BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HAAG

La théorie du spiral et ses applications à la chronométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 60-89

http://www.numdam.org/item?id=BSMF 1930 58 60 0>

© Bulletin de la S. M. F., 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques http://www.numdam.org/

LA THÉORIE DU SPIRAL ET SES APPLICATIONS A LA CHRONOMÉTRIE:

PAR M. J. HAAG.

I. - Théorie générale.

1. Énoncé mathématique du problème. — Rapportons le spiral à deux axes rectangulaires liés à la montre et dont l'origine O est sur l'axe du balancier. L'origine des arcs étant le point A d'encastrement avec le piton, appelons s l'abscisse curviligne d'un point courant quelconque M, φ l'angle polaire de la tangente en ce point et x, y ses coordonnées. Le balancier étant écarté de l'angle θ de sa position d'équilibre, désignons par X, Y les composantes de la réaction d'encastrement exercée par la virole et par $\frac{E1}{L}\theta + N$ le moment résultant de cette réaction et du couple d'encastrement par rapport à O. Le couple N sera appelé couple complémentaire.

En affectant de l'indice zéro les quantités correspondant à l'état naturel ('), on sait que l'équation fondamentale de la déformation est

(1)
$$\frac{d(\varphi - \varphi_0)}{ds} = \frac{0}{L} + \frac{N - xY + yX}{EI}.$$

L'angle θ ayant une valeur donnée, il s'agit de déterminer les trois constantes X, Y, N et les trois fonctions de φ , x, y de s, de telle manière que l'équation (1) soit vérifiée indentiquement, ainsi que les suivantes :

$$(2) x = a + \int_0^s \cos\varphi \, ds, y = b + \int_0^s \sin\varphi \, ds,$$

où a et b désignent les coordonnées du point A. En outre, il existe des conditions aux limites.

^{.(1)} Nous supposons que cet etat naturel est réalisé pour $\theta = 0$, ce qui arrive toujours si le spiral a été bien posé.

D'abord, on doit avoir

$$\varphi - \varphi_0 = 0, \quad \text{pour } s = 0,$$

à cause de l'encastrement au piton.

L'encastrement à la virole exige ensuite que l'on ait, pour s = L,

$$\varphi - \varphi_0 = 0,$$

$$(5) \quad x = x_{\rm B} = x_{\rm 0B}\cos\theta - y_{\rm 0B}\sin\theta, \quad y = y_{\rm B} = x_{\rm 0B}\sin\theta - y_{\rm 0B}\cos\theta,$$

où x_{0B} , y_{0B} désignent les coordonnées du point d'encastrement B avec la virole, dans la position d'équilibre.

2. Calcul des réactions, connaissant la forme du spiral. — Supposons connue la forme exacte Γ du spiral et proposons-nous de calculer X, Y, N.

Nous avons d'abord, en intégrant (1) de 0 à s,

où ξ, η désignent les coordonnées du centre de gravité de l'arc s dans sa forme actuelle.

Pour s = 0, on obtient identiquement la condition (3). Pour s = L, il vient, en tenant compte de (4),

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\xi_1} \mathbf{Y} - \boldsymbol{\eta_1} \mathbf{X},$$

où ξ₁, η₁ désignent les coordonnées du centre de gravité G du spiral entier (1).

Les conditions (5) s'écrivent enfin

(8)
$$x_{\rm B} = a + \int_0^{\rm L} \cos\varphi \, ds, \qquad y_{\rm B} = b + \int_0^{\rm L} \sin\varphi \, ds.$$

Il s'agit de tirer X, Y, N du système (7), (8).

