- $\frac{3}{5} = \frac{a}{a-2}$ dan $\frac{3}{1} = \frac{a}{a+2}$, diperoleh a = -3

Sehingga kita peroleh *nilai a = 3* atau *a = -3*

Keterangan	Poin
Hanya memberi jawaban langsung dan benar, tetapi tidak pakai cara	1
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	2-4
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara	5

2. **[15 poin]** Diketahui dua fungsi yaitu $g(x) = \frac{5x}{x+1}$ dan $f^{-1}(\frac{1}{x-1}) = x - 6$.

   Selain itu, diketahui juga $(go\ h)(x) = x^2 - 4$.y

   a. [10 poin] Tentukan fungsi komposisi $(h\ o\ f)(x)$!

   Pertama, kita perlu mencari fungsi $f(x)$ dan $h(x)$. Untuk mencari fungsi $f(x)$ kita dapat melakukan invers pada fungsi $f^{-1}(x)$.

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) = x - 6$$

misal u $= \frac{1}{x-1}$, maka $x = \frac{1+u}{u}$

$$f^{-1}(u) = \frac{1+u}{u} - 6 = \frac{1+u-6u}{u} = \frac{1-5u}{u}$$

bisa kita tuliskan lagi dalam bentuk variabel x

$$f^{-1}(x) = \frac{1-5x}{x}$$

mencari $f(x)$ dengan melakukan invers pada $f^{-1}(x)$

misal $f^{-1}(x) = y$, maka

$y = \frac{1-5x}{x}$, maka $yx = 1 - 5x$ sehingga $x = \frac{1}{y+5}$

sehingga didapat

$$f(x) = \frac{1}{x+5}$$

Setelah itu kita dapat mencari $h(x)$

$(g\,o\,h)(x) = g(h(x)) = x^2 - 4$

$$\frac{5\,h(x)}{h(x) + 1} = x^2 - 4 \rightarrow 5h(x) = x^2h(x) - 4h(x) + x^2 - 4$$

didapat

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{9 - x^2}$$

setelah mendapatkan $f(x)$ dan $h(x)$ kita dapat mencari fungsi komposisinya

$$(h\,o\,f)(x) = h(f(x)) = \frac{\frac{1}{(x+5)^2} - 4}{9 - \frac{1}{(x+5)^2}} = \frac{1 - 4(x+5)^2}{9(x+5)^2 - 1}$$

Keterangan	Poin
Menjawab tapi salah / Hanya jawabannya langsung dan benar, tetapi tidak pakai cara	2
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	5-8
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara	10

b. [5 poin] Jelaskanlah apakah fungsi $(h\ o\ f)(x)$ dan $(g\ o\ h\ )(x)$ merupakan fungsi ganjil, genap atau bukan keduanya!
Untuk fungsi $(h\ o\ f)(x)$, fungsinya bukanlah fungsi ganjil ataupun genap. Karena tidak memenuhi syarat fungsi ganjil ataupun genap dimana
$(h\ o\ f)(-\ x) \neq (h\ o\ f)(x) \neq -\ (h\ o\ f)(x)$.

Untuk fungsi $(g\ o\ h\ )(x)$, fungsinya merupakan fungsi genap karena memenuhi syarat fungsi genap dimana
$(g\ o\ h)(-\ x) = (g\ o\ h)(x)$.

Keterangan	Poin
Menjawab dengan salah	0
Menjawab benar sebagian atau tidak memberikan alasan	1-4

Menjawab benar dan memberikan alasan	5

3. **[10 poin]** Buktikan limit berikut dengan menggunakan definisi epsilon-delta dari limit.

$$\lim_{x \to 2} x^2 - 7x + 3 = -7$$

Di dalam proses penulisan pembuktian formal limit, terdapat 2 langkah umum yang harus dilakukan:

1. Analisis pendahuluan
   Pada tahap ini, kita akan menentukan nilai δ sedemikian sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga:
   $$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$
   dengan cara mengambil nilai δ dari ϵ yang merupakan hasil penyederhanaan $|f(x) - L| < \epsilon$ sehingga nilai δ yang nantinya kita akan gunakan untuk membuktikan pernyataan
   $$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$
   secara formal.
2. Bukti formal
   Pada tahap ini, kita akan membuktikan secara formal pernyataan
   $$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$
   menggunakan δ yang didapat dari analisis pendahuluan yang telah kita lakukan. Dengan melakukan manipulasi aljabar, kita dapat menunjukkan bahwa pernyataan
   $$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$
   bernilai benar.

