Inleiding Logica

Jan Jaspars

CKI, eerste studiejaar, september/oktober 2005

Web: `http://www.science.uva.nl/~jaspars/inleidinglogica`

Dit diktaat, en de programmatuur op boven vernoemde website, is tot stand gekomen mede dankzij de steun van de faculteiten wijsbegeerte van de Universiteit Utrecht en de Katholieke Universiteit Nijmegen.

Deel I

Preliminaria

Hoofdstuk 1

Verzamelingen

1.1 Geldige redeneringen met behulp van verzamelingen

Logica is de studie of wetenschap van het *geldig redeneren*. Dat verschilt belangrijk van de betekenis die we het woord 'logica' doorgaans in het dagelijkse taalgebruik toekennen. We noemen een uitspraak of redenering logisch als deze vanzelfsprekend is:

$$\text{“}\textit{De eerstejaars studenten zijn heel leergierig \ldots tja, logisch \ldots je verwacht niet anders}\text{”}. \tag{1.1}$$

In de logica is dit echter helemaal geen logisch geldige uitspraak, het kan hoogstens een ervaringsfeit genoemd worden. Het gaat in de logica erom met pure wiskundige precisie te achterhalen of een redenering of uitspraak geldig is of niet. Hieronder een klassiek voorbeeld:

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Alle mensen zijn sterfelijk}\\ \textit{Socrates is een mens}\end{array}}{\textit{Socrates is sterfelijk}} \tag{1.2}$$

De twee zinnen boven de lijn zijn de *aannames* of *premissen* van de redenering, de zin daaronder de *conclusie*. We hebben om de geldigheid te achterhalen geen 'wereldse' kennis nodig over de in de redenering genoemde eigenschappen *mens* en *sterfelijk*, en ook wie *Socrates* is doet er niet toe. We zouden evengoed de eigenschappen kunnen vervangen door *student* en *leergierig*, en *Socrates* door een willekeurige eigennaam.

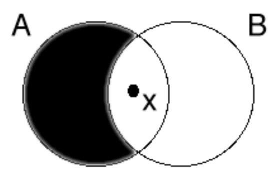
$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Alle studenten zijn leergierig}\\ \textit{Jan is een student}\end{array}}{\textit{Jan is leergierig}} \tag{1.3}$$

De conclusie is altijd geldig, gegeven de twee aannames. Het enige woordje waar we vanaf moeten blijven is 'alle'. Als dat bijvoorbeeld vervangen wordt door 'de meeste' of 'veel' dan is de redenering al niet meer geldig. Het woordje 'alle' is dan ook het enige woordje wat voor de logica van belang is in deze redeneringen. Het is wat ze tot geldige redeneringen maakt. Het is het enige logische woordje in de redenering.

Hoe kunnen we wiskundig bewijzen dat een redenering als (1.2) geldig is? Daarvoor moeten we eerst de zinnen in de redenering vertalen naar een wiskundige taal, net zoals we wiskundige symbolen gebruiken om met getallen te rekenen. Daarna moeten we ons rekenmethoden eigen maken waarmee de geldigheid van redeneringen berekend kunnen worden, en nog mooier, zelf geldige redeneringen opgezet kunnen worden. Voorlopig, in dit eerste hoofdstuk, volstaat een eenvoudigere taal die sommigen van de studenten misschien al kennen: *de taal van de verzamelingenleer*. De redenering zoals in (1.2) kan dan als volgt opgeschreven worden:

$$A \subseteq B, x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B \tag{1.4}$$

De hoofdletters zijn *verzamelingen*. $A \subseteq B$ lees je als "A is een *deelverzameling* van B", wat betekent dat alles wat zich in A bevindt ook in B zit. Verzamelingen gebruiken we om een eigenschap te representeren. De representerende verzameling bestaat uit alle objecten die de bewuste eigenschap dragen, zoals bijvoorbeeld *mens*, *student*, *leergierig* of *sterfelijk*. Als een object x voorkomt in een verzameling A dan noemen we dat een *element* van die verzameling, en schrijven $x \in A$.
Naast deze verkorte formele notatie hebben we nog een berekening nodig. Voor simpele schema's als deze zijn de zogenaamde Venn-diagrammen[1] buitengewoon geschikt. Eerst tekenen twee cirkels voor de twee verzamelingen die elkaar gedeeltelijk overlappen. Dit is als het ware de beginsituatie van de berekening: de meest algemeen mogelijke situatie. Vervolgens gaan we de eerste aanname van onze redenering invullen: $A \subseteq B$. Dit doen we door het gedeelte van A wat niet overlapt met B leeg te maken zoals in het plaatje hierbeneden gedaan is door dit stuk zwart te maken. Tenslotte zegt de aanname niks anders dan dat in dit stuk geen objecten kunnen voorkomen. Als we nu de tweede aanname $x \in A$ in het plaatje willen vervullen moeten we een object in A aanstippen. Dat kan alleen maar door deze ook in B te kiezen, en de conclusie moet dus zijn dat het niet anders kan dan dat $x \in B$.



(1.5)

Op een vrijwel analoge manier kunnen we de geldigheid van de volgende redenering berekenen:

$$\begin{array}{ll} \textit{Alle mensen zijn sterfelijk} & A \subseteq B \\ \textit{Sinterklaas is niet sterfelijk} & x \notin B \\ \hline \textit{Sinterklaas is niet een mens} & x \notin A \end{array} \tag{1.6}$$

In deze redenering speelt een ander logisch woordje een rol: *niet*. We schrijven $x \notin A$ als x geen element is van A. In het geval van de ontkenning van een deelverzamelingrelatie schrijven $A \nsubseteq B$: A is *geen* deelverzameling van B. Dit laatste betekent niks anders dan dat er een element van A is dat geen element van B is.
Om de geldigheid van (1.6) met de Venn-methode in te zien: teken een plaatje wat $A \subseteq B$ en $x \notin B$ waar maakt, en concludeer dat een keuze $x \in A$ niet meer mogelijk is. Conclusie: $x \notin A$.

Opgave 1. Laat met een Venn-diagram zien dat de volgende redenering niet geldig is:

$$\begin{array}{ll} \textit{Alle mensen zijn sterfelijk} & A \subseteq B \\ \textit{Pluto is niet een mens} & x \notin A \\ \hline \textit{Pluto is niet sterfelijk} & x \notin B \end{array}$$

[1] Naar de 19de eeuwse Britse wiskundige John Venn die deze diagrammen ontwierp.

Logisch gevolg en waarheidsconditionele semantiek

Hierboven hebben we al informeel gedefinieerd wat het betekent dat een uitspraak logisch volgt uit een aantal aannames. Het wil zeggen dat onder *alle* omstandigheden dat de aannames waar zijn de conclusie *ook* waar is.

Definitie 1.1. *Een uitspraak Q is een* logisch *of* geldig gevolg *van een aantal uitspraken $P_1, \ldots, P_n$ (*aannames *of* premissen*) als geldt dat onder* alle *omstandigheden waarin $P_1, \ldots, P_n$ allen* waar *zijn Q ook* waar *is.*

Voor deze geldig gevolgrelatie worden verschillende notaties gebruikt. Hieronder een viertal veel voorkomende.

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array} \qquad \frac{P_1 \ldots P_n}{Q} \qquad P_1 \ldots P_n \Rightarrow Q \qquad P_1 \ldots P_n \models Q \tag{1.7}$$

De derde notatie wordt veel gebruikt in bewijzen of berekeningen in de wiskunde, de vierde notatie is de gangbare lineaire notatie in de logica, die we ook in dit diktaat zullen blijven gebruiken.

Definitie 1.1 is de belangrijkste definitie van het college. Het definieert immers wat een geldige redenering is, en daar gaat het bij de logica om. Heel vaak wordt de volgende gelijkwaardige negatieve formulering gebruikt, omdat hij vaak beter te hanteren is als de definitie hierboven.

> Een bewering Q is *niet* een *logisch* of *geldig gevolg* van een aantal beweringen $P_1, \ldots, P_n$ (*aannames* of *premissen*) als er een situatie te bedenken is waarin $P_1, \ldots, P_n$ *waar* zijn maar Q *onwaar*.

Deze formulering zegt dat van een ongeldige redenering sprake is als er een *tegenvoorbeeld* te geven is. Veel logische rekenmethoden, ook wel *deductiesystemen* genoemd, gebruiken de negatieve formulering. Ze proberen een tegenvoorbeeld te achterhalen, en verklaren de redenering geldig als dit niet lukt. Zo'n methode moet dan wel zo sterk zijn dat het inderdaad alle mogelijke tegenvoorbeelden uitsluit.

Twee belangrijke aspecten uit de definitie hierboven blijven echter nog ongedefinieerd. Wat betekent *omstandigheden* of *situatie*? En wat is *waarheid* van een bewering gegeven de omstandigheden? Hierboven hebben we dit in feite al vastgelegd voor een bescheiden soort logica. De situaties hebben we als Venn-diagrammen voorgesteld, en de waarheid van uitspraken konden we afdwingen door vlakken in het diagram te legen en te vullen. Zodoende ligt ook de definitie van logisch gevolg voor die 'mini-logica' vast.

Het definiëren van waarheid met betrekking tot een gedefinieerde collectie van situaties — de formele naamgeving voor situaties is *modellen* — is een belangrijk onderdeel van de logica: de zogenaamde *waarheidsconditionele semantiek.*

Definitie 1.2. *De betekenis van een uitspraak of propositie wordt vastgelegd door de condities die hij oplegt aan de wereld (model). Aldoende definiëren we de* betekenis *van een bewering als de verzameling van modellen (mogelijke werelden) waarin hij waar is (vervuld wordt).*

1.2 Syllogismen

De meest antieke logica, de *syllogistiek*, stamt uit de klassiek Griekse oudheid en werd bedacht door Aristoteles (5de eeuw v. C.). Dit systeem valt goed te formaliseren met de eenvoudige verzamelingennotatie van hierboven. De meest simpele soort syllogismen bestaan uit twee aannames die drie eigenschappen met elkaar combineren (ABC-tjes). Een voorbeeld is de volgende redenering.

$$\begin{array}{ll} \textit{Alle studenten zijn arm} & A \subseteq B \\ \textit{Alle armen zijn gelukkig} & B \subseteq C \\ \hline \textit{Alle studenten zijn gelukkig} & A \subseteq C \end{array} \tag{1.8}$$

Het moge duidelijk zijn dat dit een prima geldige redenering is. Het volgt al bijna automatisch als je de uitspraken naar deelverzamelingverhoudingen hebt vertaald zoals hierboven rechts aangegeven.
Naast de *kwantor* 'alle' mogen ook drie andere *kwantoren* in syllogismen voorkomen: 'geen', 'een' en 'niet-alle'. Elke beweringen in een syllogisme moeten van het formaat '*kwantor–eigenschap–eigenschap*' zijn. Hieronder is een geldige redenering gegeven die een 'alle'-uitspraak combineert met een 'geen' uitspraak.

$$\begin{array}{ll} \textit{Alle studenten zijn arm} & A \subseteq B \\ \textit{Geen arme is gelukkig} & B \subseteq \overline{C} \\ \hline \textit{Geen student is gelukkig} & A \subseteq \overline{C} \end{array} \tag{1.9}$$

We hebben nu voor de vertaling in termen van verhoudingen tussen verzameling een extra operatie nodig. $\overline{C}$ staat hier voor het *complement* van de verzameling C. Dit is de verzameling van objecten die *niet* een element van C zijn. 'Geen B is C' betekent dat B geen overlap heeft met C en dus moet B een deelverzameling zijn van het complement van C. In een Venn-diagram kan je dat invullen door de doorsnede van B en C te legen.
De kwantoren 'een' en 'niet-alle' zijn vervolgens niets anders dan ontkenningen van de kwantoren 'geen' en 'alle', respectievelijk. De corresponderende vlakken moeten nu juist gevuld worden in plaats van leeg gemaakt.
Hieronder vind je een redenering die probeert 'alle' met 'een' te combineren:

$$\begin{array}{ll} \textit{Alle studenten zijn arm} & A \subseteq B \\ \textit{Er is een arme die gelukkig} \text{ is} & B \not\subseteq \overline{C} \\ \hline \textit{Een student is gelukkig} & A \not\subseteq \overline{C} \end{array} \tag{1.10}$$

Een feilloze methode om de geldigheid of ongeldigheid van (1.10) te achterhalen is een bewijsvoeringsmethode uit het *ongerijmde*. Dit betekent dat we eerst aannemen dat de redenering ongeldig is en hopen dat deze veronderstelling een tegenspraak oplevert, waarmee de geldigheid van de redenering aangetoond is. Hij kan dan immers niet ongeldig zijn.
We gebruiken hierbij de negatieve formulering van de definitie van geldig gevolg. Probeer een situatie te geven waarin de aannames waar zijn en de conclusie onwaar, wat de ongeldigheid zou demonstreren. Zou dit niet lukken dan moet je kunnen concluderen dat de redenering geldig moet zijn. Je methode om zo'n tegenvoorbeeld te vinden moet dan wel 'volledig' zijn. De methode hieronder is zo'n volledige methode voor syllogismen.

1. Voeg de ontkenning van de conclusie toe aan de aannames.

2. Teken een Venn-diagram en maak de juiste verzamelingen leeg aan de hand van de $\subseteq$-uitspraken onder 1 verkregen.

3. Probeer nou de getuigen (stippen) in te tekenen die de $\not\subseteq$-uitspraken onder 1 bevestigen.

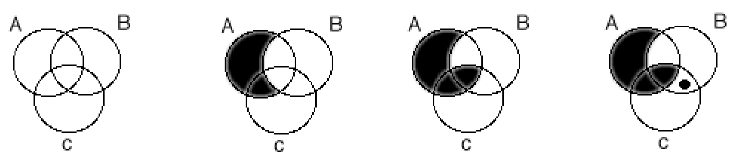
Als dit 1-2-3-tje slaagt heb je een tegenmodel getekend voor de redenering en is deze niet geldig verklaard. Slaag je er niet in dan moet de redenering wel geldig zijn. In het geval van de redenering (1.10) levert deze procedure de volgende berekening.

1. We gaan proberen een diagram te maken waarin $A \subseteq B$, $B \not\subseteq \overline{C}$ en de ontkenning van de conclusie $A \subseteq \overline{C}$ alledrie waar zijn. De premissen zouden dan vervuld zijn in een situatie waarin de conclusie onwaar blijkt te zijn.

2. We zetten eerst het meest algemene diagram voor drie eigenschappen op waarbij alle mogelijke overlapping nog mogelijk zijn. Daarna legen we het deel van A dat niet met B overlapt om de eerste uitspraak uit 1 waar te maken (alle studenten zijn arm). Daarna legen we de doorsnede van A en C (geen student is gelukkig) om $A \subseteq \overline{C}$ te vervullen.

3. Nu moeten we nog de tweede aanname uit 1 zien waar te maken. We moeten daarvoor een element in B kiezen die ook in C zit (een arme die gelukkig is). Dit blijkt nog mogelijk te zijn. Die gelukkige armoedzaaier is alleen geen student (daar werd dan ook niks over beweerd).

Hieronder de redenering daadwerkelijk in ‘n Venn-diagram uitgevoerd:



(1.11)

Een tegenvoorbeeld kan dus gegeven worden en de redenering is zodoende ongeldig.

Opgave 2. Bereken volgens de methode hierboven welke van de volgende twee redeneringen geldig zijn.