3. Considérons, dans la formule (6), X, Y, N comme des

⁽¹⁾ La formule (7) montre que l'on pourrait supprimer le couple complementaire à condition d'appliquer la réaction d'encastrement au point G et non au point B.

variables indépendantes et ξ , η comme des fonctions données et continues de s. Posons, pour simplifier l'écriture,

(9)
$$z = \phi_0 + \theta \frac{s}{L}, \qquad \epsilon = \frac{s}{EI} (N - \xi Y + \eta X).$$

Les équations (8) s'écrivent

$$x_{B}-a=\int_{0}^{L}\cos(z+\varepsilon)ds, \quad y_{B}-b=\int_{0}^{L}\sin(z+\varepsilon)ds.$$

Posons maintenant

(10)
$$u = x_{\rm B} - a - \int_0^{\rm L} \cos z \, ds, \quad v = y_{\rm B} - b - \int_0^{\rm L} \sin z \, ds.$$

Les équations ci-dessus deviennent

(11)
$$u = \int_0^L [\cos(z+\varepsilon) - \cos z] ds$$
, $v = \int_0^L [\sin(z+\varepsilon) - \sin z] ds$.

Je dis que les seconds membres sont des fonctions entières de X, Y, N.

On a, par exemple,

(12)
$$\cos(z - \epsilon) - \cos z = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\epsilon^h}{h!} \cos\left(z + h\frac{\pi}{2}\right).$$

La série qui est au second membre est convergente quels que soient z et ε . D'autre part, les variables X, Y, N ayant des valeurs complexes quelconques, la variable ε a un module qui est une fonction continue de s. Si s varie de o à L, ce module admet une certaine limite supérieure M. Donc, dans tout cet intervalle, la série (12) est majorée par la série convergente $\sum \frac{M^n}{h!}$. Il s'ensuit qu'elle est uniformément convergente et peut être intégrée terme à terme, par rapport à s, entre o et L. On obtient ainsi un développement de la première intégrale (11) suivant les puissances de X, Y, N et ce développement est convergent quelles que soient les valeurs complexes attribuées à ces variables. Il constitue donc bien une fonction entière, que nous appellerons F(X, Y, N). Le même raisonnement s'applique à la seconde intégrale, que nous appellerons G(X, Y, N).

Les équations (11) s'écrivent alors

(13)
$$F(X, Y, N) = u, \qquad G(X, Y, N) = c.$$

Considérons maintenant u et v comme des variables indépendantes.

Le système (7), (13) définit X, Y, N comme fonctions implicites de u, v, soit

(14)
$$\mathbf{X} = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{Y}} = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{N} = h(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Je dis que ces fonctions sont holomorphes au voisinage des valeurs définies par les formules (10), pourvu que les fonctions de s par lesquelles nous avons tout à l'heure remplacé ξ et η soient assez voisines des valeurs qu'elles ont effectivement sur la courbe Γ .

Pour le prouver, il suffit de faire voir que le jacobien du système est différent de zéro, quand on y remplace X, Y, N par les valeurs qu'ont effectivement ces réactions et les fonctions ξ , η par les valeurs qu'elles ont effectivement sur Γ .

On a, d'après (6),
$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = -\int_{-\mathbf{K}}^{\mathbf{L}} \sin \varphi \frac{s \eta}{\mathbf{E} \mathbf{I}} ds.$$

Mais, la valeur actuellement attribuée à φ est exactement égale à l'angle polaire de la tangente à Γ. On peut donc écrire

$$\int_0^L s \, \eta \sin \varphi \, ds = \int_A^B s \, \eta \, dy = [s \, \eta \, y]_A^B - \int_0^L y^2 \, ds = L(\eta_1 y_1 - g_1^2),$$

en appelant Lq_1^2 le moment d'inertie du spiral par rapport à Ox, calculé avec une densité linéaire égale à un.

On peut répéter un calcul analogue pour les autres dérivées partielles, en introduisant le moment d'inertie $L\rho_1^2$ par rapport à O_Y et le produit d'inertie Ln_1 . Finalement, le jacobien s'écrit, au facteur $\left(\frac{L}{EI}\right)^2$ près,

$$J = \begin{vmatrix} q_1^2 - y_1 \eta_1 & \xi_1 y_1 - n_1 & \eta_1 - y_1 \\ x_1 \eta_1 - n_1 & p_1^2 - x_1 \xi_1 & x_1 - \xi_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1^2 & -n_1 & \eta_1 \\ -n_1 & p_1^2 & -\xi_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 & 1 \end{vmatrix},$$

en utilisant des combinaisons de lignes évidentes.