Pertama-tama, kita akan menjalankan analisis pendahuluan untuk mendapatkan nilai dari δ dengan membawa bentuk $|f(x) - L| < \epsilon$ menjadi bentuk $|x - a| < \delta$. Diketahui

$$\lim_{x \to 2} x^2 - 7x + 3 = -7\,,\ dimana\, a\ =\ 2,\ f(x) = x^2 - 7x + 3,\ dan\, L = -7$$

Dijalankan manipulasi aljabar untuk mendapatkan δ dari ϵ:

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &< \epsilon \\ = \left|x^2 - 7x + 3 - (-7)\right| &< \epsilon \\ = \left|x^2 - 7x + 10\right| &< \epsilon \\ = |x - 5||x - 2| &< \epsilon \end{aligned}$$

Untuk mencari δ pada sebuah persamaan kuadrat, pilih $\delta \leq 1$ sehingga kita dapat mempertahankan bentuk $|x - 2|$ dan mengubah $|x - 5|$ menjadi suatu konstanta. Jika kita memilih $\delta \leq 1$, didapat bahwa jika $|x - 2| < \delta$ maka $1 < x < 3$. Lalu, kita dapat memilih antara 1 atau 3 dan mengecek nilai $|x - 5|$ mana yang lebih besar antara 1 atau 3 jika 1 atau 3 disubstitusikan ke $|x-5|$. Didapat konstantanya adalah 4 dengan mensubstitusikan 1 kedalam $|x-5|$ sehingga didapat $|1-5|=4$.

Jika kita memastikan bahwa $\delta \leq \frac{\epsilon}{4}$ maka untuk setiap x dengan $|x-2|<\delta$ maka kita punya $|(x-2)(x-5)|<\delta \cdot 4 \leq \frac{\epsilon}{4} \cdot 4=\epsilon$.

Sehingga, kita akan memilih $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{4}\right)$.

Setelah melakukan analisis pendahuluan, kita akan melakukan pembuktian formal.

Diberikan $\epsilon > 0$, pilih $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{4}\right)$.

Perhatikan bahwa untuk setiap x dengan $0<|x-2|<\delta$, kita punya $|x-5|<4$ dan $|x-2|<\frac{\epsilon}{4}$, sehingga:

$$\begin{aligned}\left|\left(x^2-7x+3\right)-(-7)\right| &= \left|x^2-7x+10\right| \\ &= |x-5||x-2| \\ &< 4 \cdot \delta \leq 4 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \epsilon\end{aligned}$$

Sehingga, dengan pemilihan δ ini, kapanpun $|x-2|<\delta$, kita punya $\left|\left(x^2-7x+3\right)-(-7)\right|<\epsilon$. Sehingga, terbukti bahwa $\lim_{x\to 2} x^2-7x+3=-7$

Keterangan	Poin
Tidak menjawab sama sekali	0
Hanya menuliskan analisis pendahuluan	2-4
Sudah mencapai pembuktian formal dan terdapat kesalahan/tidak lengkap	5-9
Menjawab secara benar seluruhnya dari analisis pendahuluan sampai pembuktian formal	10

4. **[15 poin]** Kerjakan soal dibawah berikut penjelasan terkait kekontinuan
   a. [5 poin] Tentukan nilai-nilai x dimana fungsi $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-4}$ tidak kontinu.

      Suatu fungsi pecahan dikatakan diskontinu ketika penyebutnya bernilai 0. Maka,

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$(x - 1)(x + 4) = 0$$

      Didapat x = -4 atau x = 1. Disimpulkan bahwa fungsi $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-4}$ tidak kontinu pada titik x = -4 dan x = 1.

Keterangan	Poin
Menjawab tapi salah / Hanya jawabannya langsung dan benar, tetapi tidak pakai cara	1
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	2-4
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara	5

b. [10 poin] Gunakan definisi limit sepihak untuk menentukan nilai a dan b agar fungsi $f(x)$ kontinu untuk semua nilai x.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x \le -1 \\ ax + 2b & -1 < x < 1 \\ 4 & x \ge 1 \end{cases}$$

Untuk mendapatkan nilai a dan b, nilai dari limit kiri dan limit kanan harus terdefinisi.

