

GalerkinVerfahren

December 28, 2020

0.1 FEM mittels des Galerkin-Verfahrens

Im Folgenden wollen wir das Galerkin-Verfahren diskutieren. Analog zum Ritz-Verfahren stellt es ein Verfahren dar, ein Randwertproblem numerisch zu lösen. Vorgelegt sei ein Randwertproblem der Form

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \beta \Phi = f$$

mit den Randbedingungen

$$\Phi|_{\Gamma_1} = g$$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \alpha_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot \vec{n} + \gamma \Phi|_{\Gamma_2} = q$$

Wir wollen nur den eindimensionalen und den zweidimensionalen Fall betrachten. Der dreidimensionale Fall ist dann sehr analog zum zweidimensionalen Fall.

0.1.1 Vorbemerkung

Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung kann auch mittels eines Reihenansatzes erfolgen. Wir betrachten hierzu als Beispiel folgende Dgl.

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \Phi = \sin(x) + \cos(x)$$

Die exakte Lösung lautet: $\Phi(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$

Wir möchten nun die Lösung durch eine Reihenentwicklung bestimmen. Als Reihe können wir eine Potenzreihe versuchen, die wir dann ableiten und in die Differentialgleichung einsetzen und so sukzessive die Koeffizienten durch ein lineares Gleichungssystem finden (Koeffizientenvergleich). Die Reihe und deren Ableitung lautet

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \Phi''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2}x^k$$

Mit der Taylorreiheneentwicklung der rechten Seite $\sin(x) + \cos(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \dots$ lautet die Differentialgleichung:

$$(2a_2 - a_0) + (6a_3 - a_1)x + (12a_4 - a_2)x^2 + (20a_5 - a_3)x^3 + \dots = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad (1)$$

Die gesuchten Koeffizienten findet man durch einen Koeffizientenvergleich gemäß:

$$\begin{array}{ll} x^0 : & (2a_2 - a_0) = 1 \\ x^1 : & (6a_3 - a_1) = 1 \\ x^2 : & (12a_4 - a_2) = -\frac{1}{2} \\ x^3 : & (20a_5 - a_3) = -\frac{1}{6} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Neben diesen Bedingungen gibt es noch die Randbedingungen. Verlangt man z.B. $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(2\pi) = 0$, so gelten die beiden zusätzlichen Gleichungen

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_0 + 2a_1\pi + 4a_2\pi^2 + \dots = 0$$

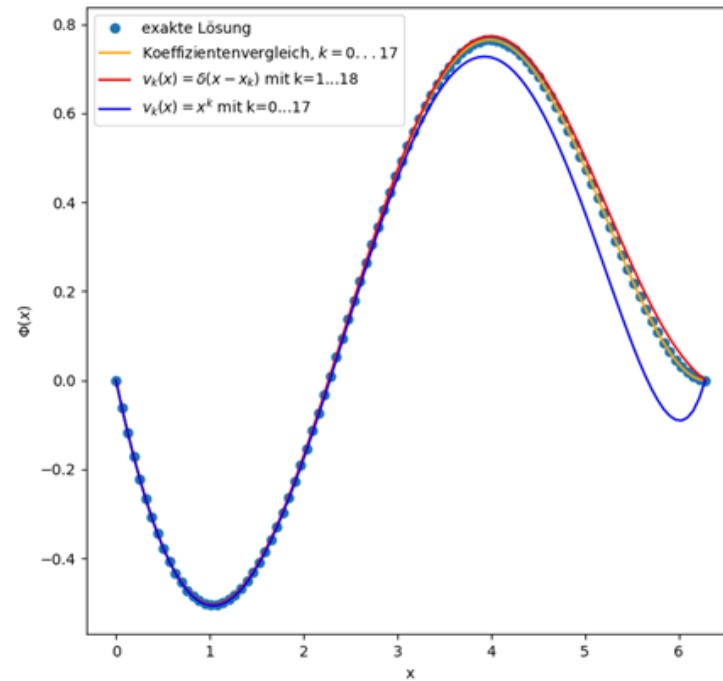
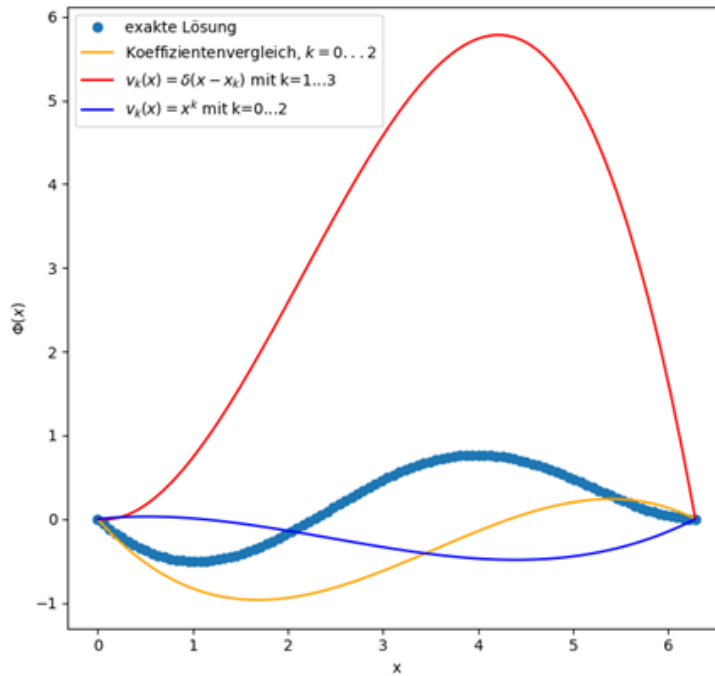
Das System der unbekannten Koeffizienten ist nicht endlich, dennoch lassen sich die Koeffizienten im Prinzip sukzessive berechnen. Man erhält in diesem Fall dann die Grenzfunktion der analytischen Lösung.

Den Koeffizientenvergleich könnten wir auch auf eine andere Weise durchführen. Nehmen wir an, dass wir einen Satz von Funktionen $v_0(x), v_1(x), \dots, v_k(x), \dots$ mit der Eigenschaft

$$\int_0^{2\pi} x^j v_k(x) dx = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

konstruiert haben. In diesem Fall würde das obige Gleichungssystem durch multiplizieren von (1) mit $v_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ und anschliessendes integrieren reproduziert werden. Nun könnte man natürlich auch auf die Idee kommen Funktionen $v_k(x)$ zu benutzen, welche nicht die obige Eigenschaft haben. Ein weiteres Beispiel wären die Funktionen $v_k(x) = x^k$ oder $\delta(x - x_k)$. Mit letzteren "Funktionen" würden wir (1) lösen, indem nacheinander Werte für x , sie heissen x_k in (1) eingesetzt würden. Jedes x_k würde auf diese Weise zu einer Gleichung führen für die unbekannten Koeffizienten. Solange das System nicht endlich ist, erhält man die gleiche Lösung, denn die Gleichungen nach Multiplikation mit v_k und Integration sind Linearkombinationen der ursprünglichen Gleichungen die aus dem Koeffizientenvergleich gewonnen wurden. Die Sache ändert sich aber, falls der Ansatz, der in die Differentialgleichung eingesetzt wird eine Summe ($\Phi(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$) anstelle einer Reihe ist, die Anzahl der Koeffizienten also endlich ist. In diesem Fall werden die Lösungen für die Koeffizienten a_k im Allgemeinen verschieden sein, denn nun sind die neuen Gleichungen nicht unbedingt Linearkombinationen der ursprünglichen Gleichungen des Koeffizientenvergleichs. Als Beispiel ist in der folgenden Graphik das Ergebnis für zwei verschiedene Werte von N und zwei verschiedene Funktionensätze $v_k(x) = \delta(x - x_k)$ und $v_k(x) = x^k$ gezeigt.

Wie auf dem rechten Bild zu erkennen ist wird für steigende N (Anzahl der Koeffizienten) die Lösung immer besser angenähert, allerdings kann die Güte durch die Wahl der Testfunktionen $v_k(x)$ beeinflusst werden.



0.1.2 Eindimensional

Im folgenden wollen wir ein numerisches Lösungsverfahren für die Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \beta \Phi = f$$

entwickeln. Wir wollen uns dabei an die Idee aus der Vorbemerkung halten, d.h. die gesuchte Funktion wird als Summe von noch näher zu bestimmenden "Basis"-Funktionen geschrieben, in die Dgl. eingesetzt und mit Testfunktionen multipliziert. Das daraus entstehende Gleichungssystem für die Koeffizienten muss dann noch gelöst werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beginnen wir zunächst die Gleichung mit einer Testfunktion zu multiplizieren und anschliessend zu integrieren

$$-\int_a^b v(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_1(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right) dx + \int_a^b \beta v(x) \Phi(x) dx = \int_a^b v(x) f(x) dx$$

Den ersten Term integriert man partiell und erhält

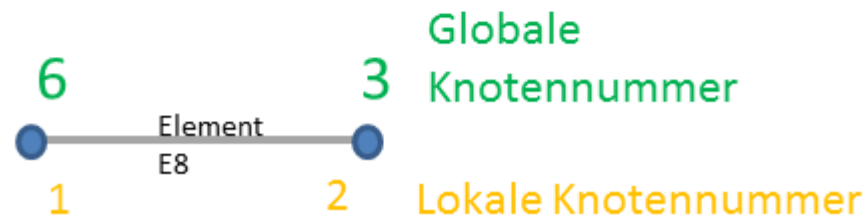
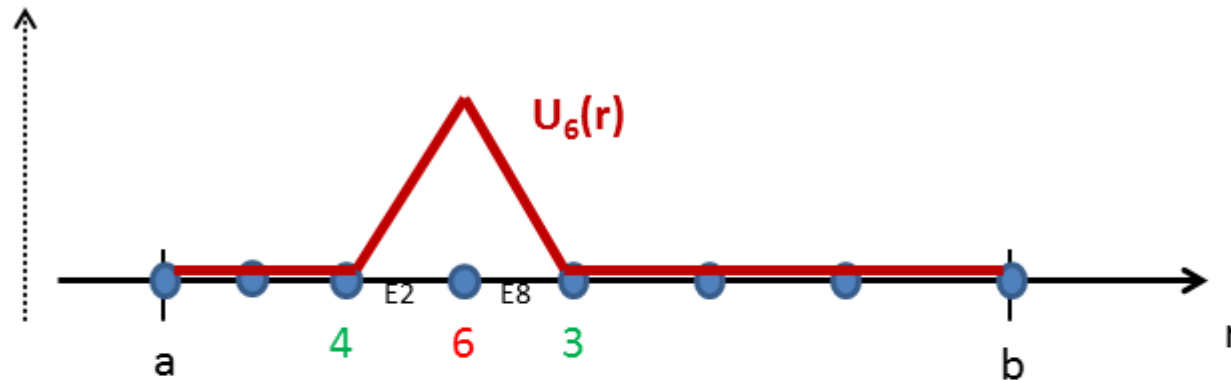
$$\int_a^b \frac{\partial v(x)}{\partial x} \left(\alpha_1(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right) dx - v(x) \left(\alpha_1(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right) \Big|_a^b + \int_a^b \beta(x) v(x) \Phi(x) dx = \int_a^b v(x) f(x) dx$$

Diese Formulierung der ursprünglichen Differentialgleichung stellt geringere (schwächere) Anforderungen an die Lösung. Die Funktion $\Phi(x)$ muss nämlich nur einmal abgeleitet werden, man spricht deshalb von der schwachen Form der Differentialgleichung. Sie ist gewissermaßen eine Integralgleichung für die unbekannte Funktion. Durch eine Diskretisierung dieser Gleichung erhalten wir später ein LGS und damit eine Approximation der gesuchten Lösung. Zu diesem Zweck entwickeln wir nun, wie schon oben gesagt, die gesuchte Funktion in "Basis"-Funktionen gemäß:

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^N a_j U_j(x)$$

Man erwartet von dieser Entwicklung, dass mit steigendem N die Approximation immer besser wird, was letztlich gewisse Anforderungen an die "Basis"-Funktionen stellt.

Wir unterteilen, durch die Einführung von Knoten, das Integrationsintervall in Teilintervalle und errichten über jedem Knoten eine Funktion der Höhe 1. Die Funktion hat weiterhin die Eigenschaft, dass sie an den beiden benachbarten Knoten null ist. Diese Funktionen nennen wir $U_k(x)$, wobei das k die Nummer des Knotens darstellt. In der Abbildung ist zur Illustration $U_6(x)$ gezeichnet. Damit ist klar, dass die a_j nichts anderes als die Funktionswerte von $\Phi(x)$ an der Stelle x_j sind, also $a_j = \Phi(x_j)$, denn wenn man x_j in die obige Summe einsetzt erhält man gerade $\Phi(x_k) = \sum a_j U_j(x_k) = a_k$ ($U_j(x_k)$ ist nur für $j = k$ von null verschieden). Unter dem Bild der Basisfunktionen ist ein Element herausvergrößert. Weder müssen die Abstände äquidistant sein, noch muss die Nummerierung systematisch und fortlaufend sein.



Für die Funktionen $v(x)$ wählen wir ebenfalls die obigen "Hutfunktionen". Man nennt das Verfahren dann Galerkin-Verfahren. Die generelle Methode, den Differentialausdruck mit einer Funktion $v(x)$ zu multiplizieren und anschliessend zu integrieren heisst Momentenmethode. Sie lässt sich auf eine Vielzahl von Problemen anwenden. Die Funktionen $v(x)$ heissen auch Test oder Gewichtsfunktionen und es werden u.U. auch andere Funktionen "zum testen" verwendet (siehe Vorbemerkung). Wir erhalten dann die schwache Form:

$$\sum_{j=1}^N a_j \left(\underbrace{\int_a^b \frac{\partial U_k(x)}{\partial x} \left(\alpha_1(x) \frac{\partial U_j(x)}{\partial x} \right) dx - U_k(x) \left(\alpha_1(x) \frac{\partial U_j(x)}{\partial x} \right) \Big|_a^b + \int_a^b \beta(x) U_k(x) U_j(x) dx}_{\text{Eine Zahl, die "nur" von der Wahl von } k \text{ und } j \text{ abhängt: } K_{kj}} \right) = \underbrace{\int_a^b U_k(x) f(x) dx}_{\text{Hängt von } k \text{ ab: } D_k}$$

Hieran lässt sich schon erkennen, was wir später erhalten werden, nämlich ein LGS für die Koeffizienten a_j . Es ist zu beachten, dass die Zahlen K_{kj} nur von der Wahl unserer Elemente und den Funktionen α_1, β, f , sowie den Grenzen a, b abhängen. Die Intervalle legen wir fest, die Funktionen sind durch das Problem vorgegeben. Die Integrale können somit berechnet werden. Die Funktionen α_1, β, f könnten sogar Sprünge aufweisen, das würde in der Integration nicht zu Problemen führen. Wir werten nun die schwache Form der ursprünglichen Differentialgleichung mittels der Funktionen $U_k(x)$ explizit aus und arbeiten auch die Randbedingungen ein. Der Einfachheit halber wollen wir zwei Fälle unterscheiden.

1D-Dirichlet-Problem In diesem Fall sind die Funktionswerte am Rand bekannt, wir nennen sie Φ_a und Φ_b und entwickeln damit die unbekannte Funktion (j läuft ausschliesslich über die N_i inneren Knoten)

$$\Phi(x) = \Phi_a U_a + \Phi_b U_b + \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j U_j(x)$$

Unbekannt sind die Koeffizienten $a_j \equiv \Phi_j$. Um ein Gleichungssystem für diese zu erhalten, lassen wir den Index k in der oberen schwachen Form nacheinander die Werte $k = 1..N_i$ annehmen, i.e. diejenigen Knotenwerte also, die zu den unbekannten Koeffizienten gehören. Wir erhalten auf diese Weise N_i Gleichungen für die N_i unbekannten Entwicklungskoeffizienten Φ_j .

Zunächst stellen wir fest, dass der zweite Term (Randterm) entfällt, denn es gilt $U_k(a) = U_k(b) = 0$, da k immer ein innerer Knoten ist und die U_k damit an den beiden äusseren Knoten schon auf null abgefallen sind.

Mit dieser Vereinfachung ist die schwache Form für das Dirichlet-Problem:

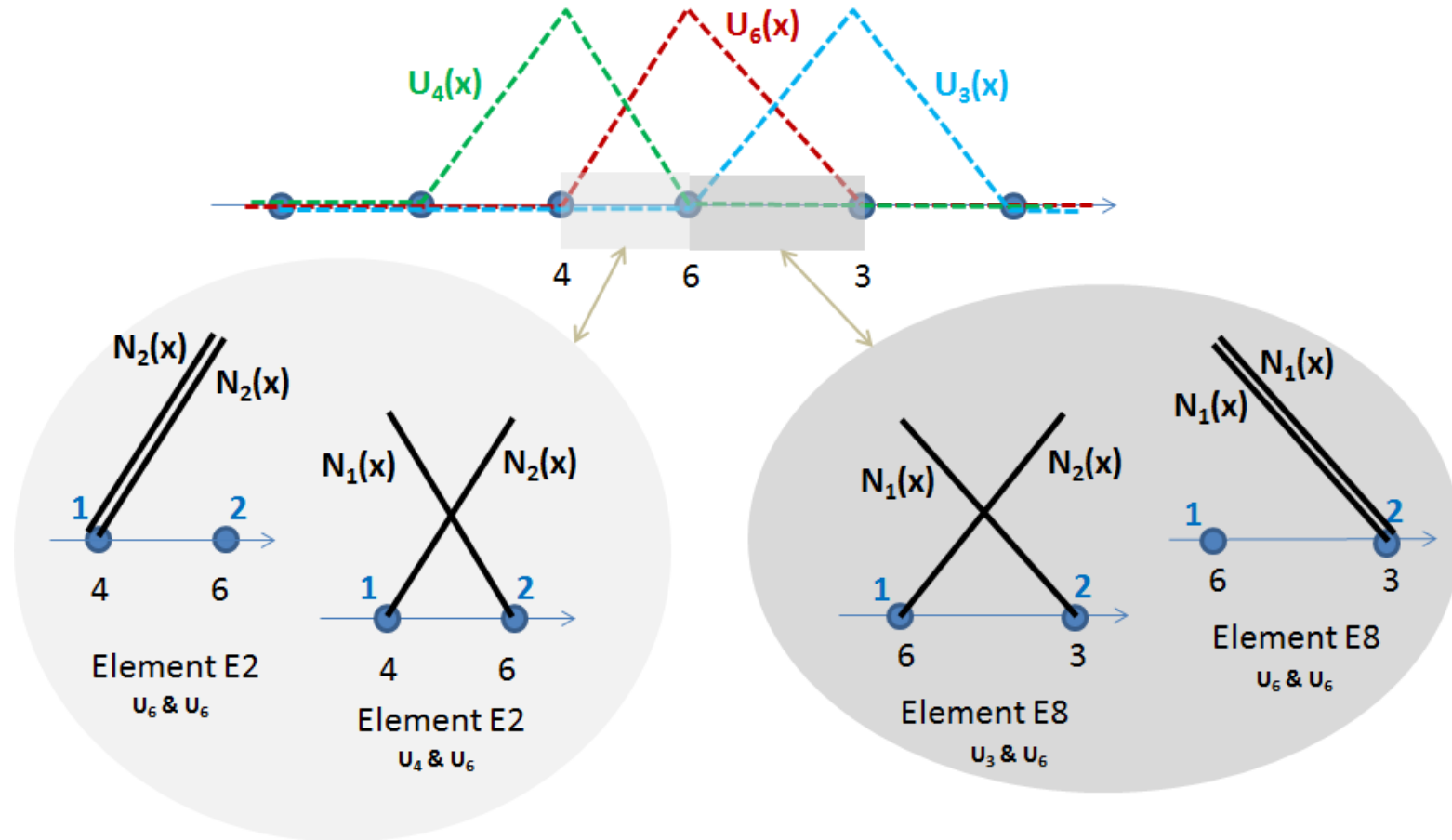
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j \left(\int_a^b \frac{\partial U_k(x)}{\partial x} \left(\alpha_1 \frac{\partial U_j(x)}{\partial x} \right) dx + \int_a^b \beta U_k(x) U_j(x) dx \right) &= \int_a^b U_k(x) f(x) dx \\ &- \Phi_a \left(\int_a^b \frac{\partial U_k(x)}{\partial x} \left(\alpha_1 \frac{\partial U_a(x)}{\partial x} \right) dx + \int_a^b \beta U_k(x) U_a(x) dx \right) \\ &- \Phi_b \left(\int_a^b \frac{\partial U_k(x)}{\partial x} \left(\alpha_1 \frac{\partial U_b(x)}{\partial x} \right) dx + \int_a^b \beta U_k(x) U_b(x) dx \right) \end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme der Reihenentwicklung von $\Phi(x)$ sind auf der rechten Seite zu finden. Die Größen auf der rechten Seite sind allesamt bekannt. Es lässt sich schon die Struktur der Gleichungen erkennen, sie ist von der Form

$$\sum_j K_{kj} \Phi_j = D_k$$

Um die Matricelemente von (K_{kj}) und (D_k) zu berechnen müssen 3 Integrale berechnet werden.

Zum besseren Verständnis analysieren wir einen Teil (zweites Integral der linken Seite) der 6-ten Zeile des LGS (siehe Skizze unten). Die Integration über das Intervall $[a,b]$ reduziert sich auf eine Integration über diejenigen Elemente die den Knoten k (hier $k = 6$) enthalten, da bei allen anderen Elementen die Hutfunktion U_6 bereits auf null abgefallen ist. Man sieht sofort ein, dass damit auch die Indizes j nur noch Werte annehmen können, die zu diesen (zwei) Elementen (E2, E8) gehören (für $k = 6$ sind das die Werte $j = 3, j = 4$ und $j = 6$). Alle Indizes ausserhalb dieser beiden Elemente hätten nämlich Hutfunktionen U_j , welche im Integrationsintervall null wären.



Konkret finden wir für ein Integral der 6-ten Zeile des obigen LGS z.B. den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j \int_a^b \beta U_6 U_j dx &= \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j \int_{E2 \cup E8} \beta U_6 U_j dx = \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j \int_{E2} \beta U_6 U_j dx + \Phi_j \int_{E8} \beta U_6 U_j dx \\
&= \underbrace{\Phi_6 \int_{E2} \beta U_6 U_6 dx}_{\text{Beitrag zu } K_{6,6}} + \underbrace{\Phi_4 \int_{E2} \beta U_6 U_4 dx}_{\text{Beitrag zu } K_{6,4}} + \underbrace{\Phi_6 \int_{E8} \beta U_6 U_6 dx}_{\text{Beitrag zu } K_{6,6}} + \underbrace{\Phi_3 \int_{E8} \beta U_6 U_3 dx}_{\text{Beitrag zu } K_{6,3}} \\
&= \Phi_6 \int_{E2} \beta N_2 N_2 dx + \Phi_4 \int_{E2} \beta N_2 N_1 dx + \Phi_6 \int_{E8} \beta N_1 N_1 dx + \Phi_3 \int_{E8} \beta N_1 N_2 dx
\end{aligned}$$

Wie zu erkennen ist, zerfällt das Gesamtintegral in ein Integral über die beiden Elemente welche den Knoten $k=6$ besitzen. Wenn wir die beiden Elemente mit $E2 = \{4, 6\}$ und $E8 = \{6, 3\}$ bezeichnen, so erwachsen also aus diesen die Beiträge $K_{6,4}$ und $K_{6,6}$ vom ersten Element $E2$ und $K_{6,3}$ und $K_{6,6}$ für das zweite Element $E8$, denn die Terme enthalten als Vorfaktor Φ_4 und Φ_6 bzw. Φ_3 und Φ_6 . Führen wir noch auf jedem Element lokale Ansatzfunktionen $N_j(x)$ ein, so können alle benötigten Integrale über Produkte solcher lokaler Funktionen $N_j(x)N_m(x)$ geschrieben werden (siehe obige Skizze).

Weiterhin können wir folgern, dass die Elemente $E2, E8$ auch Beiträge in andere Zeilen liefern, nämlich für das Element $E2$ die Beiträge $K_{4,4}$ und $K_{4,6}$ (4te Zeile) und für das Element $E8$ die beiden Zahlen $K_{3,3}$ und $K_{3,6}$ (3te Zeile).

Wir erhalten somit pro Element 4 Zahlen, welche in der Matrix zu verteilen sind und zwei Zahlen, welche auf der rechten Seite einsortiert werden. Benötigt wird demnach ein allgemeiner Ausdruck für diese 6 Zahlen für ein beliebiges Element.

Gegeben sei nun ein beliebiges Element. In diesem Element gibt es zwei (Teile) einer Basisfunktion. Um einen allgemeinen Ausdruck herzuleiten benutzen wir die lokale Knotenindizierung, der linke Knoten des Elementes heisst 1, der rechte 2 (siehe Skizze oben). Wir bezeichnen die beiden Funktionen mit N_1 und N_2 , wobei sich die Indizes nun auf die lokale Nummer bezieht. Für diese beiden Funktionen muss gelten

$$N_1(x_1) = 1 \quad N_1(x_2) = 0 \quad \text{sowie} \quad N_2(x_1) = 0 \quad N_2(x_2) = 1$$

Mit dem Ansatz $N_1 = a + bx$ und $L_E = x_2 - x_1$ (Länge des Elements) finden wir

$$N_1(x) = \frac{1}{L_E}(x_2 - x) \quad N_2(x) = \frac{1}{L_E}(x - x_1)$$

Mit diesen beiden Basisfunktionen berechnen wir nun, wie zuvor erläutert die 6 Zahlen pro Element (x_M ist die Mitte des Elementes).

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \int_{x_1}^{x_2} \alpha_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx = \frac{1}{L_E^2} \int_{x_1}^{x_2} \alpha_1(x) dx \approx \frac{1}{L_E} \alpha_1(x_M) \\
(2) \quad & \int_{x_1}^{x_2} \alpha_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx = -\frac{1}{L_E^2} \int_{x_1}^{x_2} \alpha_1(x) dx \approx -\frac{1}{L_E} \alpha_1(x_M) \\
(3) \quad & \int_{x_1}^{x_2} \beta N_1 N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} \beta N_2 N_2 dx = \frac{1}{L_E^2} \int_{x_1}^{x_2} \beta(x - x_1)^2 dx \approx \frac{L_E}{3} \beta(x_M) \\
(4) \quad & \int_{x_1}^{x_2} \beta(r) N_1 N_2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \beta N_2 N_1 dx = \frac{1}{L_E^2} \int_{x_1}^{x_2} \beta(x - x_1)(x_2 - x) dx \approx \frac{L_E}{6} \beta(x_M) \\
(5) \quad & \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2 dx = \frac{1}{L_E} \int_{x_1}^{x_2} f(x)(x - x_1) dx \approx \frac{L_E}{2} f(x_M)
\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also für die 6 “lokalen” Beiträge \mathcal{K}_{lm} , \mathcal{D}_l eines Elementes zur globalen Matrix/rechte Seite (K_{kj}), D_k des LGS

$\mathcal{K}_{lm} = \frac{(-1)^{l+m}}{L_E} \alpha_1(x_M) + \frac{L_E}{6} \beta(x_M)(1 + \delta_{lm})$	$\mathcal{D}_l = \frac{L_E}{2} f(x_M)$	$l, m = 1..2$
---	--	---------------

In einer Matrixdarstellung lauten die Elemente

$$(\mathcal{K}_{ij}) = \frac{\alpha(x_m)}{L_E} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{L_E \beta(x_M)}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{D}_j) = \frac{L_E f(x_M)}{2} (1, 1)$$

Wenden wir für das Element E8, [6,3] (Skizze oben) die Formel an, so müssen die 4 Zahlen in die Matrix (K_{jk}) des gesuchten LGS wie folgt eingetragen werden (man beachte, dass die Werte auf die schon vorhandenen Werte der Matrix addiert werden, da andere Elemente des Intervalls diese Position bereits gefüllt haben könnten).

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{11} &\rightarrow K_{6,6} = K_{6,6} + \mathcal{K}_{11} \\
\mathcal{K}_{12} &\rightarrow K_{6,3} = K_{6,3} + \mathcal{K}_{12} \\
\mathcal{K}_{21} &\rightarrow K_{3,6} = K_{3,6} + \mathcal{K}_{21} \\
\mathcal{K}_{22} &\rightarrow K_{3,3} = K_{3,3} + \mathcal{K}_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &\rightarrow D_6 = D_6 + \mathcal{D}_1 \\
\mathcal{D}_2 &\rightarrow D_3 = D_3 + \mathcal{D}_2
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Zahlenwerte \mathcal{K}_{lm} , \mathcal{D}_l werden (pro Element) die Koordinaten x_1, x_2 , sowie die Funktionen $\alpha_1(x), \beta(x), f(x)$ benötigt. Die Funktionen sind bei einem vorgelegten Problem bekannt, die Elemente werden je nach Genauigkeitsanforderung generiert.