Au facteur $\left(\frac{L}{El}\right)^3$ près, ce déterminant n'est autre que le discriminant de la forme quadratique

(15)
$$W_1 = \frac{L}{EI} (q_1^2 X^2 + p_1^2 Y^2 + N^2 - 2n_1 XY + 2\eta_1 NX - 2\xi_1 NY),$$

que j'ai introduite dans un précédent Mémoire (1). Cette forme quadratique s'écrit, d'autre part,

(16)
$$W_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L (N - xY + yX)^2 ds.$$

Elle ne peut s'annuler que si l'on a identiquement

$$\mathbf{N} - x\mathbf{Y} + y\mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Si le spiral n'est pas rectiligne, ceci n'est possible que pour X = Y = N = 0. On en conclut que W_1 est une forme quadratique définie positive. Donc, son discriminant n'est pas nul.

C. Q. F. D.

4. Continuité des fonctions f, g, h par rapport aux fonctions ξ , η . — Supposons qu'on fasse varier infiniment peu les fonctions ξ et η servant à définir ε . Il revient au même de dire qu'au lieu de les calculer sur la courbe Γ , on les calcule sur une courbe voisine Γ . Convenons, par exemple, que l'écart entre ces deux courbes est de l'ordre d'une certaine quantité constante α , jouant le rôle d'infiniment petit principal. Ceci veut dire que les coordonnées de deux points M et M', ayant même abscisse curviligne s sur Γ et Γ' , différent par des quantités de la forme $\alpha f(s)$, f(s) désignant une fonction finie dans l'intervalle (o, L).

Les coefficients des séries entières F(X, Y, N) et G(X, Y, N) subissent évidemment des variations de l'ordre de α . On en conclut que les coefficients des développements en série des trois fonctions f, g, h subissent aussi des variations de cet ordre.

5. Ordre de grandeur de X, Y, N. - Si l'on se reporte aux

⁽¹⁾ J: HAAG, Sur le calcul de certaines déformations élastiques, avec application au spiral de montre (Bulletin de la Soc. math. de France, t. 56, p. 249).

développements en série des fonctions F et G du n° 3, on constate qu'aucun d'eux ne possède de terme constant. Il en est de même de l'équation (7). On en conclut que les fonctions f, g, h, qui, rappelons-le, sont holomorphes en u et v, ne possèdent pas non plus de terme constant. Nous verrons, d'autre part, que u et v sont, dans la pratique, des quantités très petites. Convenons de les considérer comme des infiniment petits du premier ordre. Nous pouvons affirmer immédiatement que X, Y, N sont des infiniment petits d'ordre au moins égal à un.

Nous verrons, par ailleurs, que ξ_1 et η_1 sont du premier ordre. Dès lors, l'équation (7) nous montre que, si X et Y sont d'ordre p, N est d'ordre p+1. On en conclut que p=1, car si p dépassait cette valeur, u et v seraient, en vertu des équations (13), d'un ordre infinitésimal supérieur à un, contrairement à l'hypothèse.

Finalement, les composantes X, Y de la réaction d'encastrement sont du premier ordre, tandis que le couple complémentaire N est du second ordre.

6. Détermination de la forme du spiral et calcul des réactions par la méthode des approximations successives. — Imaginons que l'on connaisse une courbe Γ' très voisine de la forme exacte Γ du spiral et supposons que l'écart entre les deux courbes soit d'ordre k. Calculons X, Y, N par les formules (14), mais en évaluant les coefficients des fonctions f, g, h à partir de la courbe connue Γ' . Nous obtenons ainsi les valeurs approchées X', Y', N'.

Les erreurs commises sur les coefficients de f et de g sont d'ordre k, d'après ce qu'on a vu au n° 4. Comme u et v sont du premier ordre et que les développements de f et g commencent par des termes du premier degré, on voit que l'erreur commise sur X et sur Y est d'ordre k+1. La formule (7) nous montre ensuite que l'erreur commise sur N est d'ordre k+2.