Geen politicus is fatsoenlijk	*Alle studenten zijn arm*
Geen student is politicus	*Niet alle studenten zijn gelukkig*
Alle studenten zijn fatsoenlijk	*Niet alle armen zijn gelukkig*

1.3 Eenvoudige berekeningen met verzamelingen

Met verzamelingen konden we op een kort en bondige manier de syllogismen van Aristoteles vertalen. Met verzamelingen is nog veel meer mogelijk, ze zijn zelfs bedacht als een elegant en eenvoudig fundament voor de hele wiskunde (door de Duitse wiskundige Georg Cantor in de tweede helft van de 19de eeuw). In dit inleidende hoofdstuk gaan we niet alle puntjes op de i zetten. We definiëren een *verzameling* simpelweg als een ongeordende opeenhoping van afzonderlijke dingen, en die dingen heten de *elementen* van de bewuste verzameling. Elementen mogen van allerlei soort zijn. Er zijn geen beperkingen. Kleine verzameling kunnen we elements-gewijs op de volgende manier noteren:

$$\left\{ \text{George W. Bush}, \sqrt{2}, \text{ dinsdag-13-september-2005-9.00am}, \text{ verlegenheid}, \text{ poldermodel} \right\} \quad (1.12)$$

We schrijven $a \in A$ als a een element is van de verzameling A, en $a \notin A$ als dat niet het geval is. Verder noteren we $A \subseteq B$ als geldt dat voor alle $a \in A$ geldt dat ook $a \in B$, en zodoende $A \not\subseteq B$ als geldt dat er een $a \in A$ te vinden is waarvoor geldt dat $a \notin B$. Een speciale verzameling, die deelverzameling is van alle verzamelingen, is de lege verzameling $\{\ \}$. Voor dit speciale geval wordt meestal de notatie $\emptyset$ gebruikt.
De ordening van opnoeming van de elementen doet er niet toe, en ook het aantal keer dat een element genoemd wordt maakt een verzameling niet anders.

$$\{a,b,a\} = \{b,a\} = \{a,b\} \tag{1.13}$$

Voor verzamelingen met een regelmatig aftelbare structuur worden ook de volgende notaties gebruikt:

$$\{2,4,6,\ldots\} \qquad \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \tag{1.14}$$

De eerste verzameling staat voor de verzameling van alle positieve even getallen, en de tweede voor alle gehele getallen.
Als we verzamelingen gebruiken om objecten met een aantal overeenkomsten op te schrijven dan gebruiken we de volgende notatie:

$$\{x \mid \text{ een aantal eigenschappen van } x\} \tag{1.15}$$

Dit wordt gelezen als ‘de verzameling van die dingen x die voldoen aan de achter de streep opgesomde eigenschappen. Een simpel voorbeeld is de volgende definitie van het complement van een verzameling.

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} \tag{1.16}$$

Een wat moeilijker voorbeeld is de volgende definitie van de verzameling van breuken of de rationale getallen $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{x|x = \frac{m}{n} \text{ met } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \text{ en } n \neq 0\} \tag{1.17}$$

$\mathbb{Z}$ staat voor de verzameling van alle gehele getallen.[2]
Naast de definitie van *complement* zijn er andere belangrijke operaties op verzamelingen te definiëren. Hieronder is een drietal gegeven die veel gebruikt worden:

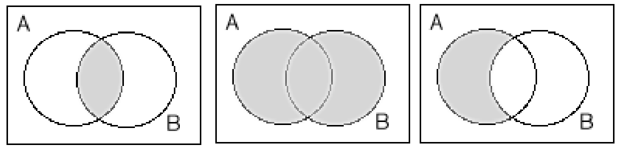
$$\begin{array}{lll} \text{doorsnede} & A \cap B & = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\} \\ \text{vereniging} & A \cup B & = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\} \\ \text{verschil} & A - B & = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} \end{array} \tag{1.18}$$

Drie hele simpele voorbeelden:

$$\begin{array}{rcl} \{1,2\} \cap \{2,3\} & = & \{2\} \\ \{1,2\} \cup \{2,3\} & = & \{1,2,3\} \\ \{1,2\} - \{2,3\} & = & \{1\} \end{array} \tag{1.19}$$

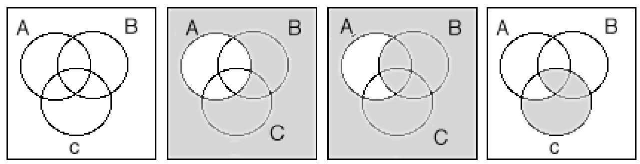
[2]Zie Memo 1.1 op pagina 23 in de appendix van dit hoofdstuk voor de definitie van de belangrijkste getallenverzamelingen.

Bij deze constructies horen de volgende diagrammen die de operaties in de volgorde van hierboven in beeld brengen. De grijze vlakken betreffen de verzameling die hierboven beschreven zijn.[3]



(1.20)

Als drie verzamelingen gecombineerd worden met behulp van deze elementaire notatie, dan kunnen we het resultaat makkelijk begrijpen met behulp van een Venn-diagram. Hieronder een Venn-berekening van de verzameling $(\overline{A} \cup B) \cap C$:



(1.21)

We beginnen weer met het lege diagram. In het tweede plaatje is het complement van A genomen en in het derde plaatje is deze verzameling verenigd met B. Als laatste hebben we het resultaat daarvan doorsneden met C.

Opgave 3. Zoals je merkt hebben we nu ook haakjes nodig om de volgorde van de operaties vast te leggen. Dit is werkelijk van belang, want $\overline{A} \cup (B \cap C)$ is i.h.a. een andere verzameling dan de verzameling die hierboven getekend is. Teken het Venn-diagram voor $\overline{A} \cup (B \cap C)$.
Als het goed is krijg je nu een ander plaatje dan wat hierboven staat in (1.21). Er is wel een belangrijke relatie tussen de twee verzamelingen. Welke?

Opgave 4. Teken Venn-diagrammen voor de verzameling $\overline{(A \cup B)}$, en $\overline{A} \cap \overline{B}$. Wat is de relatie tussen deze twee verzamelingen?

Opgave 5. Teken Venn-diagrammen van de volgende verzamelingen:

1. $A \cap (B - \overline{C})$
2. $\overline{(A - (\overline{B} \cup C))}$
3. $\overline{(A - B)} \cup C$

Boolese algebra van verzamelingen

De eerste logica die bedacht is na de syllogistiek van Aristoteles was een logica van verzamelingen — of eigenschappen, zo je wilt — is de *Boolese algebra* (spreek uit: 'Boelse algebra') die pas in de 19de eeuw ontworpen werd door de Britse logicus George Boole. Tenminste, het was de eerste logica die werkelijk een uitbreiding was van het systeem van Aristoteles (en het bovendien voor de eerste keer netjes axiomatiseerde). Voorheen had men zich voornamelijk bezig gehouden met het verfraaien van de originele systemen van Aristoteles. Het Boolese systeem liet ook de operaties 'vereniging' en 'doorsnede' toe om ook met combinaties van eigenschappen te rekenen. Zolang je je dan beperkt

[3]Niet te verwarren met de zwarte 'geleegde' vlakken in de vorige sectie.

tot drie elementaire eigenschappen kun je weer de Venn-diagrammen gebruiken. Boole bedacht een algemeen deductiesysteem waarbij je een willekeurig aantal eigenschappen met elkaar kan combineren. Hieronder vind je de vergelijkingen tussen verzamelingen die in deze algebra opgenomen zijn als elementaire wetten (axioma's).

$$\begin{array}{cccc} A\cap\emptyset=\emptyset & A\cap\overline{A}=\emptyset & A\cap A=A & A\cap B=B\cap A \\ A\cup\emptyset=A & A\cup\overline{A}=\overline{\emptyset} & A\cup A=A & A\cup B=B\cup A \\ & & \text{(idempotentie)} & \text{(commutativiteit)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{\overline{A}}=A & A\cup(A\cap B)=A & A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ & A\cap(A\cup B)=A & A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \\ \text{(dubbel complement)} & \text{(absorptie)} & \text{(distributie)} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C & \overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B} \\ A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C & \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B} \\ \text{(associativiteit)} & \text{(De Morgan-wetten)} \end{array}$$

Opgave 6. Controleer de distributiewetten voor verzamelingen met behulp van Venn-diagrammen.

De Boolese algebra is een syntactisch deductiesysteem. Je kan eigenlijk vergeten wat de symbolen betekenen, en domweg een vergelijking opzetten door de regeltjes van hierboven netjes toe te passen. Hieronder is een voorbeeld gegeven waarin de gelijkheid van $\overline{\emptyset}\cap A$ en A wordt afgeleid.

$$\overline{\emptyset}\cap A=A\cap\overline{\emptyset}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{\emptyset}=\overline{(\overline{A}\cup\emptyset)}=\overline{\overline{A}}=A$$

Opgave 7. Geef aan voor elke stap in de berekening hierboven welke Boolese wet gebruikt is.

Opgave 8. Leid af met de regels van de Boolese algebra dat $A\cup\overline{\emptyset}=\overline{\emptyset}$ voor elke verzameling A.

Ogenschijnlijk is de deelverzamelingsrelatie verdwenen in de Boolese opzet. Deze kan echter makkelijk gedefinieerd worden als een gelijkheid: A is een deelverzameling van B als geldt dat A en het complement van B een lege doorsnede heeft:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=\emptyset \tag{1.22}$$

Als je bijvoorbeeld wilt aantonen dat

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C$$

voor alle verzameling A, B en C, dan moet je de vergelijking

$$(A\cap(B\cup C))\cap\overline{((A\cap B)\cup C)}=\emptyset$$

bewijzen met behulp van de Boolese wetten. Je zal merken dat zoiets een stuk lastiger is dan even wat Venn-diagrammen te tekenen.

Opgave 9. Leid af met de regels van de Boolese algebra en de Boolese definitie van de deelverzamelingsrelatie dat $A\subseteq(B\cup A)$.

De Boolese algebra zullen we nog in deel 2 tegenkomen omdat deze algebra direct weer inzetbaar is als axiomatisering van de zogenaamde propositielogica.

1.4 Grote verzamelingen

De omvang van verzamelingen

Om vast te stellen dat twee eindige verzamelingen A en B even groot zijn kan je ze gewoonweg beide aftellen en vervolgens kijken of je op een zelfde aantal uitkomt. Die aftelling is echter niet per sé nodig om dat er niet gevraagd wordt naar de exacte omvang maar slechts om een vergelijking van beider omvang. Je kan ook de twee verzamelingen 'naast elkaar leggen' door elk element in de ene verzameling te associëren met een uniek element uit de andere verzameling. Als er aan het einde van geen van beide verzamelingen iets overblijft dan moeten de verzamelingen even groot zijn. Tijdens een 'klassieke' dansavond hoef je aldoende niet te tellen of er evenveel heren als dames aanwezig zijn. Zo'n één-op-één correspondentie of paring heet een *bijectie*.[4] Technisch gesproken is dat een functie $f : A \to B$ zodanig dat $f(x) \neq f(y)$ voor alle $x, y \in A$ als $x \neq y$ en verder $f[A] = B$.[5] De eerste eis zegt dat elk tweetal elementen uit A verschillende correspondenten — in de context van functies heten deze *beelden* — in B moet hebben, en de laatste voorwaarde zegt dat geen enkel element uit B over mag blijven na toepassing van f. Dat er geen elementen van A overblijven zit besloten in het feit dat een bijectie een functie is.
Natuurlijk legt een bijectie $f : A \to B$ direct een omgekeerde bijectie, de *inverse* $f^{-1} : B \to A$ van f vast door de paring identiek te houden maar B als eerste verzameling te kiezen: $f^{-1}(x) = y$ als $f(y) = x$. Als er een bijectie tussen twee verzamelingen A en B bestaat dan schrijven we dan ook $A \leftrightarrows B$ wat al aangeeft dat het feitelijk om tweerichtingsverkeer gaat.

Definitie 1.3. *Twee eindige verzamelingen A en B zijn even groot, of hebben gelijke omvang of* kardinaliteit*, als er een bijectie tussen de twee verzamelingen bestaat. We schrijven ook $A \leftrightarrows B$. Als we over de kardinaliteit van een verzameling spreken, schrijven we $|A|$, en dus als $A \leftrightarrows B$ dan $|A| = |B|$ (en v.v.).*

Ook ongelijkheden tussen twee eindige verzameling kunnen eenvoudig met behulp van functies worden vastgelegd.

Definitie 1.4. *De kardinaliteit van een eindige verzameling A is kleiner dan of gelijk aan de kardinaliteit van een verzameling B als geldt dat de kardinaliteit van A gelijk is aan een deelverzameling C van B: $A \leftrightarrows C$ voor zekere $C \subseteq B$. We schrijven dan $|A| \leq |B|$. De kardinaliteit van A is kleiner dan die van B als geldt dat $|A| \leq |B|$ maar niet $|A| = |B|$. Dat laatste geval korten we ook af door $|A| < |B|$ te schrijven.*

Je spreekt pas van een aftelling van een eindige verzameling A als je een bijectie hebt vastgelegd tussen A en de verzameling van de eerste n positieve getallen: $\{1, \ldots, n\}$,[6] feitelijk een nummering van de elementen van A. Om de aftelling expliciet te maken bij gegeven bijectie f wordt ook wel $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ waarmee dan a_i dat element van A wordt bedoeld dat door f met i geassocieerd wordt: $f(a_i) = i$.

Definitie 1.5. *De aftelling van een eindige verzameling A is een bijectie van A naar een verzameling $\{1, \ldots, n\}$. De kardinaliteit van A is dan gelijk aan n: $|A| = n$.*

[4] Zie voor notaties en terminologie m.b.t. functies ook memo 1.2 op pagina 24 in de appendix van dit hoofdstuk.
[5] $f[A]$ staat voor de verzameling alle f-beelden: $f[A] = \{b \mid f(a) = b$ voor zekere $a \in A\}$.
[6] Pas op met deze informele notatie. Als $n = 0$ bedoelen we met $\{1, ..., n\}$ de lege verzameling!

Oneindige verzamelingen

De wiskundige definities hierboven over de omvang van eindige verzamelingen lijken misschien erg op een hoop moeilijk gedoe over triviale zaken. Het grote voordeel van de precisie van de definities hierboven is echter dat we ze gelijk kunnen doortrekken naar oneindige verzamelingen. De notie van bijectie is natuurlijk niet beperkt tot eindige verzamelingen.

Definitie 1.6. *Twee verzamelingen A en B zijn even groot, of hebben gelijke omvang of* kardinaliteit, *als er een bijectie tussen de twee verzamelingen bestaat. We schrijven in dit geval weer $A \leftrightarrows B$ en $|A| = |B|$. Als $A \leftrightarrows C$ voor zekere $C \subseteq B$ dan schrijven we ook weer $|A| \leq |B|$.*
Een aftelling van een oneindige verzameling A is een bijectie van A naar de verzameling van positieve gehele getallen $\mathbb{N}_+ = \{1,...,n,n+1,...\}$. Als zo'n aftelling bestaat dan heet A aftelbaar.

De vraag is nu natuurlijk of alle oneindige verzamelingen 'even oneindig' zijn. Kunnen we verzamelingen maken die echt groter zijn dan de meest voor de hand liggende oneindige verzameling $\mathbb{N}_+$? Zijn er verzamelingen A zodanig dat $|\mathbb{N}_+| < |A|$?

Opgave 10. We mikken hier gelijk op 'grotere oneindigheden' dan $|\mathbb{N}_+|$. Laat zien dat er niets anders overblijft, ofwel dat voor alle oneindige verzamelingen A geldt dat $|\mathbb{N}_+| \leq |A|$.

Laten we voorzichtig beginnen. Wat gebeurt met de omvang van de verzameling van positieve gehele getallen $\mathbb{N}_+$ als we ze uitbreiden met een enkel element tot de verzameling van de natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$? Natuurlijk bevat de laatste verzameling één element meer: 0. De omvang is echter wel even groot dankzij de eenvoudige bijectie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$ met voorschrift $f(n) = n+1$.

Opgave 11. Laat zien dat de hier genoemde f een bijectie is.

