Spice-Aufgabe der Vorlesung Lineare elektische Netze WS 2020/2021

Jan Hoegen
Matrikelnummer 2352525
ugyto@student.kit.edu

***Zusammenfassung*—In diesem Dokument werden die Lösungen von Jan Hoegen (Matrikel-Nr. 2352525) zur Spice-Aufgabe der Vorlesung *lineare elektrische Netze* präsentiert. Die Vorlesung ist Bestandteil des Studiengangs *Elektro- und Informationstechnik* am Karlsruher Institut für Technologie im Wintersemester 2020. Die eidesstattliche Erklärung findet sich im Anhang A.**

Der Seitenstil ist an den IEEE-Standard angelehnt, außerdem wurde auf eine ausführliche Erklärung der verwendeten Größen und Formeln verzichtet. Alle verwendeten Größen, Einheiten und Ausgangsformeln finden sich entweder in der Aufgabenstellung oder im Skript zur Vorlesung *lineare elektrische Netze* von Prof. Dr. rer. nat. O. Dössel.

29. Januar 2021

I. Lösungen zur Aufgabe 1

Nachfolgend wird die Impedanz und Admittanz eines Schwingkreises aus der *Aufgabe 1* betrachtet.

Aufgabe 1a

Die Gesamtimpedanz $\underline{Z}(\omega)$ berechnet sich mit:

$$\underline{Z}(\omega) = R_{Last} + (R + \underline{Z_L}) \,||\, \underline{Z_C} \tag{1a}$$

Durch einsetzen der Impedanzen und Umformung ergibt sich:

$$\underline{Z}(\omega) = R_{Last} + \frac{\dfrac{R}{j\omega C} + \dfrac{j\omega L}{j\omega C}}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} \tag{1b}$$

Um die Doppelbrüche zu entfernen wird nun mit $\frac{j\omega C}{j\omega C}$ multipliziert. Anschließend kann mit $\frac{-j\omega CR - \omega^2 CL + 1}{-j\omega CR - \omega^2 CL + 1}$ komplex konjugiert erweitert werden.

$$\underline{Z}(\omega) = R_{Last} + \frac{R + j\omega L}{j\omega CR - \omega^2 CL + 1} \tag{1c}$$

$$\underline{Z}(\omega) = R_{Last} + \frac{(R + j\omega L) \cdot (-j\omega CR - \omega^2 CL + 1)}{(j\omega CR - \omega^2 CL + 1) \cdot (j\omega CR + \omega^2 CL + 1)} \tag{1d}$$

Jan Hoegen ist eingeschrieben für den Studiengang Elektro- und Informationstechnik am Karlsruher Institut für Technologie. Matrikelnummer: 2352525. E-Mail: ugyto@student.kit.edu

Indem die dritte binomische Formel auf den Nenner angewandt wird und weitere Umformungsschritte durchgeführt werden ergibt sich:

$$\begin{aligned}\underline{Z}(\omega) = R_{Last} &+ \frac{R}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \\ &- j\,\frac{\omega^3 L^2 C + \omega\left(R^2 C - L\right)}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 R^2 C^2}\end{aligned} \tag{1e}$$

Nach Real- und Imaginärteil getrennt lässt sich somit ablesen:

$$Re\{\underline{Z}(\omega)\} = R_{Last} + \frac{R}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \tag{2}$$

$$Im\{\underline{Z}(\omega)\} = -\frac{\omega^3 L^2 C + \omega\left(R^2 C - L\right)}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \tag{3}$$

Aufgabe 1b

Wenn Strom und Spannung in einem Schaltkreis in Phase verlaufen, ist der Imaginärteil beider Größen jeweils 0. Darum muss in der *Aufgabe 1b* gelten $Im\{Z(\omega)\} = 0$. Da der Nenner nicht Null werden darf, kann dieser vernachlässigt werden.

$$Im\{\underline{Z}(\omega)\} = 0 \Longleftrightarrow 0 = -\frac{\omega^3 L^2 C + \omega\left(R^2 C - L\right)}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \tag{4a}$$

$$0 = -\omega \cdot (\omega^2 L^2 C + (R^2 C - L)) \tag{4b}$$

Indem ω ausgeklammert wird, lässt sich bereits die erste Lösung ablesen, sie liegt bei $\omega_{01} = 0$. Somit ist $f_{01} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_{01} = 0\,\text{Hz}$. Die zweite Lösung lässt sich durch Nullsetzen des eingeklammerten Terms berechnen:

$$0 = \omega_{02}^2 L^2 C + R^2 C - L \tag{4c}$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{-R^2 C + L}{L^2 C}} \tag{4d}$$