Calculons maintenant l'angle $\varphi' = z + \varepsilon''$ par la formule

$$\epsilon'' = \frac{s}{k!} \left(N' - \xi' Y' + \eta' X' \right);$$

puis x'' et y'' par les formules

$$x''=a+\int_0^s\cos\varphi''ds, \quad y''=b+\int_0^s\sin\varphi''ds.$$

Nous obtenons une nouvelle courbe Γ'' , voisine de Γ .

D'après ce que nous venons de voir sur les erreurs dont sont entachés X', Y', N', nous pouvons conclure que l'erreur imputable à φ'' est d'ordre k+1. Il en est par suite de même des erreurs imputables à x'' et y''. Donc, l'écart entre Γ et Γ'' est d'ordre k+1. L'ordre d'approximation est augmenté d'une unité.

En répétant sur Γ'' les opérations faites sur Γ' , nous obtenons X'', Y'' avec l'approximation d'ordre k+2, N'' avec l'approximation d'ordre k+3 et Γ''' avec l'approximation d'ordre k+2. En continuant indéfiniment, on obtient une solution de plus en plus approchée et, à la limite, on aurait la solution exacte.

Nous pouvons donc considérer que le problème de la déformation du spiral et du calcul des réactions à la virole est théoriquement résolu, avec une approximation illimitée.

7. Première approximation. — Elle est obtenue en supposant que X, Y, N sont nuls, donc $\varphi = z$. On est ainsi conduit à la loi de désormation habituellement admise en Chronomètrie.

L'erreur commise sur φ est ε ; elle est du premier ordre, d'après le n° 5. La première approximation est donc une approximation du premier ordre.

8. Calcul de X, Y, N en deuxième approximation. — Pour le calcul de X', Y', N', nous pouvons réduire les fonctions F et G à leurs termes du premier degré, car nous commettons ainsi une erreur du second ordre, d'après ce que nous avons vu au n° 5 sur l'ordre de grandeur de X, Y, N. On peut donc écrire

$$F = -\int_0^1 \varepsilon'' \sin z \, ds, \qquad G = \int_0^1 \varepsilon'' \cos z \, ds.$$

On peut transformer F, par exemple, de la manière suivante :

$$F = -\int_{\Lambda}^{R} \varepsilon'' dv' = -\left[\varepsilon'' y'\right]_{\Lambda}^{R} + \int_{0}^{L} y' \frac{d\varepsilon''}{ds} ds = \int_{0}^{L} y' \frac{d\varepsilon''}{ds} ds,$$

puisque ε'' s'annule pour s = 0 et s = L, d'après (17) et (7). D'autre part,

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}''}{d\boldsymbol{s}} := \frac{1}{EI}(\mathbf{N}' - x'\mathbf{Y}' + \mathbf{y}'\mathbf{X}').$$

Donc,

$$\mathbf{F} \neq \int_0^1 \frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{E}\mathbf{I}} (\mathbf{N}' - x'\mathbf{Y}' + y'\mathbf{N}') ds.$$

En se reportant à la formule (16) et faisant un calcul analogue pour G, on obtient finalement les équations

(18)
$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{W}_1'}{\partial \mathbf{Y}'}, \qquad c = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{W}_1'}{\partial \mathbf{Y}'}, \qquad o = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{W}_1'}{\partial \mathbf{N}'}.$$

Introduisons la forme adjointe (†)

(19)
$$V_{1} = \frac{E1}{ED_{1}} \left\{ (p_{1}^{2} + \xi_{1}^{2})u^{2} + (q_{1}^{2} + \eta_{1}^{2})v^{2} + (p_{1}^{2}q_{1}^{2} + n_{1}^{2})w^{2} - 2(n_{1} + \xi_{1}\eta_{1})uv + 2(n_{1}\xi_{1} + p_{1}^{2}\eta_{1})uw + 2(q_{1}^{2}\xi_{1} + n_{1}\eta_{1})vw \right\},$$
avec
$$D_{1} = p_{1}^{2}q_{1}^{2} + n_{1}^{2} + q_{1}^{2}\xi_{1}^{2} + p_{1}^{2}\eta_{1}^{2} + 2n_{1}\xi_{1}\eta_{1}.$$

