

6. Electromagnétisme des milieux

6.1. Introduction

Jusqu'à présent, les charges électriques étaient libres de se déplacer. Il s'agissait par exemple de charges isolées dans le vide, d'électrons et d'ions dans les plasmas ou des électrons de conduction dans les métaux. Pour étudier ce type de milieu, les outils adéquats étaient bien la densité de charge électrique et la densité de courant. Nous avons toutefois déjà dû introduire quelques nuances en distinguant les densités de charges et de courants associées aux électrons et les densités de charges et de courants associées aux ions. Même en les détaillant de la sorte, ces outils ne sont pas adaptés à l'étude générale des milieux.

Ce n'est pas la situation générale, dans les atomes, les molécules ou la matière, les charges sont liées les unes aux autres. Les constituants de la matière courante sont individuellement neutres, tout en étant composés de particules chargées. Les propriétés électriques d'une molécule telle que l'eau sont correctement décrites non pas par une charge électrique ou la position de chacune des charges qui la composent mais par un moment dipolaire électrique. De même les propriétés magnétiques d'un atome ou d'une molécule sont décrites par un moment dipolaire magnétique.

De la même manière que nous avons été conduit à introduire ces outils au niveau microscopique, il nous faut développer le même type d'outil à l'échelle macroscopique.

6.2. Moment dipolaire électrique : du microscopique au macroscopique.

6.2.1. Moment dipolaire électrique, polarisabilité

Rappels

Considérons un ensemble de charges. Placée dans un champ électrique \vec{E}_0 cette distribution de charges subit une force \vec{F} :

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_0(\vec{r}_i). \quad (6.1)$$

Dans le même temps, cette distribution de charge crée au point \vec{R} le champ électrique suivant :

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R} - \vec{r}_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|^3} \quad (6.2)$$

On peut s'intéresser à ce que deviennent ces deux quantités lorsque ces charges sont situées dans un petit volume centré autour du point \vec{r}_0 .

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \delta\vec{r}_i \quad (6.3)$$

(petit signifie ici petit devant la distance d'observation pour le premier cas et petit devant la distance typique de variation du champ électrique dans le second). Il est alors possible de réaliser un développement limité de ces deux expressions.

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \sum_i q_i \left(\delta\vec{r}_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}_0 \Big|_{\vec{r}_0} + \dots \quad (6.4)$$

$$= Q \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}_0 \Big|_{\vec{r}_0} + \dots \quad (6.5)$$

où l'on retrouve la charge totale Q et le moment dipolaire électrique \vec{p}

$$Q = \sum_i q_i \quad (6.6)$$

$$\vec{p} = \sum_i q_i \delta\vec{r}_i. \quad (6.7)$$

On remarquera que quand la charge totale est nulle, le moment dipolaire électrique ne dépend pas de l'origine choisie. On remarquera aussi que les deux termes ne sont que les premiers termes d'un développement limité que l'on peut poursuivre aux ordres suivants. Le développement effectué est nommé développement multipolaire, et au delà du dipôle, on trouve le quadrupole, l'octupole etc ...

Ces mêmes coefficients (charge, moment dipolaire, ...) interviennent dans l'expression du champ à grande distance d'une distribution de charges :

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n}}{|\vec{R} - \vec{r}_0|^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{p}}{|\vec{R} - \vec{r}_0|^3} + \dots \quad (6.8)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{R} - \vec{r}_0}{|\vec{R} - \vec{r}_0|} \quad (6.9)$$

Si les charges sont en mouvement, on peut effectuer la même discussion à partir du champ magnétique et attribuer à la distribution des moments multipôles magnétiques et en particulier le moment dipolaire magnétique \vec{m}

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \quad (6.10)$$

Pour la suite, nous ne serons concernés que par la charge Q et les deux moments dipôles \vec{p} et \vec{m} .

Deux points sont essentiels :

- Une distribution de charges peut être représentée comme la superposition d'une charge ponctuelle, d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique (et éventuellement de moments d'ordre supérieur)
- Chacune de ces quantités peut être représentée à l'aide d'un très petit nombre de charges ou de courants.

La charge électrique Q est représentée par une charge ponctuelle Q située au point \vec{r}_0

Le moment dipolaire électrique \vec{p} est représenté par une charge positive q située au point $\vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}$ et une charge négative opposée $-q$ située au point $\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{a}$ avec $\vec{p} = q\vec{a}$ (ou éventuellement la charge positive en $\vec{r}_0 + \vec{a}$ et la charge négative en \vec{r}_0)

Le moment dipolaire magnétique \vec{m} par une boucle de courant.

Toutes ces considérations restent valables lorsque l'on s'intéresse à des grandeurs qui dépendent du temps.