Limit untuk $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to -1^-} (-2) = \lim_{x \to -1^+} (ax + 2b)$$

$$-2 = a(-1) + 2b$$

$$-2 = -a + 2b \ldots (i)$$

Limit untuk $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} (ax + 2b) = \lim_{x \to 1^+} (4)$$

$$a(1) + 2b = 4$$

$$a + 2b = 4 \ldots (ii)$$

Lakukan eliminasi SPL i dan ii untuk mencari nilai a dan b,

$$-a + 2b = -2$$

$$a + 2b = 4$$

$$- - - - - - - - +$$

$$4b = 2$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Dari nilai b yang didapatkan, kita dapat melakukan subtitusi ke salah satu SPL untuk mencari nilai a. Mari kita coba subtitusi ke ii.

$$\begin{aligned} a + 2\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 \\ a + 1 &= 4 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Keterangan	Poin
Menjawab tapi salah / Hanya jawabannya langsung dan benar, tetapi tidak pakai cara	2
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	5-8
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara	10

5. **[15 poin]** Carilah nilai dari limit di bawah ini dengan **hanya** menggunakan sifat limit, manipulasi aljabar, dan *squeeze theorem*!

$$\lim_{x\to 0}\left(\csc^2 x + \cot^2 x - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\csc^2 x + \cot^2 x - \frac{2}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{2}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{2}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{2}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{2}{x^2} - 1\right) \\ &= -1 + 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= -1 + 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right) \\ &= -1 + 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^2\sin^2 x}\right) \\ &= -1 + 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^2\sin^2 x}\cdot\frac{x^2}{x^2}\right) \\ &= -1 + 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+\sin x)}{x}\cdot\frac{(x-\sin x)}{x^3}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right) \\ &= -1 + 4\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad \text{... (1)} \end{aligned}$$

Untuk sekarang, mari simpan nilai *A* sebagai

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

Substitusi x menjadi $2x$, batas $2x \to 0$ bisa diubah kembali menjadi $x \to 0$.

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin 2x}{8x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2\sin x \cos x}{8x^3} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \cdot \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \cdot \frac{x - \sin x \cos x + \sin x - \sin x}{x^3} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} + \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3} = \frac{A}{4} + \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} \\
3A &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Maka $A = \frac{1}{6}$. Setelah mensubstitusi balik nilai A, kita akan mendapat hasil $\frac{-1}{3}$.

Keterangan	Poin
Menjawab tapi salah semua/hanya jawabannya langsung, tetapi tidak pakai cara	2
Berhasil mendapatkan (1) saja dengan cara yang diperbolehkan	5
Berusaha mencari A namun tidak dapat	7
Mendapatkan hasil akhir dengan mendapat A menggunakan cara yang tidak masuk akal	7
Berusaha mencari A dengan permisalan namun tidak dapat/salah	10
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara yang diperbolehkan	15

6. **[15 poin]** Temukan asimtot tegak dan datar untuk fungsi-fungsi di bawah ini

   a. [7 poin] $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x-2}$

      Asimtot tegak terjadi ketika penyebut dalam suatu fungsi rasional bernilai 0. Pada persamaan di atas, penyebut bernilai 0 ketika nilai x = 2.

      Garis x = c adalah asimtot tegak dari grafik y = f(x) jika salah satu dari empat pernyataan berikut benar.

      1. $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$
      2. $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$
      3. $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$

4. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

Sehingga, perlu dilakukan uji syarat terlebih dahulu untuk nilai x = 2.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2+2x-1}{x-2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2+2x-1}{x-2} = -\infty$$

Dari uji di atas, dapat disimpulkan ada asimtot tegak di x = 2.

Asimtot datar terjadi ketika x mendekati tak terhingga positif dan negatif.

Garis y = b adalah asimtot datar grafik y = f(x) jika salah satu pernyataan berikut benar.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Sehingga perlu dilakukan penghitungan limit menuju tak hingga positif dan negatif untuk menemukan nilai asimtot datar.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+2x-1}{x-2} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x-2} = -\infty$$

Dari penghitungan di atas, maka tidak ditemukan nilai asimtot datar.