Dieser Term wird nun in f_{02} eingesetzt, damit lautet das Ergebnis:

$$f_{02} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_{02} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{-R^2 C + L}{L^2 C}} = 23{,}87\,\text{Hz} \tag{5}$$

Aufgabe 1c

Für die Frequenzwerte f_{01} und f_{02} muss lediglich der Realteil der Impedanz betrachtet werden, dies geht aus der vorherigen Aufgabenstellung hervor. Um die Impedanz der

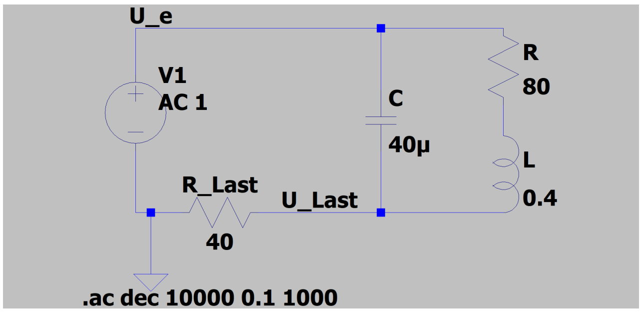

Abbildung 1: Schaltplan zur Aufgabe 1d

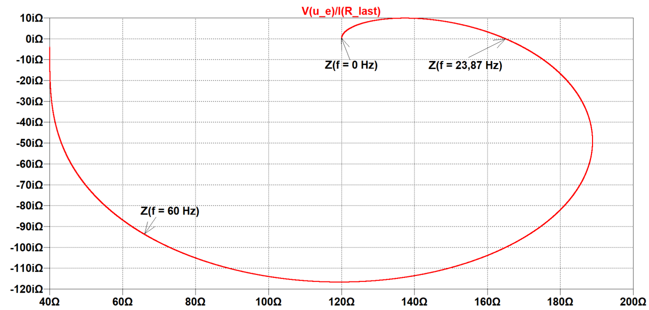

Abbildung 2: Impedanz der Aufgabe 1e

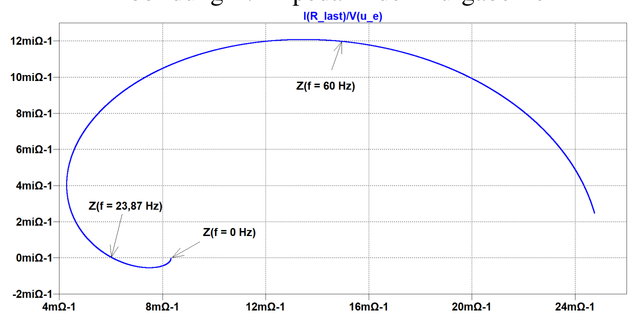

Abbildung 3: Admittanz der Aufgabe 1e

Frequenz f_{01} zu bestimmen gilt $\omega = 0$ in (2), f_{02} wird durch (4d) in (2) berechnet.. Für $Z(f = 60\,\mathrm{Hz})$ jedoch wird (4d) und die Gleichung (1e) verwendet.

$$Z(f_{01}) = Z(0) = R_{Last} + R = 120\,\Omega \tag{6}$$

$$Z(f_{02}) = Z(\omega_{02}) = R_{Last} + \frac{R}{\left(1 - \frac{-R^2C+L}{L^2C}LC\right)^2 + \frac{-R^2C+L}{L^2C}R^2C^2} = 200\,\Omega \tag{7}$$

$$\underline{Z}(f = 60\,\mathrm{Hz}) = \underline{Z}(\omega = 2\pi \cdot 60\,\mathrm{Hz}) = 65{,}99\,\Omega - j93{,}76\,\Omega \tag{8}$$

Aufgabe 1d

Die Abbildung 1 zeigt den Schaltplan zur *Aufgabe 1d*. Abbildungen 2 und 3 zeigen die Impedanz beziehungsweise Admittanz auf der komplexen Widerstandsebene.

II. Lösungen zur Aufgabe 2

In diesem Abschnitt wird ein invertierender Verstärker aus der *Aufgabe 2* betrachtet.