Notion de polarisabilité

Certaines molécules présentent spontanément un moment dipolaire électrique différent de zéro. Ce sont les molécules polaires telles la molécule d'eau. Les atomes ainsi que d'autres molécules présentent pas spontanément de moment dipolaire électrique. Toutefois, lorsque ces particules sont placées dans un champ électrique extérieur, celui-ci exerce une force sur les charges positives et une force de sens opposé sur les charges négatives, de sorte que les barycentres des charges positives et des charges négatives ne sont plus superposés. L'atome acquiert ainsi un moment dipolaire électrique en général d'autant plus important que le champ électrique est intense.

$$\vec{p} = \vec{p}(\vec{E}) \quad (6.11)$$

En toute généralité, cette dépendance n'est pas linéaire; toutefois, pour les champs faibles, on peut effectuer un développement en puissance de \vec{E} et au premier ordre le terme linéaire s'écrit

$$\vec{p} = \alpha_0 \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (6.12)$$

α est appelé polarisabilité électrique de la molécule ou de l'atome. On remarquera qu'en toute généralité, le moment dipolaire n'a aucune raison d'être aligné sur le champ électrique et que l'on écrira une relation matricielle

$$\tilde{\mathbf{p}} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} \quad (6.13)$$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

La polarisabilité α a la dimension d'un volume.

Tout ce raisonnement reste identique lorsque l'on se trouve dans un régime dépendant du temps. En régime sinusoïdal forcé on retrouve les mêmes relations entre les amplitudes complexes :

$$\underline{\vec{p}} e^{-i\omega t} = \alpha[\omega] \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} e^{-i\omega t}. \quad (6.15)$$

Dans ce type de relation, analogue à celle que l'on avait obtenu pour la conductivité électrique, la quantité $\alpha[\omega]$ n'est pas nécessairement réelle.

La polarisabilité statique α_0 ainsi que la polarisabilité dynamique $\alpha[\omega]$ sont des quantités physiques que l'on peut mesurer. Comme dans les conducteurs électriques, cette grandeur suffit à caractériser les interactions électromagnétiques de l'atome ou de la molécule. Dans une situation physique donnée, il suffit d'aller regarder la valeur mesurée dans les tables. Mais comme pour les conducteurs, un modèle microscopique est toujours instructif. Nous attendons de lui :

- Une image physique des phénomènes permettant de développer son intuition des phénomènes.
- La compréhension des comportements observés, par exemple la dépendance en fréquence de la susceptibilité
- La possibilité de donner des expressions analytiques qui soient plus que de simples ajustements ad-hoc des valeurs mesurées expérimentalement.

Le modèle que nous allons utiliser le plus souvent est appelé modèle de Lorentz ou encore modèle de l'électron élastiquement lié.

6.2.2. Modèles d'atomes

Notre objectif ici n'est pas de faire de la physique atomique et une théorie de la structure atomique. Il s'agit de trouver un modèle phénoménologique qui rende compte le plus précisément possible et surtout le plus efficacement possible des toutes les propriétés physiques que nous serons amenés à rencontrer. Un fois ce modèle décrit, nous ferons le lien avec ce que l'on comprend aujourd'hui des atomes et des molécules.

L'électron élastiquement lié.

Dans le domaine statique, on cherche à rendre compte de la proportionalité du dipôle en fonction du champ électrique. Sachant que la force exercée par un champ sur une charge est proportionnelle au champ, on peut obtenir un déplacement proportionnel au champ si l'on ajoute une force de rappel élastique. On considère donc comme modèle une charge q et une charge $-q$. On supposera la masse de la charge $-q$ beaucoup plus importante que celle de la charge q de sorte que son mouvement est négligeable. La charge q est située au point \vec{r} tandis que la charge $-q$ négative reste à l'origine. La force exercée par la charge négative sur la charge positive est

$$\vec{F}_r = -k\vec{r} \quad (6.16)$$

pour l'instant k est un coefficient de raideur introduit "à la main". On ajoutera de plus une force de frottement \vec{F}_f visqueux

$$\vec{F}_f = -\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (6.17)$$

cette force est introduite elle aussi de manière phénoménologique. Elle vient rendre compte des pertes d'énergie de l'atome. Il s'agit en premier lieu de la dissipation par

rayonnement. Il s'agit aussi d'autres mécanismes telles les collisions dans un gaz ou les interactions avec les vibrations du réseau cristallin dans un solide.