We hebben hier een verrassende gelijkheid bewezen voor aftelbare oneindigheden als we de parallel met eindige verzamelingen doortrekken: $|\mathbb{N}_+| + 1 = |\mathbb{N}_+|$. Voor eindige verzamelingen A hebben we immers $|A \cup \{a\}| = |A| + 1$ indien $a \notin A$. Als we nu even het gebruikelijke oneindigheidssymbool ∞, nog in de veronderstelling levend dat er maar één soort oneindigheid bestaat (en dus $\infty = |\mathbb{N}_+|$), gebruiken, dan levert dat de volgende prachttekst voor een muurtegel.

$$\boxed{\infty + 1 = \infty} \tag{1.23}$$

Hilbert's hotel

Een metafoor die wel gebruikt wordt om een vergelijking als (1.23) aan niet ingewijden uit te leggen is het oneindige hotel van Hilbert.[7] Zo'n hotel heeft een oneindig aantal genummerde éénpersoonskamers $1,2,...$, de metafoor voor $\mathbb{N}_+$. Stel nu dat alle kamers bezet zijn, en er komt een nieuwe gast zich aanmelden. Hoe kunnen we hem herbergen? Heel simpel, we verwijzen alle gasten naar een kamer met kamernummer wat één hoger is, we heten de nieuwe gast van harte welkom en wijzen hem kamer nummer 1 toe. Deze verhuisoperatie is natuurlijk niets anders als het toepassen van de bijectie $n \mapsto n+1$.
We kunnen natuurlijk op heel eenvoudige manier de bijectie van hierboven aanpassen om aan te te tonen dat elke verzameling $\{-k,...,0,1,2,...,k,...\}$ dezelfde omvang heeft als $|\mathbb{N}_+|$ en dus aftelbaar is. Neem hiervoor de functie met voorschrift $n \mapsto n+k+1$. Deze functie is weer een bijectie naar $\mathbb{N}_+$

[7] Genoemd naar de belangrijke Duitse wiskundige David Hilbert die we nog vaker tegen zullen komen in het verloop van dit college.

voor deze verzameling. In termen van Hilbert's hotel kunnen we altijd weer een eindig aantal gasten herbergen door de reeds aanwezig gasten een aantal kamers, te weten hetzelfde aantal als het aantal nieuwkomers, door te schuiven en de vrijgekomen kamers toe te wijzen aan de nieuwe gasten.

$$\boxed{\infty + k = \infty \text{ voor alle } k \in \mathbb{N}} \tag{1.24}$$

Oneindig plus oneindig

Deze methode werkt niet als je alle negatieve getallen wilt herbergen. In Hilbert's termen zou een dergelijke opvang erop neerkomen dat de gasten van een ander vol Hilbert hotel met negatieve kamernummers geëvacueerd worden en ondergebracht moeten worden in het positieve hotel. Een eenvoudige verschuiving werkt niet, maar toch heeft Hilbert's hotel ook in dit moeilijkere geval voldoende capaciteit. Een bergingsmethode die wel werkt in dit geval is door elke gast in het positieve hotel naar een kamer te laten gaan met twee keer zo hoog kamernummer en de nieuwe gasten onder te brengen in de leeggekomen kamers. De oude gasten komen dus op de kamers met even nummer en de nieuwe op de oneven nummers. Systematisch kan dit volgens het volgende functievoorschrift

$$n \mapsto \begin{cases} -2n-1 & \text{indien } n < 0 \\ 2n & \text{indien } n > 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Deze functie is een bijectie van $\{\ldots,-2,-1,1,2,\ldots\}$ naar $\mathbb{N}_+$. We hebben een verzameling van gelijke omvang toegevoegd aan $\mathbb{N}_+$ en toch blijft de omvang gelijk!

$$\boxed{\infty + \infty = 2 \cdot \infty = \infty} \tag{1.26}$$

Vervolgens kan je aantonen door een $k-1$-tal verzamelingen $\{1_1, 2_1, \ldots\}, \ldots, \{1_{k-1}, 2_{k-1}, \ldots\}$ allemaal onder te brengen in dat ene Hilbert-hotel $\mathbb{N}_+$ dat

$$\boxed{k \cdot \infty = \infty \text{ voor alle } k \in \mathbb{N}_+} \tag{1.27}$$

Opgave 12. Geef het functievoorschrift van een bijectie van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{N}_+$ (daarmee gelijk aantonende dat $\mathbb{Z}$ aftelbaar is).

Opgave 13. Laat $A_i = \{1_i, 2_i, \ldots\}$ voor elke $i \in \mathbb{N}$. Geef een bijectie van $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}$ naar $\mathbb{N}_+$ voor willekeurige $k \in \mathbb{N}$.

Oneindig maal oneindig

De volgende opdracht is nu natuurlijk om een (aftelbaar) oneindig Hilbert hotels onder te brengen in $\mathbb{N}_+$. Hiervoor passen we onze notatie enigszins aan. We gebruikten hierboven de notatie k_n om kamernummer k in het n-de hotel aan te geven. In het vervolg schrijven we dit als een paar $\langle k, n \rangle$. In het algemeen heet de techniek om alle paren van twee verzamelingen te beschrijven het *Cartesisch* product van die twee verzamelingen.[8]

Definitie 1.7. *Als A en B twee verzamelingen zijn dan is het cartesisch product gedefinieerd $A \times B$ gedefinieerd als de verzameling van alle paren $\langle a, b \rangle$ die je kan maken door elementen a uit A te nemen en b uit B.*

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\} \tag{1.28}$$

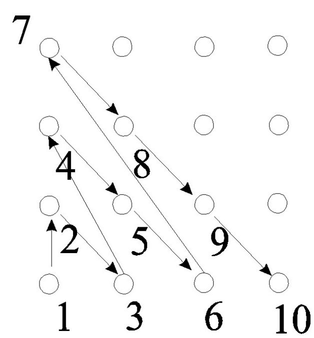
In plaats van $A \times A$ wordt ook A^2 geschreven.

[8]Naar de universeel geleerde Cartesius, beter bekend onder zijn eigen Franse naam René Descartes.

Wij zijn natuurlijk geïnteresseerd in $\mathbb{N}_+^2$ en zijn kardinaliteit. Het moge duidelijk zijn dat als A en B eindige verzamelingen zijn dat $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, en dus moet $|\mathbb{N}_+^2|$ gelijk zijn aan zoiets als $\infty \cdot \infty$ ofwel ∞^2.
De verzameling kan het gemakkelijkst voorgesteld worden als in een vlak zoals hieronder.

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \\ \langle 1,k\rangle & \langle 2,k\rangle & \ldots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \langle 1,2\rangle & \langle 2,2\rangle & \ldots & \\ \langle 1,1\rangle & \langle 2,1\rangle & \langle 3,1\rangle & \ldots \end{array} \tag{1.29}$$

Je zou het je kunnen voorstellen als ∞ hotels met allen ∞ kamers waarbij elk hotel gerepresenteerd wordt als een volledige rij in de figuur hierboven. Je kan het je ook voorstellen als een 'Hilbert-in-het-kwadraat hotel' met ∞ verdiepingen en elke verdieping weer met ∞ kamers. De vraag is nu om als dit hotel vol zou zijn je toch alle gasten kan herbergen op de eerste verdieping. In dat geval zou ook $\mathbb{N}_+^2$ aftelbaar zijn.
Je kan dit kunststukje voor elkaar krijgen door een 'zigzag'-aftelling. Dat ziet er als volgt uit.



(1.30)

In het plaatje hierboven staan de stippen dan voor de getallenparen uit $\mathbb{N}_+^2$ en de getallen die de zigzag-bijectie met het desbetreffende getal, ofwel het nieuwe kamernummer na berging op de eerste etage, associeert. Er is overigens ook een redelijk eenvoudig functievoorschrift voor deze bijectie te geven:

$$\langle n,m\rangle \mapsto \frac{1}{2}(n+m-1)(n+m-2)+n \tag{1.31}$$

Hiermee hebben we dan ook gelijk vastgesteld dat kwadrateren niets nieuws oplevert:

$$\boxed{\infty \cdot \infty = \infty^2 = \infty} \tag{1.32}$$

Bovendien valt deze vergelijking weer te generaliseren voor elke eindige exponent: $\infty^k = \infty$ voor elke $k \in \mathbb{N}_+$. Dit kan je aantonen door het Cartesisch product over k verzamelingen te definiëren en te laten zien dat

$$|\underbrace{\mathbb{N}_+ \times \ldots \times \mathbb{N}_+}_{k \text{ maal}}| \quad = \quad |\mathbb{N}_+| \tag{1.33}$$

De linkerverzameling wordt ook kort genoteerd als $\mathbb{N}_+^k$ en het is de verzameling van alle rijtjes bestaande uit positieve gehele getallen van lengte k

$$\mathbb{N}_+^k = \{\langle n_1,\ldots,n_k\rangle \mid k \in \mathbb{N}_+, n_i \in \mathbb{N}_+ \text{ voor alle } i \in \{1,\ldots,k\}\} \tag{1.34}$$

Een aftelling voor deze verzameling kan gegeven worden door de zigzagtelling uit (1.30) te generaliseren.

Opgave 14. (**) Een andere manier om ∞^k na te bootsen is de verzameling van alle functies van $\{1,\ldots,k\}$ naar $\mathbb{N}_+$ te nemen.
(a) Laat zien dat voor twee eindige verzamelingen A en B geldt dat $|A \to B| = |B|^{|A|}$, waarbij $A \to B$ staat voor de verzameling functies van A naar B.

(b) Geef een functievoorschrift van een bijectie van $\{1,..,k\} \to \mathbb{N}_+$ naar $\mathbb{N}_+$.

Tot de macht oneindig

Het begint erop te lijken dat er inderdaad maar één soort oneindig bestaat. Onze manier van tellen gaat dan eigenlijk lijken op het tellen zoals dat gangbaar in primitieve culturen. Daar wordt doorgaans na een zeker aantal de omvang van verzamelingen met een equivalent van 'veel' aangeduid: $1,2,3,veel$. Wij tellen $1,2,3,\ldots,\infty$. Er zit natuurlijk een oneindig gat tussen 3 en ∞ maar de rekenkundige wetten voor *veel* en ∞ lijken wel erg op elkaar $veel+1 = veel, veel+veel = veel$ en ook $veel \cdot veel = veel$.
We kunnen natuurlijk ook heldhaftig proberen door te gaan, en kijken wat er gebeurt in het geval van ∞^∞. De Duitse wiskundige Georg Cantor, de peetvader van de verzamelingenleer, bewees dat er dan toch werkelijk iets gebeurt:

$$\boxed{\infty^\infty > \infty} \tag{1.35}$$

Hij bewees zelfs dat als je het grondtal eindig (groter dan 1) houdt dat dan ook al een ongelijkheid als in (1.35) tot stand gebracht wordt: $2^\infty > \infty$! Ons volhouden wordt beloond. Er *zijn* verschillende soorten oneindigheid. We moeten dus eigenlijk het symbool ∞ afleren te gebruiken. Cantor gebruikte zelf de notatie $\aleph_0$ — 'aleph nul' — voor $|\mathbb{N}_+|$. De letter is de aleph, de eerste letter uit het Hebreeuwse alfabet, en de nul geeft aan dat het om de kleinste soort oneindigheid gaat.

GEORG CANTOR

1845 — 1918

Machtsverzamelingen

Om $2^{\aleph_0}$ te krijgen gebruikt men de machtsverzamelingconstructie. De *machtsverzameling* is een verzameling van alle deelverzamelingen van een gegeven verzameling.

Definitie 1.8. *Als A een verzameling is dan is de machtsverzameling $\wp A$ van A de verzameling van alle deelverzamelingen van A:*

$$\wp A = \{B \mid B \subseteq A\} \tag{1.36}$$

Opgave 15. We hebben verzameling simpel gedefinieerd als een ongeordende opeenhoping van elementen. Dat betekent dat je ook verzamelingen in een verzameling mag stoppen. Neem bijvoorbeeld de verzameling $\{a, \{\{b\}, c\}\}$. Deze heeft twee elementen: a en $\{\{b\}, c\}$. De laatste is ook weer een verzameling van twee elementen: $\{b\}$ en c.
Hoeveel elementen bevatten de volgende verzamelingen:

1. $\{\{a,b\}\}$
2. $\{\emptyset, \{b, \emptyset\}\}$
3. $\{\{a, \{a\}\}, \{a\}, \{\{a, \{a\}\}, \{a\}\}, a\}$

Opgave 16. Merk op dat $\emptyset \in \{\emptyset\}$ én $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$. Bedenk een ander simpele verzameling A waarbij voor zekere $a \in A$ geldt dat ook $a \subseteq A$.

Opgave 17. Bereken

1. $\wp\emptyset$
2. $\wp\{a,b,c\}$
3. $\wp\{a, \{a\}\}$
4. $\wp\wp\emptyset$
5. $\wp\wp\{a, \{a\}\}$

Voor eindige verzamelingen A is redelijk eenvoudig in te zien dat $|\wp A| = 2^{|A|}$.

Opgave 18. Laat zien dat als A een eindige verzameling is met n elementen dat $\wp A$ 2^n elementen bevat. Dit kan je aantonen door vast te stellen dat het aantal elementen in $\wp\emptyset$ gelijk is aan 1 en dat is inderdaad 2^0. Vervolgens moet je laten zien dat als je een nieuw element a aan A toevoegt dat dan de machtsverzameling van deze nieuwe verzameling $\wp(A \cup \{a\})$ twee keer zo groot moet zijn als $\wp A$.

.

Opgave 19. Laat met een simpel voorbeeld zien dat $\wp A \cup \wp B$ i.h.a. een andere verzameling is als $\wp(A \cup B)$.

Opgave 20. (**) Laat zien dat $\wp A \cap \wp B$ gelijk is aan $\wp(A \cap B)$ voor elk tweetal verzamelingen A en B.

Cantor bewees dat $|\wp\mathbb{N}_+| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0 = |\mathbb{N}_+|$. Hij bewees dit uit het ongerijmde door te veronderstellen dat er wel degelijk een bijectie zou bestaan van $\wp\mathbb{N}_+$ naar $\mathbb{N}_+$ om vervolgens aan te tonen dat die veronderstelling tot een tegenspraak leidt en dus nooit kan gelden.

We doen het hem na. Laat $f : \wp\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ een bijectie zijn. Er is dus aan elke deelverzameling $D \in \wp\mathbb{N}_+$ (ofwel $D \subseteq \mathbb{N}_+$) van positieve gehele getallen door f een positief geheel getal toegewezen. We nemen de eerste verzameling in deze aftelling, noem hem gemakshalve D_1 en noteren hem met behulp van het volgende formulier

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \mathtt{0} & \mathtt{0} & \mathtt{0} & \mathtt{0} & \mathtt{0} & \mathtt{0} & \mathtt{0} & \dots \end{array} \tag{1.37}$$

Voor elke $n \in \mathbb{N}_+$ is er een leeg nulletje en voor elke $n \in D_1$ kruizen we dat rondje aan. Vervolgens doen we hetzelfde voor D_2 en plaatsen het onder het formulier van D_1. Dit blijven we herhalen voor alle D_k, de verzameling van positieve gehele getallen die door f het getal k toegewezen is. De veronderstelling dat f een bijectie is betekent dus elke deelverzameling van $\mathbb{N}_+$ — elk element van $\wp\mathbb{N}_+$ — een keer aan de beurt komt, en het resultaat ziet er uit als een $\aleph_0$-bij-$\aleph_0$ invulformulier. Om dit te illustreren hieronder een voorbeeld, waarbij we de aangekruiste nulletjes door eentjes vervangen hebben.

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \hline D_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ D_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ D_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ D_4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ D_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & & & \end{array} \tag{1.38}$$

We kunnen met dit formulier voor elke $n \in \mathbb{N}_+$ zien of $n \in D_k$ voor willekeurige $k \in \mathbb{N}_+$.

De briljante vondst van Cantor was nu om de diagonaal van dit formulier ook weer terug te vertalen naar een deelverzameling van $\mathbb{N}_+$.