Noch eine Bemerkung: Obgleich wir bislang zwischen inneren Knoten und Randknoten unterschieden haben, berechnet man zunächst die Matrix/rechte Seite $(K_{i,j}), (D_i)$ für alle Knoten. Zur Erstellung des LGS werden dann, in einem zweiten Schritt, die Zeilen/Spalten mit den Randknotenindizes gestrichen. Um die vollständige rechte Seite zu erhalten (siehe rechte Seite der schwachen Formulierung) müssen aber zuvor vom Vektor (D_j) die gestrichenen Spalten der Randknoten (RKV_a, RKV_b) der Matrix (K_{ij}) multipliziert mit dem Randknotenwert abgezogen werden. Die Randzeilen des Vektors (D_i) werden ebenfalls gestrichen. In Kurzform schreiben wir hierfür schliesslich das LGS für den Fall eines Dirichletproblems:

$$\sum_{j=1}^{N_i} K_{k,j} \Phi_j = D_k - \Phi_a \underbrace{K_{k,a}}_{RKVa} - \Phi_b \underbrace{K_{k,b}}_{RKVb} \quad k = 1..N_i$$

Hierbei ist RKV_a die Spalte der ursprünglichen Matrix, die zum Randknoten a gehört. Analog ist RKV_b definiert. Bei einer optimierten FEM-Berechnung wird man die entsprechenden Matrixelemente gleich von der rechten Seite abziehen, um das zeitaufwändige Streichen einzusparen.

Ein Beispiel

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Phi}{dx} \right) + x\Phi = -x^3 \quad \text{mit den Randbedingungen: } \Phi(x=1) = 2 \quad \text{und} \quad \Phi(x=2) = 6$$

Zunächst legen wir die Knoten, die Elemente und die Randknoten fest:

Für 5 äquidistante Knoten wäre eine offensichtliche Einteilung die Folgende:

$$p = [1, 1.25, 1.5, 1.75, 2] \quad t = [[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]] \quad dr = [0, 4]$$

Wir wollen mit Hinblick auf 2D-Probleme jedoch eine unsystematische Nummerierung vornehmen.

$$p = [1.75, 2, 1.25, 1.0, 1.5] \quad t = [[2, 4], [3, 2], [4, 0], [0, 1]] \quad dR = [3, 1] \quad \text{PhiR} = [2.0, 6.0]$$

Wie oben gesehen, werden nun für jedes Element 4 Matricelemente \mathcal{K}_{ij} und 2 rechte Seiten \mathcal{D}_i berechnet und in die (globale) Matrix (K_{ij}) eingetragen.

		$x_2 - x_1$	$(x_2 + x_1)/2$	$\alpha = x^2$	$\beta = x$	$f = -x^3$	$\alpha_M/L_E + L_E\beta_M/3$	$-\alpha_M/L_E + L_E\beta_M/6$	$L_E f_M/2$
t	$x_1 ; x_2$	L_E	x_M	$\alpha(x_M)$	$\beta(x_M)$	$f(x_M)$	$\mathcal{K}_{11} = \mathcal{K}_{22}$	$\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{21}$	$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$
[2, 4]	1.25 ; 1.5	0.25	1.375	1.890625	1.375	-2.599609375	7.677083	-7.5052083	-0.324951171875
[3, 2]	1.0 ; 1.25	0.25	1.125	1.265625	1.125	-1.423828125	5.15625	-5.015625	-0.177978515625
[4, 0]	1.5 ; 1.75	0.25							
[0, 1]	1.75 ; 2	0.25							

Diese tabellarische Berechnung stellt das Grundgerüst des Programmes für die FEM dar. Schreiben Sie ein Programm, welches in einer Schleife alle Elemente durchläuft und die obigen Werte berechnet.

Nun wird in (K_{ij}) einsortiert (lokale Indizierung überführt in globale Indizierung). Zum Beispiel wird \mathcal{K}_{11} des ersten Elementes auf K_{22} geschrieben (addiert), und \mathcal{K}_{12} auf K_{24} und \mathcal{K}_{21} auf K_{42} und \mathcal{K}_{22} auf K_{44} .

$$(K_{ij}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.67708\bar{3} & 0 & -7.505208\bar{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.505208\bar{3} & 0 & 7.67708\bar{3} \end{pmatrix}}_{\text{nach erstem Element}} \longrightarrow (K_{ij}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.67708\bar{3} + 5.15625 & -5.015625 & -7.505208\bar{3} \\ 0 & 0 & -5.015625 & 5.15625 & 0 \\ 0 & 0 & -7.505208\bar{3} & 0 & 7.67708\bar{3} \end{pmatrix}}_{\text{nach erstem und zweitem Element}}$$

Die rechte Seite ermitteln wir analog. Das erste Element erzeugt die Terme D_2 und D_4 , das zweite D_3 und D_2 usw.

$$(D_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.324951171875 \\ 0 \\ -0.324951171875 \end{pmatrix} \longrightarrow (D_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.324951171875 - 0.177978515625 \\ -0.177978515625 \\ -0.324951171875 \end{pmatrix}$$

Werden schliesslich alle Matrixelemente eingetragen, so ist:

$$(K_{ij}) = \begin{pmatrix} 24.9166667 & -13.984375 & 0. & 0. & -10.49479167 \\ -13.984375 & 14.21875 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 12.83333333 & -5.015625 & -7.50520833 \\ 0. & 0. & -5.015625 & 5.15625 & 0. \\ -10.49479167 & 0. & -7.50520833 & 0. & 18.375 \end{pmatrix} \quad (D_j) = \begin{pmatrix} -1.36035156 \\ -0.82397461 \\ -0.50292969 \\ -0.17797852 \\ -0.86132812 \end{pmatrix}$$

Nun müssen noch die Randbedingungen eingearbeitet werden. Hierzu streichen wir diejenigen Spalten/Zeilen in (K_{ij}) bzw. (D_j) aus der Randknotenliste $dr = [3, 1]$ und modifizieren (D_j) mit den gestrichenen Spalten ($\Phi(x_3) = 2$ und $\Phi(x_1) = 6$). Damit sind die gestrichenen (reduzierten) Matrizen:

$$(K_{ij})_{red} = \begin{pmatrix} 24.9166667 & 0. & -10.49479167 \\ 0. & 12.83333333 & -7.50520833 \\ -10.49479167 & -7.50520833 & 18.375 \end{pmatrix}$$

$$(D_j)_{red} = \begin{pmatrix} -1.36035156 \\ -0.50292969 \\ -0.86132812 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -13.984375 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -5.015625 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82.54589844 \\ 9.52832031 \\ -0.86132812 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des System

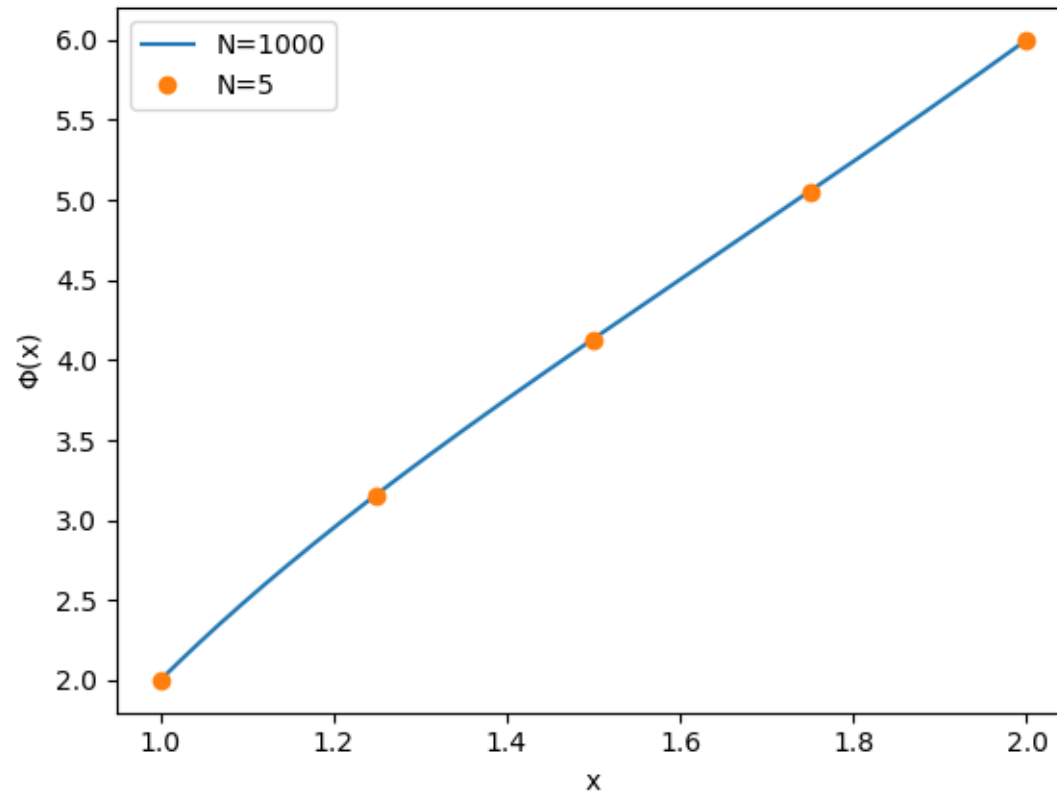
$$(K_{ij})_{red} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_2 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = (D_j)_{red}$$

ist dann $(5.05126211, 3.1561756, 4.12725827)$

Die Gesamtlösung erhält man nach einsortieren der Randbedingungen endlich zu

$$(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = (5.05126211, 6.0, 3.1561756, 2.0, 4.12725827)$$

Im folgenden Bild ist die Lösung für 5 Knoten und für 1000 Knoten zu sehen



Wir könnten übrigens die Funktionen $\alpha(x)$, $\beta(x)$ und $f(x)$ auch in die lokalen Basisfunktionen entwickeln und somit den Fehler beim Integrieren der Matricelemente etwas vermindern. Für $\alpha(x)$ beispielsweise würde gelten:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^2 \alpha(x_i) N_i(x)$$

wobei $\alpha(x_i)$ der Wert von $\alpha(x)$ am Knoten i ist. Damit ergeben sich dann beim Integrieren leicht geänderte Matrizen (siehe auch 2te

Ordnung Basisfunktion am Ende des Kapitels).

$$(\mathcal{K}_{ij}) = \frac{\alpha(x_1) + \alpha(x_2)}{2L_E} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{L_E \beta(x_1)}{12} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{L_E \beta(x_2)}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{D}_j) = \frac{L_E f(x_1)}{6} (2, 1) + \frac{L_E f(x_2)}{6} (1, 2)$$

Bei Sprüngen in den $\alpha(x)$, $\beta(x)$ und $f(x)$ ist dann allerdings bei der Definition der Funktionen Vorsicht geboten, da die Knotenwerte der Funktionen rechts vom Knoten und links vom Knoten unterschiedlich sind.

1D-Robin-Problem Als Randbedingung geben wir in diesem Fall nicht die Knotenwerte vor, sondern es gilt am Rand (n^0 ist 1 am rechten Rand und -1 am linken Rand, da der Normalenvektor aus dem Gebiet herauszeigt, siehe auch 2D)

$$\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot n^0 + \gamma(x) \Phi|_{\Gamma} = q(x)$$

Die Variable x nimmt hierbei die Werte a, b der Ränder an.

Da nun alle Knotenwerte unbekannt sind, macht man den Ansatz:

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^N \Phi_j U_j(r)$$

Man beachte, dass in diesem Fall die Nummerierung geändert ist, $j = 1$ ist jetzt der linke Randknoten, $j = N$ der rechte Randknoten. Die Berechnung der Integrale und damit der Matrix K_{jk} ist nun völlig gleich zum zuvor diskutierten Fall des reinen Dirichletproblems. Im Gegensatz hierzu werden allerdings die Randknoten nicht gestrichen, da diese ja unbekannt sind. Neben den Integralbeiträgen gibt es aber noch einen Randterm, der zu einer Modifikation der Matrix K_{jk} führen wird. Betrachtet man diesen Zusatzbeitrag (Die Indizes 1, N seien hier der Einfachheit halber die Randindizes), so findet man nach Einsetzen der Randbedingung:

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^N \Phi_j U_k(x) \left(\alpha_1 \frac{\partial U_j(x)}{\partial x} \right) \Big|_a^b &= -U_k(x) \left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Big|_a^b \\
&= -n^0 U_k(\gamma(x) \Phi - q(x)) \Big|_a^b = U_k(b) \gamma(b) \Phi(b) + U_k(a) \gamma(a) \Phi(a) - U_k(b) q(b) - U_k(a) q(a) \\
&= \gamma(b) \sum_{j=1}^N \Phi_j U_k(b) U_j(b) + \gamma(a) \sum_{j=1}^N \Phi_j U_k(a) U_j(a) - U_k(b) q(b) - U_k(a) q(a) \\
&= U_k(b) \gamma(b) \Phi_N + U_k(a) \gamma(a) \Phi_1 - U_k(b) q(b) - U_k(a) q(a)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nur von null verschieden, falls k der Index eines Randknotens ist. Betrachten wir z.B den linken Randknoten ($x = a$) so gilt für den Zusatzbeitrag (Randterm) in der linken Randknotenzeile des LGS (hier Zeile 1):

$$\Phi_1 \gamma(a) - q(a)$$

Das bedeutet, dass man $\gamma(r_{Rand})$ auf das Diagonalelement ($K_{Randknotenindex, Randknotenindex}$) addiert. Analog addiert man $q(x_{Rand})$ auf den Vektor ($D_{Randknotenindex}$) der rechten Seite. Das so entstandene LGS kann dann gelöst werden.

$K_{s,s} = K_{s,s} + \gamma(r_s)$	$D_s = D_s + q(x_s)$	$s : \text{Randknotenindex}$
-----------------------------------	----------------------	------------------------------

Gibt es am linken Rand eine Dirichlet-Bedingung und am rechten Rand eine Robin-Bedingung, so werden nur die Zeilen/Spalten zum linken Randknoten gestrichen (die rechte Seite wird natürlich auch hier mit der linken Randknotenspalte und dem Funktionswert modifiziert). Der rechte Randknoten verbleibt allerdings im LGS und wird, wie eben besprochen, behandelt.

Ein Beispiel

Gegeben sei die obige Differentialgleichung mit einer Robin Randbedingung

$$-\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Phi}{dx} \right) + x\Phi = -x^3 \quad \text{Randbedingungen:} \quad -\frac{d\Phi}{dx} + 3\Phi = 4 \Big|_{x=1} \quad \text{und} \quad 4\frac{d\Phi}{dx} + 6\Phi = 7 \Big|_{x=2}$$

Man liest an der Randbedingung unmittelbar ab $\gamma(x = 1) = 3$, $q(x = 1) = 4$ und am rechten Rand $\gamma(x = 2) = 6$, $q(x = 2) = 7$.

$$p = [1.75, 2, 1.25, 1.0, 1.5]$$

$$t = [[2, 4], [3, 2], [4, 0], [0, 1]]$$

$$rR = [3, 1]$$

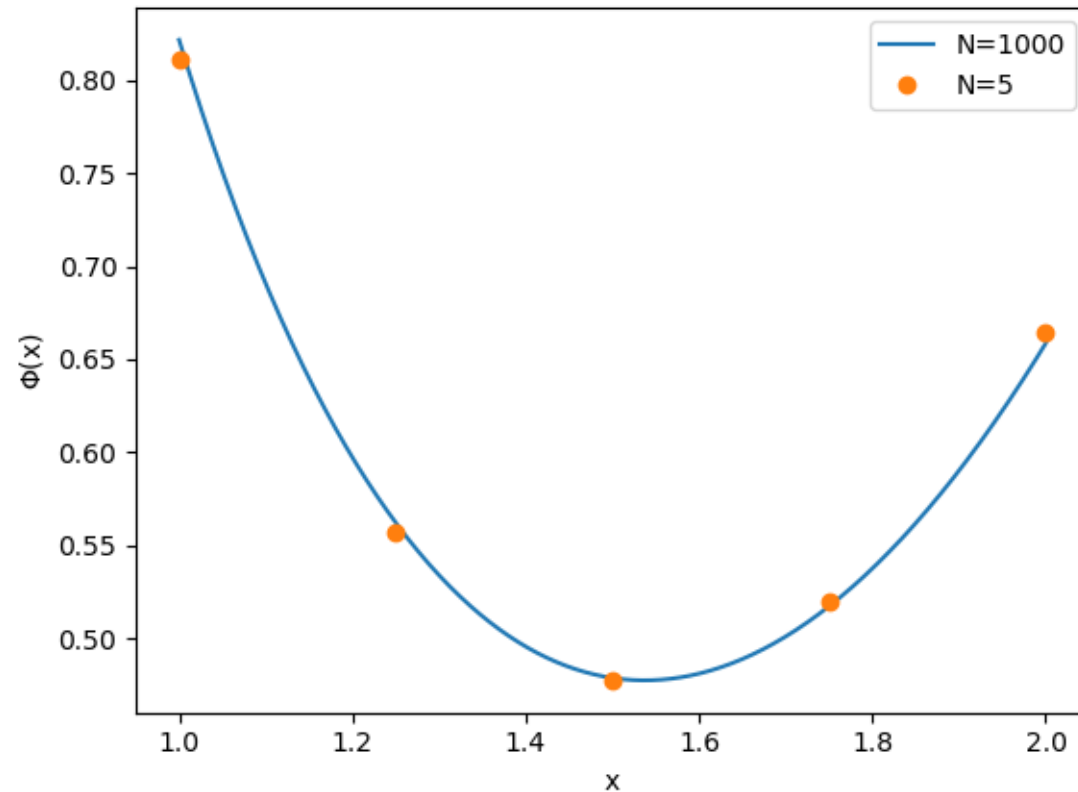
$$R0 = [[3.0, 4.0], [6.0, 7.0]]$$

Die Matrix (K_{ij}) und die rechte Seite (D_j) übernehmen wir aus dem obigen Beispiel (vor der Reduktion) und addieren den Wert $\gamma(1)$ auf K_{33} , den Wert $\gamma(2)$ auf K_{11} . Analog für die rechte Seite den Wert $q(1)$ auf D_3 und schliesslich den Wert $q(2)$ auf D_1 .

$$(K_{ij}) = \begin{pmatrix} 24.91666667 & -13.984375 & 0. & 0. & -10.49479167 \\ -13.984375 & 14.21875 + 6 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 12.83333333 & -5.015625 & -7.50520833 \\ 0. & 0. & -5.015625 & 5.15625 + 3 & 0. \\ -10.49479167 & 0. & -7.50520833 & 0. & 18.375 \end{pmatrix} \quad (D_j) = \begin{pmatrix} -1.36035156 \\ -0.82397461 + 7 \\ -0.50292969 \\ -0.17797852 + 4 \\ -0.86132812 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Systems $(K_{ij}) \cdot \vec{\Phi} = (D_j)$ ist in diesem Fall (es sind keine Dirichletknoten vorhanden)

$$\vec{\Phi} = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = (0.51970021, 0.66491291, 0.55708771, 0.81117726, 0.47748989)$$



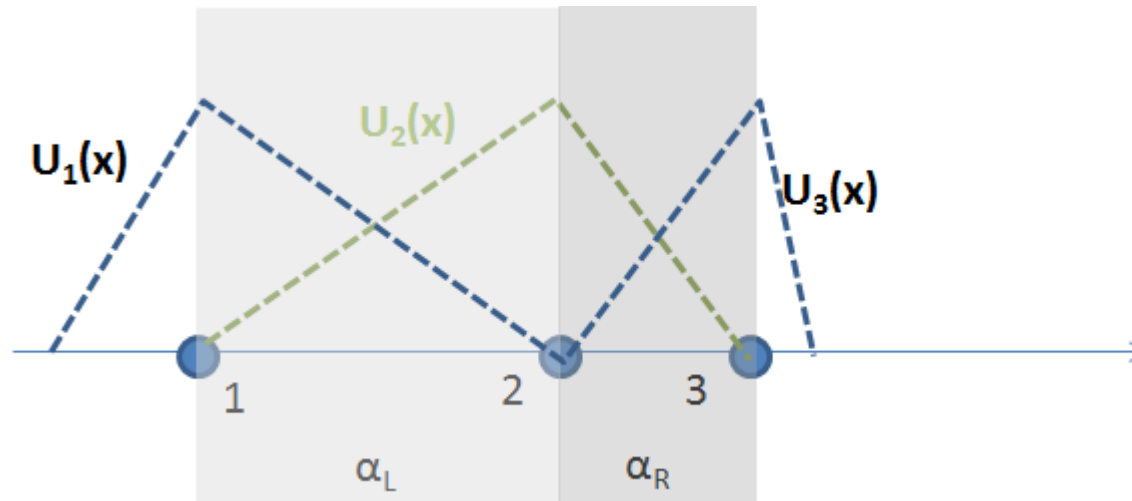
Noch eine abschliessende Bemerkung zu dem Verhalten der Lösung an einer Sprungstelle. In allen Beispielen (und den Herleitungen), die wir bislang betrachtet haben waren die Funktionen α, β, f immer stetige und differenzierbare Funktionen. Für ein elektrostatisches Problem wird das in der Regel nicht der Fall sein. Man stelle sich einen Plattenkondensator vor, in dem zwei unterschiedliche Dielektrika, Polarisierungen und Flächenladungsdichten sind. Das Problem würde also z.B. wie folgt lauten:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \rho - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Sowohl die Permeabilität, als auch die Polarisierung springe an der Trennfläche zweier Elemente und es gebe eine geladene Schicht. Wir wissen aus der Elektrostatik, dass an solchen Sprungstellen die Normalkomponente von \vec{D} um die Flächenladungsdichte springt oder auf das elektrische Feld bezogen, dass an jeder Sprungstelle gilt:

$$\epsilon_0 \epsilon_r^- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^- = \epsilon_0 \epsilon_r^+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^+ + \sigma + P^- - P^+$$

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob unser numerisches Verfahren einen solchen Sprung in der Ableitung von Φ hervorbringt (falls nicht, dann wäre das Verfahren wohl nicht geeignet für unsere Zwecke). In unserem finalen Gleichungssystem haben wir uns über solche Sprungstellen keine Gedanken gemacht, wir haben sie bei der Herleitung übergangen, dennoch können wir sie im Programm sehr einfach durch eine Fallunterscheidung (z.B. in $\epsilon(x)$, $P(x)$ und σ) erzeugen.



Anhand der Skizze wollen wir uns nun überlegen, wie sich die Lösung unseres LGS verhält. Betrachten wir die beiden Elemente, so gilt für die linke Seite der zweiten Zeile unseres LGS gemäß der Herleitung der Matrixelemente doch folgendes:

$$\text{2te Zeile:} \quad -\frac{\alpha_L}{L_L} \Phi_1 + \frac{\alpha_L}{L_L} \Phi_2 + \frac{\alpha_R}{L_R} \Phi_2 - \frac{\alpha_R}{L_R} \Phi_3$$

Nun ist aber $\Phi_L(x) = \Phi_1 U_1(x) + \Phi_2 U_2(x)$ und analog $\Phi_R(x) = \Phi_2 U_2(x) + \Phi_3 U_3(x)$ und damit gilt für die Ableitung (in unserem Fall der linearen Näherung)

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_L = -\Phi_1 \frac{1}{L_L} + \Phi_2 \frac{1}{L_L} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_R = -\Phi_2 \frac{1}{L_R} + \Phi_3 \frac{1}{L_R}$$

Somit lässt sich also unsere linke Seite wie folgt schreiben:

$$\alpha_L \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_L - \alpha_R \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_R$$

Für den Fall, dass die rechte Seite der Dgl. null ist haben wir also bereits die analytische Übergangsbedingung:

Nun betrachten wir die rechte Seite. Zunächst sei die Ladungsdichte eine Oberflächenladungsdichte, also $\rho = \sigma \delta(x - x_2)$. Für die zweite Zeile haben wir die rechte Seite mit der (globalen) Testfunktion $U_2(x)$ zu multiplizieren und zu integrieren.

$$\int_{x_1}^{x_3} \sigma \delta(x - x_2) U_2(x - x_2) dx = \sigma$$

Für die Beiträge der sogenannten gebundenen Ladungsdichte $\rho_{geb.} = -\text{div}(P) = -\frac{\partial P}{\partial x}$ betrachten wir zunächst ganz generell Beiträge einer Ableitung. Wir nehmen also an, dass $f = \frac{\partial g}{\partial x}$ gilt. Die beiden zu berechnenden Integrale pro Element lauten dann:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x} N_k(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (g N_k(x)) - g \frac{\partial N_k}{\partial x} dx \\ &= g N_k(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} g \frac{(-1)^k}{L_E} dx \\ &\approx g(x_2) N_k(x_2) - g(x_1) N_k(x_1) - g_M (-1)^k = g(x_2) \delta_{k,2} - g(x_1) \delta_{k,1} - g_M (-1)^k \\ &= g_2 \delta_{k,2} - g_1 \delta_{k,1} - g_M (-1)^k \end{aligned}$$

Die rechte Seite setzt sich also aus einem Term in der Mitte (Volumenanteil g_M) und Randtermen g_k zusammen. In der Elektrostatik sind das die Anteile zur gebundenen Volumenladungsdichte $-div(P)$ und zur Oberflächenladungsdichte $\vec{n} \cdot \vec{P}$. Springt die Polarisierung, so liegt an der Sprungstelle eine Oberflächenladungsdichte $\vec{n} \cdot \vec{P}$ vor.

Auf unser Beispiel angewendet $g = -P'$, $P_L = 0$, $P_R = P_0$ ist damit die rechte Seite:

$$D_2 = - \left(P_0 \cdot N_2(x_2) - 0 \cdot N_2(x_1) - 0 \cdot (-1)^2 + P_0 \cdot N_1(x_2) - P_0 \cdot N_1(x_1) - P_0 \cdot (-1)^1 \right) = - (P_0 + (-P_0 + P_0)) = -P_0$$

Damit ist also endlich die zweite Zeile des LGS:

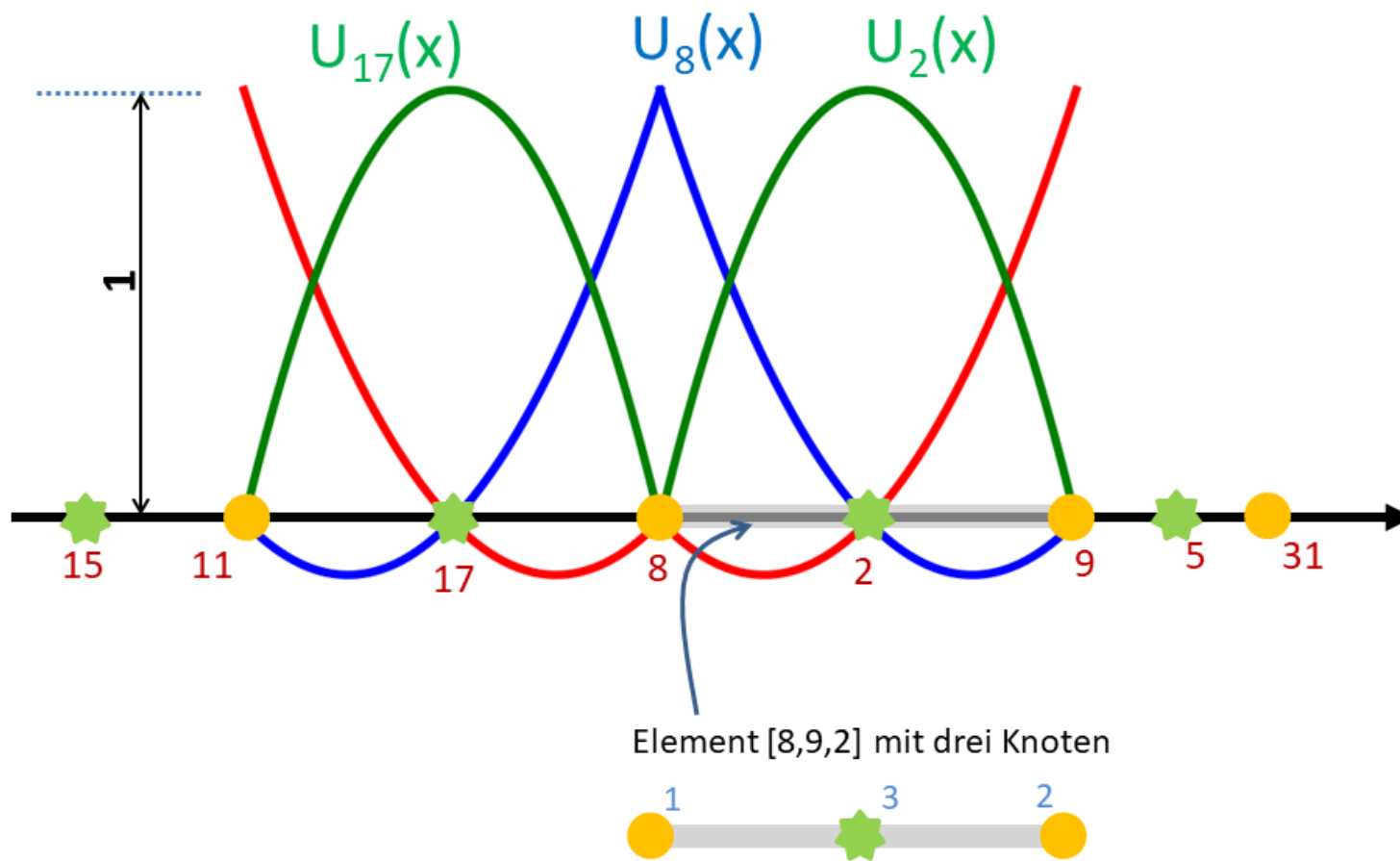
$$\alpha_L \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_L - \alpha_R \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_R = \sigma - P_0$$

und das ist gerade die diskrete Form der allgemeinen Übergangsbedingung von oben.