Dans un champ électrique, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E} - k \vec{r} - \Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (6.18)$$

On en déduit dans le régime statique

$$\vec{r} = \frac{q}{k} \vec{E} \quad (6.19)$$

soit un moment dipolaire électrique \vec{p}

$$\vec{p} = \frac{q^2}{k} \vec{E} = \varepsilon_0 \alpha_0 \vec{E} \quad (6.20)$$

on en déduit l'expression du coefficient de raideur en fonction de la polarisabilité statique α_0 et de la charge de la particule

$$k = \frac{q^2}{\varepsilon_0 \alpha_0}. \quad (6.21)$$

Que prévoit en plus ce modèle ? On se retrouve avec un oscillateur harmonique et donc d'une résonance à une pulsation propre.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{m} \vec{r} + \frac{q}{m} \vec{E} \quad (6.22)$$

soit une équation d'évolution pour le dipôle

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \frac{k}{m} \vec{p} = \frac{q^2}{m} \vec{E} \quad (6.23)$$

l'évolution libre se fait avec une pulsation propre ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.24)$$

On sait que les vrais atomes présentent des resonances ce résultat n'est donc finalement pas totalement surprenant.

On obtient ici une relation entre la raideur et la masse de la particule : Là encore si l'on suppose que la charge négative est un électron, on obtient une expression de la constante de raideur en fonction de la pulsation de resonance

$$k = m \omega_0^2. \quad (6.25)$$

On peut aussi calculer la dépendance en fréquence de la polarisabilité

$$\alpha[\omega] = \alpha_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \alpha_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.26)$$

Cela donne dans la limite haute fréquence

$$\alpha[\omega] \sim \frac{\alpha_0 \omega_0^2}{\omega^2} = \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega^2} \quad (6.27)$$

C'est à dire la même valeur que pour une charge libre.

Ce modèle donne donc deux relations entre les paramètres du modèle microscopiques (charge de la particule q , masse de la particule m et raideur de la liaison k) et les grandeurs physiques de notre atome (la polarisabilité α_0 et la pulsation de résonance ω_0)

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (6.28)$$

$$\frac{k}{q^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \alpha_0}. \quad (6.29)$$

Tout cela est fort sympathique mais quel est le lien avec la réalité et quel sens peut on donner à cette liaison élastique entre deux charges électriques ?

Le modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

Pour se donner une image plus concrète, commençons à revenir sur un modèle d'atome proposé par le physicien J.J. Thomson. Ce modèle a été proposé alors que l'on venait de découvrir l'électron, c'est à dire l'existence d'une charge ponctuelle. A l'époque, on ne connaissait pas encore le noyau atomique. Dans ce modèle, considère que la charge positive est répartie uniformément dans une sphère de rayon R_0 et que les électrons sont des particules ponctuelles tels des grains de raisin dans du pudding.

L'application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon r permet de déterminer le champ électrique à l'intérieur de la distribution de charge positive :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} e \left(\frac{r}{R_0} \right)^3 \quad (6.30)$$

soit

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R_0^3} \quad (6.31)$$

il exerce donc sur l'électron une force de rappel

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3} \vec{r}. \quad (6.32)$$

Il est donc tout à fait possible de concevoir une force de rappel élastique entre une distribution de charge positive et une distribution de charge négative, il suffit pour cela que les distributions ne soient pas ponctuelles. Dans ce modèle, la taille de l'atome est reliée à la polarisabilité statique et à la pulsation de resonance par les relations :

$$\alpha_0 = 4\pi R_0^3 \quad (6.33)$$

$$\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R_0^3} \quad (6.34)$$

Petite remarque sur la taille R_0 de la distribution de charges positives. L'électron peut parcourir des cercles à l'intérieur de la sphère positivement chargée, ces orbites ont toujours la même pulsation ω_0 c'est en particulier le cas lorsque l'électron parcourt des cercles de rayon R_0 . On remarque que dans ce cas, le champ auquel il est soumis est le même que celui qu'il verrait si toute la charge était au centre. Autrement dit si l'on prend pour pulsation une pulsation effectivement mesurée pour un atome, la taille que l'on trouve pour l'atome avec ce modèle est tout à fait comparable à la taille réelle de l'atome. Il en est de même si l'on considère la polarisabilité. Autrement dit, même si le modèle de Thomson est faux, il est étonnamment efficace.

En ce qui nous concerne, avant de le jeter nous retiendrons une leçon de ce modèle : il est possible de concevoir une distribution de charge où les forces électrostatiques produisent une force de rappel élastique.

L'atome d'hydrogène quantique

La mécanique quantique permet de comprendre la structure et le comportement de l'atome d'hydrogène. Celui-ci est constitué d'un électron et d'un proton tous deux ponctuels. Dans un état stationnaire, ce système est décrit par une fonction d'onde. L'électron est délocalisé dans un nuage autour du noyau. On peut alors calculer la polarisabilité de cet atome lorsqu'il se trouve dans son état fondamental

$$\alpha_0 = 4\pi \frac{9}{2} a_0^3 \quad (6.35)$$

où a_0 est le rayon de Bohr

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \quad (6.36)$$

lorsque l'atome se trouve dans son niveau fondamental, il présente des résonances pour les pulsations ω_n suivantes :

niveaux d'énergie

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \quad (6.37)$$

les pulsations de résonance sont

$$\omega_n = \frac{1}{\hbar} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \quad (6.38)$$

$$\omega_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{a_0^2} \quad (6.39)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{a_0^3} \quad (6.40)$$

