Eine Testaufgabe zur FEM in einer Dimension

Aufgabe 1

Gegeben sei folgende partielle Differentialgleichung:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\beta(x)\Phi=f(x)$$

Für die Funktionen $\alpha(x),\ \beta(x),\ f(x)$ gelte folgendes:

$$\alpha(x)=\begin{cases}3 & 1.5\leq x\leq 2.7\\ x^2 & sonst\end{cases}\qquad \beta(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x} & 1\leq x\leq 2\\ x^2 & sonst\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x & 2\leq x\leq 4\\ 1+x & sonst\end{cases}$$

a) Lösen Sie die obige Differentialgleichung im Intervall $1\leq x\leq 4$
mit der Randbedingung $\Phi|_{Rand}=e^x$

b) Lösen Sie die obige Differentialgleichung im Intervall $1\leq x\leq 4$
mit der Randbedingung $\alpha(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}+x\Phi|_{Rand}=x^3$

c) Lösen Sie die obige Differentialgleichung im Intervall $1\leq x\leq 4$
mit der Randbedingung $\Phi(4)=2$ und $2\frac{\partial\Phi}{\partial x}|_{x=1}=6$

Hinweis zu den Lösungen:

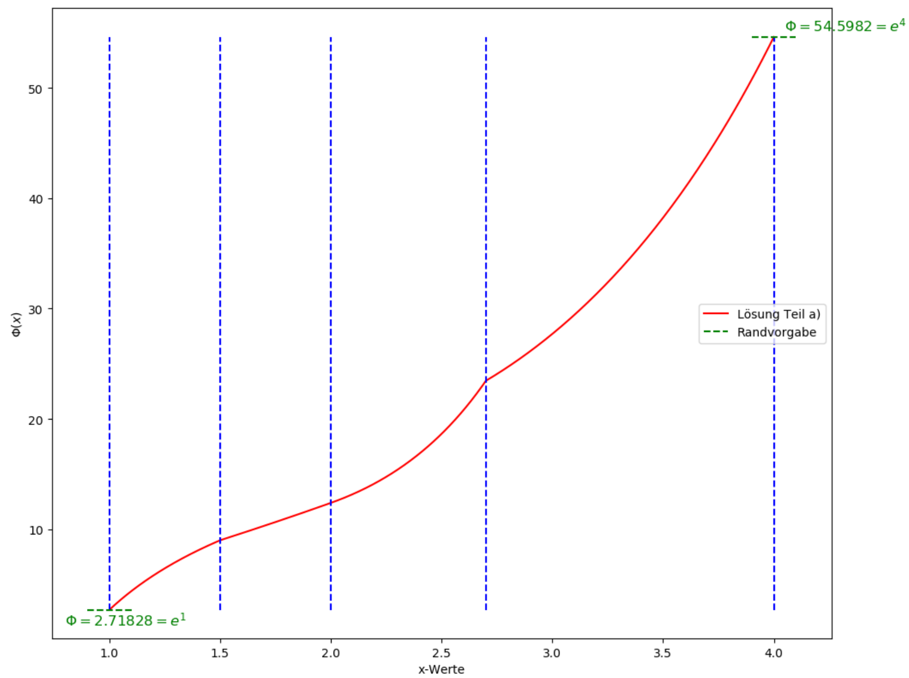
Achten Sie im c)-Teil auf die allgemeine Form des Robin-Randes: $\left(\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x},0,0\right)\cdot\vec{n}+\gamma\Phi=q$

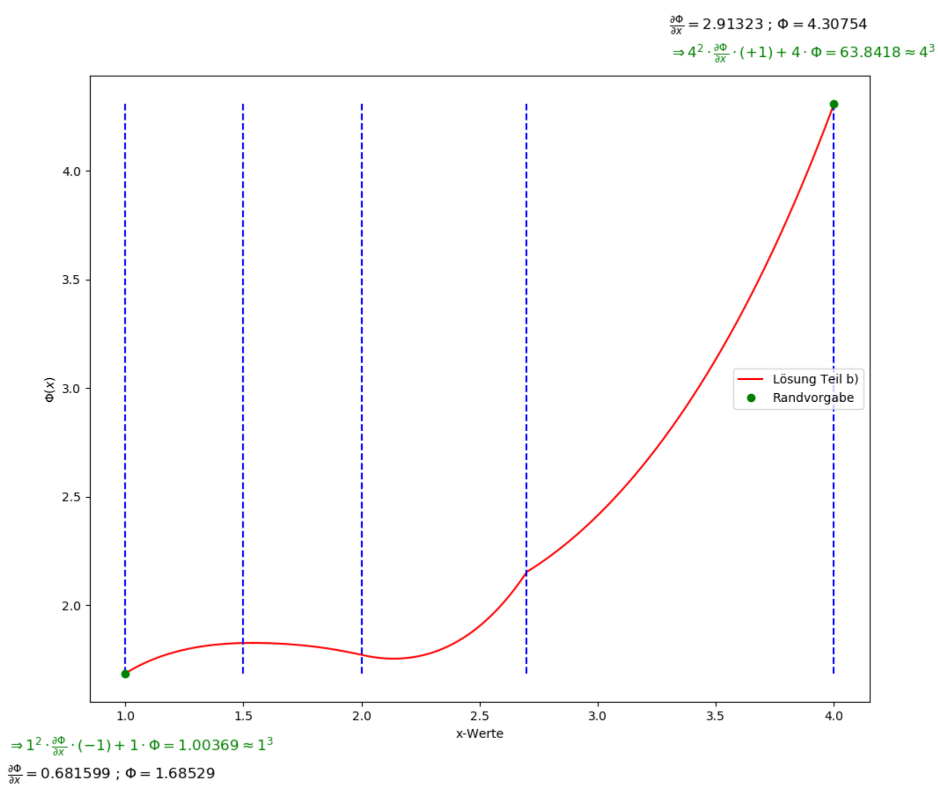
In Ileas finden Sie die Lösungen zu dem Problem:

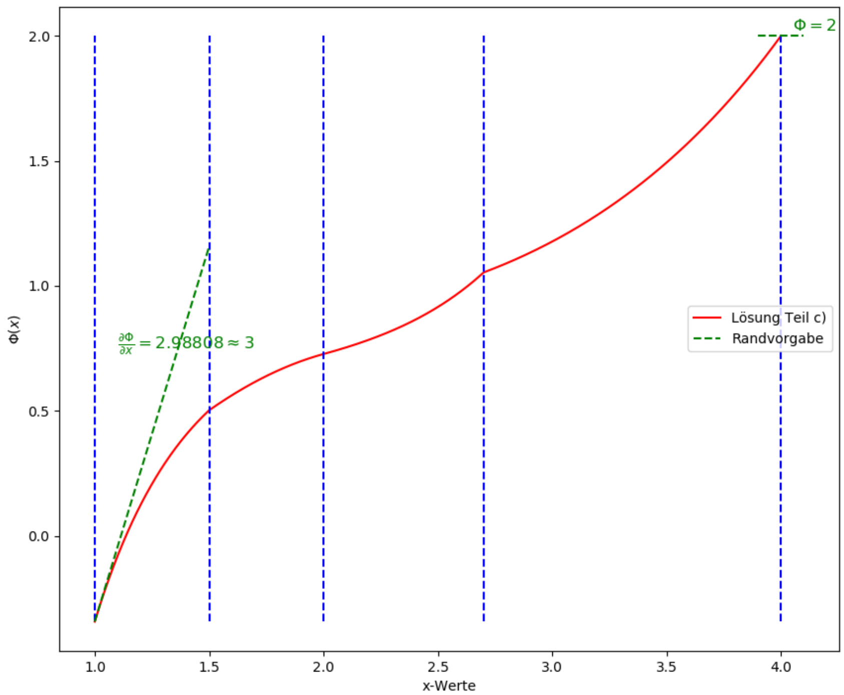
`Netz1D_p.dat` enthält die x-Werte des Netzes. Laden mit `p=np.loadtxt('Netz1D_p.dat', dtype=float)`
`Elemente1D_t.dat` enthält die Elemente des Netzes. Laden mit `t=np.loadtxt('Elemente1D_t.dat', dtype=int)`
`Netz1D_Matrix_K.dat` enthält die globale Matrik K. Laden mit `K=np.loadtxt('Netz1D_Matrix_K.dat', dtype=float)`
`Netz1D_Vector_D.dat` enthält die rechte Seite D. Laden mit `D=np.loadtxt('Netz1D_Vector_D.dat', dtype=float)`
`Netz1D_LoesungA.dat` enthält die Lösung zu a). Laden mit `sol=np.loadtxt('Netz1D_LoesungA.dat', dtype=float)`

Vergleichen Sie nun Ihre Lösung mit der Lösung sol, z.B. mit `plt.plot(sol-IhreLoesung); plt.show()`. Der Fehler sollte kleiner als 10^{-11} sein.

Rechenzeit, Teil a) für 10000 Knoten 2.5s + 14.48s


$\Phi = 54.5982 = e^4$
Lösung Teil a)
Randvorgabe
$\Phi = 2.71828 = e^1$
$\Phi(x)$
x-Werte


$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2.91323$; $\Phi = 4.30754$
$\Rightarrow 4^2 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot (+1) + 4 \cdot \Phi = 63.8418 \approx 4^3$
Lösung Teil b)
Randvorgabe
$\Phi(x)$
x-Werte
$\Rightarrow 1^2 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot (-1) + 1 \cdot \Phi = 1.00369 \approx 1^3$
$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0.681599$; $\Phi = 1.68529$



$\Phi = 2$
$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2.98808 \approx 3$
Lösung Teil c)
Randvorgabe
$\Phi(x)$
x-Werte
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0