Unser Gleichungssystem macht also nicht anderes, als an jedem Knoten die Übergangsbedingungen (Sprungbedingungen) der Elektrostatik zu fordern. Damit ist gezeigt, dass die Übergangsbedingungen der Elektrostatik in unserem Formalismus enthalten sind.

Abschliessend sei bemerkt, dass man die eben gezeigten Eigenschaften auch etwas allgemeiner zeigen kann. Wir werden darauf im zweidimensionalen Fall noch zu sprechen kommen.

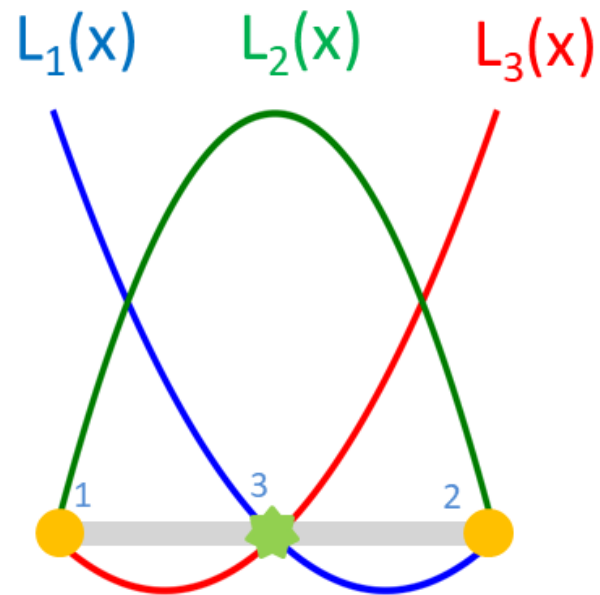
Bislang waren die Entwicklungsfunktionen und damit auch die Testfunktionen linear. Um die Konvergenz zu verbessern können wir auch mit quadratischen Basisfunktionen arbeiten. Wenn wir bei unserem Konzept bleiben wollen, dass die Basisfunktionen über einem Knoten den Wert eins haben und bei allen anderen Knoten des Elementes null sind, so benötigen wir pro Element einen weiteren Knoten. Diesen wollen wir in die Mitte legen und mit dem lokalen Index 3 versehen.



Die Systematik, die wir bei den linearen Elementen gesehen haben bleibt erhalten. So wird es beispielsweise in der 8-ten Zeile (also für

die 8-te Testfunktion) nur Beiträge in der Matrix von den beiden Elementen, die an den Knoten 8 angrenzen, geben. In allen anderen Fällen ist die Testfunktion null, so dass es keine weiteren Elemente gibt. In der Skizze sind das also für das linke Element die Beiträge $K_{8,11}$, $K_{8,17}$, $K_{8,8}$ und für das rechte Element die Beiträge $K_{8,8}$, $K_{8,2}$, $K_{8,9}$. Nun gibt es allerdings noch die Mittelknoten und auch diese werden als Testfunktionen verwendet. In der Zeile 17 erwarten wir also die Beiträge $K_{17,11}$, $K_{17,17}$, $K_{17,8}$, diesmal nur vom linken Element, denn der Knoten 17 taucht nur in diesem Element auf (und ausserhalb des Elementes ist diese Testfunktion null), wohingegen der Knoten 8 ja in den beiden gezeigten Elementen Teil der Elemente ist.

Natürlich werden wir auch hier wieder elementweise vorgehen, d.h. wir berechnen für jedes Element in gewohnter Weise alle Matrixelemente und schieben sie sogleich in die Matrix ein. Deshalb werden wir auch hier wieder lokale Basisfunktionen definieren und alle möglichen Integrale pro Element allgemein berechnen. Die Abbildung zeigt die lokalen Basisfunktionen, bei denen wir wieder darauf achten, dass sie die x-Achse in den Knoten schneiden bzw. über dem betreffenden Knoten den Wert eins annehmen.



Die lokalen Basisfunktionen sollen nun $L_i(x)$ heissen. Es muss also innerhalb eines Elementes gelten:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Wir können auch hier mit dem Ansatz $L_i = a_i + b_i x + c_i x^2$ und der oberen Forderung die Koeffizienten bestimmen. Es geht aber deutlich schneller, wenn wir die schon bekannten N_i benutzen, denn Sie erfüllen schon einen Großteil der Bedingungen. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass die drei folgenden Produkte die geforderten Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= (2N_1(x) - 1)N_1(x) = \frac{2}{L_E^2}(x_2 - x)^2 - \frac{1}{L_E}(x_2 - x) \\ L_2(x) &= (2N_2(x) - 1)N_2(x) = \frac{2}{L_E^2}(x - x_1)^2 - \frac{1}{L_E}(x - x_1) \\ L_3(x) &= 4N_1(x)N_2(x) = \frac{4}{L_E^2}(x_2 - x)(x - x_1) \end{aligned}$$

Der linke Knoten hat die Nummer eins, der rechte die Nummer zwei und der mittlere Knoten die Nummer drei.

Bislang haben wir die Funktionen $\alpha(x), \beta(x), f(x)$ in den Integralen als über das Element konstant angenommen. An dieser Stelle kann das Ergebnis zusätzlich verbessert werden, falls auch die Funktionen entwickelt werden. Wir könnten also beispielsweise annehmen $\alpha(x) = \sum_m \alpha_m L_m(x)$. Die α_i wäre hierbei die Werte von $\alpha(x)$ an den Stellen x_i .

Wir müssen nun ganz einfach die neuen Matricelemente ausrechnen, also die folgenden Integrale lösen

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \alpha_m L_m \frac{\partial L_j}{\partial x} \frac{\partial L_k}{\partial x} + \beta_m L_m L_j L_k dx \\ &\int_{x_1}^{x_2} f_m L_m L_k \end{aligned}$$

Die Integrale lassen sich sehr viel einfacher lösen, falls man Substitution $N_1(x) = \xi$ benutzt. Die Integrale wollen wir aber dieses Mal nicht von Hand ausrechnen, sondern mit sympy (87 Integrale), einer symbolischen Rechenbibliothek. Wir nehmen das Ergebnis vorweg, der Python-code folgt danach

Zwei Fälle wurden betrachtet. Der eine Fall ist, wenn man nach wie vor die Funktionen als konstant über dem Integrationsintervall (bzw. dem Element) annimmt. Wir erhalten dann für unsere neuen lokalen Matrixelemente die lokale Matrix:

$$(\mathcal{K}_{ij}) = \frac{\alpha(x_M)}{3L_E} \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{pmatrix} + \frac{L_E \beta(x_M)}{30} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{D}_j) = \frac{f(x_M)L_E}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Legt man jedoch die quadratische Näherung der Funktionen zugrunde, so findet man nach Integration die lokalen Matrixelemente

$$(\mathcal{K}_{ij}) = \frac{\alpha(x_1)}{30L_E} \begin{pmatrix} 37 & 7 & -44 \\ 7 & -3 & -4 \\ -44 & -4 & 48 \end{pmatrix} + \frac{\alpha(x_2)}{30L_E} \begin{pmatrix} -3 & 7 & -4 \\ 7 & 37 & -44 \\ -4 & -44 & 48 \end{pmatrix} + \frac{\alpha(x_3)}{30L_E} \begin{pmatrix} 36 & -4 & -32 \\ -4 & 36 & -32 \\ -32 & -32 & 64 \end{pmatrix} \\ + \frac{L_E \beta(x_1)}{420} \begin{pmatrix} 39 & -3 & 20 \\ -3 & -3 & -8 \\ 20 & -8 & 16 \end{pmatrix} + \frac{L_E \beta(x_2)}{420} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -8 \\ -3 & 39 & 20 \\ -8 & 20 & 16 \end{pmatrix} + \frac{L_E \beta(x_3)}{420} \begin{pmatrix} 20 & -8 & 16 \\ -8 & 20 & 16 \\ 16 & 16 & 192 \end{pmatrix}$$

und die rechte Seite

$$(\mathcal{D}_j) = \frac{f(x_1)L_E}{30} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{f(x_2)L_E}{30} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{f(x_3)L_E}{30} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Und nun der Code hierzu

```
[1]: import sympy as sy
sy.init_printing(use_latex='mathjax')

x,x1,x2,LE,z = sy.symbols("x x_1 x_2 L_E z")

N=[z,1-z]
L=[(2*N[0]-1)*N[0],(2*N[1]-1)*N[1],4*N[0]*N[1]]
dL=[-sy.diff(F,z)*(1/LE) for F in L]
dN=[1/LE,-1/LE]
```

```

A=[sy.zeros(2,2),sy.zeros(2,2)]
B=[sy.zeros(2,2),sy.zeros(2,2)]
D=[sy.Matrix(2*[0]),sy.Matrix(2*[0])]

for m in range(2):
    for j in range(2):
        for k in range(2):
            B[m][j,k]=sy.integrate(N[m]*N[j]*N[k]*LE,(z,0,1))
            A[m][j,k]=sy.integrate(N[m]*dN[j]*dN[k]*LE,(z,0,1))
            D[m][j]=sy.integrate(N[m]*N[j]*LE,(z,0,1))

print("Lineare Approximation der Funktionen alpha beta")
display("A=",A[0],A[1])
display("B=",B[0],B[1])
display("D=",D[0],D[1])


A=[sy.zeros(3,3),sy.zeros(3,3),sy.zeros(3,3)]
B=[sy.zeros(3,3),sy.zeros(3,3),sy.zeros(3,3)]
D=[sy.Matrix(3*[0]),sy.Matrix(3*[0]),sy.Matrix(3*[0])]

for j in range(3):
    for k in range(3):
        B[0][j,k]=sy.integrate(L[j]*L[k]*LE,(z,0,1))
        A[0][j,k]=sy.integrate(dL[j]*dL[k]*LE,(z,0,1))
        D[0][j]=sy.integrate(L[j]*LE,(z,0,1))

print("alpha, beta in der Mitte des Intervals")
display("A=",A[0])
display("B=",B[0])
display("D=",D[0])

```

```

for m in range(3):
    for j in range(3):
        for k in range(3):
            B[m][j,k]=sy.integrate(L[m]*L[j]*L[k]*LE,(z,0,1))
            A[m][j,k]=sy.integrate(L[m]*dL[j]*dL[k]*LE,(z,0,1))
            D[m][j]=sy.integrate(L[m]*L[j]*LE,(z,0,1))

print("Linare Approximation der Funktionen alpha beta")
display("A=",A)
display("B=",B)
display("D=",D)

```

Linare Approximation der Funktionen alpha beta

'A= '

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2L_E} & -\frac{1}{2L_E} \\ -\frac{1}{2L_E} & \frac{1}{2L_E} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2L_E} & -\frac{1}{2L_E} \\ -\frac{1}{2L_E} & \frac{1}{2L_E} \end{bmatrix}$$

'B= '

$$\begin{bmatrix} \frac{L_E}{4} & \frac{L_E}{12} \\ \frac{L_E}{12} & \frac{L_E}{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L_E}{12} & \frac{L_E}{12} \\ \frac{L_E}{12} & \frac{L_E}{4} \end{bmatrix}$$

'D= '

$$\begin{bmatrix} \frac{L_E}{3} \\ \frac{L_E}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L_E}{6} \\ \frac{L_E}{3} \end{bmatrix}$$

alpha, beta in der Mitte des Intervals

'A= '

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3L_E} & \frac{1}{3L_E} & -\frac{8}{3L_E} \\ \frac{1}{3L_E} & \frac{7}{3L_E} & -\frac{8}{3L_E} \\ -\frac{8}{3L_E} & -\frac{8}{3L_E} & \frac{16}{3L_E} \end{bmatrix}$$

'B= '

$$\begin{bmatrix} \frac{2L_E}{15} & -\frac{L_E}{30} & \frac{L_E}{15} \\ -\frac{L_E}{30} & \frac{2L_E}{15} & \frac{L_E}{15} \\ \frac{L_E}{15} & \frac{L_E}{15} & \frac{8L_E}{15} \end{bmatrix}$$

'D= '

$$\begin{bmatrix} \frac{L_E}{6} \\ \frac{L_E}{2} \\ \frac{2L_E}{3} \end{bmatrix}$$

Lineare Approximation der Funktionen alpha beta

'A= '

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{37}{30L_E} & \frac{7}{30L_E} & -\frac{22}{15L_E} \\ \frac{7}{30L_E} & -\frac{10L_E}{22} & -\frac{15L_E}{8} \\ -\frac{22}{15L_E} & -\frac{2}{15L_E} & \frac{5L_E}{5L_E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{10L_E} & \frac{7}{30L_E} & -\frac{2}{15L_E} \\ \frac{7}{30L_E} & \frac{30L_E}{22} & -\frac{15L_E}{8} \\ -\frac{2}{15L_E} & -\frac{22}{15L_E} & \frac{5L_E}{5L_E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{6}{5L_E} & -\frac{2}{15L_E} & -\frac{16}{15L_E} \\ -\frac{2}{15L_E} & \frac{5L_E}{16} & -\frac{15L_E}{32} \\ -\frac{16}{15L_E} & -\frac{16}{15L_E} & \frac{15L_E}{15L_E} \end{bmatrix} \right]$$

'B= '

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{13L_E}{140} & -\frac{L_E}{140} & \frac{L_E}{21} \\ -\frac{L_E}{140} & -\frac{L_E}{140} & -\frac{2L_E}{105} \\ \frac{L_E}{21} & -\frac{2L_E}{105} & \frac{4L_E}{105} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{L_E}{140} & -\frac{L_E}{140} & -\frac{2L_E}{105} \\ -\frac{L_E}{140} & \frac{13L_E}{140} & \frac{L_E}{21} \\ -\frac{2L_E}{105} & \frac{L_E}{21} & \frac{4L_E}{105} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{L_E}{21} & -\frac{2L_E}{105} & \frac{4L_E}{105} \\ -\frac{2L_E}{105} & \frac{L_E}{21} & \frac{4L_E}{105} \\ \frac{4L_E}{105} & \frac{4L_E}{105} & \frac{16L_E}{35} \end{bmatrix} \right]$$

'D= '

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{2L_E}{15} \\ -\frac{L_E}{30} \\ \frac{L_E}{15} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{L_E}{30} \\ \frac{2L_E}{15} \\ \frac{L_E}{15} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{L_E}{15} \\ \frac{L_E}{15} \\ \frac{8L_E}{15} \end{bmatrix} \right]$$

Die Implementierung ist denkbar einfach, es muss nun noch ein zusätzlicher Knoten pro Element erzeugt werden. Die Schleifen für das Einsortieren der Einzelemente müssen erweitert werden. Für die Behandlung der Randbedingung muss keine weitere Änderung erfolgen. Dirichletknoten werden entsprechend gelöscht und die Spalten der Matrix mit der rechten Seite verrechnet. Bei Robin-Rändern werden auf die entsprechenden Diagonalelemente der Randknoten und den Zeilen auf der rechten Seite γ und q einsortiert.

0.1.3 Zweidimensionale FEM

Auf dem Gebiet G sei die Differentialgleichung:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right) + \beta \Phi = f(x, y)$$

vorgelegt.

Wir wollen nun zu diesem Problem die schwache Formulierung herleiten. Wir multiplizieren hierzu, wie im eindimensionalen Fall, die Differentialgleichung mit einer Funktion $v(x, y)$ und integrieren über das Gebiet G .

$$-\int_G v(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right) \right] dG + \int_G \beta v(x, y) \Phi(x, y) dG = \int_G v(x, y) f(x, y) dG$$

Da wir gerne den Gaußschen Integralsatz der Ebene benutzen wollen (partielle Integration in 2D), ziehen wir die Ableitungen nach vorne und erhalten

$$\begin{aligned}
& - \int_G \frac{\partial}{\partial x} \left(v(x, y) \alpha_1 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v(x, y) \alpha_2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right) dG + \int_G \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \right) \alpha_1 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \right) \alpha_2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dG \\
& + \int_G \beta v(x, y) \Phi(x, y) dG = \int_G v(x, y) f(x, y) dG
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir den Gaußschen Satz der Ebene gemäß

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dG = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

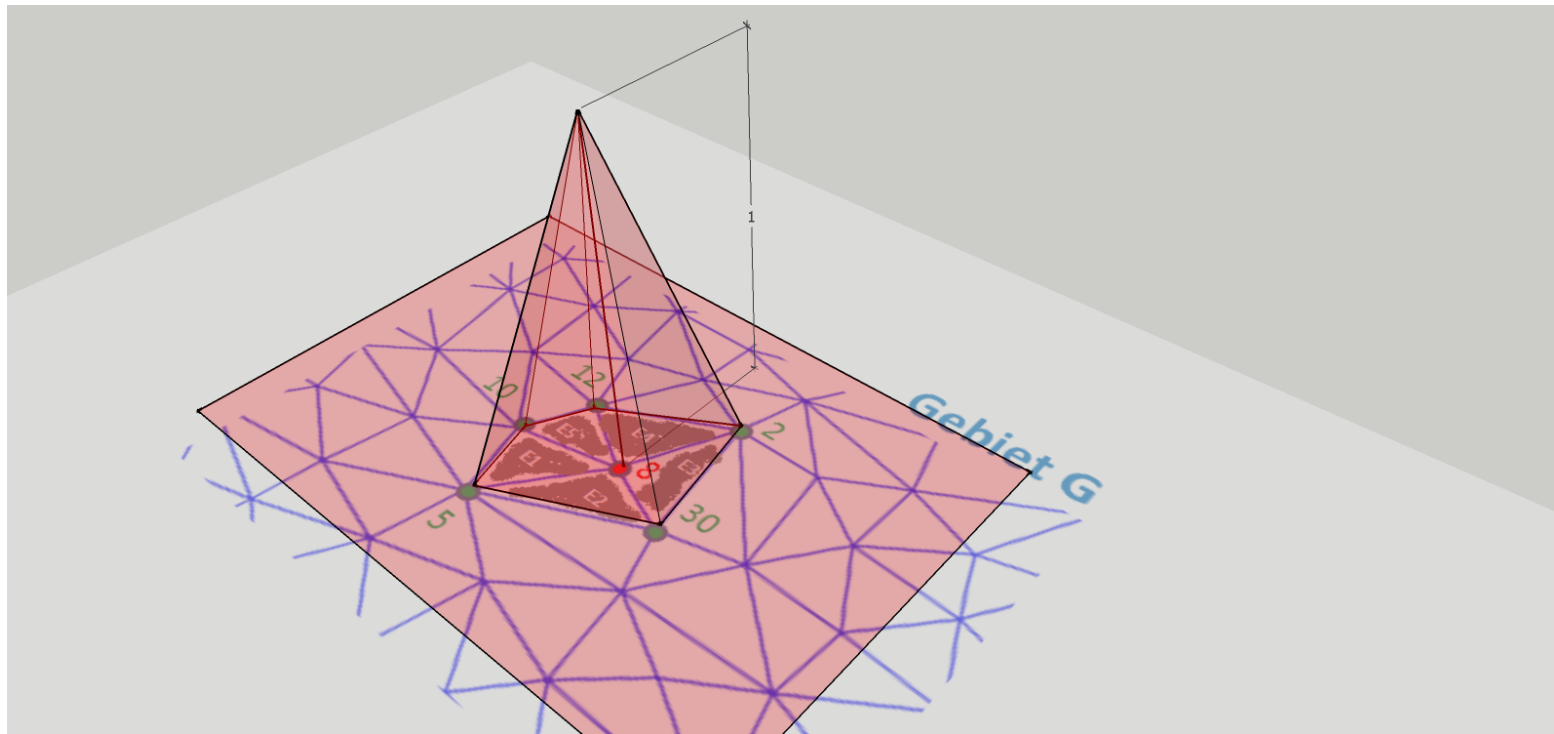
Das Element $d\vec{S}$ ist hierbei stets senkrecht auf dem Rand von G und könnte durch $\dot{\vec{x}} \times \vec{e}_z dt$ systematisch aus der Parameterdarstellung $\vec{x}(t)$ des Randes gewonnen werden. Die Anwendung des Satzes ergibt:

$$\begin{aligned}
& \int_G \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \alpha_1 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \alpha_2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dG + \int_G \beta v(x, y) \Phi(x, y) dG - \int_{\partial G} v(x, y) \left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \alpha_2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right) \cdot d\vec{S} \\
& = \int_G v(x, y) f(x, y) dG
\end{aligned}$$

Diese Form heisst schwache Form, da nur noch erste Ableitungen in der zu lösenden Gleichung auftauchen. Diese Gleichung wird nun, wie im folgenden diskutiert, in ein endliches Gleichungssystem verwandelt. Dieses Gleichungssystem stellt nur eine Näherung der ursprünglichen Gleichung dar.

Hierzu werde der Raum durch endlich große Teilintervalle (finite Elemente) zerlegt. Wir konzentrieren uns hierbei auf Dreiecke, deren Eckpunkte nennen wir Knoten. Auf diesen Elementen sind Funktionen $U_i(x, y)$ definiert. Diese Funktionen haben die Eigenschaft, dass Sie am Knoten i des Dreiecks den Wert eins haben und dann (z.B. linear) zum nächsten Knoten hin abfallen und dort den Wert null annehmen. Insbesondere gilt also

$$U_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$



In der Skizze ist beispielsweise die Funktion $U_8(x, y)$ veranschaulicht. Sie hat am Knoten 8 den Wert 1, fällt dann zu den Knoten 5, 30, 2, 12, 10 linear ab. Ausserhalb des Kerngebietes (Elemente E1, ..., E5) ist die Funktion dann null.

Wir entwickeln nun die unbekannte Funktion $\Phi(x, y)$ in diese Funktionen gemäß

$$\Phi(x, y) = \sum_{j=1}^N \Phi_j U_j(x, y)$$

Weiterhin wählen wir für $v(x, y)$ in unserer schwachen Formulierung die Funktionen $U_k(x, y)$. Man nennt diese spezielle Wahl von U_k in Verbindung mit der schwachen Form dann ein Galerkin-Verfahren.

Die diskrete Variante der schwachen Formulierung lautet damit nach Einsetzen obiger Entwicklung und Wahl der Funktionen $v(x, y)$

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j \underbrace{\left(\int_G \alpha_1 \frac{\partial U_k}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial U_k}{\partial y} \frac{\partial U_j}{\partial y} dG + \int_G \beta U_k U_j dG - \int_{\partial G} U_k \left(\alpha_1 \frac{\partial U_j}{\partial x}, \alpha_2 \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) \cdot d\vec{S} \right)}_{\text{Eine Zahl, die von k und j abhängt}} = \underbrace{\int_G U_k f(x, y) dG}_{\text{Eine Zahl, die von k abhängt}}$$

Wir behalten im Auge, dass die Entwicklungskoeffizienten Φ_j gesucht werden und somit stellt dieses System ein quadratisches LGS dar, falls wir für die Indizes k nacheinander diejenigen der Dreiecksknoten benutzen.

Dirichlet-Problem Um die Randbedingung des ursprünglichen Randwertproblems in dieses LGS einzuarbeiten betrachten wir zwei Grenzfälle. Zunächst nehmen wir an, dass wir ein reines Dirichletproblem vor uns haben. In diesem Fall lässt sich der Ansatz übersichtlicher in der Form

$$\Phi(x, y) = \sum_{d=1}^{N_d} \Phi_d U_d(x, y) + \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j U_j(x, y)$$

schreiben. Hierbei sind die N_d Knoten in der ersten Summe Randknoten des Gebietes G und die Knoten der zweiten Summe nur im inneren des Gebietes liegende Knoten. Die Φ_d sind aufgrund des gestellten Problems vorgegebene Werte, sie sind also nicht unbekannt. Zu bestimmen sind demnach nur noch die Werte Φ_j mit $j = 1..N_i$. Somit wählen wir für die numerische Form der schwachen Formulierung (siehe obiges LGS) für U_k nur die Funktionen $U_1..U_{N_i}$ aus, also nur jene Basisfunktionen, die zu inneren Knoten gehören.

Das hat aber eine wichtige Konsequenz für das Linienintegral über den Rand des Gebietes. Da U_k auf dem Rand immer null ist ($U_k(x_j, y_j) = 0$ für $(x_j, y_j) \in \partial G$ und $(x_k, y_k) \notin \partial G$) schreiben wir das LGS als

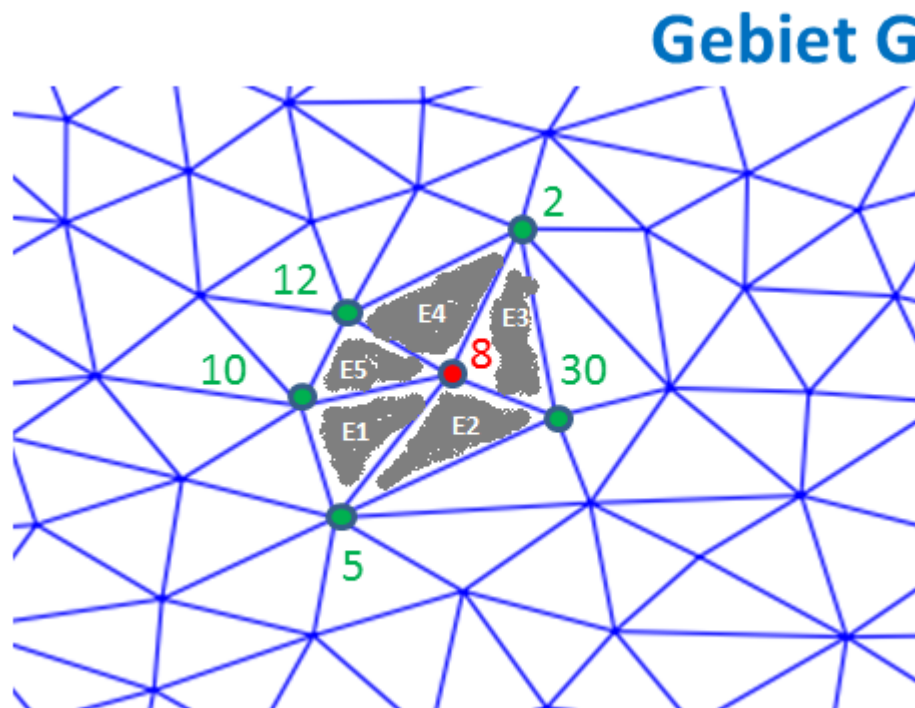
$$\sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j \underbrace{\left(\int_G \alpha_1 \frac{\partial U_k}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial U_k}{\partial y} \frac{\partial U_j}{\partial y} dG + \int_G \beta U_k U_j dG \right)}_{K_{kj}} = \int_G U_k f(x, y) dG - \sum_{d=1}^{N_d} \Phi_d \underbrace{\left(\int_G \alpha_1 \frac{\partial U_k}{\partial x} \frac{\partial U_d}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial U_k}{\partial y} \frac{\partial U_d}{\partial y} dG + \int_G \beta U_k U_d dG \right)}_{K_{kd}}$$

Die rechte Seite enthält keine Unbekannte, stellt also die rechte Seite eines LGS dar. Das LGS ist, in Analogie zum 1D-Fall, von der Form

$$\sum_j K_{kj} \Phi_j = D_k - \sum_d K_{kd} \Phi_d \quad \text{mit } k, j = 1..N_i$$

Die Matrixelemente K_{kj} , D_k werden wir in Kürze für eine gegebene Geometrie und Vernetzung des Gebietes G und bei bekannten physikalischen Parametern ($\alpha_{1,2}$, β , f) berechnen.