Soit en résumé une polarisabilité statique et des résonances

$$\alpha_0 = \frac{9}{2} \cdot 4\pi a_0^3 \quad (6.41)$$

$$\omega_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{a_0^3} \quad (6.42)$$

On peut aussi calculer la dépendance en fréquence de la polarisabilité on trouve

$$\alpha[\omega] = \alpha_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \alpha_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.43)$$

$$\alpha[\omega] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (6.44)$$

tout se passe comme si l'atome était représenté par une superposition linéaire d'oscillateurs. Les coefficients de pondération f_n sont appelés forces d'oscillateur. La limite haute fréquence donne

$$\alpha[\omega] = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad (6.45)$$

on en déduit que la somme des forces d'oscillateurs est égale à 1 ou plus généralement au nombre d'électrons.

6.3. Milieux diélectriques

6.3.1. La densité de polarisation

Nous allons procéder avec les dipôles électriques comme nous l'avons fait avec les charges électriques lorsque certaines hypothèses sont vérifiées : lorsque les charges sont nombreuses, réparties de manière homogène et que l'on s'intéresse à des phénomènes dont l'échelle de longueur est bien plus grande que la distance entre les charges. On décrit alors le milieu avec des grandeurs continues : densité volumique de charges et densité de courant.

$$\rho = \frac{1}{V} \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \quad (6.46)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{V} \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \vec{v}_i. \quad (6.47)$$

Considérons une collection d'atomes neutres ou de molécules β composé de charges $q_{\beta,i}$ situées aux points $\vec{r}_{\beta,i}$. Chaque atome ou molécule est neutre possède un dipôle électrique :

$$Q_\beta = \sum_i q_{\beta,i} = 0 \quad (6.48)$$

$$\vec{p}_\beta = \sum_i q_{\beta,i} \vec{r}_{\beta,i} \quad (6.49)$$

On peut alors définir une densité volumique de moment dipolaire électrique \vec{P} aussi appelé vecteur polarisation

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \vec{p}_\beta = \frac{1}{V} \sum_{\beta, i \in \mathcal{V}} q_{\beta,i} \vec{r}_{\beta,i}. \quad (6.50)$$

Lorsque les charges composant ces dipôles sont en mouvement elles créent une densité volumique de courant

$$\vec{j}_P = \frac{1}{V} \sum_{\beta, i \in \mathcal{V}} q_{\beta, i} \frac{d\vec{r}_{\beta, i}}{dt} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (6.51)$$

Ce courant est appelé courant de polarisation. Si ce courant n'est pas uniforme, les charges peuvent s'accumuler et créer une densité volumique de charge ρ_P . Ecrivons la relation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_P = 0. \quad (6.52)$$

soit

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \text{div } \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0. \quad (6.53)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_P + \text{div } \vec{P}) = 0. \quad (6.54)$$

On en déduit la relation entre la densité volumique de dipôles et la densité volumique de charges associée

$$\rho_P = -\text{div } \vec{P} \quad (6.55)$$

6.3.2. Milieux dielectriques linéaires

Lorsque l'on place un atome ou une molécule dans un champ électrique, il se polarise sous son effet. Dans le régime linéaire, le dipôle créé est proportionnel au champ appliqué. Ce type de relation microscopique se retrouve au niveau macroscopique. De manière générale

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) \quad (6.56)$$

et dans le régime linéaire (on considère tout de suite le régime monochromatique et l'amplitude complexe)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi[\omega] \vec{E} \quad (6.57)$$

le coefficient de proportionnalité $\chi[\omega]$ est appelé susceptibilité électrique du milieu.

Lorsque le milieu est composé d'atomes ou de molécules de polarisabilité $\alpha[\omega]$ on peut relier la polarisabilité microscopique à la susceptibilité macroscopique si le milieu est dilué. (L'hypothèse de milieu dilué vise à assurer que le champ vu par l'atome est bien le champ extérieur appliqué. Si le milieu est dense, le champ vu par chaque atome est la somme du champ extérieur et du champ créé par les autres dipôles voisins appelé champ local, la relation microscopique macroscopique est alors moins directe). Si le milieu est dilué :

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \vec{p}_\beta = \frac{1}{V} \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \varepsilon_0 \alpha[\omega] \vec{E} = \varepsilon_0 N \alpha[\omega] \vec{E} \quad (6.58)$$

où N est la densité volumique d'atomes. La susceptibilité est donc

$$\chi[\omega] = N \alpha[\omega] \quad (6.59)$$

6.3.3. Milieux magnétiques

On peut traiter de la même manière les milieux magnétiques et introduire un vecteur magnétisation \vec{M} qui correspond à une densité volumique de moments magnétiques.