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \hline D_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ D_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ D_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ D_4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ D_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \end{array} \tag{1.39}$$

We kijken aldoende op het formulier of op de eerste plaats in de eerste rij een nul of een één staat. Dit vertelt ons niks anders of al of niet $1 \in D_1$. In het voorbeeld hierboven geldt dat dus niet. Vervolgens kijken we naar de tweede plek op de tweede rij. Geldt $2 \in D_2$? In het voorbeeld hierboven geldt dat weer wel. Op deze manier kunnen we de hele diagonaal aflopen en als we de resultaten bijeen verzamelen dan krijgen we weer een deelverzameling van $\mathbb{N}_+$ die ook wel de diagonaalverzameling D wordt genoemd.

$$D = \{n \mid n \in \mathbb{N}_+, n \in D_n\} \tag{1.40}$$

In het voorbeeld hierboven zou dat dus $\{2,4,5,\ldots\}$ geven. Omdat $D \in \wp\mathbb{N}_+$ moet D ook een getal $f(D)$ door f toegewezen hebben gekregen. Hetzelfde geldt ook voor het complement van deze diagonaalverzameling:

$$\overline{D} = \mathbb{N}_+ - D = \{n \mid n \in \mathbb{N}_+, n \notin D_n\} \tag{1.41}$$

Deze verzameling $\overline{D}$ heeft precies het omgekeerde nul-één-patroon van dat van D: $\{1,3,\ldots\}$. $\overline{D}$ is een deelverzameling van $\mathbb{N}_+$ en dus $\overline{D} \in \wp\mathbb{N}_+$ en dus moet onze veronderstelde bijectie ook $\overline{D}$ een getal $f(\overline{D})$ toegewezen hebben gekregen. Laten we dat getal even kortheidshalve m noemen. De verzameling $\overline{D}$ komt ergens voor op het formulier van (1.38), namelijk op de m-de plek in de linkerkolom met daarnaast netjes zijn binaire code uitgetikt: $\overline{D} = D_m$.
De vraag is nu wat op de m-de plek staat van deze code. Wat staat er op de plek waar de code van deze 'anti-diagonaal'-verzameling de diagonaal kruist? Als er een `0` staat dan geldt dus dat $m \notin \overline{D}$ en dus $m \in D$. Dit laatste kan alleen als $m \in D_m$ (1.40). Maar $D_m = \overline{D}$, dus dat laatste kan niet. Als er een `1` zou staan dan krijgen we een gelijksoortige tegenspraak. De bewuste `1` geeft aan dat $m \in \overline{D} = D_m$. Omdat $m \in D_m$ geeft de definitie van D dat $m \in D$ en dus $m \notin \overline{D}$, in tegenspraak met de geregistreerde `1` op de m-de plek op de diagonaal. Kortom, in beide gevallen krijgen we een tegenspraak, en zo'n bijectie f kan dus niet bestaan, en dus $|\mathbb{N}_+| < |\wp\mathbb{N}_+|$ ofwel $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$!
Cantor bewees dat in het algemeen een verzameling groter wordt als je de machtsverzameling neemt. Als je dus weer de machtsverzameling van $\wp N_+$ neemt, $\wp\wp\mathbb{N}_+$ krijg je weer een echt 'oneindiger' verzameling. We noemen alleen het resultaat hier, maar het bewijs is een redelijk eenvoudige generalisatie van het betoog hierboven. We laten hem voor de liefhebber in de technische appendix van dit hoofdstuk op pagina 25.

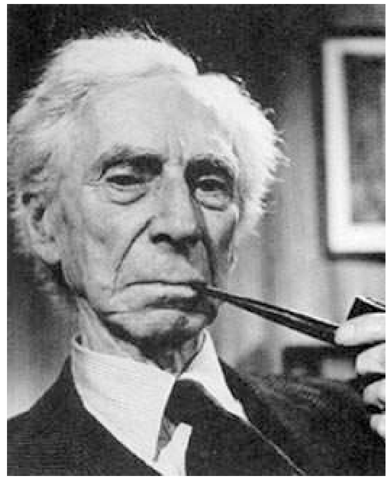
Stelling 1.1. *Voor elke verzameling A geldt dat $|A| < |\wp A|$.*

De Russell paradox

In eerste instantie doen verzamelingen zich aan ons voor als een makkelijk hanteerbaar concept en een mooie manier om redeneringen kort op te schrijven. De naïeve definitie die we in deze tekst gebruikt hebben laat echter ook toe dat verzamelingen van verzamelingen gemaakt worden, en om een beetje wiskunde te bedrijven blijkt dat dit soort verzamelingen ook werkelijk van belang te zijn. Als we dit geheel vrijelijk toelaten dan gaan zich allerlei duizelingwekkende zaken afspelen. Je zou bijvoorbeeld de verzameling $\mathcal{V}$ van *alle* verzameling kunnen definiëren. Volgens onze definitie is dit ook een verzameling. Hier gebeurt natuurlijk wel iets heel vreemds, want voor deze verzameling geldt dat hij een element is van zichzelf: $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$! Op zich misschien iets wat we uiteindelijk wel willen accepteren. Deze ontzagwekkende verzameling heeft een zodanige omvang dat het dergelijke onaardse eigenschappen heeft.
Bertrand Russell, Brits filosoof en wiskundige liet zien dat er toch onoverkomenlijke problemen zijn met dit soort verzamelingen. Ter illustratie definieerde hij de verzameling die tegenwoordig de *Russell-verzameling* heet:

$$\mathcal{R} = \{A \mid A \text{ is een verzameling en } A \notin A\} \tag{1.42}$$

de verzameling van verzamelingen die geen element zijn van zichzelf. Deze lijkt minder ontzagwekkend dan $\mathcal{V}$. Merk op dat $\mathcal{V} \notin \mathcal{R}$ en $\mathcal{R} \in \mathcal{V}$. De vraag is nu of $\mathcal{R}$ een element van zichzelf is: $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$. Als dit zo was dan moet ook $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ want $\mathcal{R}$ is tenslotte de verzameling van verzamelingen die zichzelf *niet* bevatten. Als $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ dan volgt weer $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ volgens zijn eigen definitie. Met andere woorden, de naïeve verzamelingenleer is inconsistent!



BERTRAND RUSSELL

1878 — 1970

Er zijn ondertussen voorzichtigere (axiomatische) definities geïntroduceerd voor verzamelingen. Dit bleek echter een vreselijk moeilijke opgave en de moderne verzamelingenleer is tegenwoordig dan ook één van de lastigste onderdelen binnen de wiskunde waar alleen nog maar zeer fervente bollebozen zich het hoofd over breken. Voorlopig doen wij in deze cursus alsof onze neus bloedt, en gebruiken gewoon de notatie van de verzamelingenleer als een handig schrijfmethode. Later zullen we zien dat voor wat betreft de logica's die we in deze cursus behandelen deze naïeve opstelling helemaal niet schadelijk is.

Opgave 21. Laat met een eenvoudig argument met behulp van Stelling 1.1 van Cantor zien dat de verzameling $\mathcal{V}$ van alle verzamelingen evenmin kan bestaan als de verzameling $\mathcal{R}$ van Russell.

Russell kwam met zijn bevinding rond 1900, al weer enige tijd na Cantor's opzet van de verzamelingentheorie. In tegenstelling wat wel eens over Cantor beweerd wordt, was hijzelf al op de hoogte van dat je niet alles zomaar verzamelingen mocht noemen. Zoals de opgave hierboven aantoont gaf zijn eigen stelling daar direct aanleiding toe. Maar het is wel zo dat Russell's uiteenzetting van zijn paradox de wiskundigen pas wakker heeft gemaakt. "Was de wiskunde wel een consistent geheel?"durfde men zich sindsdien openlijk af te vragen.
Sinds die tijd is de symbolische logica pas goed in de belangstelling van de wiskundigen gekomen. Met name de eerder als hoteleigenaar opgevoerde David Hilbert, die toendertijd zo'n beetje de baas van de wiskunde was, heeft zich, tezamen met een omvangrijke onderzoeksgroep, ingezet om een formele logica van axioma's voor de wiskunde te bedenken waarmee je de consistentie van dat systeem zelf zou moeten kunnen bewijzen. In de dertiger jaren van de vorige eeuw werd door de jonge Oostenrijkse wiskundige Kurt Gödel bewezen dat zoiets niet mogelijk is. Ondanks dit negatieve resultaat heeft al de wetenschappelijke aandacht voor de objectivering, en uiteindelijk ook mechanisering (algorithmisering) van de wiskunde, wel de uitvinding van de moderne computer in een enorme versnelling gebracht.
Aan het einde van deel drie van dit diktaat zullen we voldoende gevorderd zijn om een informele nabootsing van Gödel's argument te kunnen laten passeren.

Appendix

Memo 1.1. Oneindige verzamelingen getallen

- *De verzameling van de* natuurlijke getallen *is de verzameling van alle niet-negatieve gehele getallen:* $\{0,1,2,\ldots\}$. *Voor deze verzameling gebruiken we de naam* $\mathbb{N}$. *Als we* 0 *willen uitsluiten, en ons beperken tot de positieve gehele getallen, dan schrijven we kortweg* $\mathbb{N}_+$.

- *We schrijven verder* $12 \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ *om aan te geven dat* 12 *een element van de verzameling van de natuurlijke getallen is en* $\sqrt{2}$ *niet.*

- *De verzameling van alle* gehele getallen, $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, *wordt* $\mathbb{Z}$ *genoemd. We schrijven* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ *en* $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ *om aan te geven dat* $\mathbb{N}$ *een deelverzameling is van* $\mathbb{Z}$ *maar niet andersom.*

- *De verzameling van de* gebroken getallen *of* breuken *wordt* $\mathbb{Q}$ *genoemd. De breuken worden in de wiskunde ook* rationale getallen *genoemd. Elke breuk heeft de vorm* $\frac{a}{b}$ *waarbij a en b gehele getallen zijn.*

Reële getallen *Zijn alle getallen te schrijven als een* breuk*? Dat blijkt* niet *zo te zijn. Een duidelijk tegenvoorbeeld is* $\sqrt{2}$. *Stel dat* $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ *met n en m gehele getallen. Neem nu de kleinste getallen a en b zodanig dat* $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$. *Zo'n paar is te krijgen door n en m te delen door hun grootste gemeenschappelijke deler. Er moet voor a en b gelden dat*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2 \text{ en dus } a^2 = 2b^2$$

Hieruit volgt dat a^2 *een even getal is, en dus a zelf ook:* $a = 2c$ *voor zeker geheel getal c. Hiermee geldt weer*

$$a^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 2b^2 \text{ en dus } b^2 = 2c^2$$

Hieruit volgt dat b ook even is, wat in tegenspraak is met dat a en b geen gemeenschappelijke delers groter dan 1 *hebben.* $\sqrt{2}$ *kan dus geen breuk zijn.*

- *Een getal dat niet te schrijven is in een verhouding (ratio) tussen gehele getallen noemen we* irrationaal.

- *De verzameling van* rationale *en* irrationale *getallen tezamen is* $\mathbb{R}$*: de verzameling van de* reële *getallen. Omdat in deze verzameling geen 'gaten' zitten spreken we ook over de* reële rechte *of* reële lijn.

- *Een* interval *van reële getallen is een continu deel van de reële rechte. Intervallen kunnen de volgende vormen aannemen:*

$\langle \leftarrow, a\rangle$	*Alle reële getallen kleiner dan a*
$\langle \leftarrow, a]$	*Alle reële getallen kleiner dan of gelijk aan a*
$\langle a, b]$	*Alle reële getallen groter dan a en kleiner dan of gelijk aan b*

Het moge duidelijk zijn wat $\langle a,b\rangle, [a,b], [a,b\rangle, \langle a,\rightarrow\rangle$ *en* $[a,\rightarrow\rangle$ *beduiden.*

Memo 1.2. Functies

- *Een* functie *of* afbeelding f *met* domein A *en* bereik B, *kort opgeschreven als* $f : A \to B$. *is wat met elk element x van A een uniek element* $f(x)$ *van B associeert. We spreken van de* toepassing *van f op x, en het resultaat* $f(x)$ *noemen we het* f-beeld *van x.*

- *Een functie wordt in de praktijk veelal gedefinieerd door een* functievoorschrift *dat voor elk element in het domein bepaald met welk beeld het geassocieerd wordt. We schrijven dan ook*

  $$f(x) = \textit{ voorschrift voor } x \textit{ of } x \mapsto \textit{ voorschrift voor } x$$

  Als $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ *gedefinieerd wordt door* $f(x) = x^2$ *bedoelen we de functie die elk positief geheel getal op zijn kwadraat afbeeldt. In veel contexten is de expliciete vermelding van f dan niet meer nodig en schrijven we ook* $x \mapsto x^2$ *over* $\mathbb{N}_+$.

- *Het* beeld $f[A]$ *van f is de verzameling van alle* f*-beelden. Dit is natuurlijk een deelverzameling van B.*

- *Als geldt dat* $f[A] = B$ *dan noemen we f een* surjectie *of een* surjectieve functie.

- *Als elk tweetal verschillende elementen van het domein van een functie f een verschillend* f*-beeld heeft dan noemen we f een* injectie *of een* injectieve *functie.*

- *Een* bijectie *is een functie die surjectief en injectief is.*

- *Als* $f : A \to B$ *een bijectie is dan kunnen we f ook omkeren en een krijgen we een nieuwe bijectie van B naar A. Deze omkering van f heet de* inverse *van f en wordt kort genoteerd als* f^{-1}.

  $$f^{-1} : B \to A \textit{ met } f^{-1}(y) = x \textit{ als } f(x) = y \textit{ voor alle } y \textit{ in } B$$

  Dit is inderdaad een juist functie-voorschrift: voor elke $y \in B$ *is* f^{-1} *gedefinieerd want f is surjectief, en* f^{-1} *geeft ook steeds voor elke y een uniek beeld want f is injectief. Verder geldt er* $f(f^{-1}(y)) = y$ *voor alle y in B,* $f^{-1}(f(x)) = x$ *voor alle x in A en* $(f^{-1})^{-1} = f$.

- *Als er een bijectie bestaat dan schrijven we* $A \leftrightarrows B$, *wat het bestaan van de inverse mede verbeeldt.*

- *Als* $f : A \to B$ *en* $g : B \to C$ *dan is de* compositie $f \circ g$ *van f en g de functie van A naar C gedefinieerd door*

  $$f \circ g(x) = g(f(x)) \textit{ voor alle } x \in A.$$

  Als f en g beide injecties zijn dan ook $f \circ g$. *Dit geldt ook voor surjecties en bijecties.*

Memo 1.3. De stelling van Cantor

Voor elke verzameling A geldt dat $|A| < |\wp A|$!

Bewijs *Voor eindige verzamelingen is dit triviaal. We weten verder al dat $|A| \leq |\wp A|$ dankzij de eenvoudige injectie $a \mapsto \{a\}$. We hoeven dus alleen aan te tonen dat $|A| \neq |\wp A|$, ofwel dat er geen bijectie $f : A \to \wp A$ bestaat.*
Stel, in weerwil, dat zo'n bijectie f wel bestaat. We definiëren nu

$$D_f = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

D_f is de verzameling van alle A-elementen a die niet in hun f-beeld $f(a)$ voorkomen. Omdat aangenomen is dat f een bijectie is moet er een $d \in A$ te vinden zijn zodanig dat

$$f(d) = D_f \quad \textit{want} \quad D_f \in \wp A.$$

Maar nu geldt dat als $d \notin f(d) = D_f$ dan juist wel $d \in D_f$ vanwege D_f's definitie. Maar als $d \in D_f = f(d)$ dan moet weer gelden $d \notin D_f$. Kortom, zo'n d kan niet bestaan en f kan dus onmogelijk een bijectie zijn: $A \not\leftrightarrows \wp A$ ófwel $|A| \neq |\wp A|$. QED

N.B. *De definitie van de verzameling D_f is natuurlijk de crux van het bewijs. Deze komt overeen met de diagonaal-zet in het bewijs dat $|\mathbb{N}_+| < |\wp \mathbb{N}_+|$.*

De kleinste vorm van oneindigheid hebben we $\aleph_0$ gedoopt. Met de machtsverzamelingconstructie kunnen we de opvolgers als volgt definiëren:

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n},$$

en er geldt vanwege de stelling van Cantor dat $\aleph_n < \aleph_{n+1}$ voor alle n. Een geordende oneindige ruimte van oneindigheden!
Een veel gebruikte verzameling van omvang $\aleph_1$ is de verzameling van de reële getallen (zie memo 1.1), en dus $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$!.