Zunächst sei bemerkt, dass die Matrix K_{kj} sehr viele Nullen enthält, wie wir uns nun überlegen werden.



Hierzu betrachten wir als Beispiel Zeile $k = 8$ des LGS im Zusammenhang mit der obigen Skizze. Das grau schraffierte Gebiet um den

Knoten 8 ist dasjenige Gebiet in dem die Hutfunktion zum Knoten 8 von null verschieden ist. Damit reduziert sich das ursprüngliche Gebietsintegral auf eine Integration über diese Elemente (nämlich diejenigen, die den Knoten 8 enthalten). Aus diesem Grund können aber in der Zeile 8 auch nur Koeffizienten vorkommen, die zu Unbekannten dieser Elemente gehören, für $k = 8$ also z.B. nur $\Phi_2, \Phi_5, \Phi_8, \Phi_{10}, \Phi_{12}$ und Φ_{30} . Hutfunktionen U_j zu Indizes j , die ausserhalb dieser Elemente liegen würden hätten ja in diesen Elementen einen Funktionswert der null ist.

So gilt dann zum Beispiel für den zweiten Term der linken Seite des LGS

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j \int_G \beta(x, y) U_8 U_j dG &= \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j \int_{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5} \beta(x, y) U_8 U_j dG = \sum_{m=1}^5 \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_j \int_{E_m} \beta(x, y) U_8 U_j dG = \sum_{m=1}^5 \sum_{(j \text{ in } E_m)} \Phi_j \int_{E_m} \beta(x, y) U_8 U_j dG \\
&= \Phi_8 \int_{E_1} \beta(x, y) U_8 U_8 dG + \Phi_{10} \int_{E_1} \beta(x, y) U_8 U_{10} dG + \Phi_5 \int_{E_1} \beta(x, y) U_8 U_5 dG \\
&+ \Phi_8 \int_{E_2} \beta(x, y) U_8 U_8 dG + \Phi_{30} \int_{E_2} \beta(x, y) U_8 U_{30} dG + \Phi_5 \int_{E_2} \beta(x, y) U_8 U_5 dG \\
&+ \Phi_8 \int_{E_3} \beta(x, y) U_8 U_8 dG + \Phi_{30} \int_{E_3} \beta(x, y) U_8 U_{30} dG + \Phi_2 \int_{E_3} \beta(x, y) U_8 U_2 dG \\
&+ \Phi_8 \int_{E_4} \beta(x, y) U_8 U_8 dG + \Phi_2 \int_{E_4} \beta(x, y) U_8 U_2 dG + \Phi_{12} \int_{E_4} \beta(x, y) U_8 U_{12} dG \\
&+ \Phi_8 \int_{E_5} \beta(x, y) U_8 U_8 dG + \Phi_{12} \int_{E_5} \beta(x, y) U_8 U_{12} dG + \Phi_{10} \int_{E_5} \beta(x, y) U_8 U_{10} dG
\end{aligned}$$

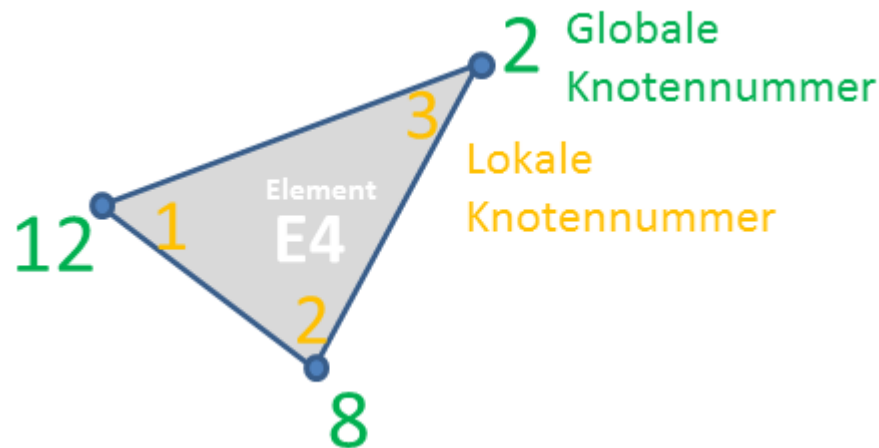
Die Integration über das Gesamtgebiet lässt sich also in eine Summe über die Elemente um den Knoten k herum umschreiben. An den Ausdrücken lässt sich auch erkennen, wie die Werte der Integrale in das gesuchte Gleichungssystem einsortiert werden müssen. So macht z.B. das Element E_5 einen Beitrag zur Matrix K des LGS an den Positionen $(8, 8)$, $(8, 12)$ und $(8, 10)$. Das Element E_2 liefert Beiträge zu $K_{8,8}$, $K_{8,30}$ und $K_{8,5}$.

Der Zeilenknoten (hier 8) führt also zu Beiträgen (in den Spalten) mit allen Knoten des betrachteten Dreiecks. Damit können wir sofort einsehen, dass es vom Element E_2 aber auch Beiträge in andere Zeilen gibt, z.B. in $K_{5,5}$, $K_{5,8}$ und $K_{5,30}$ oder in $K_{30,30}$, $K_{30,5}$ und $K_{30,8}$. Wir können somit für ein Gebietsintegral pro Element 9 Zahlenwerte berechnen und diese in die Matrix K_{kj} an die entsprechenden Positionen addieren. Dabei erwarten wir auch eine Symmetrie unter Vertauschung von k, j , d.h. die Matrix des LGS muss symmetrisch sein.

Im Folgenden können wir uns also auf die Berechnung der Gebietsintegrale über ein Element konzentrieren. Konkret sind drei Typen von Integralen zu berechnen

$$\int_{\text{Dreieck}} \beta(x, y) N_k N_j dG \quad \int_{\text{Dreieck}} \alpha_1(x, y) \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dG \quad \int_{\text{Dreieck}} f(x, y) N_k dG$$

Wir haben die auf ein Dreieck begrenzten Hutfunktionen mit N_i bezeichnet.



Das Dreieck bezeichnen wir wie folgt.

Wir führen neben den (globalen) Knotenindizes nun lokale Knotenindizes ein, um die Berechnungen übersichtlich zu halten. In einem Computerprogramm werden wir in einer Tabelle die Elemente abspeichern, hier z.B. an der 4ten Position [12,8,2]. Die Basisfunktionen U_i ($i = 1, 2, 3$, lokale Bezeichnung) berechnen wir für ein allgemeines Dreieck wie folgt:

$$N_i(x, y) = B_i x + C_i y + A_i \quad \text{mit} \quad N_i(x_i, y_i) = 1 \quad \text{und} \quad N_i(x_l, y_l) = 0 \quad l \neq i$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ C_1 \\ A_1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) = 2\Delta_E$$

Die Größe Δ_E stellt die Fläche des Dreiecks dar. Mit der Cramerschen Regel finden wir die Lösung

$$B_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & 1 \\ 0 & y_2 & 1 \\ 0 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{y_2 - y_3}{2\Delta_E} \quad C_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x_3 - x_2}{2\Delta_E} \quad A_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2\Delta_E}$$

Wir legen deshalb fest

$$\begin{array}{lll} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 = y_2 - y_3 & c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 = y_1 - y_2 & c_3 = x_2 - x_1 \end{array}$$

und finden damit in der lokalen Nummerierung

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2\Delta_E} (a_1 + b_1 x + c_1 y) \quad ; \quad N_2(x, y) = \frac{1}{2\Delta_E} (a_2 + b_2 x + c_2 y) \quad ; \quad N_3(x, y) = \frac{1}{2\Delta_E} (a_3 + b_3 x + c_3 y)$$

Die Fläche ist hier $2\Delta_E = c_2 b_1 - c_1 b_2$

Mit diesen Funktionen gehen wir in die Gebietsintegrale ((x_M, y_M) sei der Schwerpunkt des Dreiecks)

$$(1) \quad \int_{\text{Dreieck}} \alpha_1(x, y) \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} dG = \frac{b_l b_m}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Dreieck}} \alpha_1(x, y) dG \approx \frac{b_l b_m}{4\Delta_E} \alpha_1(x_M, y_M)$$

$$(2) \quad \int_{\text{Dreieck}} \alpha_2(x, y) \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} dG = \frac{c_l c_m}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Dreieck}} \alpha_2(x, y) dG \approx \frac{c_l c_m}{4\Delta_E} \alpha_2(x_M, y_M)$$

Die Berechnung des dritten Integrals gestaltet sich in einem xy -System durchaus unübersichtlich. Einfacher wird die Integration durch eine klug gewählte Koordinatentransformation, gemäß:

$$\xi = \frac{1}{2\Delta_E} (a_1 + b_1 x + c_1 y) = N_1(x, y) \quad \eta = \frac{1}{2\Delta_E} (a_2 + b_2 x + c_2 y) = N_2(x, y) \quad \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \frac{1}{2\Delta_E}$$

Die Umkehrung lautet dann

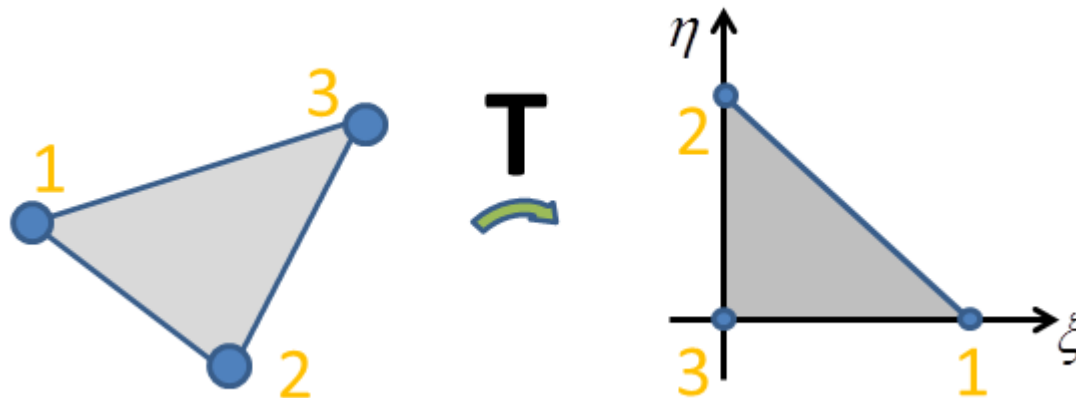
$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Delta_E \tilde{\zeta} - a_1 \\ 2\Delta_E \eta - a_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & -c_1 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} - a_1/(2\Delta_E) \\ \eta - a_2/(2\Delta_E) \end{pmatrix}$$

oder ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{\zeta} c_2 - \eta c_1 + \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{2\Delta_E} \\ y &= -\tilde{\zeta} b_2 + \eta b_1 + \frac{-a_2 b_1 + a_1 b_2}{2\Delta_E} \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Transformation der Punkte 1, 2, 3 durch die Definition der $N_i(x, y)$ festgelegt ist, da

$$\tilde{\zeta}(x_1, y_1) = 1 \quad \eta(x_1, y_1) = 0 \quad \tilde{\zeta}(x_2, y_2) = 0 \quad \eta(x_2, y_2) = 1 \quad \tilde{\zeta}(x_3, y_3) = 0 \quad \eta(x_3, y_3) = 0$$



und damit ist ($N_1 + N_2 + N_3 = 1$)

$$N_1 = \tilde{\zeta} \quad N_2 = \eta \quad N_3 = 1 - \tilde{\zeta} - \eta$$

Es gilt also mittels dieser Transformation:

$$(3) \quad \int_{\text{Dreieck}} \beta(x, y) N_2 N_2 dG = \int_{\text{Dreieck}} \beta(x, y) N_3 N_3 dG = \int_{\text{Dreieck}} \beta(x, y) N_1 N_1 dG = 2\Delta_E \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} \beta(\xi, \eta) \xi^2 d\eta d\xi \approx \frac{\Delta_E}{6} \beta(x_M, y_M)$$

und die gemischten Terme

$$(4) \quad \int_{\text{Dreieck}} \beta(x, y) N_1 N_3 dG = \int_{\text{Dreieck}} \beta(x, y) N_2 N_3 dG = \int_{\text{Dreieck}} \beta(x, y) N_1 N_2 dG = 2\Delta_E \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} \beta(\xi, \eta) \xi \eta d\eta d\xi \approx \frac{\Delta_E}{12} \beta(x_M, y_M)$$

$$(5) \quad \int_{\text{Dreieck}} f(x, y) N_3 dG = \int_{\text{Dreieck}} f(x, y) N_2 dG = \int_{\text{Dreieck}} f(x, y) N_1 dG = 2\Delta_E \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} f(\xi, \eta) \xi d\eta d\xi \approx \frac{\Delta_E}{3} f(x_M, y_M)$$

Die Gleichheit der Integrale zum gleichen und zu unterschiedlichen Indizes muss gelten, da die Indizes auch umbenannt werden können. Es lässt sich aber auch direkt nachrechnen.

Die oben erwähnten 9 Zahlen und die rechte Seite können wir kompakt schreiben als:

$$\mathcal{K}_{lm} = \frac{1}{4\Delta_E} [\alpha_1(x_M, y_M) b_l b_m + \alpha_2(x_M, y_M) c_l c_m] + \frac{\Delta_E}{12} \beta(x_M, y_M) (1 + \delta_{lm}) \quad l, m = 1..3$$

$$\mathcal{D}_l = \frac{\Delta_E}{3} f(x_M, y_M) \quad l = 1..3$$

Die Formel kann auch in Matrixform geschrieben werden. Es ist dann

$$(\mathcal{K}_{lm}) = \frac{\alpha_1(x_M, y_M)}{4\Delta_E} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3^2 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_2(x_M, y_M)}{4\Delta_E} \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{pmatrix} + \frac{\beta(x_M, y_M) \Delta_E}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und die rechte Seite

$$(\mathcal{D}_l) = \frac{\Delta_E f(x_M, y_M)}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie schon erwähnt, werden zu jedem Element diese 12 Zahlen ausgerechnet und dann in die Matrix K und in die rechte Seite eingesetzt (genauer: hineinaddiert). Für unser E_4 -Element aus dem Beispiel oben würde gelten

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11} &\rightarrow K_{12,12} = K_{12,12} + \mathcal{K}_{11} \\ \mathcal{K}_{12} &\rightarrow K_{12,8} = K_{12,8} + \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{13} &\rightarrow K_{12,2} = K_{12,2} + \mathcal{K}_{13} \\ \mathcal{K}_{21} &\rightarrow K_{8,12} = K_{8,12} + \mathcal{K}_{21} \\ &\dots \\ \mathcal{K}_{33} &\rightarrow K_{2,2} = K_{2,2} + \mathcal{K}_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &\rightarrow D_{12} = D_{12} + \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 &\rightarrow D_8 = D_8 + \mathcal{D}_2 \\ \mathcal{D}_3 &\rightarrow D_2 = D_2 + \mathcal{D}_3 \end{aligned}$$

Wie oben diskutiert wird die so berechnete Matrix (K_{kj}) nur innen liegende Knoten erhalten. Um das Randwertproblem zu lösen muss jedoch die rechte Seite noch modifiziert werden. Wir haben nämlich schon gesehen, dass das vollständige LGS für das Dirichletproblem von der Form

$$\sum_j K_{kj} \Phi_j = D_k - \sum_d K_{kd} \Phi_d$$

ist. Man kann also die Matrix (K_{kj}) auch für alle Knoten (Innen und Rand) berechnen und anschliessend das Produkt aus Randpotential und Randknotenspalte der Matrix $(K_{k,j})$ von der rechten Seite (D_k) abziehen. Schliesslich werden alle Randknotenzeilen und

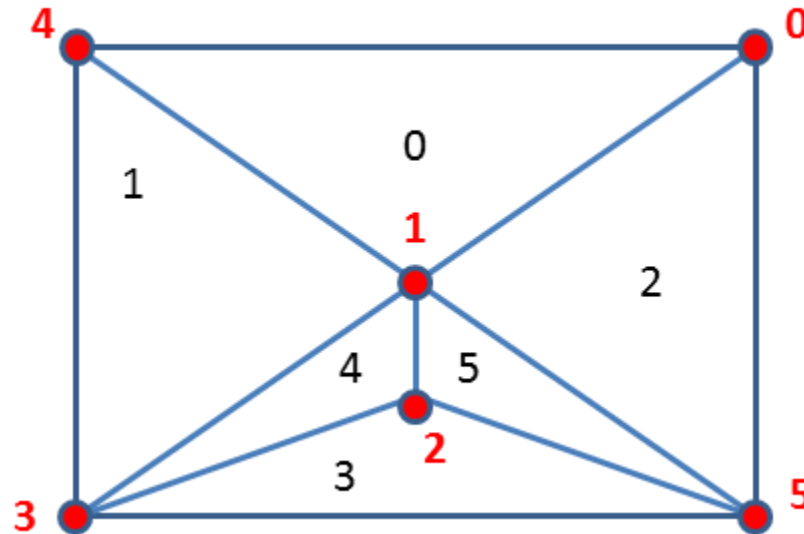
Randknotenspalten von (K_{kj}) und (D_k) gelöscht und das LGS gelöst. Die Randbedingung wird hierbei immer exakt erfüllt sein, die ursprüngliche Differentialgleichung jedoch nur näherungsweise.

Ein Beispiel

Vorgelegt sei folgendes Dirichlet-Randwertproblem:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left((yx+1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left((x+y+1) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + 2x^2 \Phi = x + y^2$$

auf dem Gebiet $G = \{(x, y) \mid 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 0.7\}$



Auf dem Rand gelte $\Phi|_{\partial G} = x^2 + y$

Die Liste der Punkte lautet: $p = [[1, 0.7], [0.5, 0.35], [0.5, 0.18], [0, 0], [0, 0.7], [1, 0]]$

Die Liste der Elemente lautet: $t = [[0, 4, 1], [3, 1, 4], [5, 0, 1], [3, 5, 2], [2, 1, 3], [5, 1, 2]]$

Die Liste der Randpunkte lautet: $dr = [0, 4, 3, 5]$

t	b_j	c_j	$2\Delta_E$	(x_M, y_M)	$\alpha_1(x_M)$ $\alpha_2(x_M)$ $\beta(x_M)$ $f(x_M)$	\mathcal{K}_{11}	\mathcal{K}_{22}	\mathcal{K}_{33}	\mathcal{K}_{12}	\mathcal{K}_{13}	\mathcal{K}_{23}	\mathcal{D}_1
$[0, 4, 1]$	0.35 -0.35 0	0.5 0.5 -1	0.35	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{12})$	1.29166 2.083 0.5 0.84027	0.984672619	0.984672619	2.9907738	0.525297619	-1.480803571	-1.480803571	0.0490162
$[3, 1, 4]$	-0.35 0.7 -0.35	-0.5 0. 0.5	0.35	$(0.1\bar{6}, 0.35)$	1.0583 1.516 0.05 0.28916	0.72849537	0.7424537	0.72849537	-0.36960648	-0.355648148	-0.36960648	0.016868
$[5, 0, 1]$												
$[3, 5, 2]$												
$[2, 1, 3]$												
$[5, 1, 2]$												

Nach dem ersten, bzw. zweiten Element lautet die Matrix

$$(K_{ij}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.98467262 & -1.48080357 & 0. & 0. & 0.52529762 & 0. \\ -1.48080357 & 2.99077381 & 0. & 0. & -1.48080357 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.52529762 & -1.48080357 & 0. & 0. & 0.98467262 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}}_{\text{nach dem ersten Element}} \rightarrow (K_{ij}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.98467262 & -1.48080357 & 0. & 0. & 0.52529762 & 0. \\ -1.48080357 & 3.73322751 & 0. & -0.36960648 & -1.85041005 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -0.36960648 & 0. & 0.72849537 & -0.35564815 & 0. \\ 0.52529762 & -1.85041005 & 0. & -0.35564815 & 1.71316799 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}}_{\text{nach erstem und zweitem Element}}$$

Nach dem Durchlaufen aller Elemente erhält man die gesamte Matrix

$$(K_{ij}) = \begin{pmatrix} 2.03098545 & -1.91263228 & 0. & 0. & 0.52529762 & -0.53346561 \\ -1.91263228 & 10.03199342 & -5.73408442 & -0.17821944 & -1.85041005 & -0.22748056 \\ 0. & -5.73408442 & 10.84855664 & -2.53274074 & 0. & -2.55099074 \\ 0. & -0.17821944 & -2.53274074 & 2.09361389 & -0.35564815 & 0.99438333 \\ 0.52529762 & -1.85041005 & 0. & -0.35564815 & 1.71316799 & 0. \\ -0.53346561 & -0.22748056 & -2.55099074 & 0.99438333 & 0. & 2.42616468 \end{pmatrix}$$

Analog gilt für die rechte Seite:

$$\begin{aligned}(D_j) &= (0.0490162, 0.0490162, 0., 0., 0.0490162, 0.) && \text{nach dem ersten Element} \\(D_j) &= (0.0490162, 0.06588426, 0., 0.01686806, 0.06588426, 0.) && \text{nach dem zweiten Element} \\(D_j) &= (0.10477315, 0.13669219, 0.03015898, 0.03714044, 0.06588426, 0.08075155) && \text{gesamte rechte Seite}\end{aligned}$$

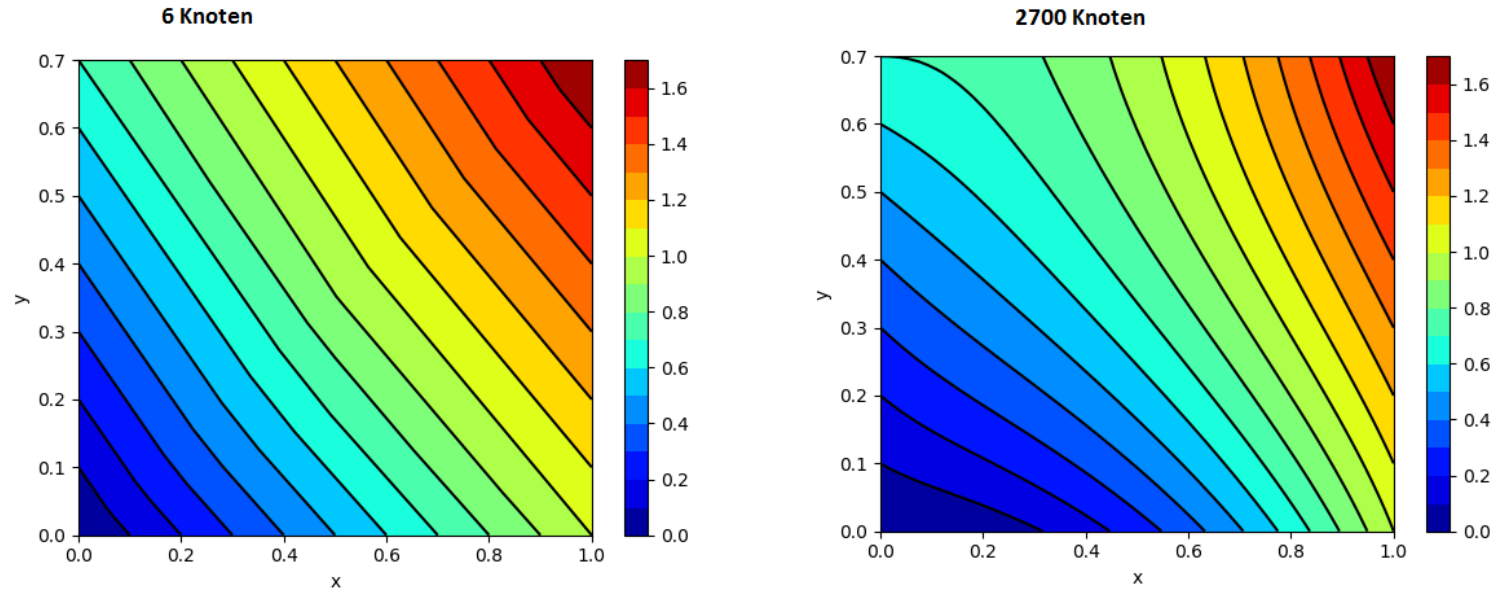
Um das Dirichletproblem zu lösen müssen auch hier, wie im 1D-Fall, die Randknoten gestrichen und die rechte Seite gemäß $D_k - \sum_d K_{kd} \Phi_d$ modifiziert werden. Das zu lösende LGS ist dann

$$\begin{pmatrix} 10.03199342 & -5.73408442 \\ -5.73408442 & 10.84855664 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.91093465 \\ 2.58114972 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des 2x2-Systems ist $(0.89630628, 0.71167491)$. Sortiert man noch die bekannten Randknoten in den Lösungsvektor ein, so erhält man endlich die Gesamtlösung:

$$(\Phi_0 \ \Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \Phi_5) = (1.7, 0.89630628, 0.71167491, 0., 0.7, 1.)$$

Die Gesamtlösung lässt sich auch in einem Höhenlinienplot darstellen (links). Erhöht man die Anzahl der Elemente, so ergibt sich eine höher aufgelöste Lösung (siehe Bild rechts, mit 2700 Knoten)



Wir wollen hier noch eine allgemeine Bemerkung zur rechten Seite machen. Bislang sind wir davon ausgegangen, dass auf der rechten Seite eine Funktion $f(x, y)$ steht. Allerdings kommt es auch vor, dass auf der rechten Seite eine Ableitung $\partial f / \partial x$ steht. Ist eine Funktion auf dem ganzen Gebiet differenzierbar, so kann natürlich obige Formel für die Matrixelemente benutzt werden. Besitzt die Funktion allerdings Sprünge, so ist es günstiger eine andere Formel für die Berechnung der Matrixelemente heranzuziehen. Das zu berechnende Integral lautet dann (siehe Integral (5) oben)

$$\int_{\text{Dreieck}} N_k(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dG = \int_{\text{Dreieck}} \frac{\partial}{\partial x} (N_k(x, y) f(x, y)) dG - \int_{\text{Dreieck}} f(x, y) \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial x} dG$$

Auch hier werden wir das Integral mit einer Koordinatentransformation berechnen, so dass wir zunächst die Ableitung in die neuen Koordinaten umrechnen. Es gilt mit der Kettenregel und der Definition der neuen Koordinaten

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial g(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial g(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta_E} \left(\frac{\partial g(\xi, \eta)}{\partial \xi} b_1 + \frac{\partial g(\xi, \eta)}{\partial \eta} b_2 \right)$$

und damit für das erste Integral unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes der Ebene

$$\int_{\text{Dreieck}} \frac{\partial}{\partial x} (N_k(x, y) f(x, y)) dG = \frac{1}{2\Delta_E} \int_{D'} \frac{\partial(N_k f b_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(N_k f b_2)}{\partial \eta} d(\xi, \eta) = \int_{\partial D'} N_k(\xi, \eta) f(\xi, \eta) (-b_2, b_1) \cdot d\vec{x}'$$

Die gestrichen Größen beziehen sich auf das transformierte Gebiet. Der Rand des transformierten Gebietes parameterisieren wir gemäß

$$\Gamma_1: \vec{x}(t) = (t, 0) \quad \dot{\vec{x}} = (1, 0) \quad t \in [0, 1]$$

$$\Gamma_2: \vec{x}(t) = (t, 1 - t) \quad \dot{\vec{x}} = (1, -1) \quad t \in [1, 0]$$

$$\Gamma_3: \vec{x}(t) = (0, t) \quad \dot{\vec{x}} = (0, 1) \quad t \in [1, 0]$$

und erhalten für das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\partial D'} N_k(\xi, \eta) f(\xi, \eta) (-b_2, b_1) \cdot d\vec{x}' &= - \int_0^1 N_k(t, 0) f(t, 0) b_2 dt - \int_1^0 N_k(t, 1 - t) f(t, 1 - t) (b_1 + b_2) dt + \int_1^0 N_k(0, t) f(0, t) b_1 dt \\ &\approx -b_2 f_{13} \int_0^1 N_k(t, 0) dt - (b_1 + b_2) f_{12} \int_1^0 N_k(t, 1 - t) dt + b_1 f_{23} \int_1^0 N_k(0, t) dt \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet f_{ij} den Wert von f auf der Mitte der Kante ij des Dreiecks. Konkret finden wir für das Integral für $k = 1, 2, 3$ (d.h. $N_k = \xi, \eta, 1 - \xi - \eta$)

$$\int_{\partial D'} N_k(\xi, \eta) f(\xi, \eta) (-b_2, b_1) \cdot d\vec{x}' = 0.5 \begin{cases} -b_2 f_{13} + (b_1 + b_2) f_{12} & k = 1 \\ (b_1 + b_2) f_{12} - b_1 f_{23} & k = 2 \\ -b_2 f_{13} - b_1 f_{23} & k = 3 \end{cases} = 0.5 \begin{cases} -b_2 f_{13} - b_3 f_{12} & k = 1 \\ -b_3 f_{12} - b_1 f_{23} & k = 2 \\ -b_1 f_{23} - b_2 f_{13} & k = 3 \end{cases}$$

Bei der Berechnung des Integrals wurde noch von der Beziehung $(b_1 + b_2 + b_3 = 0)$ Gebrauch gemacht.