$$\vec{j}_M = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M} \quad (6.60)$$

6.4. Equations de Maxwell dans les milieux

6.4.1. Le vecteur déplacement électrique

Considérons un milieu réel. Certaines charges sont libres de se déplacer tandis que d'autres sont liées entre elles pour former atomes et molécules. On peut donc distinguer deux contributions dans la densité volumique de charges. Une contribution due aux charges libres (ρ_l et \vec{j}_l) que l'on traite comme usuellement et une contribution des charges liées (ρ_P et \vec{j}_P) que l'on va décrire en terme de distribution volumique de dipôles

$$\rho = \rho_l + \rho_P = \rho_l - \text{div } \vec{P} \quad (6.61)$$

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_P = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (6.62)$$

Reportons ces deux expressions dans les deux équations de Maxwell où interviennent la densité de charge et la densité de courant. Il s'agit de l'équation de Maxwell Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_l - \text{div } \vec{P}) \quad (6.63)$$

et de l'équation de Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.64)$$

Que l'on peut finalement réécrire

$$\text{div } (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l \quad (6.65)$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_l + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}). \quad (6.66)$$

On introduit donc le vecteur \vec{D} appelé déplacement électrique

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6.67)$$

on peut procéder de la même manière avec le champ électrique et introduire un vecteur induction magnétique \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (6.68)$$

6.4.2. Les équations de Maxwell

On peut donc réécrire les équations de Maxwell en faisant intervenir les vecteurs \vec{D} et \vec{H} .

L'équation de Maxwell Gauss

$$\text{div } \vec{D} = \rho_l \quad (6.69)$$

L'équation de Maxwell flux magnétique

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (6.70)$$

L'équation de Maxwell Faraday

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.71)$$

L'équation de Maxwell Ampère

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.72)$$

avec

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6.73)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \quad (6.74)$$

6.4.3. Milieux linéaires isotropes homogènes

Dans les milieux isotropes diélectriques homogènes, le déplacement électrique est proportionnel au champ électrique tandis que le champ magnétique et l'induction magnétique sont aussi proportionnels l'un à l'autre.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (6.75)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.76)$$

ces relations de proportionalités sont aussi vraies pour la polarisation et la magnétisation

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (6.77)$$

soit

$$\varepsilon_r = 1 + \chi = 1 + N\alpha \quad (6.78)$$

6.5. Propagation dans les milieux linéaires isotropes homogènes

Dans un milieu diélectrique sans charges libres (ni courants libres) les équations de Maxwell sont les suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (6.79)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6.80)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.81)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.82)$$

Pour les milieux diélectriques linéaires homogènes, les champs \vec{D} et \vec{H} sont proportionnels aux champs électriques et magnétiques avec un coefficient de proportionnalité indépendant de la position.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (6.83)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}. \quad (6.84)$$

Dans ces milieux, les équations de Maxwell ont exactement la même forme que dans le vide, à la seule différence que les permittivités et perméabilités n'ont pas les valeurs qu'elles ont dans le vide. Considérons d'emblée des solutions de type ondes planes progressives en notation complexe :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left(\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) \quad (6.85)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \Re \left(\vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) \quad (6.86)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 = 0 \quad (6.87)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 = 0 \quad (6.88)$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0 = -(-i\omega \vec{\mathcal{B}}_0) \quad (6.89)$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathcal{B}}_0 = \varepsilon\mu(-i\omega \vec{\mathcal{E}}_0). \quad (6.90)$$

Les conclusions sont similaires à celles que l'on obtient dans le vide :

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 = 0 \quad (6.91)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 = 0 \quad (6.92)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{\mathcal{E}}_0 \quad (6.93)$$

Les ondes électromagnétiques sont transverses, c'est à dire que le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux au vecteur d'onde et orthogonaux entre eux. La relation de dispersion est

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \quad (6.94)$$

Si la permittivité et la perméabilité sont des grandeurs réelles, on a une situation identique à celle que l'on a dans le vide : des ondes planes progressives qui se propagent à une célérité $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. On définit l'indice optique comme le rapport de la vitesse de la lumière et de la vitesse de propagation

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \quad (6.95)$$

Dans le cas général, la permittivité peut être complexe, le nombre d'onde est donc complexe :

$$k = k_r + ik_i \quad (6.96)$$

On choisira pour le nombre d'onde k la racine de partie réelle positive. Si l'on prend pour exemple un vecteur d'onde dirigé selon Oz

$$\vec{E} = \Re \left(\vec{E}_0 \exp i((k_r + ik_i)z - \omega t) \right) \quad (6.97)$$

$$= \vec{E}_0 e^{-k_i z} \cos(k_r z - \omega t + \varphi) \quad (6.98)$$

il s'agit d'une onde plane qui se propage à la célérité $v = \frac{\omega}{k_i}$ tout en s'atténuant (si k_r est positif) ou en s'amplifiant (si k_r est négatif).