Les équations (18) donnent

(20)
$$Y = \frac{1}{2} \frac{\partial V_1'}{\partial u}, \qquad Y = \frac{1}{2} \frac{\partial V_1'}{\partial v}, \qquad N' = \frac{1}{2} \frac{\partial V_1'}{\partial w},$$

où l'on doit remplacer u et v par les valeurs (10) et w par zéro

9. Ces formules peuvent être considérablement simplifiées, si l'on a égard à l'approximation qu'elles supposent. Nous savons que l'erreur commise sur X', Y' est du second ordre. Donc, nous pouvons, pour le calcul de ces quantités, supprimer, dans les coefficients de V_1 , tous les termes qui sont au moins du premier ordre. En particulier, nous pouvons annuler ξ_1 et η_1 (n° 5).

Si l'on tient compte maintenant de la quasi-symétrie du spiral par rapport aux axes de coordonnées, on peut admettre que les quantités n_1 et $p_1^2 - q_1^2$ sont de l'ordre de $\frac{R^2}{\lambda}$, en désignant par λ l'angle d'enroulement du spiral. Comme cet angle est toujours très grand, nous pouvons annuler n_1 et remplacer p_1^2 , q_1^2 par $\frac{k^2}{2}$, en appelant k le rayon de giration du spiral par rapport à

⁽¹⁾ Cf. loc. cit., p. 250.

l'axe du balancier. Dans ces conditions, V, se réduit à

$$V_1 = \frac{EI}{L} \left[\frac{2}{k^2} (u^2 + v^2) + w^2 \right]$$

et l'on a

(21)
$$X' = \frac{2 \operatorname{EI}}{\operatorname{L} k^2} u, \qquad Y' = \frac{2 \operatorname{EI}}{\operatorname{L} k^2} v,$$

avec une erreur de l'ordre de $\frac{u}{\lambda}$ et $\frac{v}{\lambda}$.

Appelons w le vecteur (4) dont les composantes sont u et v. La réaction d'encastrement est (2)

10. Quant à N', on l'obtient par la formule (7)

(23)
$$\mathbf{N}' = \frac{2 \mathbf{E} \mathbf{I}}{\mathbf{L} \mathbf{L}^{2}} (\xi_{1} \mathbf{v} - \tau_{11} \mathbf{u}).$$

Mais, pour en avoir la partie principale, il nous faut calculer les parties principales de ξ_1 et de η_1 .

Il y a lieu d'observer tout de suite que ces parties principales ne sont pas nécessairement les coordonnées ξ'_1 et η'_1 du centre de gravité de Γ' . En effet, l'erreur commise sur Γ' est du premier ordre. Il en est donc de même de l'erreur commise sur ξ'_1 et η'_1 . Autrement dit, cette erreur est du même ordre que les quantités ξ'_1 et η'_1 elles-mêmes. On ne peut donc avoir les parties principales de ξ_1 et de η_1 qu'en poussant le calcul de Γ jusqu'à la deuxième approximation.

11. Calcul de la forme du spiral en deuxième approximation. — Nous commençons par calculer ε" par la formule (17), en y remplaçant X', Y' par les valeurs (21) et N' par zéro, puisque

⁽¹⁾ Ce vecteur peut être défini géométriquement de la manière suivante. Il a pour origine la position approchée de l'extrémité du spiral correspondant à la courbe Γ' et pour extrémité la position exacte.

⁽²⁾ GROSSMANN (Horlogerie théorique, t. II, p. 228) donne la formule $F=K.\omega$ mais sans préciser le coefficient K. Au surplus, sa démonstration n'est ni claire, ni rigoureuse.

cette dernière quantité est du second ordre. Nous avons ensuite

$$x'' = a + \int_0^s \cos(s + \epsilon'') ds = x' - \int_0^s \epsilon'' \sin z \, ds,$$
$$y'' = b + \int_0^s \sin(z + \epsilon'') ds = y' + \int_0^s \epsilon'' \cos z \, ds,$$

en négligeant toujours le second ordre.