Kommen wir zum zweiten Integral und ersetzen auch hier die Ableitung und führen die Integration aus. Er ergibt sich

$$- \int_{\text{Dreieck}} f(x, y) \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial x} dG \approx -f(x_M, y_M) \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} b_1 \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\eta d\xi = -0.5 b_k f_M = 0.5 f_M \begin{cases} b_2 + b_3 & k = 1 \\ b_3 + b_1 & k = 2 \\ b_1 + b_2 & k = 3 \end{cases}$$

Damit endlich das gesuchte Integral:

$$\int_{\text{Dreieck}} N_k(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dG \approx 0.5 \begin{cases} b_2(f_M - f_{13}) + b_3(f_M - f_{12}) & k = 1 \\ b_3(f_M - f_{12}) + b_1(f_M - f_{23}) & k = 2 \\ b_1(f_M - f_{23}) + b_2(f_M - f_{13}) & k = 3 \end{cases}$$

Für die Ableitung der Funktion nach y ersetzt man die b_i durch die c_i und schreibt schliesslich die Terme in kompakter Form als

$$\mathcal{D}_k^{(x)} = \frac{1}{2} \left(b_1(\delta_{2k} + \delta_{3k})(f_M - f_{23}) + b_2(\delta_{1k} + \delta_{3k})(f_M - f_{13}) + b_3(\delta_{1k} + \delta_{2k})(f_M - f_{12}) \right)$$

$$\mathcal{D}_k^{(y)} = \frac{1}{2} \left(c_1(\delta_{2k} + \delta_{3k})(f_M - f_{23}) + c_2(\delta_{1k} + \delta_{3k})(f_M - f_{13}) + c_3(\delta_{1k} + \delta_{2k})(f_M - f_{12}) \right)$$

Oder der Vollständigkeit wegen in Matrixform

$$(\mathcal{D}_{\downarrow}^{(x)}) = \frac{1}{2} (b_2(f_M - f_{13}) + b_3(f_M - f_{12}), \quad b_3(f_M - f_{12}) + b_1(f_M - f_{23}), \quad b_1(f_M - f_{23}) + b_2(f_M - f_{13}))$$

$$(\mathcal{D}_{\downarrow}^{(y)}) = \frac{1}{2} (c_2(f_M - f_{13}) + c_3(f_M - f_{12}), \quad c_3(f_M - f_{12}) + c_1(f_M - f_{23}), \quad c_1(f_M - f_{23}) + c_2(f_M - f_{13}))$$

Ändert sich die Funktion über einem Dreieck also nicht, so gibt es -wie erwartet- keinen Beitrag. Macht $f(x, y)$ jedoch einen Sprung und findet der Sprung genau an der Kante statt, so ergibt sich auf einer Seite der Kante ein Beitrag, da "vor" dem Sprung $f_M - f_{ij} \neq 0$ gilt

Robin-Rand In diesem Fall sind alle Knoten des Netzes unbekannt. Die Randbedingung selbst lautet:

Auf dem Rand ∂G gelte:

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cdot \vec{n} + \gamma \Phi|_{\Gamma} = q$$

Die Gebietsintegrale werden völlig analog behandelt wie bei den Überlegungen zum Dirichlet-Rand, der Index k läuft allerdings nicht nur über die inneren Knoten, sondern auch über die Randknoten ($N = N_d + N_r$). In diesem Fall haben wir neben den Gebietsintegralen aber auch noch ein Linienintegral zu berechnen. Der Zusatzterm lautet nach obigem generellen Ausdruck unter Verwendung der Randbedingung:

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_{\partial G} U_k \left(\alpha_1 \frac{\partial U_j}{\partial x}, \alpha_2 \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) \cdot d\vec{S} &= - \int_{\partial G} U_k \left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cdot \vec{n} dS \\ &= \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_{\partial G} \gamma U_k U_j dS - \int_{\partial G} q U_k dS \\ &= \sum_{r=1}^{N_r} \Phi_r \int_{\partial G} \gamma U_k U_r dS - \int_{\partial G} q U_k dS \quad k: \text{Randknoten} \end{aligned}$$

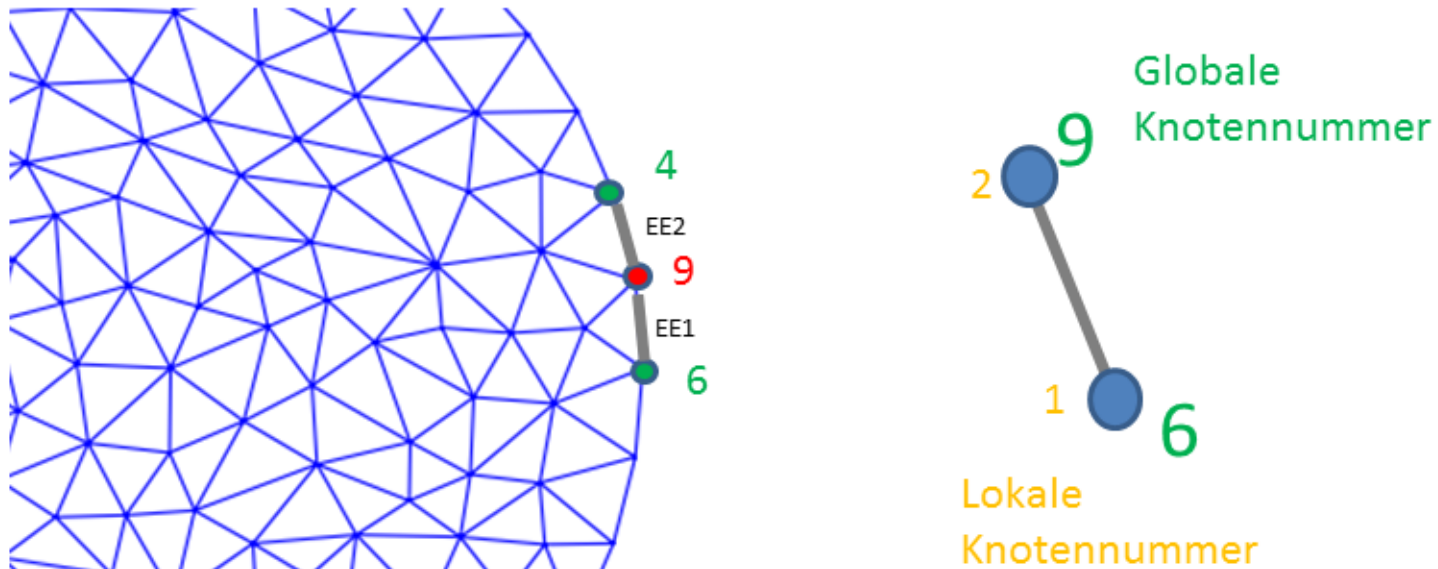
Der Index k darf hier nur Randindizes (Anzahl N_r) annehmen, da ansonsten U_k auf dem Rand null wäre. Das heisst aber, dass das Linienintegral nur Beiträge zu den Zeilen des LGS hinzufügt, die auf dem Rand liegen. Der Index j muss mit dem gleichen Argument auch ein Randknotenindex r sein. Den letzten Term setzen wir dann wieder in den allgemeinen Ausdruck ein und erhalten

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j \left(\int_G \alpha_1(x,y) \frac{\partial U_k}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} + \alpha_2(x,y) \frac{\partial U_k}{\partial y} \frac{\partial U_j}{\partial y} + \beta(x,y) U_k U_j dG \right) + \sum_{r=1}^{N_r} \Phi_r \int_{\partial G} \gamma(x,y) U_k U_r dS = \int_G U_k f(x,y) dG + \int_{\partial G} q(x,y) U_k dS$$

Die oben berechneten \mathcal{K}_{lm} lassen sich auch hier wieder benutzen und in die Matrix (K_{kj}) des LGS einfügen. Allerdings müssen hier noch die beiden Linienintegrale berechnet werden

Auch hier stellen wir uns einen festen Randknoten vor. Da beide Funktionen U_k und U_r nur (x,y) -Werte des Randes annehmen haben wir es hier mit Hutfunktionen zu tun die längs des Randes über dem Knoten errichtet werden. Sie haben gewissermassen

keine Ausdehnung in das Gebiet hinein (oder heraus). Diese Hutfunktionen (z.B. zum Knoten 9 im Bild) haben nur einen von Null verschiedenen Wert in den beiden angrenzenden Elementen (hier EE1,EE2).



$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{N_r} \Phi_r \int_{\partial G} \gamma(x,y) U_9 U_r dS &= \sum_{r=1}^{N_r} \Phi_r \int_{EE1 \cup EE2} \gamma(x,y) U_9 U_r dS \\ &= \Phi_9 \int_{EE1} \gamma(x,y) U_9 U_9 dG + \Phi_6 \int_{EE1} \gamma(x,y) U_9 U_6 dG + \Phi_9 \int_{EE2} \gamma(x,y) U_9 U_9 dS + \Phi_4 \int_{EE2} \gamma(x,y) U_9 U_4 dS \end{aligned}$$

Auch hier lässt sich das Integral über den Rand als Summe über Integrale jener Elemente schreiben, die den Knoten k enthalten. Beiträge zur Zeile 9 erhalten wir also von denjenigen Elementen, die 9 als Knoten enthalten. Die Positionen in der Matrix sind dann (in Analogie zum Fall der Gebietsintegrale) $(9,9)$, $(9,6)$ bzw. $(9,9)$, $(9,4)$ für das zweite Element. Auch hier gilt, dass nach Berechnung aller Zahlen

eines Elementes (bei diesen "Linienelementen" sind es nun wieder 4 Beiträge) auch weitere Positionen der Matrix besetzt werden können. In diesem Beispiel sind das die Positionen (6,6), (6,9) für das erste Element und (4,4), (4,9) für das zweite Element.

Zur allgemeinen Berechnung der 4 Elemente eines beliebigen Linienelements (oder auch Randsegments wie wir sagen wollen) wechseln wir wieder auf die lokale Nummerierung. Eine Parameterdarstellung des Weges (Gerade) ist

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1 + t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \quad t \in [0, 1] = [t_1, t_2] \quad \text{und damit} \quad dS = |\dot{\vec{x}}|dt = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|dt = L_E dt$$

Wenn t der Parameter des Weges ist, so müssen die Basisfunktionen von der Form $N_i(t) = a + bt$ sein. Für die 2 Basisfunktionen (des Randes eines Elements) verlangt man mit $t_1 = 0, t_2 = 1$:

$$\begin{array}{llll} N_1(t_1) = 1 & N_1(t_2) = 0 & \text{erfüllt für} & N_1(t) = 1 - t \\ N_2(t_1) = 0 & N_2(t_2) = 1 & \text{erfüllt für} & N_2(t) = t \end{array}$$

Die Integrale sind damit:

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{\text{Segment}} \gamma(x, y) N_1 N_1 dS &= \int_{\text{Segment}} \gamma(x, y) N_2 N_2 dS = \int_0^1 \gamma(x(t), y(t)) t^2 L_E dt \approx \frac{1}{3} \gamma(x_M, y_M) L_E \\ (2) \quad \int_{\text{Segment}} \gamma(x, y) N_1 N_2 dS &= \int_0^1 \gamma(x(t), y(t)) t(1 - t) L_E dt \approx \frac{1}{6} \gamma(x_M, y_M) L_E \\ (3) \quad \int_{\text{Segment}} q(x, y) U_1 dS &= \int_{\text{Segment}} q(x, y) U_2 dS = \int_0^1 q(x(t), y(t)) t L_E dt \approx \frac{1}{2} q(x_M, y_M) L_E \end{aligned}$$

Die 6 Zahlen pro Segment für den Anteil des Linienintegrals in der Gesamtgleichung ist damit zusammengefasst:

$\mathcal{K}_{rs} = \frac{L_E}{6} \gamma(x_M, y_M) (1 + \delta_{rs})$	$\mathcal{D}_r = \frac{L_E}{2} q(x_M, y_M)$	$r, s = 1..2$
---	---	---------------

Auch hier in Matrixform

$$(\mathcal{K}_{rs}) = \frac{L_E \gamma(x_M, y_M)}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und die rechte Seite} \quad (\mathcal{D}_r) = \frac{L_E q(x_M, y_M)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad r = 1, 2$$

In dem Beispiel des ersten Elementes der obigen Skizze erhalten wir also als Zusatzbeiträge auf den Randknotenzeilen 6 und 9

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11} &\rightarrow K_{6,6} = K_{6,6} + \mathcal{K}_{11} \\ \mathcal{K}_{12} &\rightarrow K_{6,9} = K_{6,9} + \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} &\rightarrow K_{9,6} = K_{9,6} + \mathcal{K}_{21} \\ \mathcal{K}_{22} &\rightarrow K_{9,9} = K_{9,9} + \mathcal{K}_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &\rightarrow D_6 = D_6 + \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 &\rightarrow D_9 = D_9 + \mathcal{D}_2 \end{aligned}$$

Die auf diese Art und Weise erzeugte Matrix K wird dann invertiert und liefert die Lösungen Φ_j .

Liegt ein Problem vor, welches auf einem Teilrand eine Dirichletrandbedingung vorsieht und auf einem weiteren Rand eine Robinrandbedingung, so werden die vorgestellten Verfahren einfach kombiniert. Die Zeilen/Spalten des Dirichletrandes werden gestrichen und die rechte Seite wird mit den Randspalten der Matrix (K_{kj}) und den Randwerten modifiziert (abziehen). Die Robinrandbedingung wird hingegen durch Modifikation der Randzeilenelemente der Matrix (K_{kj}) und der rechten Seite (D_j) realisiert.

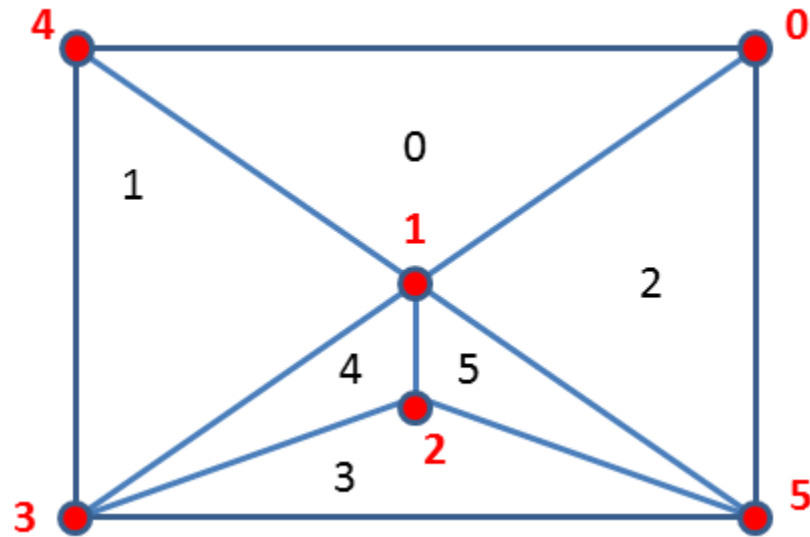
Daraus resultiert eine wichtige Eigenschaft der Lösung. Die Robinrandbedingung wird sich nach Lösung des LGS nur näherungsweise einstellen, denn sie ist Teil der Inversion des Problems. Im Gegensatz dazu wird die Dirichletrandbedingung immer, konstruktionsbedingt, exakt erfüllt sein. Man nennt aus diesem Grund die Dirichletrandbedingung auch wesentliche Randbedingung und die Robinrandbedingung auch eine natürliche Randbedingung.

Ein Beispiel

Vorgelegt sei folgendes Robin-Randwertproblem:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left((yx+1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left((x+y+1) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + 2x^2 \Phi = x + y^2$$

auf dem Gebiet $G = \{(x,y) \mid 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 0.7\}$



Auf dem Rand gelte die Robin-Randbedingung

$$\left((1+xy) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, (1+x+y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cdot \vec{n} + (2+x^2+y^2) \Phi|_{\partial G} = x-y$$

Die Liste der Punkte lautet: $p = [[1, 0.7], [0.5, 0.35], [0.5, 0.18], [0, 0], [0, 0.7], [1, 0]]$

Die Liste der Elemente lautet: $t = [[0, 4, 1], [3, 1, 4], [5, 0, 1], [3, 5, 2], [2, 1, 3], [5, 1, 2]]$

Die Liste der Randsegmente lautet: $Rr = [[3, 5], [0, 4], [4, 3], [5, 0]]$

Die partielle Differentialgleichung und das Gebiet ist mit dem Beispiel des vorangegangenen Dirichletrandwertproblems identisch. Wir können deshalb die Matrix (K_{ij}) und (D_j) vor dem Streichen aus dem obigem Beispiel übernehmen.

$$(K_{ij}) = \begin{pmatrix} 2.03098545 & -1.91263228 & 0. & 0. & 0.52529762 & -0.53346561 \\ -1.91263228 & 10.03199342 & -5.73408442 & -0.17821944 & -1.85041005 & -0.22748056 \\ 0. & -5.73408442 & 10.84855664 & -2.53274074 & 0. & -2.55099074 \\ 0. & -0.17821944 & -2.53274074 & 2.09361389 & -0.35564815 & 0.99438333 \\ 0.52529762 & -1.85041005 & 0. & -0.35564815 & 1.71316799 & 0. \\ -0.53346561 & -0.22748056 & -2.55099074 & 0.99438333 & 0. & 2.42616468 \end{pmatrix}$$

$$(D_j) = (0.10477315, 0.13669219, 0.03015898, 0.03714044, 0.06588426, 0.08075155)$$

Nun wird der Robin-Rand eingearbeitet. Hierzu müssen die entsprechenden Matrixelemente der Randelemente berechnet und in die obere Matrix der inneren Elemente einsortiert (hineinaddiert) werden.

	$ \vec{x}_2 - \vec{x}_1 $	$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)/2$	$2 + x^2 + y^2$	$x - y$	$\gamma(x_M, y_M)L_E/3$	$\gamma(x_M, y_M)L_E/6$	$q(x_M, y_M)L_E/2$
Rr	L_E	(x_M, y_M)	$\gamma(x_M, y_M)$	$q(x_M, y_M)$	$\mathcal{K}_{11} = \mathcal{K}_{22}$	$\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{21}$	$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$
$[3, 5]$	1	(0.5, 0)	2.25	0.5	0.75	0.375	0.25
$[0, 4]$	1	(0.5, 0.7)	2.74	-0.2	0.913	0.456	-0.1
$[4, 3]$	0.7	(0, 0.35)	2.1225	-0.35	0.49525	0.247625	-0.1225
$[5, 0]$	0.7	(1, 0.35)	3.1225	0.65	0.728583	0.3642916	0.2275

Für die Matrix finden wir nun

$$(K_{ij}) = \begin{pmatrix} 3.67290212 & -1.91263228 & 0. & 0. & 0.98196429 & -0.16917394 \\ -1.91263228 & 10.03199342 & -5.73408442 & -0.17821944 & -1.85041005 & -0.22748056 \\ 0. & -5.73408442 & 10.84855664 & -2.53274074 & 0. & -2.55099074 \\ 0. & -0.17821944 & -2.53274074 & 3.33886389 & -0.10802315 & 1.36938333 \\ 0.98196429 & -1.85041005 & 0. & -0.10802315 & 3.12175132 & 0. \\ -0.16917394 & -0.22748056 & -2.55099074 & 1.36938333 & 0. & 3.90474802 \end{pmatrix}$$

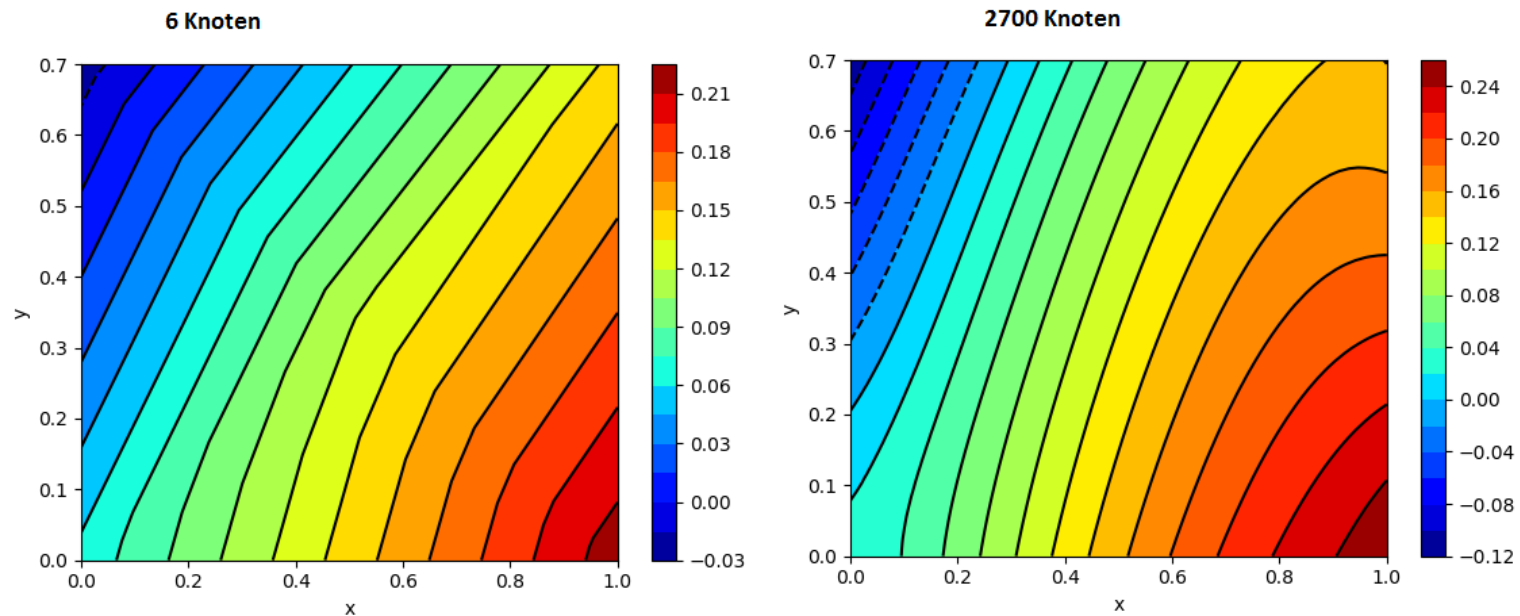
Die rechte Seite lautet

$$(D_j) = (0.23227315 \quad 0.13669219 \quad 0.03015898 \quad 0.16464044 \quad -0.15661574 \quad 0.55825155)$$

und damit die Lösung des LGS: $(K_{ij}) \cdot \vec{\Phi} = (D_j)$:

$$(\Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4 \quad \Phi_5) = (0.14060223 \quad 0.1176737 \quad 0.13165583 \quad 0.06483999 \quad -0.02240194 \quad 0.21918655)$$

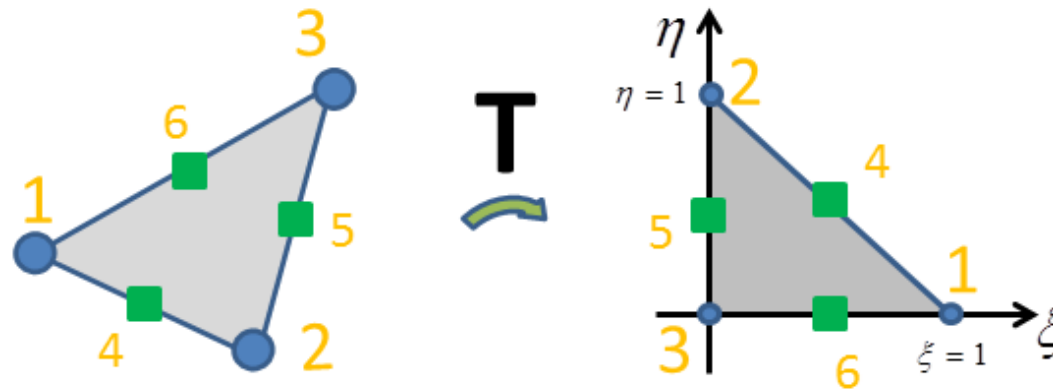
Auch hier zeigen wir noch einen Höhenlinienplot. Links für das obige Netz mit den 6 Knoten und rechts zum Vergleich die Lösung bei 2700 Knoten



0.2 Quadratische Basisfunktionen

Wie oben gesehen lässt sich durch die Berechnung von Matricelementen mittels Basisfunktionen innerhalb eines Elementes das gesamte LGS konstruieren. Bislang sind wir davon ausgegangen, dass die Basisfunktionen $N_i(x, y)$ (und damit die gesuchte Funktion) innerhalb eines Elementes lineare Funktionen von x und y sind. Im Folgenden soll nun angenommen werden, dass die Basisfunktionen innerhalb

des Elementes quadratisch von x, y abhängen. Da für diesen Fall 6 Parameter notwendig sind benötigen wir weitere Knoten innerhalb eines Elementes, wir wählen hierzu die Kantenmitten (siehe Bild).



Die neuen (quadratischen) Basisfunktionen auf einem Element seien mit $L_i(x, y)$ bezeichnet. Wir verlangen in Analogie zum linearen Fall, dass gilt:

$$L_i(x_i, y_i) = 1 \quad \text{und} \quad L_i(x_j, y_j) = 0 \quad i \neq j \quad \text{wobei } i, j = 1..6$$

Die gesuchte Funktion stellen wir damit, wie üblich, gemäß

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^6 \Phi_i L_i(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$$

dar.