6.6. Réflexion et transmission

6.6.1. Présentation

On aborde ici un aspect des milieux inhomogènes : que se passe-t-il lorsqu'une onde arrive à l'interface entre deux milieux ? On considérera ici une interface plane entre un premier milieu 1 situé dans le demi espace $z > 0$ et un second milieu 2 situé dans le demi-espace $z < 0$.

6.6.2. Relations de continuité

Pour analyser ce problème, il nous faut analyser ce que donnent les équations de Maxwell à l'interface des deux milieux. On obtient alors ce que l'on nomme relations de continuité. On notera de l'indice 1 les champs en $z = 0^+$ c'est à dire dans le milieu 1 juste au dessus de l'interface et de l'indice 2 les champs en $z = 0^-$. Ces relations sont :

$$\vec{D}_{N2} - \vec{D}_{N1} = \sigma \vec{n}_{12} \quad (6.99)$$

$$\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = 0 \quad (6.100)$$

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0 \quad (6.101)$$

$$\vec{H}_{T2} - \vec{H}_{T1} = \vec{j}_S \times \vec{n}_{12} \quad (6.102)$$

les indices N et T correspondent aux composantes du champ normales à la surface et tangentielles. σ et \vec{j}_S sont des densités surfaciques de charge et de courant \vec{n}_{12} est la normale à la surface dirigée du milieu 1 vers le milieu 2.

On suppose maintenant d'une part que chacun de ces milieux est homogène et isotrope et d'autre part qu'il n'y a aucune charge libre de surface ni courant libre de surface. Ces équations deviennent alors

$$\varepsilon_2 \vec{E}_{N2} - \varepsilon_1 \vec{E}_{N1} = 0 \quad (6.103)$$

$$\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = 0 \quad (6.104)$$

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0 \quad (6.105)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{T2} - \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{T1} = 0. \quad (6.106)$$

On considérera dans la suite que les perméabilités magnétiques sont identiques et donc que $\mu_1 = \mu_2$

6.6.3. Ondes réfléchies et transmises

On a au total trois ondes planes progressives : l'onde incidente (indice i), l'onde réfléchie (indice r) et l'onde transmise (indice t). Ces trois ondes correspondent à un champ électrique

$$\vec{\mathcal{E}}_\alpha = \vec{\mathcal{E}}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.107)$$

où α correspond à chacun des indices i , r et t . Pour chacune de ces ondes, le champ magnétique est

$$\vec{B}_\alpha = \vec{B}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.108)$$

$$= \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{\mathcal{E}}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{n}{c} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{\mathcal{E}}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (6.109)$$

Dans le milieu 1 ($z > 0$) le champ est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Dans le milieu 2 seule l'onde transmise est présente. Les nombres d'ondes (c'est à dire les modules des vecteurs d'ondes) sont reliés à la pulsation par

$$k_\alpha = n_\alpha \frac{\omega}{c} = n_\alpha k_0 \quad (6.110)$$

où k_0 est le nombre d'onde d'une onde de même pulsation dans le vide.

Prenons l'une des relations de continuité, par exemple : $\vec{E}_{T2} = \vec{E}_{T1}$. Si l'on exprime explicitement les champs en un point \vec{r}_0 de l'interface, cette relation devient :

$$\vec{\mathcal{E}}_{i0T} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} + \vec{\mathcal{E}}_{r0T} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} = \vec{\mathcal{E}}_{t0T} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} \quad (6.111)$$

Ou encore, si l'on explicite la position du point \vec{r}_0 , soit $\vec{r}_0 = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$

$$\vec{\mathcal{E}}_{i0T} e^{i(k_{ix}x + k_{iy}y - \omega t)} + \vec{\mathcal{E}}_{r0T} e^{i(k_{rx}x + k_{ry}y - \omega t)} = \vec{\mathcal{E}}_{t0T} e^{i(k_{tx}x + k_{ty}y - \omega t)} \quad (6.112)$$

pour que cette relation puisse-t-êtré vérifiée quelque soit les points x et y , les vecteurs d'ondes ce ces trois ondes selon x et y doivent être égaux :

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \quad (6.113)$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}. \quad (6.114)$$

Choisissons maintenant les axes de sorte que le plan d'incidence, c'est à dire le plan qui contient les trois vecteurs d'onde, est le pla xOz . Dans ce cas $k_{\alpha y} = 0$ Si l'on note θ_i , θ_r et θ_t les angles d'incidence, de reflexion et de transmission la composante du vecteur d'onde parallèle à l'interface est

$$k_{\alpha x} = k_{\alpha} \sin \theta_{\alpha} \quad (6.115)$$

Ecrivons l'égalité des composantes selon x des trois vecteurs d'onde :