Keterangan	**Poin**
Menjawab tapi salah / Hanya jawabannya langsung dan benar, tetapi tidak pakai cara	2
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	3-5
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara	7

b. [8 poin] $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4}$

Asimtot tegak terjadi ketika penyebut dalam suatu fungsi rasional bernilai 0. Pada persamaan di atas, penyebut bernilai 0 ketika nilai x = 2 dan x = -2.

Garis x = c adalah asimtot tegak dari grafik y = f(x) jika salah satu dari empat pernyataan berikut benar.

5. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$
6. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$

7. $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$
8. $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

Sehingga, perlu dilakukan uji syarat terlebih dahulu untuk nilai x = 2.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4} = -\infty$$

Kemudian, dilakukan juga uji syarat untuk nilai x = -2

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4} = \infty$$

Dari uji di atas, dapat disimpulkan ada asimtot tegak di x = 2 dan x = -2

Asimtot datar terjadi ketika x mendekati tak terhingga positif dan negatif.

Garis y = b adalah asimtot datar grafik y = f(x) jika salah satu pernyataan berikut benar.

3. $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$
4. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Sehingga perlu dilakukan penghitungan limit menuju tak hingga positif dan negatif untuk menemukan nilai asimtot datar.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4} = 2$$

Dari penghitungan di atas, maka ditemukan asimtot datar pada y = 2.

Keterangan	**Poin**
Menjawab tapi salah / Hanya jawabannya langsung dan benar, tetapi tidak pakai cara	2
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	3-6
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara	8

7. [20 poin]Kerjakan soal dibawah ini tanpa menggunakan metode L' Hopital

a. [10 poin] **Limit menuju tak hingga**

$$\lim_{x \to 3} \frac{Ax^2+Bx-36}{x-3} = 30$$

Carilah hasil dari A-B

untuk mendapatkan nilai A dan B, kita harus memperhatikan bawah nilai limit diatas ada.
saat x = 3, kita tahu bawah penyebut akan sama dengan 0. maka dari itu limit diatas adalah bentuk $\frac{0}{0}$ sehingga $Ax^2 + Bx - 36 = 0$
karena $Ax^2 + Bx - 36$ merupakan bentuk persamaan kuadrat dan hasil dari limit itu ada maka $Ax^2 + Bx - 36$ dapat dibagi dengan x-3 sehingga didapat bahwa
$Ax^2 + Bx - 36$ = (x-3) (Ax+C)

Sekarang kita ingin mengetahui hasil dari C. Kita perhatikan bahwa -36 merupakan konstanta yang ada dalam bentuk persamaan kuadrat diatas. Sehingga akar kuadrat dari persamaan diatas adalah -3 dan C.

Sehingga C = -36/3
C =12
sehingga didapat bahwa
$Ax^2 + Bx - 36$ = (x-3)(Ax+12)

Ingat hasil dari limit saat x = 3 adalah 30. sehingga didapat

3A + 12 = 30
3A = 18
A = 6
Sekarang kita ingin mencari nilai dari B

(x-3)(6x+12) = $6x^2 - 6x - 36$

didapat bahwa nilai B = -6
Sehingga hasil dari A-B adalah 12

Keterangan	Poin
Menjawab tapi salah / Hanya jawabannya langsung dan benar, tetapi tidak pakai cara	2
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	4-8
Menjawab benar dan lengkap menggunakan	10

cara	

b. [10 poin] **Limit tak hingga**

$\lim\limits_{x \to \infty} \{ \mathbf{\log_{10}} (\frac{x^{99}-723}{x^{99}-723}) \} =$

Hitunglah hasil dari limit diatas !

Untuk menjawab soal di atas, kita ketahui bahwa fungsi logarithmic bersifat kontinu dan limit di atas berbentuk indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$