Mit den bekannten Basisfunktionen $N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y)$ oder in den Dreieckskoordinaten $N_i = \xi$, $N_2 = \eta$ und $N_3 = 1 - \xi - \eta$ läßt sich das einfach durch entsprechende Produkte der ursprünglichen Basisfunktionen erreichen. Positioniert man die neuen Punkte auf den Kantenmitten, so erfüllen die folgenden Produkte die obigen Anforderungen ($L_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$)

$$\begin{aligned}
L_1 &= (2N_1 - 1)N_1 = 2\zeta^2 - \zeta \\
L_2 &= (2N_2 - 1)N_2 = 2\eta^2 - \eta \\
L_3 &= (2N_3 - 1)N_3 = (1 - 2\zeta - 2\eta)(1 - \zeta - \eta) \\
L_4 &= 4N_1N_2 = 4\zeta\eta \\
L_5 &= 4N_2N_3 = 4\eta(1 - \zeta - \eta) \\
L_6 &= 4N_1N_3 = 4\zeta(1 - \zeta - \eta)
\end{aligned}$$

Die Zahlen a, b, c, d, e, f lauten

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2\Delta_E^2} (\Phi_1 a_1 (a_1 - \Delta_E) + \Phi_2 a_2 (a_2 - \Delta_E) + \Phi_3 a_3 (a_3 - \Delta_E) + 2\Phi_4 a_1 a_2 + 2\Phi_5 a_2 a_3 + 2\Phi_6 a_1 a_3) \\
b &= \frac{1}{2\Delta_E^2} ((2a_1 - \Delta_E)\Phi_1 b_1 + (2a_2 - \Delta_E)\Phi_2 b_2 + (2a_3 - \Delta_E)\Phi_3 b_3 + 2\Phi_4 (a_1 b_2 + a_2 b_1) + 2\Phi_5 (a_2 b_3 + a_3 b_2) + 2\Phi_6 (a_1 b_3 + a_3 b_1)) \\
c &= \frac{1}{2\Delta_E^2} ((2a_1 - \Delta_E)\Phi_1 c_1 + (2a_2 - \Delta_E)\Phi_2 c_2 + (2a_3 - \Delta_E)\Phi_3 c_3 + 2\Phi_4 (a_1 c_2 + a_2 c_1) + 2\Phi_5 (a_2 c_3 + a_3 c_2) + 2\Phi_6 (a_1 c_3 + a_3 c_1)) \\
d &= \frac{1}{\Delta_E^2} (\Phi_1 b_1 c_1 + \Phi_2 b_2 c_2 + \Phi_3 b_3 c_3 + \Phi_4 (b_1 c_2 + b_2 c_1) + \Phi_5 (b_2 c_3 + b_3 c_2) + \Phi_6 (b_1 c_3 + b_3 c_1)) \\
e &= \frac{1}{2\Delta_E^2} (\Phi_1 b_1^2 + \Phi_2 b_2^2 + \Phi_3 b_3^2 + 2\Phi_4 b_1 b_2 + 2\Phi_5 b_2 b_3 + 2\Phi_6 b_1 b_3) \\
f &= \frac{1}{2\Delta_E^2} (\Phi_1 c_1^2 + \Phi_2 c_2^2 + \Phi_3 c_3^2 + 2\Phi_4 c_1 c_2 + 2\Phi_5 c_2 c_3 + 2\Phi_6 c_1 c_3)
\end{aligned}$$

Analog zum linearen Fall sind die folgenden Matrixelemente zu berechnen

$$\int_{\text{Dreieck}} \beta(x, y) L_k L_j dG \qquad \int_{\text{Dreieck}} \alpha_1(x, y) \frac{\partial L_k}{\partial x} \frac{\partial L_j}{\partial x} dG \qquad \int_{\text{Dreieck}} f(x, y) L_k dG$$

Für das erste Integral gilt mit $\beta_M = \beta(x_M, y_M)$:

$$(1) \quad \int_{\text{Dreieck}} \beta(x,y) L_k L_j dG = 2\Delta_E \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} \beta(\xi,\eta) L_k L_j d\eta d\xi \approx 2\Delta_E \beta_M \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} L_k L_j d\eta d\xi$$

Die 36 Integrale lassen sich analytisch berechnen und in einer Matrix $(B_{kj}) = \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} L_k L_j d\eta d\xi$ anordnen. Mittels sympy findet man die Matrix gemäß:

```
[2]: import sympy as sy
sy.init_printing(use_latex='mathjax')

x = sy.Symbol("x")
y = sy.Symbol("y")

# Base functions 2D, second order
L = [2*x**2-x, 2*y**2-y, (1-2*x-2*y)*(1-x-y), 4*x*y, 4*y*(1-x-y), 4*x*(1-x-y)]

B=sy.zeros(6,6)
for k in range(6):
    for j in range(6):
        B[k,j]=sy.integrate(sy.integrate(L[k]*L[j], (y,0,1-x)), (x,0,1))

print("Die Matrix B lautet:\n")
print("B=1./360.*", 360*B)
print("\n")
B
```

Die Matrix B lautet:

```
B=1./360.* Matrix([[6, -1, -1, 0, -4, 0], [-1, 6, -1, 0, 0, -4], [-1, -1, 6, -4, 0, 0], [0, 0, -4, 32, 16, 16], [-4, 0, 0, 16, 32, 16], [0, -4, 0, 16, 16, 32]])
```

[2]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & -\frac{1}{360} & -\frac{1}{360} & 0 & -\frac{1}{90} & 0 \\ -\frac{1}{360} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{360} & 0 & 0 & -\frac{1}{90} \\ -\frac{1}{360} & -\frac{1}{360} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{90} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{90} & \frac{4}{45} & \frac{2}{45} & \frac{2}{45} \\ -\frac{1}{90} & 0 & 0 & \frac{2}{45} & \frac{4}{45} & \frac{2}{45} \\ 0 & -\frac{1}{90} & 0 & \frac{2}{45} & \frac{2}{45} & \frac{4}{45} \end{bmatrix}$$

Wenden wir uns dem zweiten Integral $\int_{\text{Dreieck}} \alpha_1(x, y) \frac{\partial L_k}{\partial x} \frac{\partial L_j}{\partial x} dG$ zu. Zunächst müssen Ableitungen der Basisfunktionen berechnet werden. Es gilt in den transformierten Koordinaten

$$\frac{\partial L_m}{\partial x} = \frac{\partial L_m}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial L_m}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta_E} \left(\frac{\partial L_m}{\partial \xi} b_1 + \frac{\partial L_m}{\partial \eta} b_2 \right)$$

Die Ableitungen berechnen sich unter Beachtung der Definition der L_i

$$\frac{\partial L_1}{\partial \xi} = 4\xi - 1$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial \xi} = -3 + 4\xi + 4\eta$$

$$\frac{\partial L_4}{\partial \xi} = 4\eta$$

$$\frac{\partial L_5}{\partial \xi} = -4\eta$$

$$\frac{\partial L_6}{\partial \xi} = 4 - 4\eta - 8\xi$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \eta} = 4\eta - 1$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial \eta} = -3 + 4\xi + 4\eta$$

$$\frac{\partial L_4}{\partial \eta} = 4\xi$$

$$\frac{\partial L_5}{\partial \eta} = 4 - 4\xi - 8\eta$$

$$\frac{\partial L_6}{\partial \eta} = -4\xi$$

Damit schreibt sich das gesuchte Integral

$$(2) \quad \int_{\text{Dreieck}} \alpha_1(x, y) \frac{\partial L_k}{\partial x} \frac{\partial L_j}{\partial x} dG \approx \frac{\alpha_{1,M}}{2\Delta_E} \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} \left(\frac{\partial L_k}{\partial \xi} b_1 + \frac{\partial L_k}{\partial \eta} b_2 \right) \left(\frac{\partial L_j}{\partial \xi} b_1 + \frac{\partial L_j}{\partial \eta} b_2 \right) d\eta d\xi$$

Unter Beachtung von $-b_3 = b_1 + b_2$ berechnen sich die 36 Integrale zu:

```
[3]: dLdx=[4*x-1,0,-3+4*x+4*y,4*y,-4*y,4-4*y-8*x]
dLdy=[0,4*y-1,-3+4*x+4*y,4*x,4-4*x-8*y,-4*x]

b1=sy.Symbol("b_1")
b2=sy.Symbol("b_2")
b3=sy.Symbol("b_3")

b12=sy.Symbol("b_12")
b23=sy.Symbol("b_23")
b13=sy.Symbol("b_13")

A=sy.zeros(6,6)
for k in range(6):
    for j in range(6):
        A[k,j]=sy.integrate(sy.integrate((dLdx[k]*b1+dLdy[k]*b2)*(dLdx[j]*b1+dLdy[j]*b2),(y,0,1-x)),(x,0,1))

AA=sy.factor(sy.simplify(A)).subs(b1**2+b1*b2+b2**2,(b1+b2)**2-b1*b2).subs(b1+b2,-b3)

print("Die Matricelemente (A_ij) lauten:\n")
print("A=1./6.*",6*AA)
print("\n")
AA
```

Die Matricelemente (A_ij) lauten:

```
A=1./6.* Matrix([[3*b_1**2, -b_1*b_2, -b_1*b_3, 4*b_1*b_2, 0, 4*b_1*b_3],
[-b_1*b_2, 3*b_2**2, -b_2*b_3, 4*b_1*b_2, 4*b_2*b_3, 0], [-b_1*b_3, -b_2*b_3,
```

```
3*b_3**2, 0, 4*b_2*b_3, 4*b_1*b_3], [4*b_1*b_2, 4*b_1*b_2, 0, -8*b_1*b_2 +
8*b_3**2, 8*b_1*b_3, 8*b_2*b_3], [0, 4*b_2*b_3, 4*b_2*b_3, 8*b_1*b_3, -8*b_1*b_2
+ 8*b_3**2, 8*b_1*b_2], [4*b_1*b_3, 0, 4*b_1*b_3, 8*b_2*b_3, 8*b_1*b_2,
-8*b_1*b_2 + 8*b_3**2]])
```

[3]:

$$\begin{bmatrix} \frac{b_1^2}{2} & -\frac{b_1 b_2}{6} & -\frac{b_1 b_3}{6} & \frac{2b_1}{3} b_2 & 0 & \frac{2b_1}{3} b_3 \\ -\frac{b_1 b_2}{6} & \frac{b_2^2}{2} & -\frac{b_2 b_3}{6} & \frac{2b_1}{3} b_2 & \frac{2b_2}{3} b_3 & 0 \\ -\frac{b_1 b_3}{6} & -\frac{b_2 b_3}{6} & \frac{b_3^2}{2} & 0 & \frac{2b_2}{3} b_3 & \frac{2b_1}{3} b_3 \\ \frac{2b_1}{3} b_2 & \frac{2b_1}{3} b_2 & 0 & -\frac{4b_1}{3} b_2 + \frac{4b_3^2}{3} & \frac{4b_1}{3} b_3 & \frac{4b_2}{3} b_3 \\ 0 & \frac{2b_2}{3} b_3 & \frac{2b_2}{3} b_3 & \frac{4b_1}{3} b_3 & -\frac{4b_1}{3} b_2 + \frac{4b_3^2}{3} & \frac{4b_1}{3} b_2 \\ \frac{2b_1}{3} b_3 & 0 & \frac{2b_1}{3} b_3 & \frac{4b_2}{3} b_3 & \frac{4b_1}{3} b_2 & -\frac{4b_1}{3} b_2 + \frac{4b_3^2}{3} \end{bmatrix}$$

Schließlich das dritte Integral

$$(3) \quad \int_{\text{Dreieck}} f(x,y) L_k dG \approx 2\Delta_E f_M \int_0^1 \int_0^{(1-\xi)} L_k d\eta d\zeta$$

```
[4]: F=sy.zeros(1,6)
for k in range(6):
    F[0,k]=sy.integrate(sy.integrate(L[k],(y,0,1-x)),(x,0,1))

print("Die Matrix F lautet:\n")
print("F=1./6.*",6*F)
print("\n")
F
```

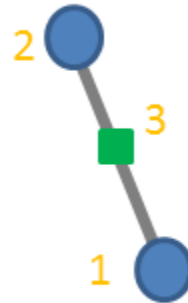
Die Matrix F lautet:

```
F=1./6.* Matrix([[0, 0, 0, 1, 1, 1]])
```

[4]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Neben den Matrixelementen sind auch die Randbedingungen anzupassen. Die Dirichletrandbedingung wird auch hier durch entsprechendes Streichen und Abziehen, analog zum linearen Fall, erfüllt. Die Robinrandbedingung bedarf hingegen einer neuen Betrachtung. Auch hier müssen nur noch die neuen Basisfunktionen in die entsprechenden Integrale eingefügt werden.



Das Randsegment hat nun ebenfalls drei Knoten, die beiden Hauptknoten und den Mittelknoten (siehe Skizze). Benötigt werden auch hier drei Basisfunktionen mit der Eigenschaft

$$L_i(t_j) = \delta_{ij} \quad i,j=1,2,3$$

Die gesuchten Funktionen lauten mithin:

$$L_1(t) = \frac{t(t-1)}{2} \quad L_2(t) = \frac{t(t+1)}{2} \quad L_3(t) = (1+t)(1-t) \quad t \in [-1,1]$$

Die Parametersisierung des Weges schreiben wir als

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1 + \frac{t+1}{2} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \quad d\vec{x} = \frac{1}{2} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) dt$$

Das erste zu berechnende Integral lautet

$$(1) \quad \int_{\text{Segment}} \gamma(x, y) L_k L_j dS \approx \gamma_M \frac{L_E}{2} \int_{-1}^1 L_k L_j dt$$

Mit der Definition $(G_{ij}) = \int_{-1}^1 L_k L_j dt$ finden wir die 9 Zahlen gemäß:

```
[5]: LL=[x*(x-1)/2, x*(x+1)/2, (x+1)*(1-x)]

G=sy.zeros(3,3)
for k in range(3):
    for j in range(3):
        G[k,j]=sy.integrate(LL[k]*LL[j], (x, -1, 1))

print("Die Matrix (G_ij) \n")
print("G=1./15.*", 15*G)
G
```

Die Matrix (G_ij)

G=1./15.* Matrix([[4, -1, 2], [-1, 4, 2], [2, 2, 16]])

[5]:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{16}{15} \end{bmatrix}$$

Das letzte zu berechnende Integral lautet mithin

$$(2) \quad \int_{\text{Segment}} q(x,y) L_k dS \approx q_M \frac{L_E}{2} \int_{-1}^1 L_k dt$$

Mit der Definition $(Q_{ij}) = \int_{-1}^1 L_k dt$ finden wir die drei Werte zu

```
[6]: Q=sy.zeros(1,3)
for k in range(3):
    Q[0,k]=sy.integrate(LL[k],(x,-1,1))

print("Die Matrix (Q_ij) \n")
print("Q=1./3.*",3*Q)
Q
```

Die Matrix (Q_ij)

Q=1./3.* Matrix([[1, 1, 4]])

[6]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Wir fassen zusammen

Insgesamt also die gesuchten Matricelemente für quadratische Basisfunktionen

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}_{lm}) = & \frac{\alpha_1(x_M, y_M)}{12\Delta_E} \begin{pmatrix} 3b_1^2 & -b_1b_2 & -b_1b_3 & 4b_1b_2 & 0 & 4b_1b_3 \\ -b_1b_2 & 3b_2^2 & -b_2b_3 & 4b_1b_2 & 4b_2b_3 & 0 \\ -b_1b_3 & -b_2b_3 & 3b_3^2 & 0 & 4b_2b_3 & 4b_1b_3 \\ 4b_1b_2 & 4b_1b_2 & 0 & -8b_1b_2 + 8b_3^2 & 8b_1b_3 & 8b_2b_3 \\ 0 & 4b_2b_3 & 4b_2b_3 & 8b_1b_3 & -8b_1b_2 + 8b_3^2 & 8b_1b_2 \\ 4b_1b_3 & 0 & 4b_1b_3 & 8b_2b_3 & 8b_1b_2 & -8b_1b_2 + 8b_3^2 \end{pmatrix} \\
& + \frac{\alpha_2(x_M, y_M)}{12\Delta_E} \begin{pmatrix} 3c_1^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 & 4c_1c_2 & 0 & 4c_1c_3 \\ -c_1c_2 & 3c_2^2 & -c_2c_3 & 4c_1c_2 & 4c_2c_3 & 0 \\ -c_1c_3 & -c_2c_3 & 3c_3^2 & 0 & 4c_2c_3 & 4c_1c_3 \\ 4c_1c_2 & 4c_1c_2 & 0 & -8c_1c_2 + 8c_3^2 & 8c_1c_3 & 8c_2c_3 \\ 0 & 4c_2c_3 & 4c_2c_3 & 8c_1c_3 & -8c_1c_2 + 8c_3^2 & 8c_1c_2 \\ 4c_1c_3 & 0 & 4c_1c_3 & 8c_2c_3 & 8c_1c_2 & -8c_1c_2 + 8c_3^2 \end{pmatrix} \\
& + \frac{\Delta_E \beta(x_M, y_M)}{180} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} \quad l, m = 1..6
\end{aligned}$$

Anteil des Robin Randes

$$(\mathcal{K}_{rs}) = \frac{\gamma(x_M, y_M)L_E}{30} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix} \quad r, s = 1..3$$

und die rechte Seite

$$(\mathcal{D}_m) = \frac{\Delta_E f(x_M, y_M)}{3} (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1) \quad m = 1..6$$

Anteil des Robin-Randes für die rechte Seite

$$(\mathcal{D}_r) = \frac{L_{Eq}(x_M, y_M)}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad r = 1..3$$

Berechnung der Randladungsdichte Die Berechnung der Ladung eines Randsegmentes ist nützlich, um auf dem Rand die lokale Ladungsdichte anzugeben. Neben dem Randsegment ist aber auch das zu diesem Segment zugehörige Dreieckselement von Bedeutung, da die Ableitungen benötigt werden.

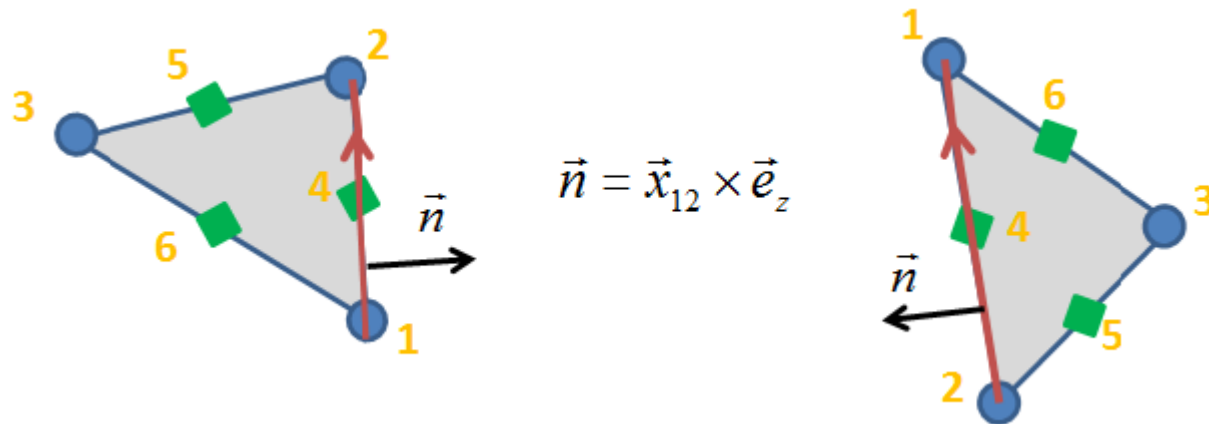
Die lokale Ladungsdichte berechnet man:

$$\sigma_{el} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{n}$$

Für ein Randsegment ist:

$$\sigma_{el} = \epsilon_r \epsilon_0 \begin{pmatrix} b + dy + 2ex \\ c + dx + 2fy \end{pmatrix} \cdot \vec{n}$$

Wir nehmen an, dass das Randelement wie folgt lautet: $[N_{R1}, N_{R2}, N_3, N_M, N_5, N_6]$. Man beachte, dass die Reihenfolge von N_{R1}, N_{R2} im Randsegment auch $[N_{R2}, N_{R1}, N_3]$ lauten kann, abhängig davon, ob es sich um einen äusseren oder inneren Rand handelt.



Für den Normalenvektor finden wir

$$\vec{x}_{12} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} c_3 \\ -b_3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_3 \\ -c_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Parameterdarstellungen des Randes lauten

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1 + t\vec{x}_{12} \quad t \in [0, 1] \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}(t) = \vec{x}_2 + t\vec{x}_{21} \quad t \in [0, 1]$$

Die Ladung eines Segmentes ist dann

$$Q_{seq} = \int_0^1 \epsilon_r \epsilon_0 \begin{pmatrix} b + dy + 2ex \\ c + dx + 2fy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b_3 \\ -c_3 \end{pmatrix} |\vec{x}_{12}| dt = -\epsilon_r \epsilon_0 L_E \int_0^1 (b_3(b + dy + 2ex) + c_3(c + dx + 2fy)) dt$$

Es bleiben noch die Integrale $\int_0^1 x dt$ und $\int_0^1 y dt$. Für den äusseren Rand finden wir

$$\int_0^1 x_1 + t(x_2 - x_1) dt = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) = x_M \quad \text{und} \quad \int_0^1 y_1 + t(y_2 - y_1) dt = \frac{1}{2}(y_2 + y_1) = y_M$$

Für den inneren Rand findet man durch analoges Ersetzen das gleiche Ergebnis

$$\int_0^1 x_2 + t(x_1 - x_2) dt = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) = x_M \quad \text{und} \quad \int_0^1 y_2 + t(y_1 - y_2) dt = \frac{1}{2}(y_2 + y_1) = y_M$$

Die Knoten der (Rand)-Dreieckselemente müssen also so sortiert werden, dass die beiden Randknoten in der lokalen Indizierung an den Positionen 1, 2 stehen (im Gegenuhrzeigersinn, unabhängig vom Richtungssinn des Randes).

Die Berechnung der Gesamtladung eines Randsegmentes ergibt sich demnach zu

$$Q_{seq} = -\epsilon_0 \epsilon_r L_E ((b_3 b + c_3 c) + x_M(c_3 d + 2eb_3) + y_M(b_3 d + 2fc_3))$$

Dieser Ausdruck lässt sich in gewohnter Weise wieder als Produkt mit den Knotenwerten schreiben

$$Q_{seq} = -\varepsilon_0 \varepsilon_r L_E (Q_{\nabla}) \cdot (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6)$$

Wir berechnen die Matrix mit Python wie folgt:

```
[48]: sy.init_printing(use_latex='mathjax')
N=6
x,XM = sy.symbols("x,x_M")
y,YM = sy.symbols("y,y_M")
D = sy.Symbol("Delta_E")
a=sy.symbols('a_1:%d'%(N/2+1))
b=sy.symbols('b_1:%d'%(N/2+1))
c=sy.symbols('c_1:%d'%(N/2+1))
Phi=sy.symbols('Phi_1:%d'%(N+1))

N1=1/D*(a[0]+b[0]*x+c[0]*y)/2
N2=1/D*(a[1]+b[1]*x+c[1]*y)/2
N3=1/D*(a[2]+b[2]*x+c[2]*y)/2

Lj=[(2*N1-1)*N1,(2*N2-1)*N2,(2*N3-1)*N3,4*N1*N2,4*N2*N3,4*N1*N3]

f=0
for i in range(N):
    f+=Lj[i]*Phi[i]

aa=f.subs(x,0).subs(y,0)
bb=sy.simplify((f.subs(y,0)-aa)/x).subs(x,0)
cc=sy.simplify((f.subs(x,0)-aa)/y).subs(y,0)
ee=sy.simplify((f-aa-bb*x-cc*y).subs(y,0).subs(x,1))
ff=sy.simplify((f-aa-bb*x-cc*y).subs(x,0).subs(y,1))
dd=sy.simplify(sy.factor(sy.simplify((f-aa-bb*x-cc*y-ee*x-x*ff*y*y)/x/y)))

term1=sy.simplify( (bb*b[2]+cc*c[2])+XM*(c[2]*dd+2*ee*b[2])+YM*(b[2]*dd+2*ff*c[2]) )
Qseq=[0,0,0,0,0,0]
```

```

for k in range(6):
    label=[0,1,2,3,4,5]
    del label[k]
    termS=1*term1
    for j in label:
        termS=termS.subs(Phi[j],0)
    termS=termS/Phi[k]
    Qseq[k]=sy.factor(sy.simplify(termS))

print("Qseq= ",Qseq)
#print(sy.latex(Qseq))

```

```

Qseq= [-(b_1*b_3 + c_1*c_3)*(Delta_E - 2*a_1 - 2*b_1*x_M -
2*c_1*y_M)/(2*Delta_E**2), -(b_2*b_3 + c_2*c_3)*(Delta_E - 2*a_2 - 2*b_2*x_M -
2*c_2*y_M)/(2*Delta_E**2), -(b_3**2 + c_3**2)*(Delta_E - 2*a_3 - 2*b_3*x_M -
2*c_3*y_M)/(2*Delta_E**2), (a_1*b_2*b_3 + a_1*c_2*c_3 + a_2*b_1*b_3 +
a_2*c_1*c_3 + 2*b_1*b_2*b_3*x_M + b_1*b_3*c_2*y_M + b_1*c_2*c_3*x_M +
b_2*b_3*c_1*y_M + b_2*c_1*c_3*x_M + 2*c_1*c_2*c_3*y_M)/Delta_E**2, (a_2*b_3**2 +
a_2*c_3**2 + a_3*b_2*b_3 + a_3*c_2*c_3 + 2*b_2*b_3**2*x_M + b_2*b_3*c_3*y_M +
b_2*c_3**2*x_M + b_3**2*c_2*y_M + b_3*c_2*c_3*x_M +
2*c_2*c_3**2*y_M)/Delta_E**2, (a_1*b_3**2 + a_1*c_3**2 + a_3*b_1*b_3 +
a_3*c_1*c_3 + 2*b_1*b_3**2*x_M + b_1*b_3*c_3*y_M + b_1*c_3**2*x_M +
b_3**2*c_1*y_M + b_3*c_1*c_3*x_M + 2*c_1*c_3**2*y_M)/Delta_E**2]

```

$$(Q_r)_{seq} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\Delta_E^2} (b_1 b_3 + c_1 c_3) (\Delta_E - 2a_1 - 2b_1 x_M - 2c_1 y_M) \\ -\frac{1}{2\Delta_E^2} (b_2 b_3 + c_2 c_3) (\Delta_E - 2a_2 - 2b_2 x_M - 2c_2 y_M) \\ -\frac{1}{2\Delta_E^2} (b_3^2 + c_3^2) (\Delta_E - 2a_3 - 2b_3 x_M - 2c_3 y_M) \\ \frac{1}{\Delta_E^2} (a_1 b_2 b_3 + a_1 c_2 c_3 + a_2 b_1 b_3 + a_2 c_1 c_3 + 2b_1 b_2 b_3 x_M + b_1 b_3 c_2 y_M + b_1 c_2 c_3 x_M + b_2 b_3 c_1 y_M + b_2 c_1 c_3 x_M + 2c_1 c_2 c_3 y_M) \\ \frac{1}{\Delta_E^2} (a_2 b_3^2 + a_2 c_3^2 + a_3 b_2 b_3 + a_3 c_2 c_3 + 2b_2 b_3^2 x_M + b_2 b_3 c_3 y_M + b_2 c_3^2 x_M + b_3^2 c_2 y_M + b_3 c_2 c_3 x_M + 2c_2 c_3^2 y_M) \\ \frac{1}{\Delta_E^2} (a_1 b_3^2 + a_1 c_3^2 + a_3 b_1 b_3 + a_3 c_1 c_3 + 2b_1 b_3^2 x_M + b_1 b_3 c_3 y_M + b_1 c_3^2 x_M + b_3^2 c_1 y_M + b_3 c_1 c_3 x_M + 2c_1 c_3^2 y_M) \end{pmatrix}$$

Mit dieser Vorarbeit lässt sich nun auch eine Aufgabe lösen, bei der auf dem Rand des Leiters die Gesamtladung vorgegeben wird.

Zunächst bestimmen wir wie üblich die Matrix (K_{ij}) und die rechte Seite (D_j) . In dieser Matrix sind die Randknoten eines Randes Γ_q vorhanden, auf dem die Gesamtladung $Q = Q_q$ betragen soll. Das LGS muss nun noch um eine Gleichung ergänzt werden. Diese Gleichung legt die Gesamtladung auf dem Rand Γ_q fest. Wir addieren die Einzelladungen von oben über alle Segmente des Randes Γ_q gemäß:

$$Q_q = -\varepsilon_0 \sum_{\text{Segmente}} \varepsilon_r L_E (Q_r)_{seq} \cdot \vec{\Phi}_{seq}$$

Man beachte, dass die Länge und die Dielektrizitätskonstante vom Segment abhängig sind. Pro Randelement werden also 6 Werte in die Matrix (K_{ij}) einsortiert. Ist z.B. [13, 28, 15, 5, 19, 70] ein Randelement, so wird Q_1 in eine neue (letzte) Zeile und der Spalte 13, Q_2 in Spalte 28 usw. geschrieben.

Da es sich um einen Leiter handelt sind alle Knotenwerte Φ_l^q mit $l = 1, \dots, N_q$ gleich, wir nennen den Wert Φ_q . Wir addieren deshalb nach dem Einsortieren alle Spalten $l = 2, \dots, N_q$ der Matrix (K_{ij}) auf die (erste) Spalte, die zum Knoten Φ_1^q gehört und löschen gleichzeitig alle Zeilen zu Φ_l^q . Das LGS enthält nun noch den unbekannten Knotenwert Φ_1^q und eine zusätzliche (letzte) Zeile und ist somit wieder quadratisch. Die obige Summe nutzt man natürlich auch für den Fall, dass für einen Dirichletrand die Gesamtladung nach der Berechnung der Lösung gesucht wird. Die Matrix $(Q_r)_{seq}$ verwendet man für den Fall, dass die lokale Ladungsdichte auf einen Dirichletrand für ein bestimmtes Randsegment gesucht wird.