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \quad (6.116)$$

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t \quad (6.117)$$

ce qui donne, si l'on relie les nombres d'onde au nombre d'onde dans le vide

$$n_1 k_0 \sin \theta_i = n_1 k_0 \sin \theta_r = n_2 k_0 \sin \theta_t \quad (6.118)$$

on retrouve ainsi les lois de Descartes pour la reflexion et la refraction

$$\theta_i = \theta_r \quad (6.119)$$

$$n_1 \sin \theta_r = n_2 \sin \theta_t. \quad (6.120)$$

Que vaut la composante du vecgteur d'onde transmis selon Oz :

$$k_t^2 = k_{tx}^2 + k_{tz}^2 \quad (6.121)$$

soit

$$k_{tz}^2 = k_t^2 - k_{tx}^2 = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) \quad (6.122)$$

Si $n_2 > n_1 \sin \theta_i$, k_{tz}^2 est positif et donc k_z est réel

Si $n_2 < n_1 \sin \theta_i$, k_{tz}^2 est négatif et donc k_z est imaginaire pur : il n'y a pas d'onde plane transmise. On a dans le milieu 2 une onde évanescente. On déduit de conditions énergétiques que la réfexionn est totale. Ce phénomène apparait lorsque $n_2 < n_1$ pour un angle supérieur à l'angle critique θ_c qui vérifie

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (6.123)$$

6.6.4. Formules de Fresnel

Cherchons maintenant à déterminer les coefficients de reflexion et de transmission. Ecrivons les relations de passage pour le champ tangent :

$$\vec{E}_{T2} = \vec{E}_{T1} \quad (6.124)$$

$$\vec{B}_{T2} = \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{T1} \quad (6.125)$$

Comme les phases des ondes sont égales en tout point de l'interface, il suffit d'écrire les égalités pour les amplitudes :

$$\vec{\mathcal{E}}_{i0T} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} + \vec{\mathcal{E}}_{r0T} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} = \vec{\mathcal{E}}_{t0T} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} \quad (6.126)$$

$$\mathcal{E}_{ix} + \mathcal{E}_{rx} = \mathcal{E}_{tx} \quad (6.127)$$

$$\mathcal{E}_{iy} + \mathcal{E}_{ry} = \mathcal{E}_{ty} \quad (6.128)$$

$$\mathcal{B}_{ix} + \mathcal{B}_{rx} = \mathcal{B}_{tx} \quad (6.129)$$

$$\mathcal{B}_{iy} + \mathcal{B}_{ry} = \mathcal{B}_{ty} \quad (6.130)$$

Onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence

Le champ électrique est selon $0y$. Le champ magnétique est dans le plan $x0z$ et les amplitudes sont

$$\mathcal{B}_{ix} = -\mathcal{B}_i \cos \theta_i \quad (6.131)$$

$$\mathcal{B}_{rx} = \mathcal{B}_r \cos \theta_r \quad (6.132)$$

$$\mathcal{B}_{tx} = -\mathcal{B}_t \cos \theta_t \quad (6.133)$$

Les relations de continuité sont donc

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_t \quad (6.134)$$

$$-\mathcal{B}_i \cos \theta_i + \mathcal{B}_r \cos \theta_r = -\mathcal{B}_t \cos \theta_t \quad (6.135)$$

Soit

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_t \quad (6.136)$$

$$n_1 \cos \theta_i (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r) = n_2 \mathcal{E}_t \cos \theta_t \quad (6.137)$$

On définit alors les coefficients de reflexion et de transmission par

$$r_{\perp} = \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \quad (6.138)$$

$$t_{\perp} = \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i}. \quad (6.139)$$

Ces coefficients vérifient les équations suivantes :

$$1 + r_{\perp} = t_{\perp} \quad (6.140)$$

$$n_1 \cos \theta_i (1 - r_{\perp}) = -n_2 t_{\perp} \cos \theta_t \quad (6.141)$$

On en déduit

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (6.142)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (6.143)$$

Onde incidente polarisée parallèlement au plan d'incidence

Les rôles des champs électrique et magnétique sont inversés. Attention les trièdres doivent rester direct et on cherche à ce que les notations restent cohérentes avec le cas précédent pour un angle d'incidence nul.