Deel II

Propositielogica

Hoofdstuk 2

Syntaxis en semantiek van de propositielogica

De propositielogica is een eenvoudige logica die alleen maar bestaat uit beweringen en een aantal voegwoorden, zogenaamde *connectieven*. Met behulp van deze connectieven kunnen beweringen vervoegd worden tot nieuwe complexere beweringen. Waar kwantoren in de syllogistiek de logische woorden zijn (sectie 1.2), vormen hier de connectieven het logische systeem. Ondanks de eenvoud heeft de propositielogica enorm veel toepassingen. De allerbelangrijkste toepassing is wel het binaire rekenen wat met behulp van propositielogica geformaliseerd kan worden. Zogenaamde logische circuits die binair rekenen volgens de propositielogische principes die we in dit hoofdstuk zullen introduceren vormen de kleinste rekeneenheden in de moderne computer.

Ondanks de vele toepassingen houden we dit hoofdstuk beperkt en zal voor dit college de propositielogica slechts dienen als introductie tot de uitgebreidere en expressievere predicatenlogica in deel III van dit dictaat. In de predicatenlogica wordt de propositielogica gecombineerd met de kwantoren zoals we die al tegengekomen zijn bij de syllogistiek van Aristoteles.

Whodunnit?

Ter illustratie beginnen we met een eenvoudig ’whodunnit’-puzzeltje wat we eenvoudig kunnen formaliseren in propositielogisch formaat. Stel we hebben drie verdachten gearresteerd in verband met een moordzaak, te weten, Alphons, Bob en Chris. Na redelijk wat recherchewerk hebben we de volgende informatie ingewonnen:

φ_1	Tenminste één van de drie heeft het gedaan.	
φ_2	Ze hebben het niet alledrie gedaan.	
φ_3	Alphons is een handlanger van Bob.	(2.1)
φ_4	Als Chris het niet gedaan heeft dan kan Alphons het ook niet gedaan hebben.	

De φ_i’s gebruiken we als afkorting van deze vier beweringen. We kunnen deze verder specificeren als vervoeging van de drie uitspraken “Alphons/Bob/Chris heeft de moord gepleegd” die we respectievelijk kort noteren met a, b en c. De vier beweringen in (2.1) kunnen als volgt worden uitgeschreven:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 & a \vee b \vee c \\ \varphi_2 & \neg(a \wedge b \wedge c) \\ \varphi_3 & b \rightarrow a \\ \varphi_4 & \neg c \rightarrow \neg a \end{array} \tag{2.2}$$

Laten we bovenaan beginnen met de uitleg van de nieuwe symbolen. Het symbool $\vee$ is de zogenaamde *disjunctie* en staat voor het logische woordje *of*. Let wel, een propositie van de vorm $p \vee q$ is ook waar als beide *disjuncten*, p en q, allebei waar zijn. Daarom wordt ook wel gesproken van de *inclusieve* disjunctie. Zodoende is onze informatie φ_1 waar als tenminste één van onze verdachten de moord gepleegd heeft.

In de omschrijving van φ_2 hierboven komen twee propositielogische connectieven voor. Het connectief $\wedge$ is de *conjunctie* en representeert het logische woordje *en*. Een conjunctie is waar als zijn *conjuncten* waar zijn. Kortom $a \wedge b \wedge c$ zegt niks anders dan dat alledrie de verdachten de moord hebben gepleegd. Het connectief $\neg$, ofwel de *negatie*, ontkent de propositie waar hij voor geplaatst is, en daarmee is $\neg(a \wedge b \wedge c)$ een goede omschrijving van de informatie φ_2.

In de twee laatste proposities komt een vierde connectief voor, de *implicatie* en staat voor *als ... dan ....* Met behulp van dit symbool worden φ_3 en φ_4 eenvoudig vertaald naar $b \rightarrow a$ en $\neg c \rightarrow \neg a$ respectievelijk.

Updates door eliminatie van mogelijkheden

De informatie $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ is te verwerken door gebruik te maken van een lijstje van mogelijke situaties. Net als bij de Venn-diagrammen in het eerste hoofdstuk beginnen we zo algemeen mogelijk. Een mogelijke situatie verbeelden we eenvoudig als de waarheid of onwaarheid van de uitspraken a, b en c. Waarheid noteren we met een 1 en onwaarheid met een 0. Op deze manier zijn er acht verschillende situaties met een eenvoudige binaire code van lengte 3. Het eerste 'bit' staat voor de waarheidswaarde van de uitspraak a, de tweede van b en de derde van c.

Ter linkerzijde van de figuur hier beneden in (2.3) is de beginsituatie van alle mogelijkheden uitgeschreven. Na het invoeren van informatie φ_1 wordt de situatie 000 niet langer voor mogelijk gehouden. Informatie φ_2 zorgt voor eliminatie van de tegengestelde situatie 111. Een update elimineert zodoende de situaties waarin de informatie van de update onwaar is. De formule φ_3 is onwaar in die situaties waarin b het gedaan heeft maar a niet. De φ_3-update levert dus eliminatie van 010 en 011. Op gelijksoortige manier geeft φ_4 aanleiding tot het wegwerken van de situaties 110 en 100.

$$\boxed{\begin{array}{ll} 000 & 100 \\ 001 & 101 \\ 010 & 110 \\ 011 & 111 \end{array}} \overset{\varphi_1}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{ll} 000 & 100 \\ 001 & 101 \\ 010 & 110 \\ 011 & 111 \end{array}} \overset{\varphi_2}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{ll} 000 & 100 \\ 001 & 101 \\ 010 & 110 \\ 011 & 111 \end{array}} \overset{\varphi_3}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{ll} 000 & 100 \\ 001 & 101 \\ 010 & 110 \\ 011 & 111 \end{array}} \overset{\varphi_4}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{ll} 000 & 100 \\ 001 & 101 \\ 010 & 110 \\ 011 & 111 \end{array}} \tag{2.3}$$

Alleen de situaties in de tweede rij, 001 en 101, blijven mogelijk nadat de informatie is ingevoerd. Hieruit kunnen we concluderen dat Chris een dader is en Bob zeker niet. Met andere worden $\neg b \wedge c$ is een geldig gevolg van $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$, maar a en ook $\neg a$ niet. Dit laatste wil zeggen dat we wat betreft het eventuele daderschap van Alphons niet zeker zijn. Formeel worden deze bevindingen als volgt genoteerd:

$$\begin{aligned} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 &\models \neg b \wedge c \\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 &\not\models a \\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 &\not\models \neg a \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1 De taal van de propositielogica

De propositielogische taal bestaat uit een aantal zogenaamde *propositionele variabelen*, zoals de beweringen a, b en c in het voorbeeld hierboven, en de connectieven zoals we die ook in het voorbeeld hierboven al tegenkwamen.

Definitie 2.1. *Laat $\mathbb{P}$ een aftelbare verzameling van propositionele variabelen zijn. De* propositielogische taal $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ *over $\mathbb{P}$ is de kleinste verzameling*[1] *zodanig dat:*

- $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ *en*
- *voor elke $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ en ψ in $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ geldt dat ook*
  - $(\neg\varphi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{P}}$,
  - $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{P}}$,
  - $(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{P}}$,
  - $(\varphi \to \psi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ *en*
  - $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{P}}$.

Elementen van deze taal worden welgevormde propositionele formules genoemd, of ook korter $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-formules.
De verzameling $\mathbb{P}$ heet ook wel het vocabulaire *van de taal. Deze verzameling vormt in een propositielogische taal het* niet-logische *deel van de taal. De connectieven zijn de* logische *symbolen van de taal.*

Voor propositionele variabelen wordt ook wel de naam *propositieletters* gebruikt. Ze worden doorgaans genoteerd met kleine letters $p, q, r, s, \ldots$ eventueel aangevuld met indices als in $p_0, q_1, r', s'', \ldots$ &c. Andere veel gebruikte namen voor deze variabelen zijn *atomaire* of *primitieve proposities* omdat ze verder niet op te delen zijn in kleinere 'deelproposities'.[2] Als we willekeurige propositionele formules gebruiken noteren we deze in het vervolg van de tekst met kleine Griekse letters.
De meeste connectieven hadden we al besproken in het 'whodunnit'-voorbeeld. Alleen de laatstgenoemde in definitie 2.1 werd niet eerder genoemd. Dit connectief, geschreven met een dubbele pijl $\leftrightarrow$, heet *equivalentie* of *bi-implicatie*. De laatste naamgeving geeft al aan wat het betekent: 'de implicatie in beide richtingen'. De propositie $\varphi \leftrightarrow \psi$ wil zeggen dat "*als φ dan ψ en ook omgekeerd*" of weer anders gezegd "φ *dan en slechts dan als* ψ".

Opgave 22. De equivalentie is in zekere zin overbodig. Je zou $\varphi \leftrightarrow \psi$ evengoed kunnen schrijven als $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Hoe zou je de volgende uitdrukkingen als propositielogische formules kunnen schrijven?

[1] We gebruiken hier de kleinste verzameling om aan te geven dat niets tot de propositielogische taal behoort dan wat op basis van de regels in deze definitie gemaakt kan worden.

[2] Deze naamgeving zullen we gebruiken in het derde deel van dit diktaat omdat daar variabelen weer een andere betekenis hebben.

1. φ alleen als ψ
2. φ als ψ
3. als φ dan ψ anders χ
4. φ ondanks ψ

Schrijfconventies

De haakjes zijn bedoeld om ambiguïteiten te voorkomen. Met een uitdrukking als $p \vee q \wedge r$ weten we niet wat er bedoeld wordt. Betekent het $(p \vee (q \wedge r))$ of wordt $((p \vee q) \wedge r)$ bedoeld? Er worden wel verkortingen gebruikt om het aantal haakjes te beperken. Zo laten we altijd de buitenste haakjes weg. We schrijven $(p \vee q) \wedge r$ in plaats van $((p \vee q) \wedge r)$.
Een regel die ook het aantal haakjes wat kleiner maakt is dat we de negatie altijd voorrang geven over de overige connectieven. We schrijven zodoende $\neg p \wedge q$ voor $(\neg p) \wedge q$. Verder worden haakjes tussen conjuncties en disjuncties vaak weggelaten. We schrijven doorgaans $p \wedge q \wedge r$ zonder duidelijk te maken of we $(p \wedge q) \wedge r$ of $p \wedge (q \wedge r)$ bedoelen. Dit kan natuurlijk zonder gevaar omdat de twee formules hetzelfde betekenen. Dit geldt ook voor de disjunctie. In de volgende secties komen we daar nog op terug. Pas op, dit geldt weer niet voor implicatie. Een uitdrukking als $p \to q \to r$ is echt ambigu. De twee lezingen betekenen ook echt wat anders, en we zijn dus verplicht om met haakjes aan te geven wat er bedoeld wordt.

2.2 Semantiek voor de propositielogica

De betekenis van connectieven kan eenvoudig vastgelegd worden door hun werking op waarheidswaarden. Zo kan met het volgende tabelletje de betekenis van de negatie gedefinieerd worden. Een negatie draait de waarheidswaarden om:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

(2.5)

In een situatie waar φ onwaar is is $\neg\varphi$ waar, en omgekeerd. De werking van de conjunctie en de disjunctie werd ook al terloops vastgelegd in het inleidende voorbeeld.

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

(2.6)

Je zou ook kunnen zeggen dat de conjunctie het minimum van de waarheidswaarden van beide conjuncten overneemt en de disjunctie het maximum.

Opgave 23. De exclusieve disjunctie $\sqcup$ (geen standaardnotatie) wordt ook wel eens gebruikt. Met name bij het ontwerpen van logische circuits blijkt dit een gemakkelijk connectief. De formule $\varphi \sqcup \psi$ staat dan voor "óf φ óf ψ (en dus niet allebei)". Hoe zou je deze formule eenvoudig kunnen beschrijven met de connectieven van hierboven?

De betekenis van de overige twee connectieven wordt als volgt vastgelegd:

$$\begin{array}{cc|c|c} \varphi & \psi & \varphi \to \psi & \varphi \leftrightarrow \psi \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \tag{2.7}$$

De equivalentie kunnen we dus opvatten als een soort 'is-gelijk', en de implicatie als propositielogische 'kleiner-of-gelijk-aan'. De tweede tabel ontstaat domweg door hem op te vatten als de 'tweerichtingsimplicatie'.
De eerste tabel correspondeert slechts gedeeltelijk met de betekenis van 'als .. dan ..'-zinnen in natuurlijke taal. Er is een specialisatie in de logica, de zogenaamde conditionele logica, die zich bezig houdt met natuurgetrouwere definities van conditionele zinnen in natuurlijke taal. Daar wordt veelal meer semantische structuur gebruikt dan de eenvoudige waarheidstabellen zoals we die hier gebruiken. We zullen hier nog op terugkomen in het volgende deel. In de tweewaardige logica werkt de definitie als hierboven gegeven optimaal.

Modellen en waarheid

Met behulp van de tabellen voor de connectieven hierboven is de semantiek van de propositielogica bijna geheel rond. We weten precies hoe ze waarheidswaarden veranderen. Wat nog resteert is een preciese definitie van wat we eerder situaties hebben genoemd, en waaraan de beweringen in een logica hun waarheidswaarden uiteindelijk ontlenen. In het ontwerp van een logica heten deze situaties *modellen*. Dit zijn wiskundige structuren die een exacte definitie van waarheidswaardetoekenning toelaten. In het geval van propositielogica zijn deze modellen hele gemakkelijke structuren. Het zijn de zogenaamde *valuaties*, functies die elke propositionele variabele een waarheidswaarde toekennen.

Definitie 2.2. *Als $\mathbb{P}$ een verzameling van propositionele variabelen is dan is elke functie $V : \mathbb{P} \to \{0,1\}$ een* $\mathbb{P}$-valuatie.

Definitie 2.3. *Als V een $\mathbb{P}$-valuatie is dan is de uitbreiding $\overline{V}$ van V een functie die elke $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-formule een waarheidswaarde toebedeeld volgens de volgende compositionele regels:*

$$\begin{array}{rcl} \overline{V}(p) & = & V(p) \text{ voor alle } p \in \mathbb{P} \\ \overline{V}(\neg\varphi) & = & 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{V}(\varphi) = 0 \\ \overline{V}(\varphi \wedge \psi) & = & 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{V}(\varphi) = 1 \text{ en } \overline{V}(\psi) = 1 \\ \overline{V}(\varphi \vee \psi) & = & 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{V}(\varphi) = 1 \text{ of } \overline{V}(\psi) = 1 \text{ (of beide)} \\ \overline{V}(\varphi \to \psi) & = & 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{V}(\varphi) \leq \overline{V}(\psi) = 1 \\ \overline{V}(\varphi \leftrightarrow \psi) & = & 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{V}(\varphi) = \overline{V}(\psi) \end{array} \tag{2.8}$$

In plaats van $\overline{V}(\varphi) = 1$ schrijven we ook $V \models \varphi$ en zeggen dat φ waar *is in V. Andersom zeggen we ook dat V de formule φ vervult, of spreken over V als een φ-model.*
Als $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ een formuleverzameling is dan noemen we een $\mathbb{P}$-valuatie V een Σ-model als hij alle formules in Σ vervult. Als er zo'n Σ model bestaat heet Σ vervulbaar.

In analogie met onze eerdere definitie van wat een logische uitspraak betekent in definitie (1.2) op pagina 7 wordt de betekenis van een propositionele formule vastgelegd door de verzameling van modellen die die formule vervullen.

Definitie 2.4. *De* betekenis *van een $\mathcal{L}_\mathbb{P}$-formule φ is de verzameling van φ-modellen. We schrijven voor de betekenis van φ ook kortweg $[\varphi]$. Voor een verzameling van $\mathcal{L}_\mathbb{P}$-formules schrijven we ook $[\Sigma]$ waarmee we de verzameling van Σ-modellen bedoelen.*

Waarheidstabellen

Met behulp van de definities hierboven kunnen we de waarheidswaarden van een formule onder *alle* omstandigheden administreren in een zogenaamde *waarheidstabel* en zodoende zijn betekenis vastleggen. Hieronder een heel simpel voorbeeld: $\varphi \vee \neg\varphi$. Er zijn in dit geval twee mogelijkheden: φ is onwaar of waar. We schrijven eerst de formule uit over de breedte van de tabel en schrijven ter linkerzijde van de tabel alle mogelijkheden uit. De waarden voor φ kopiëren we naar de voorkomens van φ in de gehele formule.