1 Vektorgleichungen

Bislang sind wir immer davon ausgegangen, dass die zu lösende Funktion skalar ist. In vielen Fällen handelt es sich jedoch um eine Vektorgleichung. Wir betrachten hier, analog zum skalaren Fall die folgende Gleichung

$$\text{rot} \left(\alpha \text{rot} \left(\vec{A} \right) \right) + \beta \vec{A} = \vec{g}$$

Auch hier fassen wir eine Multiplikation mit einer Testfunktion und anschließender Integration ins Auge. Aus diesem Grund sei an die Identität

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{G})$$

erinnert. Wählen wir nun $\vec{F} = \alpha \text{rot}(\vec{A})$, und nennen die Testfunktionen $\vec{G} = \vec{V}$, so ergibt die ursprüngliche Differentialgleichung nach einer Integration über das entsprechende Gebiet G :

$$\begin{aligned}
\int_G \vec{V} \cdot \operatorname{rot}(\alpha \operatorname{rot}(\vec{A})) dG &= \int_G \alpha \operatorname{rot}(\vec{A}) \cdot \operatorname{rot}(\vec{V}) + \operatorname{div}(\alpha \operatorname{rot}(\vec{A}) \times \vec{V}) dG \\
&= \int_G \alpha \operatorname{rot}(\vec{A}) \cdot \operatorname{rot}(\vec{V}) dG + \int_{\partial G} \alpha \operatorname{rot}(\vec{A}) \times \vec{V} \cdot d\vec{S} \\
&= \int_G \alpha \operatorname{rot}(\vec{A}) \cdot \operatorname{rot}(\vec{V}) dG + \int_{\partial G} \alpha \vec{V} \cdot (\vec{n} \times \operatorname{rot}(\vec{A})) dS
\end{aligned}$$

Wir haben in der oberen Form das Gebietsintegral über die Divergenz mittels des Gaußschen Satzes in ein Randintegral verwandelt. Die schwache Form der obigen Differentialgleichung lautet also nun:

$$\int_G \alpha \operatorname{rot}(\vec{A}) \cdot \operatorname{rot}(\vec{V}) + \beta \vec{V} \cdot \vec{A} dG + \int_{\partial G} \alpha \vec{V} \cdot (\vec{n} \times \operatorname{rot}(\vec{A})) dS = \int_G \vec{g} \cdot \vec{V} dG$$

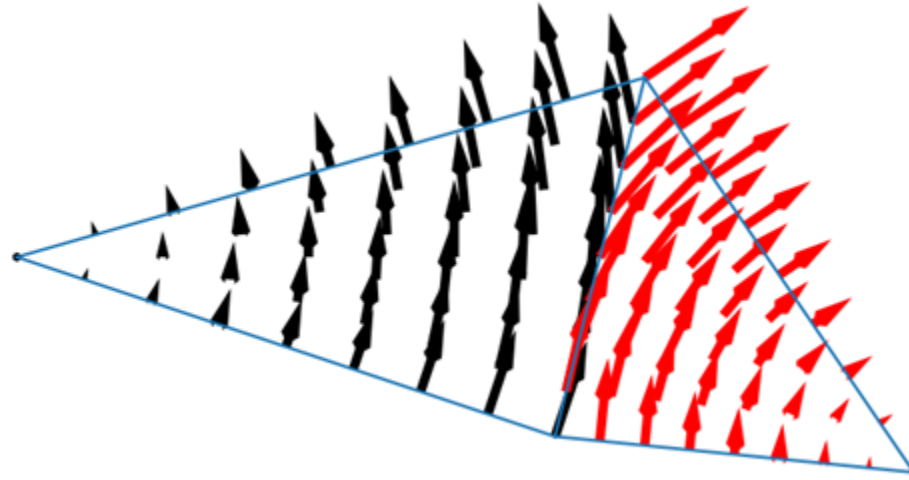
Im skalaren Fall haben wir nun das Gebiet in Teilgebiete unterteilt und anschließend die unbekannte Funktion in Basisfunktionen entwickelt. Das waren die Hutfunktionen über den einzelnen Knoten des Gebietes. Als Testfunktionen verwendeten wir wieder die gleichen Hutfunktionen. Eine Möglichkeit das Problem zu lösen wäre sicherlich gewesen, die ursprüngliche Gleichung in Komponenten zu schreiben und dann das bekannte Galerkin-Verfahren für skalare Funktionen zu verwenden.

Wir wollen hier jedoch vektorielle Basisfunktionen verwenden, die für ein Vektorproblem ausgesprochen günstige Eigenschaften haben. Das heißt in dem Zusammenhang, dass wir an der Grenzflächen zweier Elemente die in der Elektrodynamik bekannten Übergangsbedingungen erfüllen müssen. So muss beispielsweise die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes stetig sein, die Normalkomponente des elektrischen Feldes weist einen Sprung gemäß dem Quotienten der Dielektrizitätszahlen auf. Basisfunktionen, die diesem Umstand Rechnung tragen werden sich somit günstig auf das numerische Verfahren auswirken.

Für die Hutfunktionen haben die Knoten eine entscheidende Rolle gespielt. Bei den vektoriellen Basisfunktionen ahnen wir schon, dass die Kanten der Elemente diese Rolle übernehmen werden. Wir schreiben also

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^N a_i \vec{U}_i$$

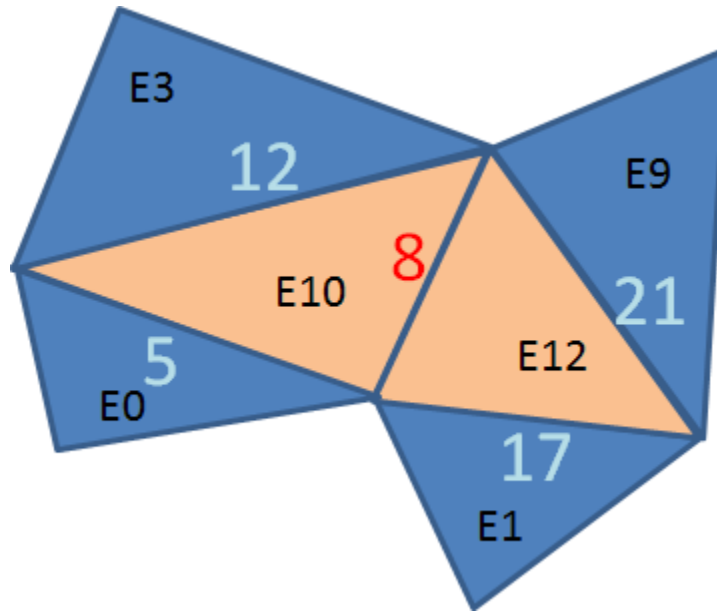
wobei anschaulich der Entwicklungskoeffizient a_i die Tangentialkomponente von \vec{A} an der Kante i darstellt. Damit ist auch klar, dass die Basisfunktionen \vec{U}_i an einer Elementkante stetig bezüglich der Tangentialkomponente sein müssen, die Normalkomponente von \vec{U} an der Kante muss allerdings nicht stetig sein. Die Abbildung zeigt die Basisfunktion zu einer Kante in zwei Dimensionen.



Die Tangentialkomponente ist an der gemeinsamen Kante stetig und hat einen konstanten Wert. Die Normalkomponente hingegen ist nicht stetig und verändert sich entlang der Kanten. An den nicht gemeinsamen Kanten stehen die Vektorfunktionen senkrecht auf diesen Kanten. Ausserhalb dieser beiden Elemente ist die Kantenfunktion (zu dieser Kante) null. Wir werden im weiteren Verlauf die explizite Darstellung dieser Funktion noch kennenlernen und diese Eigenschaften überprüfen, für den Moment genügt es diese Eigenschaften zu kennen.

Ersetzt man nun die unbekannte Funktion durch die Entwicklung und benutzt die gleichen Basisfunktionen als Testfunktion (Galerkin-Verfahren), so erhält man:

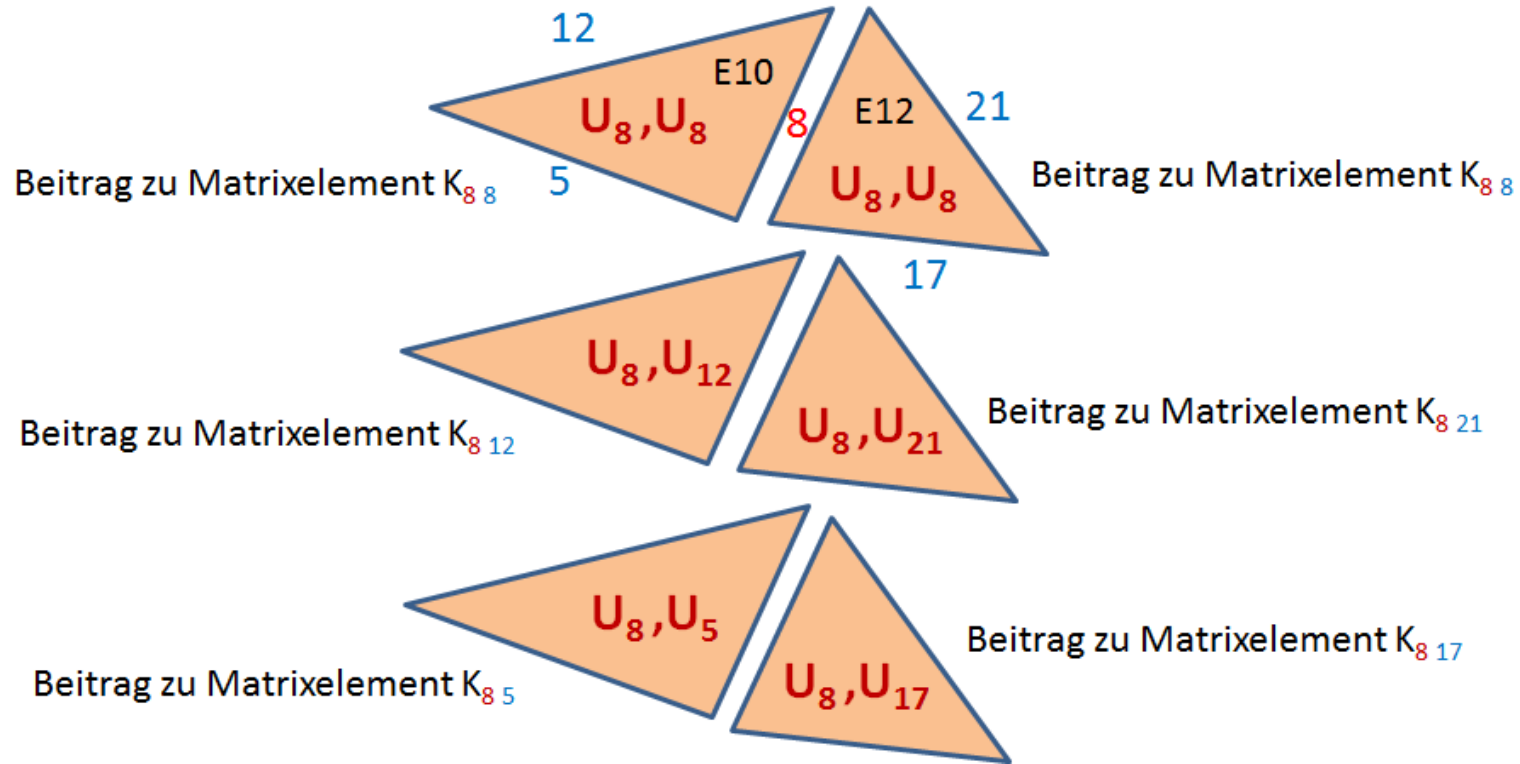
$$\sum_{i=1}^N a_i \left[\int_G \alpha \operatorname{rot}(\vec{U}_i) \cdot \operatorname{rot}(\vec{U}_k) + \beta \vec{U}_k \cdot \vec{U}_i dG + \int_{\partial G} \alpha \vec{U}_k \cdot (\vec{n} \times \operatorname{rot}(\vec{U}_i)) dS \right] = \int_G \vec{g} \cdot \vec{U}_k dG$$



[]:

Wir erhalten wieder ein LGS, dieses mal jedoch für die Kantenwerte. Auch hier wird das LGS wieder viele Nullen enthalten, denn wie aus dem oberen Bild ersichtlich werden beispielsweise in der achten Zeile $k = 8$ nur Beiträge der Summe für $i = 8, 21, 17, 5, 12$ von Null verschieden sein. Auch hier reduziert sich somit die Integration über G über eine Integration über die Elemente, die an die Kante 8 angrenzen. Im Beispiel sind das die beiden Elemente $E10, E12$. In den blauen Elementen ist die Basisfunktion $\tilde{U}_k, k = 8$ bereits null.

Das folgende Bild stellt alle möglichen Kombinationen für die achte Zeile dar



Wir können also auch hier, wie gewohnt, einfach alle Kombinationen eines beliebigen Elementes der Element-Basisfunktionen \vec{N}_j berechnen und dann entsprechend (nun in die Kantenmatrix) einsortieren. Wir betrachten also nun ein beliebiges Element mit einer lokalen Nummerierung und definieren darauf unsere Kantenfunktionen \vec{N}_j .

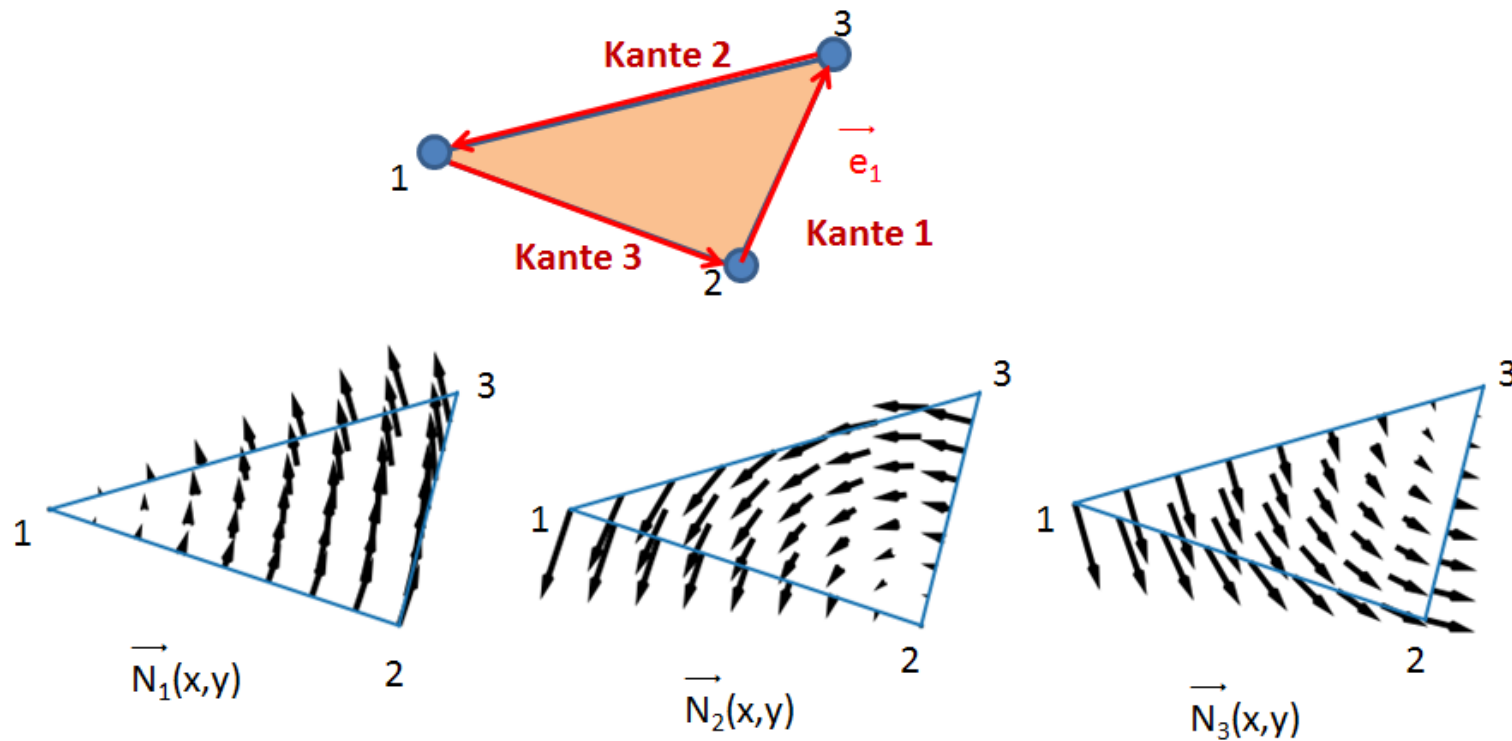
Sie lassen sich durch die Basisknotenfunktionen $N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta_E} (a_i + b_i x + c_i y)$ von oben ausdrücken und lauten explizit:

$$\begin{aligned} \vec{N}_1(x, y) &= L_{23} \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) = \frac{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}{4\Delta_E^2} \begin{pmatrix} (a_2 + b_2 x + c_2 y) b_3 - (a_3 + b_3 x + c_3 y) b_2 \\ (a_2 + b_2 x + c_2 y) c_3 - (a_3 + b_3 x + c_3 y) c_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}{4\Delta_E^2} \begin{pmatrix} (a_2 b_3 - a_3 b_2) - 2y \Delta_E \\ (a_2 c_3 - a_3 c_2) + 2x \Delta_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a b_{123} \\ a c_{123} \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierbei ist L_{23} die Kantenlänge zwischen den Knoten 2 und 3. Analog finden wir durch zyklisches Vertauschen

$$\vec{N}_2(x, y) = L_{31} \left(N_3(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) - N_1(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) \right) = \frac{\sqrt{b_2^2 + c_2^2}}{4\Delta_E^2} \begin{pmatrix} (a_3 b_1 - a_1 b_3) - 2y\Delta_E \\ (a_3 c_1 - a_1 c_3) + 2x\Delta_E \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_3(x, y) = L_{12} \left(N_1(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) - N_2(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) \right) = \frac{\sqrt{b_3^2 + c_3^2}}{4\Delta_E^2} \begin{pmatrix} (a_1 b_2 - a_2 b_1) - 2y\Delta_E \\ (a_1 c_2 - a_2 c_1) + 2x\Delta_E \end{pmatrix}$$



Die Graphik zeigt die drei Vektorfunktionen, die nachfolgend in Python programmiert sind

```

[56]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

P1=[1,2]
P2=[4,1]
P3=[4.5,3]
N=8
Basis=2

#dreieck
p=np.array([P1,P2,P3])
t=np.array([[0,1,2]])

#definiere die as,bs,cs
a=[0,0,0]; b=[0,0,0]; c=[0,0,0]
a[0]=P2[0]*P3[1]-P2[1]*P3[0]; b[0]=P2[1]-P3[1]; c[0]=P3[0]-P2[0]
a[1]=P3[0]*P1[1]-P3[1]*P1[0]; b[1]=P3[1]-P1[1]; c[1]=P1[0]-P3[0]
a[2]=P1[0]*P2[1]-P1[1]*P2[0]; b[2]=P1[1]-P2[1]; c[2]=P2[0]-P1[0]

two_d=b[0]*c[1]-b[1]*c[0]

#definiere Basisfunktion
def Nk(k,x,y):
    h=[1,2,0,1]
    e=h[k:k+2]
    i=e[0]; j=e[1]
    La=(a[i]+b[i]*x+c[i]*y)/two_d
    Lb=(a[j]+b[j]*x+c[j]*y)/two_d
    Nabla_La=1./two_d*np.array([b[i],c[i]])
    Nabla_Lb=1./two_d*np.array([b[j],c[j]])
    return (La*Nabla_Lb-Lb*Nabla_La)*np.sqrt(b[k]**2+c[k]**2)

#zeichne Basisfunktionen
dst=1./N

```

```

XX=[]; YY=[]; VX=[]; VY=[]
for ss in np.arange(0.0001,1.0001,dst):
    for tt in np.arange(0.0001,1.001-ss,dst):

        x=P1[0]+tt*(P2[0]-P1[0])+ss*(P3[0]-P1[0])
        y=P1[1]+tt*(P2[1]-P1[1])+ss*(P3[1]-P1[1])
        #print(Nk(1,x,y)-N1(x,y))
        vec=Nk(Basis,x,y)
        XX+= [x]
        YY+= [y]
        VX+= [vec[0]]
        VY+= [vec[1]]

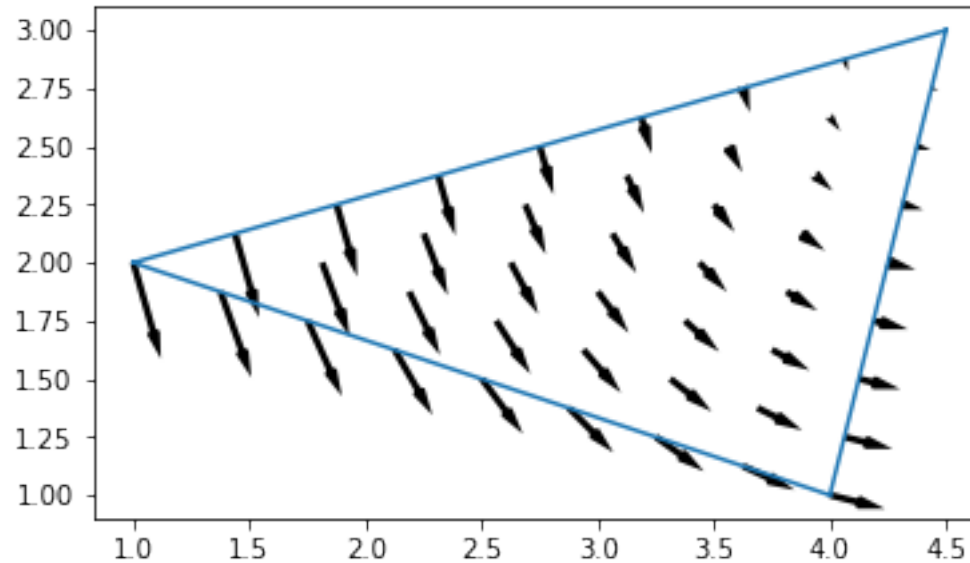
plt.quiver(XX,YY,VX,VY,headwidth=2,headlength=4)

#plt.xlim([0,7])
#plt.ylim([0,4])
plt.triplot(p[:,0],p[:,1],t)
plt.axes().set_aspect('equal')
plt.show()

```

C:\Users\weju0001\32bit\anaconda3\lib\site-packages\matplotlib\cbook\deprecation.py:106: MatplotlibDeprecationWarning: Adding an axes using the same arguments as a previous axes currently reuses the earlier instance. In a future version, a new instance will always be created and returned. Meanwhile, this warning can be suppressed, and the future behavior ensured, by passing a unique label to each axes instance.

```
warnings.warn(message, mplDeprecation, stacklevel=1)
```



Wenden wir uns nun den zuvor geschilderten Eigenschaften zu. Wir betrachten nur die Basisfunktion \vec{N}_1 , Analoges gilt für die anderen beiden. Es gilt im Einzelnen:

- 1) Die Divergenz ist offensichtlich null $\text{div}(\vec{N}_1) = 0$, da die x-Komponente nur von y und die y-Komponente nur von x abhängt (siehe oben). Man beachte auch, dass die Entwicklung der Koordinaten nicht vollständig linear ist, die erste Komponente ist "nur" linear in y und die zweite Komponente ist "nur" linear in x.
- 2) Die Tangentialkomponente vom Knoten i an der Kante i ist konstant. Hierzu schreiben wir z.B. den ersten Kantenvektor in normierter Form als $\vec{e}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}(c_1, -b_1)$. Damit wird

$$\begin{aligned}
\vec{N}_1(x, y) \cdot \vec{e}_1^0 &= \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}} \begin{pmatrix} c_1 \\ -b_1 \end{pmatrix} \\
&= N_2(x, y) \frac{1}{2\Delta_E} \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ -b_1 \end{pmatrix} - N_3(x, y) \frac{1}{2\Delta_E} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ -b_1 \end{pmatrix} \\
&= N_2(x, y) \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{2\Delta_E} - N_3(x, y) \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{2\Delta_E} = N_2(x, y) + N_3(x, y) = 1 - N_1(x, y)
\end{aligned}$$

also $\vec{N}_1(x, y) \cdot \vec{e}_1^0|_{\text{kante } 1} = 1$. Damit ist die Tangentialkomponente an dieser Kante stetig zum angrenzenden Element, welches an dieser Kante die gleiche Eigenschaft haben muss.

3) Die Normalkomponente ändert sich entlang der Kante 1 linear und ist nicht stetig

$$\begin{aligned}
\vec{N}_1(x, y) \cdot \vec{e}_{\perp 1}^0 &= \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \\
&= N_2(x, y) \frac{1}{2\Delta_E} \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} - N_3(x, y) \frac{1}{2\Delta_E} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \\
&= N_2(x, y) \frac{b_1 b_3 + c_1 c_3}{2\Delta_E} - N_3(x, y) \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{2\Delta_E} = (1 - N_1(x, y) - N_3(x, y)) \frac{b_1 b_3 + c_1 c_3}{2\Delta_E} - N_3(x, y) \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{2\Delta_E}
\end{aligned}$$

auf der Kante 1 ist das

$$\vec{N}_1(x, y) \cdot \vec{e}_{\perp 1}^0|_{\text{kante } 1} = \frac{1}{2\Delta_E} \left(b_1 b_3 + c_1 c_3 + N_3(x, y) |_{\text{kante } 1} (b_1^2 + c_1^2) \right)$$

Damit hängt die Normalkomponente auf der Kante 1 vom Ort ab und ist nicht stetig, da die Lage des Knotens 1 ($b_3 = y_1 - y_2$, $c_3 = x_2 - x_1$) die Größe der Normalkomponente mitbestimmt

4) \vec{N}_1 steht senkrecht auf den Kanten 2 und 3. Wir prüfen Kante 2 (zwischen den Knoten 3 und 1) mit $\vec{e}_2 = (c_2, -b_2)$

$$\vec{N}_1 \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ -b_2 \end{pmatrix} = \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \left[N_2(x, y) \frac{1}{2\Delta_E} \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ -b_2 \end{pmatrix} - N_3(x, y) \frac{1}{2\Delta_E} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ -b_2 \end{pmatrix} \right] = \sqrt{b_1^2 + c_1^2} N_2(x, y)$$

auf der Kante 2 ist aber $N_2(x, y)$ immer null, so dass die Basisfunktion diese Kante immer senkrecht schneidet. Analog gilt das für die Kante 3.

5) Die Rotation von $\vec{N}_1(x, y)$ ist ortsunabhängig und hängt nur vom Abstand des Knotens 1 von der Kante 1 (h_{11}) ab.