Le champ magnétique est selon 0_y . Le champ magnétique est dans le plan $x0z$ et les amplitudes sont

$$\mathcal{E}_{ix} = \mathcal{E}_i \cos \theta_i \quad (6.144)$$

$$\mathcal{E}_{rx} = \mathcal{E}_r \cos \theta_r \quad (6.145)$$

$$\mathcal{E}_{tx} = \mathcal{E}_t \cos \theta_t \quad (6.146)$$

Les relations de continuité sont donc

$$\mathcal{E}_i \cos \theta_i + \mathcal{E}_r \cos \theta_r = \mathcal{E}_t \cos \theta_t \quad (6.147)$$

$$-\mathcal{B}_i + \mathcal{B}_r = -\mathcal{B}_t \quad (6.148)$$

Soit

$$\cos \theta_i (\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r) = \mathcal{E}_t \cos \theta_t \quad (6.149)$$

$$n_1 (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r) = n_2 \mathcal{E}_t \quad (6.150)$$

On définit alors les coefficients de réflexion et de transmission par

$$r_{\parallel} = \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \quad (6.151)$$

$$t_{\parallel} = \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i}. \quad (6.152)$$

Ces coefficients vérifient les équations suivantes :

$$\cos \theta_i (1 + r_{\parallel}) = \cos \theta_t t_{\parallel} \quad (6.153)$$

$$n_1 (1 - r_{\parallel}) = n_2 t_{\parallel} \quad (6.154)$$

On en déduit

$$r_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (6.155)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (6.156)$$

6.6.5. Discussion physique

Incidence normale

Dans le cas de l'incidence normale il n'y a pas de distinction selon la polarisation

$$r_{\perp} = r_{\parallel} = r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (6.157)$$

$$t_{\perp} = t_{\parallel} = t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (6.158)$$

La polarisation reste la même à la réflexion et à la transmission.

Lorsque l'indice du milieu sur lequel on se réfléchit est plus grand que l'indice du milieu dans lequel se propage l'onde incidente, le coefficient de réflexion est négatif, c'est à dire qu'il y a un déphasage de π . Ce déphasage est nul si le milieu sur lequel on se réfléchit est d'indice inférieur.

Pour une interface air verre le coefficient de réflexion est

$$r = \frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} = -0,2 \quad (6.159)$$

c'est un coefficient de réflexion en amplitude. Si l'on s'intéresse à la puissance, c'est à dire au vecteur de Poynting il faut prendre le carré soit

$$R = |r|^2 = 0,04 \quad (6.160)$$

4% de la puissance lumineuse est réfléchi. Si l'on s'intéresse à une vitre, c'est à dire deux interfaces, la puissance réfléchi est 8% de la puissance incidente.

Incidence oblique pour $n_2 > n_1$

Dans ce cas le vecteur d'onde selon z est toujours réel.

Les coefficients de réflexion des composantes de la polarisation du champ parallèle et perpendiculaires au plan d'incidence sont différents, il y a donc un changement de polarisation à la réflexion.

Le coefficient de réflexion tend vers 1 lorsque l'on se rapproche d'une incidence rasante.

Le coefficient de réflexion de la polarisation parallèle au plan d'incidence r_{\parallel} s'annule pour une certaine valeur de l'angle d'incidence appelé angle de Brewster. θ_{Bi}

$$n_2 \cos \theta_i = n_1 \cos \theta_t \quad (6.161)$$

on multiplie par $\sin \theta_t$

$$n_2 \sin \theta_t \cos \theta_i = n_1 \sin \theta_t \cos \theta_t \quad (6.162)$$

$$\sin \theta_i \cos \theta_i = \sin \theta_t \cos \theta_t \quad (6.163)$$

$$\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_t \quad (6.164)$$

Soit

$$2\theta_i = 2\theta_t \quad (6.165)$$

ou

$$\pi - 2\theta_i = 2\theta_t \quad (6.166)$$

soit

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad (6.167)$$

L'angle de Brewster est l'angle pour lequel l'onde réfléchie et l'onde transmise sont perpendiculaires.

$$n_2 \cos \theta_i = n_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_i \right) \quad (6.168)$$

ou encore

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (6.169)$$

Incidence oblique pour $n_1 > n_2$ et $\theta_i < \theta_l$

Dans ce cas le vecteur d'onde selon z est toujours réel. Les propriétés sont similaires au cas précédent :

Les coefficients de réflexion des composantes de la polarisation du champ parallèle et perpendiculaires au plan d'incidence sont différents, il y a donc un changement de polarisation à la réflexion.

Le coefficient de réflexion tend vers 1 lorsque l'on se rapproche de l'angle critique.

On a aussi un angle de Brewster

$$\tan \theta_B = \frac{n_1}{n_2}. \quad (6.170)$$

Incidence oblique pour $n_1 > n_2$ et $\theta_i > \theta_l$: réflexion totale

Dans ce cas le vecteur d'onde selon z est imaginaire. On peut utiliser les mêmes formules que précédemment en utilisant les égalités suivantes

$$k_{tz} = k_t \cos \theta_t \quad (6.171)$$

or

$$k_{tz}^2 = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) \quad (6.172)$$

cela donne

$$\cos^2 \theta_t = (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) \quad (6.173)$$

on a donc les mêmes formules avec $\cos \theta_t$ imaginaire. Le module du coefficient de réflexion est 1. La réflexion déphase l'onde.