On peut écrire, en intégrant par parties,

$$\int_0^x \mathbf{s}'' \sin \mathbf{z} \ d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \mathbf{s}'' d\mathbf{y}' = \mathbf{s}'' \mathbf{y}' - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{z}} \frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{E}\mathbf{I}} (-\mathbf{x}'\mathbf{Y}' + \mathbf{y}'\mathbf{X}') d\mathbf{s}.$$

En faisant un calcul analogue pour l'autre intégrale, on a

(24)
$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{s}{EI} [X'(-y'\eta' + q'^2) + Y'(-n' + \xi'y')], \\ y'' = y' + \frac{s}{EI} [X'(x'\eta' - n') + Y'(p'^2 - x'\xi')], \end{cases}$$

en adoptant pour l'arc s des notations analogues à celles qui ont été introduites, au n° 3, pour le spiral entier.

Telles sont les équations paramétriques de la deuxième approximation Γ'' du spiral.

12. Calcul du centre de gravité. — Commençons par calculer ξ' et η' . A cet effet, dérivons la formule

$$x' = \int_{0}^{s} \cos\left(\varphi_{0} + \frac{\theta s}{L}\right) ds$$

par rapport à θ . Il vient

ou

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta} = -\frac{1}{L} \int_0^{s} s \sin z \, ds = -\frac{1}{L} \int_A^{m} s \, dy' = -\frac{1}{L} \left(s y' - \int_0^{s} y' \, ds \right)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta} = -\frac{1}{L} \int_0^{s} s \sin z \, ds = -\frac{1}{L} \int_A^{m} s \, dy' = -\frac{1}{L} \left(s y' - \int_0^{s} y' \, ds \right)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial 0} = \frac{s}{L}(\eta' - y').$$

En faisant un calcul analogue sur y' et résolvant par rapport à η' et ξ' , on obtient les formules (*)

$$s\xi' = sx' - L \frac{\partial y'}{\partial \theta}, \quad s\eta' = sy' + L \frac{\partial x'}{\partial \theta}.$$

⁽¹⁾ Cf. J. HAAG, loc. cit., p. 263 [formules (62)].

En particulier, pour s = L, il vient

(25)
$$\xi'_{1} = x'_{B} - \frac{dy'_{B}}{d\theta}, \qquad \tau'_{11} = y'_{B} + \frac{dx'_{B}}{d\theta}.$$

Si l'on remarque, d'autre part, que l'on a, d'après (5),

$$\frac{dx_{\rm B}}{d\theta} + y_{\rm B} = 0, \qquad \frac{dy_{\rm B}}{d\theta} - x_{\rm B} = 0.$$

les formules (25) deviennent, en y remplaçant x'_B et y'_B par $x_B - u$ et $y_B - c$.

(26)
$$\xi_1' = \frac{dc}{d\theta} - u, \qquad \tau_0' = -\frac{du}{d\theta} - c.$$

On vérifie que ces quantités et, par conséquent, ξ_1 et η_1 sont du premier ordre, comme nous l'avions admis précédemment (n° 5) par anticipation.

13. Calculons maintenant la seconde approximation ξ_1'' , η_1'' . En intégrant la première équation (24) de 0 à L et divisant par L, il vient

$$(27) \quad \xi_1'' = \xi_1' - \frac{X'}{EIL} \int_0^L s(q'^2 + y' \eta') ds + \frac{Y'}{EIL} \int_0^L s(\xi' y' + n') ds,$$