Sehingga kita bisa mengubah limit menjadi

$$\lim_{x \to \infty} \{ \mathbf{\log_{10}} (\frac{x^{99}-723}{x^{99}+723}) \} = \mathbf{\log_{10}} \left\{ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{99}-723}{x^{99}+723} \right) \right\}$$

lalu kita kalikan dengan $\frac{1}{x^{99}}$ pada pembilang dan penyebut

$$\mathbf{\log_{10}} \left\{ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{99}-723}{x^{99}+723} \right) \right\} = \mathbf{\log_{10}} \left\{ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{99}-723 \bullet \frac{1}{x^{99}}}{x^{99}+723 \bullet \frac{1}{x^{99}}} \right) \right\}$$

$$= \mathbf{\log_{10}} \left\{ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{x^{99}}{x^{99}} - \frac{723}{x^{99}}}{\frac{x^{99}}{x^{99}} + \frac{723}{x^{99}}} \right) \right\}$$

$$= \mathbf{\log_{10}} \left\{ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1-\frac{723}{x^{99}}}{1+\frac{723}{x^{99}}} \right) \right\}$$

$$= \mathbf{\log_{10}} \left\{ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1-0}{1+0} \right) \right\}$$

$$= \mathbf{\log_{10}} \left\{ \frac{1}{1} \right\}$$

$$= \mathbf{0}$$

Keterangan	**Poin**

Menjawab tapi salah / Hanya jawabannya langsung dan benar, tetapi tidak pakai cara	2
Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah	4-8
Menjawab benar dan lengkap menggunakan cara	10

8. **Cara 1 (L'Hopital) [UNUSED, berikan poin setengah apabila mhs menggunakan cara ini]:**
   Pertama-tama, perlu dicek apakah jika kita substitusi nilai $x = \infty$ akan menghasilkan suatu bentuk tak tentu,
   $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} &= \left(1+\frac{a}{\infty}\right)^{b\cdot\infty} \\ &= (1+0)^{b\cdot\infty} \\ &= 1^{\pm\infty}\end{aligned}$$
   Kita tidak mengetahui variable b merupakan bilangan positif/negatif, sehingga kita akan menuliskannya sebagai $1^{\pm\infty}$. Bentuk $1^{\pm\infty}$ ini merupakan salah satu bentuk tak tentu.

   Untuk memanfaatkan aturan L'Hopital, kita perlu membentuk fungsi hingga ke bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$. Untuk itu, kita dapat membuat permisalan seperti:
   $$L = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$$
   $$\begin{aligned}\ln(L) &= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} bx\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{b\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \implies \frac{b\cdot\ln\left(1+\frac{a}{\infty}\right)}{\frac{1}{\infty}} = \frac{b\cdot\ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$
   Bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ telah ditemukan. Selanjutnya, kita dapat memanfaatkan aturan L'Hopital untuk menyelesaikan limitnya.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{b\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(b\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{b\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}\cdot\left(1+\frac{a}{x}\right)}\cdot\frac{\left(-x^2\right)}{\left(-x^2\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{ab}{1+\frac{a}{x}}\\ &= \frac{ab}{1+\frac{a}{\infty}} = \frac{ab}{1+0} = ab\end{aligned}$$

Ingat! Persamaan awalnya adalah $\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\right)$, sehingga:

$$\ln(L) = ab \implies e^{\ln(L)} = e^{ab} \implies L = e^{ab}$$

Kemudian, ingat bahwa $L = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$. Oleh karena itu, terbukti bahwa

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

Cara 2 (Definisi Nilai Euler):

Dengan menggunakan definisi nilai euler, kita juga dapat menyelesaikan persoalan ini. Bunyi definisi nilai euler adalah sbb.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Misal $u = \frac{1}{x}$, maka dengan $x \to \infty$, nilai $u \to 0$. Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan limitnya sbb.

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Sekarang, mari kita kembali ke persamaan limit awal.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

Kita misalkan $u = \frac{a}{x}$, sehingga dengan $x \to \infty$, maka nilai $u \to 0$. Dari $u = \frac{a}{x}$, maka $x = \frac{a}{u}$. Persamaan LHS akan menjadi sbb.

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{ab}{u}} &= \lim_{u\to 0}\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{ab}\\ &= \left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{ab}\end{aligned}$$

Kemudian, ingat bahwa $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$, sehingga:

$$\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{ab} = e^{ab}$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

Keterangan	Poin
Hanya menulis soal	0
Mendeklarasikan bunyi definisi nilai euler, dan apabila menggunakan permisalan maka permisalannya benar	1-4
Implementasi definisi nilai euler kurang tepat pada persoalan **OR** Cara benar sebagian tapi jawaban akhir salah **OR** Menjawab namun tidak tuntas	5-9
Menjawab benar dan lengkap menggunakan definisi nilai euler	10
Menjawab benar dan lengkap menggunakan aturan L'Hopital	1-5