φ	φ	$\vee$	$\neg$	φ
0	0			0
1	1			1

φ	φ	$\vee$	$\neg$	φ
0	0		1	0
1	1		0	1
				$\uparrow$

φ	φ	$\vee$	$\neg$	φ
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1
	$\uparrow$		$\uparrow$	

φ	φ	$\vee$	$\neg$	φ
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1

(2.9)

Vervolgens gaan we naar het eerste connectief wat we kunnen toepassen. Dit is de negatie en we passen zijn werking toe op de tabel die hoort bij de formule waarover de negatie reikt. De verwerkte kolommen komen verder niet meer aan de beurt en we zouden ze dus verder weg kunnen laten. Voor de duidelijkheid hebben we de verwerkte kolom hier grijs gekleurd.

Uiteindelijk is de disjunctie toepasbaar. Deze heeft twee deelformules, de disjuncten, waarop hij werkt, aangegeven met de verticale pijltjes. Als we de betekenis als vastgelegd in (2.6) toepassen krijgen we het resultaat zoals in de derde tabel getekend. Uiteindelijk kunnen we de twee verwerkte kolommen ook verwijderen. Het eindresultaat legt de betekenis van de formule vast. In dit geval houden we alleen maar enen over wat zegt dat $\varphi \vee \neg\varphi$ altijd waar is. Het is een zogenaamde *tautologie*.

Definitie 2.5. *Een uitspraak is een* tautologie *als hij waar is onder alle omstandigheden. Een uitspraak is* vervulbaar *als hij waar is onder zekere omstandigheden. In de context van propositielogica noemen we een formule $\varphi \in \mathcal{L}_\mathbb{P}$ derhalve een tautologie als $\overline{V}(\varphi) = 1$ voor alle $\mathbb{P}$-valuaties V. Een $\mathcal{L}_\mathbb{P}$-formule ψ is vervulbaar als er tenminste één $\mathbb{P}$-valuatie V is zodanig dat $\overline{V}(\psi) = 1$.*

Als we in (2.9) de disjunctie door een conjunctie vervangen houden we uiteindelijk alleen maar nullen over. De formule $\varphi \wedge \neg\varphi$ is nooit waar en dus *onvervulbaar*. Het zelfde resultaat krijg je voor de formule $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$. In het algemeen is φ een tautologie als $\neg\varphi$ onvervulbaar is, en vice versa.

In het voorbeeld hieronder wordt uitgerekend dat $p \vee (q \wedge r)$ en $(p \vee q) \wedge r$ verschillende betekenis hebben. Hierdoor is het direct duidelijk dat de haakjes werkelijk nodig zijn om ambiguïteit te voorkomen.

p	q	r	p	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r)$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	r
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

(2.10)

Wat wel duidelijk wordt is dat voor elke valuatie V geldt dat

$$\overline{V}(p \vee (q \wedge r)) \geq \overline{V}((p \vee q) \wedge r). \tag{2.11}$$

Of anders gezegd, als de laatste formule waar is dan moet de eerste ook waar zijn. Met definitie (1.1) van geldig gevolg weten we dat de eerste formule dus een geldig gevolg is van de laatste:

$$(p \vee q) \wedge r \models p \vee (q \wedge r) \tag{2.12}$$

Voor de propositieletters p, q en r kunnen we natuurlijk willekeurige formules invullen. De geldig gevolgrelatie blijft overeind.

Opgave 24. Geef waarheidstabellen voor de volgende formules:

1. $(\varphi \vee \psi) \vee \neg(\varphi \vee (\psi \wedge \chi))$
2. $\neg((\neg\varphi \vee \neg(\psi \wedge \chi)) \vee (\varphi \wedge \chi))$
3. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
4. $(\varphi \leftrightarrow (\psi \to \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \leftrightarrow \psi) \to \chi)$
5. $((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\psi \to \chi)) \leftrightarrow (\neg(\varphi \to \chi) \to \psi)$

Welke van de formules zijn tautologieën?

Opgave 25. Een puzzel uit 'The Lady and The Tiger' van Raymond Smullyan. Een zekere koning is liefhebber van puzzels en houdt ervan zijn gevangenen uit te dagen. Zelfs zijn dochters zet hij daar af en toe bij op het spel. Op een goede dag stelt hij een gevangene op voor twee deuren. Op de linkerdeur staat:

φ_1 Achter deze deur zit een prinses en achter de ander een tijger.

Op de rechterdeur staat:

φ_2 Achter één van deze twee deuren zit een prinses en achter de ander een tijger.

De koning vertelt de gevangene dat één van de twee mededelingen waar is en de ander onwaar (de koning spreekt natuurlijk de waarheid). De gevangene moet één van de deuren kiezen om óf schoonzoon van de koning te worden óf opgegeten te worden door een bloeddorstige tijger.
(a) Welke van de deuren moet de gevangene kiezen?

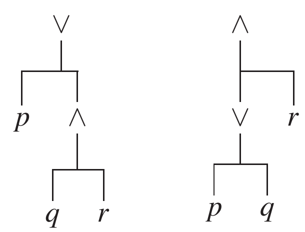
(b) Geef propositielogische vertalingen van de twee mededelingen op de deur.

(c) Geef een propositielogische vertaling van de mededeling van de koning.

(d) Controleer met behulp van een waarheidstabel je eerdere antwoord onder (a).

Ontledingsbomen

Het voorbeeld hierboven is een tamelijk simpel voorbeeld van de noodzaak van haakjes in de propositielogische taal $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$. Om de nestingstructuur van zo'n formule beter duidelijk te maken worden ook wel ontledingsbomen gebruikt. In het vervolg van het diktaat zullen we ze nog tegenkomen omdat zodra we ingewikkelder talen gaan gebruiken deze ontledingsbomen vaak nodig zijn om logische formules te kunnen lezen en schrijven.
De ontledingsbomen voor de twee formules uit (2.10) zien er als volgt uit:



(2.13)

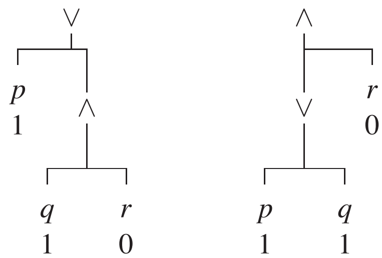
De *bladeren* van de boom zijn de propositionele variabelen. De *knopen* in de boom worden gevormd door de connectieven. Het *bereik* of *scope* van zo'n connectief betreft dan de formules die gerepresenteerd worden door de bomen die direct onder de knoop van het connectief te vinden zijn. De *wortel* of *top* van de boom is de bovenste knoop. Als dit een connectief is heet deze het *hoofdconnectief* van de formule.[3] Formules worden ook wel geklassificeerd aan de hand van dit hoofdconnectief. De linkerformule in (2.13) wordt zodoende ook wel een *disjunctie* of *disjunctieve formule* genoemd. De rechter is een *conjunctie* of *conjunctieve formule*.
Een boom die in een andere boom voorkomt heet een *deelboom* en de corresponderde formule van zo'n deelboom heet een *sub-* of *deelformule* van de formule die gerepresenteerd wordt door de gehele boom. Zo zijn de deelformules van linkerformule in (2.13) de formules $p \vee (q \wedge r), p, q \wedge r, q$ en r.

Opgave 26. Geef, zonder gebruik te maken van de conventies, met behulp van haakjes alle mogelijke propositielogische lezingen van de ambigue formule $\neg p \rightarrow q \wedge \neg r$. Teken voor elk van de lezingen een ontledingsboom.

Bomen en circuits

Een ontledingsboom kan gebruikt worden als een *logisch* of *digitaal* circuit. De ingangen van zo'n circuit komen overeen met de bladeren in de boom. Zo'n ingang kan een signaal afgeven wat correspondeert met de waarheid van de propositionele variabele van het blad. Hieronder zijn de ontledingsbomen uit (2.13) afgebeeld als circuits waarbij de p- en de q-ingang beide een signaal afgeven (1) en de r-ingang 'uitstaat' (0).

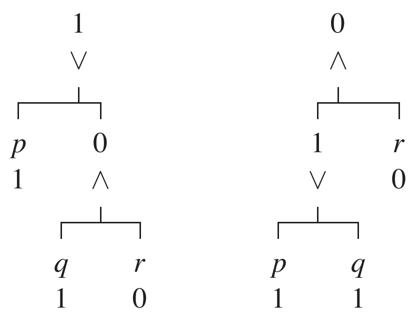
[3] Een boom die alleen een top heeft is ook een boom. De top is dan gelijk een blad. In de context van de propositielogica kan dit alleen maar een propositionele variabele zijn.



(2.14)

De signalen lopen vervolgens langs de connectieven die in de terminologie van de digitale techniek *logische poorten* worden genoemd.

Een `and`-poort, ofwel conjunctie, geeft een signaal door indien hij in beide ingangen een signaal binnen krijgt. In de overige gevallen blokkeert hij. Het gedrag van zo'n poort is dus een imitatie van de werking van de conjunctie op waarheidswaarden. Een `or`-poort, ofwel disjunctie, blokkeert alleen als hij helemaal geen signaal binnen krijgt. Een signaal in één van de ingangen is genoeg om dit signaal door te geven. Een `not`-poort, ofwel negatie, geeft een signaal af als hij zelf niks binnen krijgt. Een binnenkomend signaal blokkeert hij. Als we het circuit 'laten lopen' dan verstrekken de logische poorten in circuit van (2.14) de volgende uitgaande informatie.



(2.15)

In de circuits hierboven zorgt de werking van de poorten ervoor dat aan de uitgang van het linkercircuit in (2.14) wordt een signaal afgegeven. De corresponderende formule is dus waar voor de valuatie die p en q op 1 afbeeldt en r op 0. Het rechter-circuit blokkeert uiteindelijk wat betekent dat de corresponderende formule onder gelijke omstandigheden onwaar is. Deze digitale circuits hebben een ongeldigheid gedetecteerd:

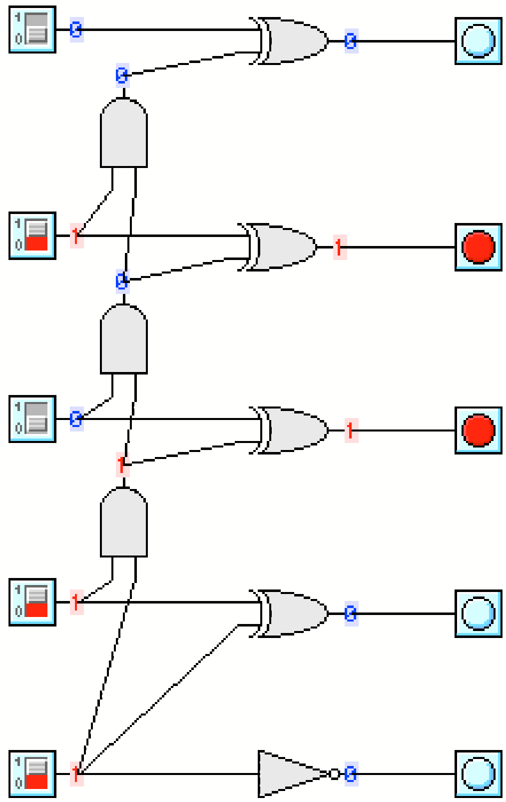
$$p \vee (q \wedge r) \not\models (p \vee q) \wedge r \tag{2.16}$$

Een logische redenering op micro-electronisch niveau!

Om de geldigheid van de omgekeerde redenering te detecteren zouden we alle mogelijke ingangsignaleringen moeten afgaan. Dit komt overeen met het doorlopen van de rijen in een waarheidstabel als in 2.10.

Logische equivalentie

De formules $p \vee (q \wedge r)$ en $(p \vee q) \wedge r$ hierboven hebben dus niet dezelfde betekenis. Er zijn situaties, dat wil zeggen valuaties, waarin de formules verschillende waarheidswaarden hebben. Als twee formules wel dezelfde betekenis hebben dan noemen we ze *logisch equivalent*.



Figuur 2.1: Een technische tekening van een digitaal circuit voor een binaire teller. De ingangen zijn de schakelaartjes aan de linkerzijde. Dit circuit is een vervlechting van meerdere circuits zoals ze hier in de tekst besproken zijn. Er zijn vijf uitgangen van vijf verschilllende deelcircuits. In dit circuit hebben we te maken met drie verschillende soort poorten. De driehoekspoort onderaan met een enkele ingang is de `not`-poort. De verticale poorten aan de linkerkant van het figuur zijn `and`-poorten. De horizontaal geplaatste poorten met twee ingangen zijn zogenaamde `xor`-poorten. Zij staan voor de 'exclusieve disjunctie' (zie ook opgave 23) en geven een signaal door als één van de ingangen een signaal krijgt en de ander niet. De werking van elke uitgang kan beschreven worden als een propositionele formule. Als p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 propositionele variabelen voor de ingangen van het circuit staan, waarbij de nummering van beneden naar boven loopt, dan kan de werking van de onderste uitgang beschreven worden als $\neg p_0$. De werking van de bovenste uitgang correspondeert met $(((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2) \wedge p_3) \sqcup p_4$ waarbij het laatste connectief de exclusieve disjunctie verbeeldt. Het circuit vormt een binaire teller. Het verhoogt een binaire representatie van een getal met 1. De berekening die hier gemaakt wordt is $11 + 1 = 12$, of in binaire notatie over vijf bits $01011 + 1 = 01100$.

Definitie 2.6. *Als geldt dat twee beweringen waar zijn onder de zelfde omstandigheden dan heten ze* logisch equivalent. *In de context van propositielogica betekent dit dat twee $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-formules φ en ψ logisch equivalent als geldt dat $\overline{V}(\varphi) = \overline{V}(\psi)$ voor elke $\mathbb{P}$-valuatie V. We schrijven in dit geval $\varphi \equiv \psi$.*

Een simpel voorbeeld is hieronder doorgerekend.

φ	ψ	$\neg$	$(\varphi$	$\vee$	$\psi)$	$\neg$	φ	$\wedge$	$\neg$	ψ
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1

(2.17)

De waarheidstabellen tonen aan dat $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$. Dit is één van de twee zogenaamde *de Morgan wetten* voor de propositielogica. De andere is analoog hieraan waarbij de disjunctie en conjunctie zijn omgewisseld.

Opgave 27. Welke van de volgende paren zijn logisch equivalent? Bewijs de juistheid van je antwoord met behulp van waarheidstabellen.

1. $\varphi \to \psi$ en $\psi \to \varphi$
2. $\varphi \to \psi$ en $\neg\psi \to \neg\psi$
3. $\neg(\varphi \to \psi)$ en $\varphi \vee \neg\psi$
4. $\neg(\varphi \to \psi)$ en $\varphi \wedge \neg\psi$
5. $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ en $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$
6. $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ en $\neg\varphi \leftrightarrow \psi$
7. $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi)$ en $\neg\varphi \wedge \neg\psi$

De Boolese algebra van proposities

De genoemde de Morgan wetten kwamen we eerder tegen in 1.3 in de Boolese algebra voor verzamelingen. Het blijkt dat deze hele algebra eveneens van toepassing is op de propositielogica. Om deze geheel bruikbaar te maken moeten we wel onze taal een klein beetje aanpassen. We gebruiken niet langer de 'pijl'-connectieven $\to$ en $\leftrightarrow$ maar gebruiken wel het symbool $\perp$ voor de zogenaamde *absurde propositie* of het *falsum*. Deze laatste is nodig als analogon voor de lege verzameling in de algebra voor verzamelingen. De negatie correspondeert met het complement, de disjunctie met de vereniging en de conjunctie met de doorsnede. De naamgeving van de wetten zijn gelijk aan die van de verzamelingalgebra van Boole.

$$\begin{array}{cccc}
\varphi \wedge \perp \equiv \perp & \varphi \wedge \neg\varphi \equiv \perp & \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi & \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi \\
\varphi \vee \perp \equiv \varphi & \varphi \vee \neg\varphi \equiv \neg\perp & \varphi \vee \varphi \equiv \varphi & \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi \\
 & & \text{Idempotentie} & \text{Commutativiteit}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\neg\neg\varphi \equiv \varphi & \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi & \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \\
 & \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi & \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \\
\text{Dubbele negatie} & \text{Absorptie} & \text{Distributie}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi & \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi & \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \\ \text{Associativiteit} & \text{De Morgan} \end{array}$$

Opgave 28. Controleer de distributiewetten met behulp van waarheidstabellen.