Or, on a, en intégrant par parties,

$$\int_{0}^{L} s q'^{2} ds = L^{2} q'_{1}^{2} - \int_{0}^{L} s y'^{2} ds;$$

$$\int_{0}^{L} s n' ds = L^{2} n'_{1} - \int_{0}^{L} s x'_{1} y' ds;$$

$$\int_{0}^{L} s \tau'_{1} y' ds = \int_{A}^{B} s \tau'_{1} d(s \tau'_{1}) = \frac{1}{2} L^{2} \tau'_{1}^{2};$$

$$\int_{0}^{L} s \xi'_{1} y' ds = \int_{0}^{L} s x'_{1} y' ds - L \int_{0}^{L} y' \frac{\partial y'}{\partial \theta} ds = \int_{0}^{L} s x'_{1} y' ds - \frac{1}{2} L^{2} \frac{d(q'_{1}^{2})}{d\theta}.$$

En portant dans (27), procédant de même pour n_1^* et négligeant des quantités de l'ordre de $\frac{w}{5}$, on trouve

$$\begin{cases} \xi_1'' = \xi_1' + \frac{\mathbf{X}'\mathbf{L}}{\mathbf{E}\mathbf{I}}(\mathbf{q}_1'^2 - \mathbf{Q}_1'^2) - \frac{\mathbf{Y}'\mathbf{L}}{2\mathbf{E}\mathbf{I}}\frac{\mathbf{d}(\mathbf{q}_1'^2)}{\mathbf{d}\mathbf{0}}, \\ \xi_1'' = \xi_1' + \frac{\mathbf{X}'\mathbf{L}}{2\mathbf{E}\mathbf{I}}\frac{\mathbf{d}(\mathbf{p}_1'^2)}{\mathbf{d}\mathbf{0}} + \frac{\mathbf{Y}'\mathbf{L}}{\mathbf{E}\mathbf{I}}(\mathbf{p}_1'^2 - \mathbf{P}_1'^2), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{L}^2\,\mathrm{P}_1'^2 = \int_0^{\mathrm{L}} s x'^2\,ds, \qquad \mathrm{L}^2\,\mathrm{Q}_1'^2 = \int_0^{\mathrm{L}} s v'^2\,ds.$$

Comme au n° 9, nous pouvons, à l'ordre de $\frac{1}{\lambda}$ près, remplacer $p_{\perp}^{\prime 2}$ et $q_{\perp}^{\prime 2}$ par $\frac{k^2}{2}$. De même, introduisons le second moment d'inertie du spiral par rapport à l'axe du balancier, défini par

qui correspond à la densité linéaire fictive s. Nous pouvons remplacer $P_1^{\prime 2}$ et $Q_2^{\prime 2}$ par $\frac{h^2}{2}$ et les formules (28) deviennent finalement, en tenant compte de (21) et (26),

$$\begin{cases} \xi_1'' = -\frac{dv}{d\theta} - \frac{h^2}{k^2}u - \frac{v}{2k^2}\frac{d(k^2)}{d\theta}, \\ \gamma_1'' = -\frac{du}{d\theta} - \frac{h^2}{k^2}v + \frac{u}{2k^2}\frac{d(k^2)}{d\theta}. \end{cases}$$

Dans ces formules, h^2 et k^2 doivent être calculés à partir de la courbe Γ' . Voyons quelle est l'influence de θ sur ces quantités.

La distance r du point courant à l'axe du balancier peut être confondue avec le rayon de courbure du spiral en ce point. Or, on a, en première approximation, donc pour Γ' ,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\theta}{L};$$

d'où

$$r=\frac{r_0}{1+\frac{r_0}{1}\theta};$$

d'où, en négligeant $\frac{1}{\lambda^2}$,

$$r^2 = r_0^2 \left(\mathbf{I} - \frac{2 r_0}{\mathbf{L}} \, \mathbf{\theta} \, \right).$$

On en conclut d'abord que la dérivée $\frac{d(r^2)}{d\theta}$ a pour partie principale $=r_0^2\frac{2r_0}{L}$; elle est de l'ordre de $\frac{r_0^2}{\lambda}$. Donc, $\frac{d(k^2)}{d\theta}$ est de l'ordre de $\frac{k^2}{\lambda}$ et les troisièmes termes des formules (30) peuvent être négli-

gés. Pour la même raison, on peut, en négligeant toujours des quantités de l'ordre de $\frac{\omega}{\lambda}$, remplacer, dans les seconds termes, h^2 et k^2 par leurs valeurs naturelles. En définitive, les coordonnées du centre de gravité du spiral sont données par les formules suivantes