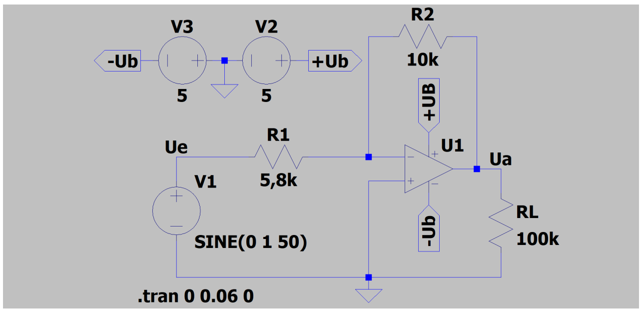

Abbildung 4: Schaltplan zur Aufgabe 2c

Aufgabe 2a

Die Maschengleichungen der *Aufgabe 2* berechnen sich durch:

$$M1: \quad 0 = -U_e + R_1 \cdot I_1 \Longleftrightarrow U_e = R_1 \cdot I_1 \tag{9}$$

$$M2: \quad 0 = R_2 \cdot I_1 + U_a \Longleftrightarrow U_a = -R_2 \cdot I_1 \tag{10}$$

Das Verhältnis $\frac{U_a}{U_e}$ vereinfacht sich unter Zuhilfenahme von (9) und (10) zu:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2 \cdot I_1}{-R_1 \cdot I_1} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{11}$$

Aufgabe 2b

Eine Phasenverschiebung um π wird durch das negative Vorzeichen der Übertragungsfunktion (11) erreicht. Der Verstärkungsfaktor 2 wird erreicht, wenn R_1 mit

$$\begin{aligned} U_a = -2U_e \Longleftrightarrow -2 = \frac{U_a}{U_e} \Longleftrightarrow -2 = -\frac{R_2}{R_1} \\ \Longleftrightarrow R_1 = \frac{R_2}{2} = \frac{10\,\mathrm{k\Omega}}{2} = 5\,\mathrm{k\Omega} \end{aligned} \tag{12}$$

dimensioniert wird.

Aufgabe 2c

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen den Schaltplan sowie den zeitlichen Verlauf von U_a beziehungsweise U_b der *Aufgabe 2c*.

Aufgabe 2d

Die zu erwartende Ausgangsspannung beträgt

$$\begin{aligned} U_{a,erwartet} &= -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_e = -\frac{10\,\mathrm{k\Omega}}{5{,}8\,\mathrm{m\Omega}} \cdot 1\,\mathrm{V} \\ &= -18{,}97\,\mathrm{MV} \end{aligned} \tag{13}$$

Der Operationsverstärker jedoch besitzt eine Versorgungsspannung von $5\,\mathrm{V}$. Da gilt $U_b \leq U_{a,erwartet}$ kann die Ausgangsspannung in dieser Schaltung keine Werte größer als U_b annehmen. Dies ist auch in Abbildung 6 zu erkennen. Aufgrund der Tatsache, dass weiterhin $U_b \ll U_{a,erwartet}$ gilt, erreicht U_a bereits bei sehr kleinen Werten für U_b seine Amplitude. Es entsteht eine Rechteckspannung.

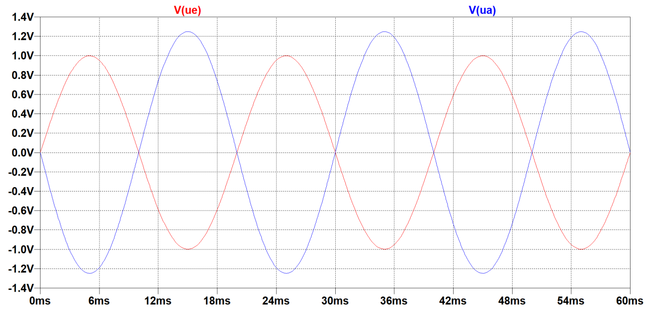

Abbildung 5: zeitlicher Verlauf der Spannungen U_a und U_b

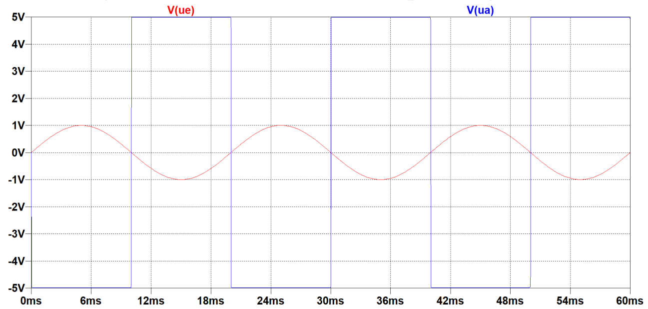

Abbildung 6: zeitlicher Verlauf bei $R_1 = 5{,}8\,\mathrm{m}\Omega$

ANHANG A
EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfsmittel angefertigt habe. Wörtlich oder inhaltlich übernommene Stellen sind als solche kenntlich gemacht und die verwendeten Literaturquellen im Literaturverzeichnis vollständig angegeben. Die „Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis im Karlsruher Institut für Technologie (KIT)“ in ihrer gültigen Form wurden beachtet.

Ort, Datum Jan Hoegen