We zullen dit systeem niet gebruiken voor berekeningen in de propositielogica. In het vierde hoofdstuk zullen we alternatieve systemen introduceren die in het algemeen handiger werken dan de Boolese algebra. De naamgeving van de wetten worden wel veel gebruikt.
Zoals hierboven vermeld gebruiken we in de Boolese algebra niet de implicatie en equivalentie. Deze connectieven werken in deze stijl van logisch rekenen onhandig, en ze zijn tenslotte eenvoudig als 'afkortingen' te definiëren, dankzij de volgende eenvoudige equivalenties:

$$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \qquad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) \tag{2.18}$$

Het is niet erg lastig deze logische equivalenties te verifiëren met waarheidstabellen.

Opgave 29. We hebben hierboven de equivalentie als een conjunctieve formule in de 'taal van Boole' herschreven. Hoe kan je $\varphi \leftrightarrow \psi$ herschrijven tot een disjunctie die even lang is als de conjunctieve herschrijving van hierboven?

Opgave 30. De onhandigheid van $\to$ met betrekking tot het 'Boolese rekenen' wordt voelbaar als je de Boolese eigenschappen van de Boolese binaire connectieven, conjunctie en disjunctie, voor de implicatie afloopt. Laat zien dat de implicatie nóch idempotent nóch commutatief nóch associatief is.

Opgave 31. Verifieer dezelfde eigenschappen als in de vorige opgave voor de equivalentie.

Opgave 32. Zoals gezegd hangt de keuze van connectieven af van de stijl van logisch rekenen (deductie). In de 'taal van Boole' komen toevallig de hierboven gekozen connectieven handig uit in verband met de corresponderende algebra van logische equivalenties. In andere systemen werkt juist het gebruik van de implicatie heel handig. In het vierde hoofdstuk zullen we kennis maken met het zogenaamde Hilbert-systeem wat alleen maar gebruik maakt van $\to$ en $\perp$. Dit is geen probleem wat betreft de uitdrukkingskracht van in dit systeem. Andere formules kunnen gewoon gelezen worden als afkortingen van formules uit de 'taal van Hilbert'. Zo kan $\neg\varphi$ gelezen worden als een afkorting van zijn logische equivalent $\varphi \to \perp$ (verifieer dit even snel met behulp van een waarheidstabel). Hoe kan je op gelijksoortige manier $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ en $\varphi \leftrightarrow \psi$ opvatten als afkortingen van 'Hilbert-formules'.

Opgave 33. Waarom zou een propositielogische taal waar alleen $\leftrightarrow$ en $\perp$ voorkomen erg onhandig werken?

2.3 Expressiviteit van de propositielogica

We zullen de Boolese wetten niet als deductiemethode gaan gebruiken in de volgende hoofdstukken, maar ze zijn wel heel handig om formules aan te harken tot zogenaamde *normaalvormen*. We zijn hier met name geïnteresseerd in *disjunctieve normaalvormen*. Dit zijn formules waar geen implicaties of equivalenties in voor komen, en waar geen enkele disjunctie binnen het bereik van een conjunctie voorkomt en de negaties alleen direct voor de propositionele variabelen mogen voorkomen. Zo'n disjunctieve normaalvorm zijn formules waar de betekenis — ofwel de verzameling van vervullende modellen — direct uit af te lezen is. In deze zin zijn het de meest leesbare formules. Bijvoorbeeld, de formule $p \vee (q \wedge r)$ is zo'n disjunctieve normaalvorm maar $(p \vee q) \wedge r$ niet. In de laatste formule is er tenslotte een disjunctie die binnen het bereik van een conjunctie valt. De modellen van de eerste formule zijn alle valuaties V met $V(p) = 1$ of $V(q) = V(r) = 1$ (zie ook (2.10) op pagina 35). Daar hoeven we niet uitgebreid een waarheidstabel voor te gaan berekenen.

Definitie 2.7. *Een* literal *is een propositionele variabele of een negatie daarvan. Een negatievorm is een propositielogische formule zonder voorkomens van implicaties en equivalenties waar alleen maar negaties in voorkomen die direct voor de propositionele variabelen staan. Zo'n formule heeft dus geen enkele subformule $\neg\varphi$ waarbij φ geen atomaire formule is.*

Dankzij de de Morgan regels (en de dubbele negatie regel) is elke propositionele formule gemakkelijk te herschrijven tot een equivalente negatievorm. Het is een ambtelijk klusje waar je netjes de negaties binnen de haakjes moet zien te schuiven. Dit moet wel pas gebeuren nadat eerst eventuele 'pijlen' weggewerkt zijn. Een voorbeeld:

$$\begin{gathered}(p \leftrightarrow q) \to r \equiv ((p \to q) \wedge (q \to p)) \to r \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r \equiv \\ \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r \equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r\end{gathered} \tag{2.19}$$

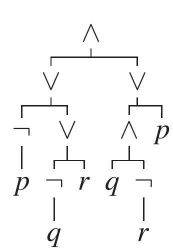
Deze negatievorm is tegelijk ook een disjunctieve normaalvorm. De betekenis van de originele formule $(p \leftrightarrow q) \to r$ is hiermee direct af te lezen in het eindresultaat. Dit zijn alle valuaties V met $V(p) \neq V(q)$ of $V(r) = 1$.

Definitie 2.8. *Een* disjunctieve normaalvorm *is een negatievorm waarin geen enkele disjunctie in het bereik valt van een conjunctie. Een* conjunctieve normaalvorm *is een negatievorm waar geen enkele conjunctie binnen het bereik van een disjunctie voorkomt.*

In (2.19) hadden we geluk. Bij het naar binnen brengen van de negaties kregen we gelijk een disjunctieve normaalvorm. Dat hoeft natuurlijk niet altijd het geval te zijn. Om uiteindelijk de disjuncties over conjuncties heen te krijgen heb je in vele andere gevallen ook de distributiewetten nodig. Voor disjunctieve normaalvormen heb je de distributie van disjuncties over conjuncties nodig. Dit wordt duidelijk als de haakjes anders hadden gestaan in het voorbeeld uit (2.19).

$$\begin{gathered}p \leftrightarrow (q \to r) \equiv (p \to (q \to r)) \wedge ((q \to r) \to p) \equiv (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg(\neg q \vee r) \vee p) \equiv \\ (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge ((\neg\neg q \wedge \neg r) \vee p) \equiv (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee p)\end{gathered} \tag{2.20}$$

In een ontledingsboom ziet het tussenresultaat er als volgt uit:



(2.21)

We hebben met twee conjuncties te maken, waarvan er slechts één op de gewenste plek staat. We moeten dus het distributie-principe van stal halen om de verkeerd geplaatste conjunctie naar beneden te dwingen. We korten hiervoor de linkerconjunct even af tot α om hem later weer in te vullen:

$$\alpha \wedge ((q \wedge \neg r) \vee p) \equiv (\alpha \wedge (q \wedge \neg r)) \vee (\alpha \wedge p) \tag{2.22}$$

We moeten nu nog verder distribueren wat veel tijd kost. We kunnen evenwel handig gebruik maken van een gegeneraliseerde versie van de distributiewetten. Ten eerste herschrijven we α zonder haakjes tot $\neg p \vee \neg q \vee r$ en distribueren de overgebleven conjuncten over de drie disjuncties in één keer. Dat levert voor de rechterdisjunct $\alpha \wedge p$ in (2.22) het volgende resultaat

$$\alpha \wedge p \equiv p \wedge \alpha \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \tag{2.23}$$

De eerste disjunct in het tussenresultaat is natuurlijk equivalent met $\perp$ en kan weggewerkt worden. Voor de ander disjunct in (2.22) krijgen we

$$\alpha \wedge (q \wedge \neg r) \equiv (q \wedge \neg r) \wedge \alpha \equiv (q \wedge \neg r \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r \wedge r) \equiv q \wedge \neg r \wedge \neg p \tag{2.24}$$

Er vallen hier uiteindelijk zelfs twee disjuncten weg omdat ze niet vervulbaar zijn. Als we dan de resultaten bijeenbrengen krijgen we de gewenste disjunctieve normaalvorm:

$$p \leftrightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \tag{2.25}$$

Het normaliseren kan dus heel wat handwerk opleveren waarbij fouten gemakkelijk insluipen. Op zich kan je natuurlijk proberen in het begin al keuzes te maken die de zaak bekorten. Zo hadden we de equivalentie $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$ hierboven niet hoeven te herschrijven tot een conjunctie van twee implicaties maar tot een logische equivalentie als in opgave 29 op pagina 40. Tenslotte zorgde deze conjunctie voor de warrige afleiding hierboven.

Opgave 34. Herschrijf $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$ tot een disjunctieve normaalvorm door gebruik te maken van de logische equivalentie uit opgave 29.

Waarheidstabellen en disjunctieve normaalvormen

In eerste instantie leek het erop dat het normaliseren hierboven leidde tot een versnelde manier om de betekenis van een propositionele formule te achterhalen. Het laatste voorbeeld hierboven liet zien dat dat niet altijd het geval hoeft te zijn. Sterker nog, als we een disjunctieve normaalvorm willen afleiden dan kunnen we voor een formule de waarheidstabel gebruiken om deze normaalvorm eenvoudig eruit af te lezen. Dit werkt voor elke willekeurige formule. Laten we dit hieronder kort uiteenzetten.

Laat φ een $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-formule waarin de propositionele variabelen $p_1, ..., p_n$ voorkomen. Als we de waarheidstabel netjes systematisch uitschrijven krijgen we een tabel van lengte 2^n die in zijn meest algemene vorm er als volgt uitziet.

$$\begin{array}{ccc|c} p_1 & \dots & p_n & \varphi \\ \hline 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \dots & \dots & \dots & 1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \dots \end{array} \tag{2.26}$$

We kijken vervolgens op welke rijen, ofwel voor welke valuaties, de formule φ een 1 krijgt toebedeeld. Deze rijen kunnen geadministreerd worden als conjuncties. In zo'n rij zijn een aantal p_j's die waar zijn en de overige p_k's zijn onwaar. Die kunnen we aflezen in de linkerrij van de tabel zoals afgebeeld met de horizontale stippellijn in de tabel hierboven. Maak nu een conjunctie van de formules p_j en de formules $\neg p_k$. Deze conjunctie is alleen waar op de gegeven rij. Als we dit doen voor alle rijen waar φ een 1 krijgt toebedeeld levert dit een aantal conjuncties op. De disjunctie van al deze conjuncties is een disjunctieve normaalvorm en is waar onder precies dezelfde $\mathbb{P}$-valuaties als φ. Met andere woorden, de resulterende disjunctieve normaalvorm is logisch equivalent met φ.
In het uitzonderlijke geval dat in de waarheidstabel helemaal geen 1-en voorkomen dan is φ logisch equivalent met $p_0 \wedge \neg p_0$ wat ook een disjunctieve normaalvorm is. Kortom deze methode lukt altijd en we kunnen daarmee de volgende belangrijke stelling poneren.

Stelling 2.1. *Elke $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-formule is equivalent met een disjunctieve normaalvorm.*

De methode hierboven levert niet altijd de meest elegante normalisering. Als je het toepast voor het eerdere voorbeeld $(p \vee q) \wedge r$ dan krijg met behulp van zijn waarheidstabel (zie (2.10) op pagina 35):

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \tag{2.27}$$

Een eenvoudige toepassing van distributie geeft een veel kortere en elegantere normalisering:

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \tag{2.28}$$

De expressieve volledigheid van de propositionele taal

De normalisering via waarheidstabellen is langdradig en zoals het laatste voorbeeld heel duidelijk maakt zeker niet altijd nodig. Het is echter wel een methode die altijd werkt en laat zien dat stelling 2.1 geldt. De kracht van deze methode is zelfs nog veel groter. We kunnen laten zien aan de hand van de methode van hierboven dat de Boolese connectieven $\neg$, $\wedge$ en $\vee$ voldoende zijn om *elke* uitdrukking in een willekeurige 'connectieven-taal' te beschrijven.
In de definitie van de taal $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ hebben we aantal connectieven gedefinieerd omdat die nou eenmaal gebruikelijk zijn in de propositielogica. Het zou ons natuurlijk vrijstaan om nog meer connectieven erbij te bedenken. We zouden bijvoorbeeld symbolen kunnen bedenken om natuurlijke uitdrukkingen als bijvoorbeeld in opgave 22 (pagina 31) een directe notatie in de propositielogica te geven. We kunnen in principe zelfs elke willekeurige n-plaatsige binaire functie — ook wel Boolese functie genoemd — opnemen in een logische taal.

Definitie 2.9. *Een n-*plaatsige Boolese functie *f is een functie die elk rijtje van lengte n bestaande uit waarheidswaarden afbeeldt op een waarheidswaarde:*

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

Als f een n-plaatsige Boolese functie is dan kunnen we een logische taal definiëren met een connectief c_f waarvan de betekenis vastgelegd wordt door de werking van f. Een formule $c_f(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ is dan waar in een valuatie V alleen dan als geldt dat $f(\overline{V}(\varphi_1), ..., \overline{V}(\varphi_n)) = 1$. Voor formules waar zo'n connectief in voorkomt kunnen we natuurlijk — gegeven de definitie van de Boolese functie f — een waarheidstabel uitschrijven en vervolgens de desbetreffende formule herschrijven tot een disjunctieve normaalvorm volgens het stramien van hierboven. Het maakt niet uit hoe ingewikkeld zo'n Boolese functie is gekozen. Deze eigenschap wordt wel de *expressieve* of *functionele volledigheid* van de Boolese connectieven genoemd.

Stelling 2.2. *(Boole) De propositielogische taal is expressief volledig voor Boolese functies. Dit geldt ook voor de taal waarin alleen maar de Boolese connectieven voorkomen.*

Deze stelling verwoordt de kracht van de propositielogica zeer kernachting. De stelling werd bewezen door Boole in zijn boek 'The Laws of Thought' (1854). Het verrassende is dat als we binair rekenen met eindige functies het werk eigenlijk gedaan kan worden met de elementair logisch operaties die zo manifest en kenmerkend zijn in ons eigen denken en taalgebruik. Hij kon niet weten dat honderd jaar later, en tot op de dag van vandaag, computers op microscopisch niveau rekenen op basis van dezelfde logische principes door middel van de eerder geïntroduceerde circuits.[4] Een bijzondere analogie tussen menselijke en machinale denkwetten die we nu kunnen beschouwen als kunstmatige intelligentie avant-la-lettre.

Opgave 35. In feite kunnen we dankzij de de Morgan en de dubbele negatie equivalenties het ook stellen zonder disjunctie (of zonder conjunctie). Herschrijf de formule $\neg((p \wedge q) \vee r)$ tot een formule met alleen maar negaties en conjuncties.

Opgave 36. Er is zelfs een taal te bedenken die het met een enkel connectief kan stellen. Een voorbeeld is het '*noch*-taal'. Een bewering van de vorm "φ noch ψ" is waar alleen dan als beide argumenten, φ en ψ, onwaar zijn. Laten we $\times$ voor het noch-connectief gebruiken. Laat zien hoe je formules uit $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ kan herschrijven tot logisch equivalente pure noch-formules.

Opgave 37. Is het connectief uit opgave 36 idempotent. Is het commutatief, dan wel associatief?

Opgave 38. (**) Laat $\mathbb{P} = \{p, q\}$. Geef zes verschillende puur implicatieve formules — formules bestaande uit propositionele variabelen en eventueel verder slechts implicaties — in $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ die onderling niet logisch equivalent zijn. Laat vervolgens zien dat er niet meer dan zes van zulke formules te geven zijn. De conclusie is vervolgens dat de implicatie in zijn eentje niet expressief volledig is.