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(\sqrt{b_1^2 + c_1^2} (N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y))) &= 2\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \vec{\nabla} N_2(x, y) \times \vec{\nabla} N_3(x, y) \\
 &= \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \frac{2}{4\Delta_E^2} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 2\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \frac{1}{4\Delta_E^2} 2\Delta_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}{\Delta_E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{h_{11}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nachdem nun alle Eigenschaften überprüft sind, müssen wir die Matricelemente berechnen. Wir definieren zunächst noch die Größe $f_{ij} = b_i b_j + c_i c_j$ und gehen dann völlig analog zum Fall skalarer Funktionen vor. Konkret gilt es für jedes Element die folgenden Integrale zu berechnen (siehe schwache Form):

$$(1) \quad \int_{\text{Dreieck}} \alpha \operatorname{rot}(\vec{N}_i) \cdot \operatorname{rot}(\vec{N}_j) d(x, y) = \int_{\text{Dreieck}} \alpha \frac{\sqrt{b_i^2 + c_i^2} \sqrt{b_j^2 + c_j^2}}{\Delta_E^2} d(x, y) \approx \frac{\alpha_M}{\Delta_E} \sqrt{f_{ii}} \sqrt{f_{jj}}$$

$$(2) \quad \int_{\text{Dreieck}} \beta \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_1 d(x, y) \\ \approx \beta_M (b_1^2 + c_1^2) \int_{\text{Dreieck}} \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) \cdot \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) d(x, y) \\ = \frac{\beta_M f_{11}}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Dreieck}} N_2^2 f_{33} + N_3^2 f_{22} - 2N_2 N_3 f_{23} d(x, y) = \frac{\beta_M f_{11}}{24\Delta_E} (f_{33} + f_{22} - f_{23})$$

Die Integrale über $N_i N_j$ hatten wir beim Fall skalarer Funktionen berechnet ($\int N_i N_j d(x, y) = \Delta_E / 12 (1 + \delta_{ij})$)

$$(3) \quad \int_{\text{Dreieck}} \beta \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 d(x, y) \\ \approx \beta_M \sqrt{f_{11}} \sqrt{f_{22}} \int_{\text{Dreieck}} \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) \cdot \left(N_3(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) - N_1(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) \right) d(x, y) \\ = \frac{\beta_M \sqrt{f_{11}} \sqrt{f_{22}}}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Dreieck}} N_2 N_3 f_{31} - N_2 N_1 f_{33} - N_3^2 f_{21} + N_3 N_1 f_{23} d(x, y) = \frac{\beta_M \sqrt{f_{11}} \sqrt{f_{22}}}{48\Delta_E} (f_{31} - f_{33} - 2f_{21} + f_{23})$$

$$(4) \quad \int_{\text{Dreieck}} \beta \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_3 d(x, y) \\ \approx \beta_M \sqrt{f_{11}} \sqrt{f_{33}} \int_{\text{Dreieck}} \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) \cdot \left(N_1(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) - N_2(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) \right) d(x, y) \\ = \frac{\beta_M \sqrt{f_{11}} \sqrt{f_{33}}}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Dreieck}} N_2 N_1 f_{32} - N_2^2 f_{31} - N_3 N_1 f_{22} + N_3 N_2 f_{21} d(x, y) = \frac{\beta_M \sqrt{f_{11}} \sqrt{f_{33}}}{48\Delta_E} (f_{32} - 2f_{31} - f_{22} + f_{21})$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad & \int_{\text{Dreieck}} \beta \vec{N}_2 \cdot \vec{N}_2 d(x, y) \\
& \approx \beta_M f_{22} \int_{\text{Dreieck}} \left(N_3(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) - N_1(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) \right) \cdot \left(N_3(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) - N_1(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) \right) d(x, y) \\
& = \frac{\beta_M f_{22}}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Dreieck}} N_3^2 f_{11} + N_1^2 f_{33} - 2N_1 N_3 f_{13} d(x, y) = \frac{\beta_M f_{22}}{24\Delta_E} (f_{11} + f_{33} - f_{13}) \\
(6) \quad & \int_{\text{Dreieck}} \beta \vec{N}_2 \cdot \vec{N}_3 d(x, y) \\
& \approx \beta_M \sqrt{f_{22}} \sqrt{f_{33}} \int_{\text{Dreieck}} \left(N_3(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) - N_1(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) \right) \cdot \left(N_1(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) - N_2(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) \right) d(x, y) \\
& = \frac{\beta_M \sqrt{f_{22}} \sqrt{f_{33}}}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Dreieck}} N_3 N_1 f_{12} - N_3 N_2 f_{11} - N_1^2 f_{23} + N_1 N_2 f_{13} d(x, y) = \frac{\beta_M \sqrt{f_{22}} \sqrt{f_{33}}}{48\Delta_E} (f_{12} - f_{11} - 2f_{23} + f_{13}) \\
(7) \quad & \int_{\text{Dreieck}} \beta \vec{N}_3 \cdot \vec{N}_3 d(x, y) \\
& \approx \beta_M f_{33} \int_{\text{Dreieck}} \left(N_1(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) - N_2(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) \right) \cdot \left(N_1(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) - N_2(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) \right) d(x, y) \\
& = \frac{\beta_M f_{33}}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Dreieck}} N_1^2 f_{22} + N_2^2 f_{11} - 2N_1 N_2 f_{12} d(x, y) = \frac{\beta_M f_{33}}{24\Delta_E} (f_{22} + f_{11} - f_{12}) \\
(8) \quad & \int_{\text{Dreieck}} \vec{g} \cdot \vec{N}_1 d(x, y) \approx \sqrt{f_{11}} \vec{g}_M \cdot \int_{\text{Dreieck}} N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) d(x, y) \\
& = \frac{\sqrt{f_{11}}}{2\Delta_E} \vec{g}_M \cdot \int_{\text{Dreieck}} N_2(x, y) \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} - N_3(x, y) \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} d(x, y) = \frac{\sqrt{f_{11}}}{6} \vec{g}_M \cdot \begin{pmatrix} b_3 - b_2 \\ c_3 - c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(9) \quad \int_{\text{Dreieck}} \vec{g} \cdot \vec{N}_2 d(x, y) &\approx \sqrt{f_{22}} \vec{g}_M \cdot \int_{\text{Dreieck}} N_3(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) - N_1(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) d(x, y) \\
&= \frac{\sqrt{f_{22}}}{2\Delta_E} \vec{g}_M \cdot \int_{\text{Dreieck}} N_3(x, y) \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} - N_1(x, y) \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} d(x, y) = \frac{\sqrt{f_{22}}}{6} \vec{g}_M \cdot \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ c_1 - c_3 \end{pmatrix} \\
(10) \quad \int_{\text{Dreieck}} \vec{g} \cdot \vec{N}_3 d(x, y) &\approx \sqrt{f_{33}} \vec{g}_M \cdot \int_{\text{Dreieck}} N_1(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) - N_2(x, y) \vec{\nabla} N_1(x, y) d(x, y) \\
&= \frac{\sqrt{f_{33}}}{2\Delta_E} \vec{g}_M \cdot \int_{\text{Dreieck}} N_1(x, y) \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} - N_2(x, y) \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} d(x, y) = \frac{\sqrt{f_{33}}}{6} \vec{g}_M \cdot \begin{pmatrix} b_2 - b_1 \\ c_2 - c_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Und in Matrixform ($f_{ij} = b_i b_j + c_i c_j$) endlich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{\alpha_M}{\Delta_E} \begin{pmatrix} \frac{f_{11}}{\sqrt{f_{11}f_{22}}} & \sqrt{f_{11}f_{22}} & \sqrt{f_{11}f_{33}} \\ \sqrt{f_{11}f_{22}} & f_{22} & \sqrt{f_{22}f_{33}} \\ \sqrt{f_{11}f_{33}} & \sqrt{f_{22}f_{33}} & f_{33} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{\beta_M}{48\Delta_E} \begin{pmatrix} 2f_{11}(f_{33} + f_{22} - f_{23}) & \sqrt{f_{11}f_{22}}(f_{31} - f_{33} - 2f_{21} + f_{23}) & \sqrt{f_{11}f_{33}}(f_{32} - 2f_{31} - f_{22} + f_{21}) \\ \sqrt{f_{11}f_{22}}(f_{31} - f_{33} - 2f_{21} + f_{23}) & 2f_{22}(f_{11} + f_{33} - f_{13}) & \sqrt{f_{22}f_{33}}(f_{12} - f_{11} - 2f_{23} + f_{13}) \\ \sqrt{f_{11}f_{33}}(f_{32} - 2f_{31} - f_{22} + f_{21}) & \sqrt{f_{22}f_{33}}(f_{12} - f_{11} - 2f_{23} + f_{13}) & 2f_{33}(f_{22} + f_{11} - f_{12}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{D} = \frac{1}{6} \left(\sqrt{f_{11}} \vec{g}_M \cdot \begin{pmatrix} b_3 - b_2 \\ c_3 - c_2 \end{pmatrix}, \sqrt{f_{22}} \vec{g}_M \cdot \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ c_1 - c_3 \end{pmatrix}, \sqrt{f_{33}} \vec{g}_M \cdot \begin{pmatrix} b_2 - b_1 \\ c_2 - c_1 \end{pmatrix} \right)$$

Bislang haben wir uns weder um Randbedingungen, noch um das Randintegral der schwachen Form der Vektorgleichung gekümmert. Bei den skalaren Problemen war diese Tatsache eng verknüpft, so auch hier.

Wir behandeln hier in Analogie zum skalaren Fall zwei Randbedingungen, die Dirichlet-

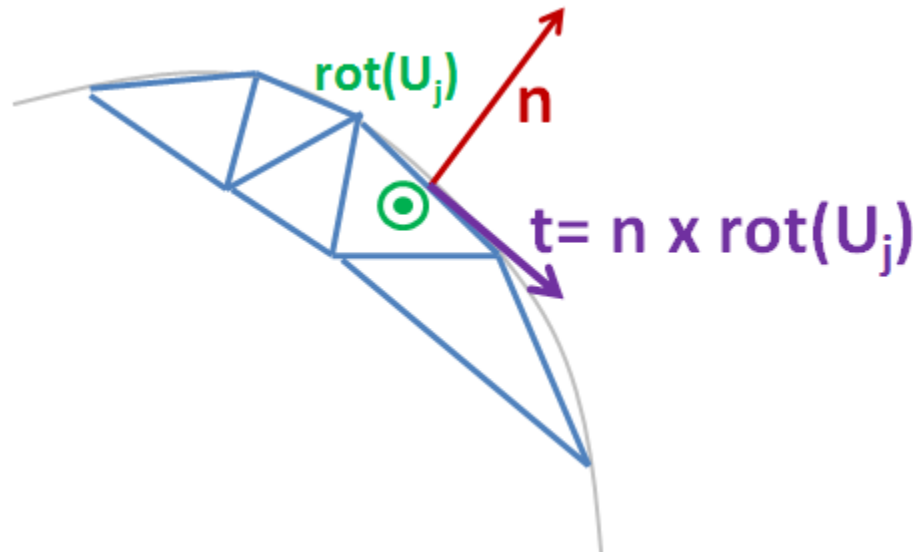
$$\vec{n} \times \vec{A} \Big|_{\Gamma} = \vec{g}$$

und die Robin-Randbedingung.

$$\vec{n} \times \left(\alpha \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + \gamma \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{A} \right) \Big|_{\Gamma} = \vec{q}$$

Betrachten wir zunächst den Dirichlet-Fall.

Vorgabe der Tangentialkomponente von \vec{A} bzw. der Normalkomponente von $\text{rot}(\vec{A})$ ("Dirichlet-Problem") Wir gehen also davon aus, dass auf dem Rand des Gebietes die Tangentialkomponenten bekannt sind. Wenn auf dem Rand $\vec{A} = A_n \vec{n} + A_t \vec{t}$ gilt, so ist $\vec{A} \times \vec{n} = A_t \vec{t}$, wobei \vec{t} senkrecht auf \vec{n} und \vec{t} steht. Aus der Vorgabe $\vec{A} \times \vec{n}$ gewinnen wir also die Tangentialkomponente. Sind die Tangentialkomponenten (bzw. $\vec{A} \times \vec{n}$) bekannt, so testen wir nur mit Kantenfunktionen im Innern des Gebietes, k ist also nie eine Randkante. Damit steht aber \vec{U}_k immer senkrecht auf dem Rand.



Da $\vec{n} \times \text{rot}(\vec{U}_j)$ aber ein Vektor ist, der Tangential am Rand liegt (siehe Eigenschaft der Rotation oben und Skizze) ist das Skalarprodukt $\vec{U}_k \cdot \left(\vec{n} \times \text{rot}(\vec{U}_j) \right)$ immer null, so dass für diesen Fall keine weiteren Matrixelemente mehr berechnet werden müssen. Es gilt also:

$$\int_{\partial G} \alpha \vec{U}_k \cdot \left(\vec{n} \times \text{rot} \left(\vec{U}_i \right) \right) dS = 0$$

Das Gleichungssystem ist also festgelegt. Wir reduzieren die Matrix nun noch um die Randkantenspalten/zeilen und ziehen die Spalten (multipliziert mit dem Randkantenwert) von der rechten Seite ab. Invertieren des LGS löst schließlich das Problem.

$$(K_{ij}) \cdot (\vec{a}_j) = D - \sum_{m=1}^{N_R} a_m (K_{im})$$

Ist also die Tangentialkomponente (d.h. $\vec{A} \times \vec{n} = \vec{a}$) bekannt, so behandeln wir die Gleichungen völlig analog zum Dirichletproblem. In der Überschrift ist die Normalkomponente der Rotation von \vec{A} erwähnt. Diese hat eine enge Verbindung zur Tangentialkomponente von \vec{A} . Es gilt nämlich in der koordinatenfreien Darstellung (\vec{n} senkrecht auf ΔA), dass die Normalkomponente dem Linienintegral gemäß

$$\vec{n} \cdot \text{rot}(\vec{A}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{x}}{\Delta F}$$

entspricht. Da im Linienintegral aber nur die Tangentialkomponenten von \vec{A} eingehen, hängt also die Normalkomponente von $\text{rot}(\vec{A})$ nur von der Tangentialkomponente von \vec{A} ab. Die Berechnung der Tangentialkomponente \vec{A} aus der Normalkomponente von $\text{rot}(\vec{A})$ ist nicht eindeutig. Ist die Größe der Normalkomponente b , so gilt

$$b = \vec{n} \cdot \text{rot}(\vec{A}) = \text{div}(\vec{n} \times \vec{A})$$

und damit muss die Tangentialkomponente $\vec{a} = \vec{n} \times \vec{A}$ so gewählt werden, dass gilt $\text{div}(\vec{a}) = b$. Offensichtlich ist die Lösung nicht eindeutig, denn alle $\vec{a}' = \vec{a} + \text{rot}(\vec{f}(x, y))$ erfüllen die gleiche Bedingung $\text{div}(\vec{a}') = b$ für eine völlig beliebige Funktion $\vec{f}(x, y)$

Stellt beispielsweise \vec{A} das Vektorpotential beim Magnetismus dar, so ist $\vec{n} \cdot \text{rot}(\vec{A})$ nichts anderes als die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} .

Robin-Randbedingung, Vorgabe von $\vec{n} \times (\alpha \vec{\nabla} \times \vec{A}) + \gamma \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}) \Big|_{\Gamma}$ Für die zweite mögliche Randbedingung verlangen wir:

$$\vec{n} \times \left(\alpha \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + \gamma \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{A} \right) \Big|_{\Gamma} = \vec{q}$$

Da nun das Randintegral nicht mehr verschwindet (wie auch schon im Fall der skalaren FEM) berechnen wir nun die Beiträge zur Matrix aufgrund der Randintegrale. Zunächst gilt:

$$\int_{\partial G} \alpha \vec{U}_k \cdot \left(\vec{n} \times \text{rot} \left(\vec{A} \right) \right) dS = \int_{\partial G} \vec{U}_k \cdot \vec{q} - \gamma \vec{U}_k \cdot \left(\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{A} \right) \right) dS$$

Dieses Integral ist nur von null verschieden, falls k eine Randkante ist. Denn wäre k keine Randkante, so würde \vec{U}_k immer senkrecht auf dem Rand stehen (siehe Eigenschaften oben), oder anders gesagt in Richtung von \vec{n} weisen. Da aber $\vec{n} \times \text{rot} \left(\vec{A} \right)$ immer senkrecht auf dem Normalenvektor \vec{n} steht muss gelten:

$$\vec{U}_k \cdot \left(\vec{n} \times \text{rot} \left(\vec{A} \right) \right) = 0 \quad \text{falls } k \text{ kein Randknoten ist, denn für diese } k \text{ ist } \vec{U}_k \parallel \vec{n} \text{ bzw. } \vec{U}_k \times \vec{n} = \vec{0}$$

Es gilt also nun zwei Integrale auszuwerten. Das eine Integral wird der rechten Seite des LGS zugerechnet, das zweite Integral liefert entsprechende Beiträge zur globalen Matrix K .

Im folgenden sei k ein Randknoten und die Kantenelemente seien so sortiert, dass es sich um die erste Kante handelt im betreffenden Randelement handelt.

Betrachten wir den zweiten Beitrag, der sich wie folgt umformen lässt:

$$- \int_{\partial G} \gamma \vec{U}_k \cdot \left(\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{A} \right) \right) dS = - \int_{\partial G} \gamma \left(\vec{n} \times \vec{A} \right) \cdot \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) dS = \int_{\partial G} \gamma \left(\vec{A} \times \vec{n} \right) \cdot \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) dS$$

Nun benutzen wir für \vec{A} die Entwicklung $\sum a_l \vec{U}_l$ in Kantenelemente und beachten, dass sich das Integral über ∂G auf ein Integral über die Randkante k reduziert. Von der Entwicklung verbleibt dann nur noch der Beitrag a_k und damit pro Element nur ein einziger Eintrag in die Matrix K , konkret also

$$\int_{\partial G} \gamma \left(\vec{A} \times \vec{n} \right) \cdot \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) dS = a_k \int_{\text{Kante } k} \gamma \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) \cdot \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) dS$$

Den Normalenvektor können wir direkt aus dem Kantenvektor über die Bedingung $\vec{e}_1^0 \cdot \vec{n} = 0$ ermitteln. Da der Normalenvektor aus dem Gebiet herauszeigen muss ergibt sich mit $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}(-b_1, -c_1)$ der Ausdruck:

$$\begin{aligned}
& a_k \int_{\text{Kante } k} \gamma \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) \cdot \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) dS \approx a_k \gamma_M \int_{\text{Kante } k} \left| \vec{U}_k \times \vec{n} \right|^2 dS \\
& = \frac{a_k \gamma_M}{b_1^2 + c_1^2} \int_{\text{Kante } k} \left| \vec{U}_k \times \begin{pmatrix} -b_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} \right|^2 dS = \frac{a_k \gamma_M}{b_1^2 + c_1^2} \int_{\text{Kante } k} (b_1^2 + c_1^2) \left| \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) \times \begin{pmatrix} -b_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} \right|^2 dS \\
& = a_k \gamma_M \frac{1}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Kante } k} \left| \left(N_2(x, y) \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} - N_3(x, y) \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -b_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} \right|^2 dS \\
& = a_k \gamma_M \frac{1}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Kante } k} \left| N_2(x, y) \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -b_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} - N_3(x, y) \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -b_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} \right|^2 dS \\
& = a_k \gamma_M \frac{1}{4\Delta_E^2} \int_{\text{Kante } k} \left| N_2(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\Delta_E \end{pmatrix} - N_3(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Delta_E \end{pmatrix} \right|^2 dS \\
& = a_k \gamma_M \int_{\text{Kante } k} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_2 + N_3 \end{pmatrix} \right|^2 dS \\
& = a_k \gamma_M \int_{\text{Kante } k} N_2^2 + N_3^2 + 2N_2N_3 ds
\end{aligned}$$

Die Randintegrale übernehmen wir aus dem skalaren Fall ($\int N_i N_j ds = 1/6 L_E (1 + \delta_{ij})$) und erhalten mit $L_E = \sqrt{f_{11}}$ somit schliesslich:

$$a_k \int_{\text{Kante } k} \gamma \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) \cdot \left(\vec{U}_k \times \vec{n} \right) dS \approx a_k \gamma_M \left(\frac{L_E}{3} + \frac{L_E}{3} + 2 \frac{L_E}{6} \right) = a_k \gamma_M \sqrt{f_{11}}$$

Damit gibt es also in der k-ten Zeile und der k-ten Spalte den Beitrag

$$\mathcal{K}_{Rand} = \sqrt{f_{11}} \gamma_M$$

Das war der eine Teil des Randintegrals, für den ersten Teil des Integrals gehen wir sehr ähnlich vor. Auch hier dürfen wir davon ausgehen, dass die erste Kante die Randkante ist. Es gilt damit

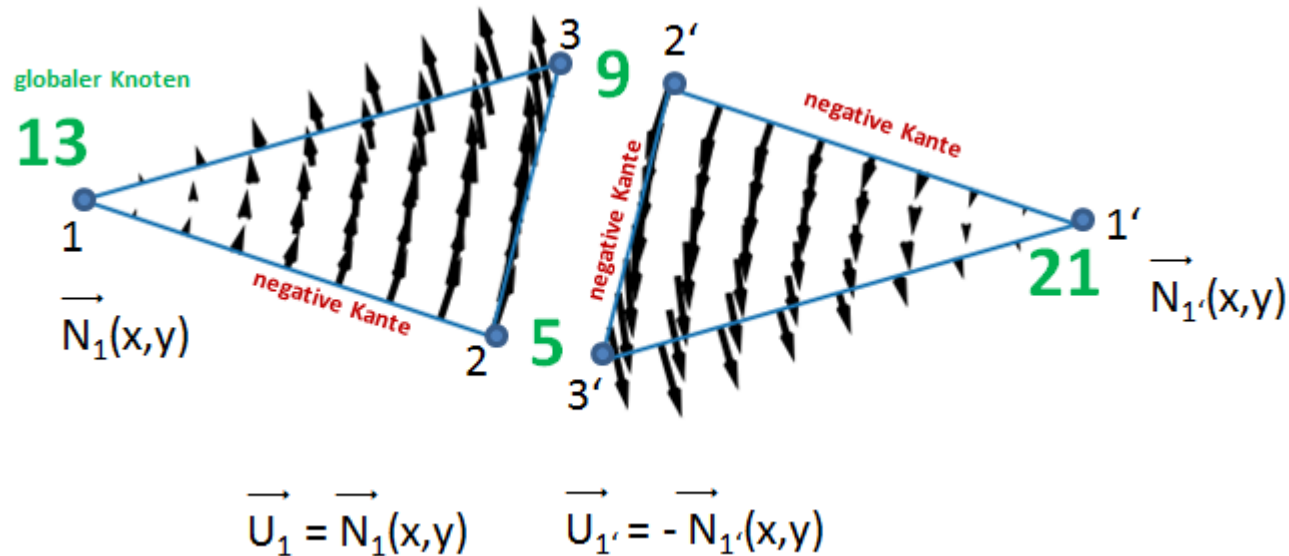
$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} \vec{U}_k \cdot \vec{q} dS &= \sqrt{f_{11}} \int_{Kante\ 1} \left(N_2(x, y) \vec{\nabla} N_3(x, y) - N_3(x, y) \vec{\nabla} N_2(x, y) \right) \cdot \vec{q}|_{Kante\ 1} dS \\
&\approx \frac{\sqrt{f_{11}}}{2\Delta_E} \vec{q}_M \cdot \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \int_{Kante\ 1} N_2(x, y)|_{Kante\ 1} dS - \frac{\sqrt{f_{11}}}{2\Delta_E} \vec{q}_M \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \int_{Kante\ 1} N_3(x, y)|_{Kante\ 1} dS \\
&= \frac{\sqrt{f_{11}}}{2\Delta_E} \vec{q}_M \cdot \begin{pmatrix} b_3 - b_2 \\ c_3 - c_2 \end{pmatrix} \int_{Kante\ 1} N_2(x, y)|_{Kante\ 1} dS = \frac{\sqrt{f_{11}}}{2\Delta_E} \vec{q}_M \cdot \begin{pmatrix} b_3 - b_2 \\ c_3 - c_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{f_{11}}
\end{aligned}$$

Die Integrale über N_2 und N_3 haben wir wieder aus den Berechnungen der skalaren Fälle übernommen ($\int N_i ds = 1/2L_E$). Der Zusatzbeitrag ist also hier nur ein Element pro Randkante k in der k -ten Zeile des Vektors D und lautet nach Abzug von der linken Seite:

$$\mathcal{D}_{Rand} = -\frac{f_{11}}{4\Delta_E} \vec{q}_M \cdot \begin{pmatrix} b_3 - b_2 \\ c_3 - c_2 \end{pmatrix}$$

Auch hier ist zu prüfen welche physikalische Randbedingung dieser Vorgabe entspricht. Ist \vec{A} beispielsweise wieder das magnetische Vektorpotential, so ist $\alpha \vec{n} \times \text{rot}(\vec{A})$ die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke \vec{H} . In Kombination erlauben also die beiden Randbedingungen einen Zugriff auf die Normalkomponente von \vec{B} und auf die Tangentialkomponente von \vec{H} .

Die Matrixelemente, wie sie berechnet wurden müssen beim Einsortieren unter Umständen noch mit einem Vorzeichenwechsel versehen werden. Der Grund hierfür ist in der folgenden Skizze ersichtlich. Werden die Elemente im Gegenuhrzeigersinn sortiert, führt das dazu, dass die lokalen Basisfunktionen zur gleichen Kante in unterschiedliche Richtung weisen. Um also eine Basisfunktion \vec{U}_k darzustellen bedarf es einer lokalen Funktion \vec{N}_1 in einem Element und der negative lokalen Basisfunktion $-\vec{N}_1'$ im zweiten Element.



Dies kann erreicht werden, indem allen Kanten eine Richtung erhalten, beispielsweise von der kleineren zu größeren globalen Knotennummer. Wird dann das lokale Matricelement K_{lm} einsortiert, so prüft man den Richtungssinn von Kante l und Kante m und multipliziert gegebenenfalls jeweils mit dem Faktor (-1) , falls dieser so sortierte Sinn vom "natürlichen" Drehsinn (math. positiv) abweicht.

Bevor wir ein Beispiel rechnen lohnt es sich ein paar allgemeine Eigenschaften zu erwähnen. Obwohl die Rotation von \vec{N}_k innerhalb des Elementes konstant ist lassen sich durch die richtige Wahl der Kantenwerte auch Vektorfelder mit $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ darstellen. Die Divergenz hingegen ist immer null innerhalb eines Elementes, auf den Kanten kann es aber eine Divergenz geben.

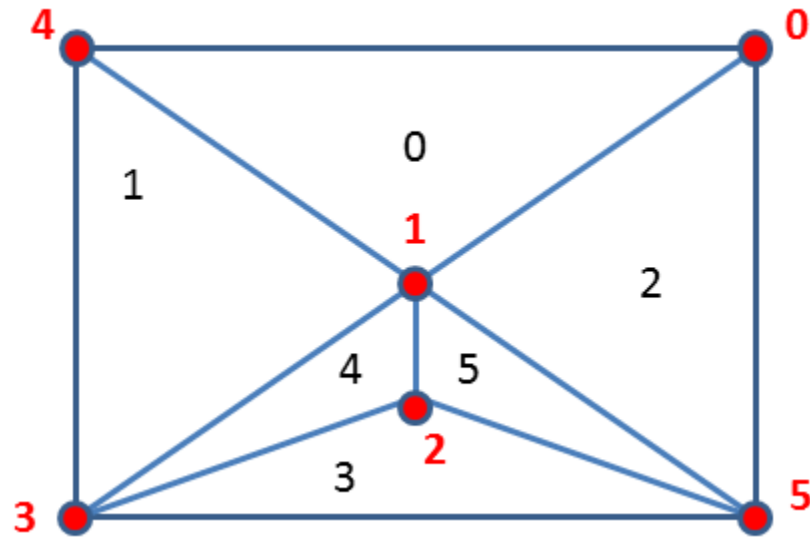
→ Beispiele von Vektorfeldern → Nullraum und diskussion der Moden → Lösbarkeit

Ein Beispiel

Vorgelegt sei das Vektorrandwertproblem

$$\text{rot} \left((1 + x^2) \text{rot} \left(\vec{A} \right) \right) - 2x^2y \vec{A} = \begin{pmatrix} -2y(x^2y^3 + 3) \\ -2x^3y^2(x^2y + 6) \end{pmatrix}$$

auf dem Gebiet $G = \{(x, y) \mid 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 0.7\}$



Die analytische Lösung lautet $\vec{A} = (3x^2 + y^3, x^3y^2)$

Die Liste der Punkte lautet: $p = [[1, 0.7], [0.5, 0.35], [0.5, 0.18], [0, 0], [0, 0.7], [1, 0]]$

Die Liste der Elemente lautet: $t_n = [[0, 4, 1], [3, 1, 4], [5, 0, 1], [3, 5, 2], [2, 1, 3], [5, 1, 2]]$

Die Kantenliste lautet: $edges = [(1, 4), (0, 1), (0, 4), (3, 4), (1, 3), (1, 5), (0, 5), (2, 5), (2, 3), (3, 5), (1, 2)]$

Die Elementliste mit den Kantennummern lautet: $t_e = [[0, 1, 2], [0, 3, 4], [1, 5, 6], [7, 8, 9], [4, 8, 10], [10, 7, 5]]$

Die Elementliste mit den Vorzeichen der Kanten lautet: $t_{signs} = [[-1, -1, 1], [1, -1, -1], [1, 1, -1], [-1, 1, 1], [1, -1, -1], [1, 1, -1]]$

Die Randkanten lautet: $dr = [2, 3, 6, 9]$

```
[2]: x,y,z=sy.symbols('x y z')
Avec =sy.Matrix([3*x**2+y**3 , -6*x*y , 0])
def Rot(vec):
    f1=sy.simplify(sy.diff(vec[2],y)-sy.diff(vec[1],z))
    f2=sy.simplify(sy.diff(vec[0],z)-sy.diff(vec[2],x))
```

```

f3=sy.simplify(sy.diff(vec[1],x)-sy.diff(vec[0],y))
return(sy.Matrix([f1,f2,f3]))

print(sy.simplify(sy.expand(Rot((y*x**2+1)*Rot(Avec))-2*y*Avec)))

```

NameError

Traceback (most recent call last)

```

<ipython-input-2-e09b68577b5c> in <module>
----> 1 x,y,z=sy.symbols('x y z')
      2 Avec =sy.Matrix([3*x**2+y**3 , -6*x*y , 0])
      3 def Rot(vec):
      4     f1=sy.simplify(sy.diff(vec[2],y)-sy.diff(vec[1],z))
      5     f2=sy.simplify(sy.diff(vec[0],z)-sy.diff(vec[2],x))

```

NameError: name 'sy' is not defined

```

[67]: import sympy as sy
sy.init_printing(use_latex='mathjax')

x = sy.Symbol("x")
y = sy.Symbol("y")

# Base functions 2D, second order
NNi2=[-(1-x-y), -(1-x-y), 1-(1-x-y)]
NNi3=[y, -1+y, y]

M22=sy.zeros(3,3)
M33=sy.zeros(3,3)

```

```

M23=sy.zeros(3,3)
for k in range(3):
    for j in range(3):
        M22[k,j]=12*sy.integrate(sy.integrate(NNi2[k]*NNi2[j],(y,0,1-x)),(x,0,1))
        M33[k,j]=12*sy.integrate(sy.integrate(NNi3[k]*NNi3[j],(y,0,1-x)),(x,0,1))
        M23[k,j]=12*sy.integrate(sy.integrate(NNi2[k]*NNi3[j]+NNi3[k]*NNi2[j],(y,0,1-x)),(x,0,1))

display(M22,M23,M33)

```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ich probier das mal aus

ffgggh

$$\int_0^i nfty$$