[4] In 1869, Boole was er toen al niet meer, is er wel een eerste logische machine op basis van zijn algebra gebouwd door de Britse statisticus en econoom William Jevons. Het was een houten apparaat wat de geschiedenis ingegaan is onder de naam 'logische piano'.

Hoofdstuk 3

Geldigheid en semantische tableaus

Met behulp van de definities in het vorige hoofdstuk kunnen we de notie van geldig gevolg voor propositielogica eenvoudig definiëren. We kunnen de definitie 1.1 uit het eerste hoofdstuk (pagina 7) aanvullen met de definitie van valuaties — de propositielogische modellen — en de waarheidswaarden van propositielogische formules met betrekking tot die valuaties en krijgen zodoende een volwaardige definitie voor geldig gevolg voor de propositielogica.

Definitie 3.1. *Een $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-formule φ is een* geldig gevolg *van een verzameling premissen, $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-formules, Γ als voor elke $\mathbb{P}$-valuatie V geldt als $\overline{V}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Gamma$ dan ook $\overline{V}(\varphi) = 1$, met andere woorden, als elk Γ-model ook φ-model is. We schrijven in dit geval $\Gamma \models \varphi$.*[1]

Met behulp van de notatie van het vorige hoofdstuk kan deze definitie heel kort omschreven worden.

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow [\Gamma] \subseteq [\varphi] \tag{3.1}$$

In termen van redeneringen legt deze definitie vast dat we over een geldig gevolg spreken als we niet onder de conclusie uitkomen als we de premissen (aannames) accepteren als ware beweringen: “Wie Γ zegt moet φ zeggen”.

In het vorige hoofdstuk hebben we al gezien hoe we zo’n geldigheid kunnen verifiëren met waarheidstabellen. In dit hoofdstuk bespreken we een alternatieve methode die in veel gevallen sneller werkt. Deze methode lijkt op de eerdere methode die we hebben geïntroduceerd voor de syllogistiek van Aristoteles in het eerste hoofdstuk. We zoeken met behulp van een zogenaamd *tableau* structureel naar een tegenmodel voor een gegeven gevolgtrekking $\Gamma \Rightarrow \varphi$, dat is, een Γ-model dat φ *niet* vervult. Als de regels van de tableau-methode correct gebruikt worden blijkt deze zo sterk dat als er zo’n tegenmodel bestaat dat met de methode er ook één gevonden kan worden.[2] Deze sterke eigenschap betekent dat als de methode uitputtend gebruikt wordt op een gegeven gevolgtrekking $\Gamma \models \varphi$ en geen tegenmodel gevonden wordt deze gevolgtrekking wel geldig *moet* zijn. Uiteindelijk zullen we zelfs concluderen dat op deze manier elke geldige propositielogische gevolgtrekking achterhaald kan worden (volledigheid).

De tableau-methode is van Nederlandse makelij. Deze werd ontworpen door de Amsterdamse wetenschapsfilosoof en wiskundige Evert Beth (1909–1964) in de vijftiger jaren van de vorige eeuw. De methode is volledig semantisch geïnspireerd omdat het tegenmodellen detecteert en dus de betekenis van de proposities in kwestie op een directe manier betrekt. De uiteindelijke formele spelregels van het gehele systeem dat we hieronder zullen bespreken zijn evenwel helemaal syntactisch gedefinieerd

[1] Merk op dat we hier ook oneindige premissenverzamelingen accepteren.

[2] In het geval de propositielogica kan men met de tableau-methode zelfs *alle* tegenmodellen vinden.

en een machine kan dan ook gemakkelijk de tableau-methode uitvoeren ‘zonder enig begrip’ van de symbolen. De methode is daarmee een volwaardig *deductiesysteem* en wordt dan ook veel gebruikt bij de implementatie van zogenaamde automatische bewijzers (redenerende machines).

3.1 Semantische tableaus

We beginnen met een informele behandeling van een eerste voorbeeld. De volgende redenering is geldig.

$$p \wedge (q \vee r) \models (p \wedge q) \vee r \tag{3.2}$$

De geldigheid van de gevolgtrekking hierboven kan natuurlijk geverifieerd worden met twee waarheidstabellllen. We pakken het hier anders aan. We stellen ons teweer tegen de gestelde geldigheid en gaan proberen een tegenmodel te vinden door de formules langzaam uiteen te rafelen en geven deze speurtocht pas op als we op letterlijke tegenspraken stuiten.
In zo’n verondersteld tegenmodel V moeten de aannames waar zijn en de conclusie onwaar:

$$\overline{V}(p \wedge (q \vee r)) = 1 \text{ en } \overline{V}((p \wedge q) \vee r) = 0 \tag{3.3}$$

In een tableau noteren we dat met behulp van een zogenaamde *sequent*:

$$p \wedge (q \vee r) \circ (p \wedge q) \vee r \tag{3.4}$$

Wat links van het scheidingsteken $\circ$ staat moet *waar* gemaakt worden en wat rechts staat *onwaar*, zoals we al in (3.3) letterlijk hadden gesteld. We kunnen vervolgens de sequent vereenvoudigen op basis van de betekenis van de connectieven. Aan de linkerkant, de ’ware’ kant, staat een conjunctie, en een conjunctie is waar als beide conjuncten waar zijn. De sequent vereenvoudigen we nu tot:

$$p, q \vee r \circ (p \wedge q) \vee r \tag{3.5}$$

We hebben hierboven de zogenaamde *’conjuctie-links-regel’* gehanteerd, die we ook kort benoemen met $\wedge$-L. De sequent in (3.5) vertelt dat we op zoek zijn naar een valuatie V met $\overline{V}(p) = \overline{V}(q \vee r) = 1$ en $\overline{V}((p \wedge q) \vee r) = 0$.
Aan de rechterkant, de ’onware’ kant, staat een disjunctie. Een disjunctie is onwaar als beide disjuncten onwaar zijn. Dit geeft nu de volgende vereenvoudiging van de sequent hierboven.

$$p, q \vee r \circ p \wedge q, r \tag{3.6}$$

De *’disjunctie-rechts-regel’*, $\vee$-R, lijkt dus erg op $\wedge$-L van hierboven. Het connectief kan gewoon weggelaten worden en de formule tot zijn twee directe subformules gereduceerd worden. Een eventueel tegenmodel moet dus beide zinnen aan de linkerkant vervullen en de twee zinnen aan de rechterkant falsifiëren. Er is echter nog geen formele reden waarom we hier zouden opgeven.
Aan de rechterkant hebben we nog een conjunctie staan $p \wedge q$. Deze is onwaar als tenminste één van de conjuncten onwaar is. Een eventueel tegenmodel moet dus één van de volgende sequenten ondersteunen:

$$p, q \vee r \circ p, r \text{ of } p, q \vee r \circ q, r \tag{3.7}$$

De eerste mogelijkheid valt nu af. Er is tenslotte geen model dat p waar (de linkerkant) en tegelijkertijd onwaar maakt (de rechterkant). We houden dus alleen de tweede mogelijkheid over. Hierin staat nog een disjunctie aan de rechterkant. Dit leidt weer tot twee mogelijkheden.

$$p, q \circ q, r \text{ of } p, r \circ q, r \tag{3.8}$$

Beide sequenten kunnen niet door een valuatie ondersteund worden. De eerste vraagt om waarheid en onwaarheid van de atomaire propositie q, en de tweede stelt deze onmogelijke eis voor de atomaire propositie r. We mogen uiteindelijk concluderen dat er *geen* tegenmodel kan bestaan, en dus moet de originele gevolgtrekking inderdaad geldig zijn.
Hieronder staat de redenering volledig uitgeschreven in wat we een *tableau* noemen.

$$\begin{array}{c} p\wedge(q\vee r)\circ(p\wedge q)\vee r \\ | \\ p,q\vee r\circ(p\wedge q)\vee r \\ | \\ p,q\vee r\circ p\wedge q,r \\ \begin{array}{cc} \underline{p,q\vee r\circ p,r} & p,q\vee r\circ q,r \\ & \begin{array}{cc} \underline{p,q\circ q,r} & \underline{p,r\circ q,r} \end{array} \end{array} \end{array} \tag{3.9}$$

Elk pad wat we van boven naar beneden volgen leidt tot een onmogelijke situatie. Zo'n pad heet een *tak* in het tableau en zo'n tak *sluit* indien aan beide kanten van het scheidingsteken een gelijke propositie voorkomt. We geven de sluiting aan met een onderstreping zoals in het tableau hierboven. Indien alle takken sluiten is de originele gevolgtrekking, als terug te vinden in de top-sequent, geldig. Tableaus worden ook semantische tableaus genoemd omdat de rekenstappen direct relateren aan de betekenis van de onderhavige formules. We zijn tenslotte op zoek naar een tegenmodel. Dit laat niet onverlet dat de methode een puur symbolische rekenmethode (deductiesysteem) is. Een 'domme' maar 'gehoorzame' machine die de betekenis van de connectieven niet kent moet evengoed het rekenstramien als hierboven uiteengezet kunnen uitvoeren. In het geval van een simpele gevolgtrekking als $p\vee q \Rightarrow q\vee p$ kunnen we de geldigheid met een enkele oogopslag concluderen. Gebruiken we de tableau-methode, dan imiteren we als het ware de eerder genoemde 'brave' machine en voeren we toch de volgende reductie-stappen uit om de gevolgtrekking hard te maken:

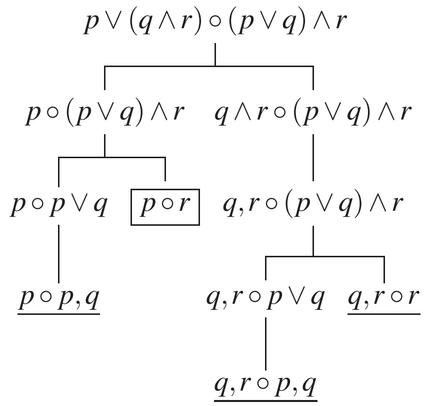
$$\begin{array}{c} p\vee q\circ q\vee p \\ | \\ p\vee q\circ q,p \\ \begin{array}{cc} \underline{p\circ q,p} & \underline{q\circ q,p} \end{array} \end{array} \tag{3.10}$$

Het aflezen van tegenmodellen

In het vorige hoofdstuk in (2.16) toonde we al de volgende ongeldigheid aan.

$$p\vee(q\wedge r)\not\models(p\vee q)\wedge r \tag{3.11}$$

We vonden een tegenmodel V met $V(p)=V(q)=1$ en $V(r)=0$. Als we de waarheidstabellen erbij pakken (2.10) zien we dat ook de valuatie die van V alleen in de waardetoekenning van q verschilt een tegenmodel is. Als we de tableau-methode gebruiken krijgen we ook precies deze twee tegenmodellen als we totaan de propositionele variabelen doorrekenen.



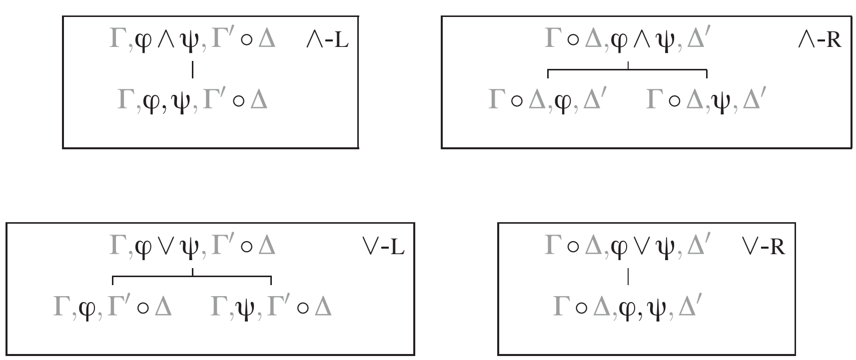
(3.12)

Eén tak blijft *open*. In dit tableau is deze speciaal omrand. Deze tak heeft een slot-sequent die geen tegenspraak oplevert. Het vertelt ons dat een valuatie V met $V(p) = 1$ en $V(r) = 0$ een tegenmodel moet zijn.

Dit zijn precies de twee tegenmodellen die we ook al met behulp van de waarheidstabellen hadden gevonden. In het geval van propositielogische tableaus kunnen we steeds *alle* tegenmodellen vinden als we het tableau maar helemaal doorrekenen. In de praktijk stoppen we meestal zodra er één open tak is gedetecteerd. Een enkele open tak is tenslotte voldoende om aan te tonen dat de originele gevolgtrekking ongeldig is.

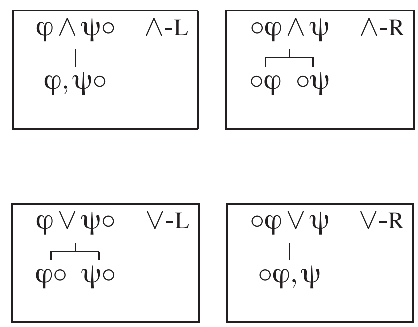
Formele regels voor de Boolese connectieven

Hieronder zijn de algemene deductie-regels voor conjunctie en disjunctie gegeven. Elk connectief heeft twee regels: een linker- en een rechterregel.



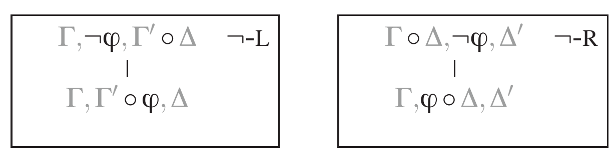
(3.13)

Dat ziet er allemaal flink cryptisch uit. De griekse hoofdletters Γ (gamma) en Δ (delta) staan voor willekeurige rijtjes formules die in zo'n sequent kunnen verschijnen, en onveranderd weer correct geplaatst moeten worden in de nieuwe sequenten. Om te benadrukken waar het in deze regels toch voornamelijk om gaat zijn deze 'omgevingsvariabelen' grijs gedrukt. Deze rijtjes mogen overigens natuurlijk leeg zijn, zoals in de voorbeelden hierboven veelvuldig het geval was. In een formeel deductiesysteem moeten de regels streng gedefinieerd worden om de uitvoerder niet in het ongewisse te laten als een te reduceren formule omgeven wordt door meerdere formules. Om de regels te onthouden volstaan evenwel de volgende vereenvoudigingen zonder de volledige sequenten te benoemen.



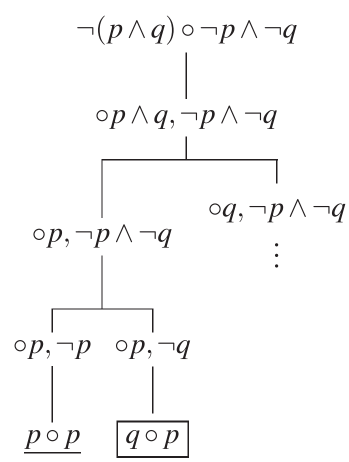
(3.14)

Het volgende connectief is de negatie. Hiervoor zijn de regels erg simpel. In het geval van een negatie moet de formule die achter de negatie staat verschoven worden naar de andere kant. Ze zijn simpel te begrijpen, want een negatie draait de waarheidswaarde van een formule om.



(3.15)

Hieronder een simpel voorbeeld met negaties.



(3.16)

We hebben hier niet het hele tableau doorgerekend. Tenslotte hebben we een open tak gevonden en we mogen dus concluderen dat $\neg(p \wedge q) \not\models \neg p \wedge \neg q$. Het gevonden tegenmodel is een valuatie V met $V(p) = 0$ en $V(q) = 1$. Het is niet moeilijk om te verifiëren dat inderdaad $\overline{V}(\neg(p \wedge q)) = 1$ en $\overline{V}(\neg p \wedge \neg q) = 0$. Als we verder doorgerekend hadden hadden we ook het tweede tegenmodel gevonden ($p \mapsto 1, q \mapsto 0$). Draaien we de redenering om dan blijkt dit wel een geldige redenering op