(31)
$$\xi_1 = \frac{dv}{d\theta} - ju, \quad \tau_{11} = -\frac{du}{d\theta} - jv,$$

en posant

$$j = \frac{h^2}{k^2},$$

ce rapport pouvant être calculé à l'état naturel.

14. Calcul du couple complémentaire. — Portant (31) dans (23), nous obtenons

(33)
$$N' = \frac{EI}{Lk^2} \frac{d(u^2 + v^2)}{d\theta},$$

avec une erreur de l'ordre de $\frac{w^2}{\lambda}$ (1).

15. Influence du poids du spiral. — Si les forces appliquées au système balancier-spiral dérivent d'une fonction de forces U, l'équation différentielle du mouvement est

$$\Lambda \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d\mathbf{U}}{d\theta},$$

en négligeant l'inertie du spiral, dont j'ai calculé l'influence dans un autre travail (2). Le couple appliqué au balancier est donc $\frac{dU}{d\theta}$.

Si U subit l'accroissement ΔU , le couple perturbateur est $\frac{d(\Delta U)}{d\theta}$.

Cela posé, si m désigne la masse du spiral, son poids dérive de la fonction de force $mg.\zeta$, en appelant ζ le vecteur \overrightarrow{OG} . D'autre part, sous l'action de ce poids, l'énergie de déformation du spiral ne subit qu'un accroissement du second ordre en m (*). On

Théorème. — Soit un corps élastique, encastré en différents points fixes et

⁽¹⁾ Au facteur $\frac{EI}{Lk^2}$ près.

⁽¹⁾ J. HAAG, loc. cit., p. 263 et suiv..

⁽³⁾ Plus généralement, on a le théorème suivant :

a donc

$$\Delta U = mg.\dot{\zeta}$$

et le couple perturbateur est $\overrightarrow{mg} \cdot \overrightarrow{a_{i}^{2}}$.

II. - Calcul des perturbations de marche.

16. Calcul de u et v. — Introduisons les nombres complexes

$$w = u + iv, \qquad z = x - iy,$$

où x, y désignent les coordonnées du point M du spiral, à l'état naturel. Les formules (10) équivalent à la suivante

$$w = z_B e^{i\theta} - z_A - \int_0^1 e^{i\psi} e^{i\theta} \dot{L} ds$$

ou, en intégrant par parties,

(31)
$$w = \frac{i\theta}{L} \int_{L}^{B} z e^{i\theta \hat{L}} ds.$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtiendrait u et v. Mais, ce calcul est inutile (1). Retenons simplement que le vecteur w est le vecteur représentatif de l'imaginaire w.

n'étant soumis à aucune autre force que les réactions d'encastrement. Appliquons-lui des forces extérieures F infiniment petites du premier ordre. L'énergie de déformation subit, de ce fait, une augmentation qui n'est que du second ordre.

En effet, cet accroissement est égal au travail de toutes les forces extérieures pendant la déformation infiniment petite D produite par les forces F. Or, les forces d'encastrement ne travaillent pas. D'autre part, le travail des forces F pour le déplacement D est du second ordre. Donc, l'accroissement de l'énergie de déformation est du second ordre.

(1) En développant w suivant les puissances de 0, on obtient

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} Y_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} X_{2n},$$

$$v = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} X_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} Y_{2n},$$

où X_p , Y_p désignent, suivant la terminologie de M. Keelhoff (cf. loc. cit., p. 257) les coordonnées du centre de gravité d'ordre p, à l'état naturel.

17. Calcul du centre de gravité. — Le nombre complexe correspondant au vecteur $\vec{\zeta} = \overrightarrow{OG}(1)$ est, d'après les formules (31),

$$\zeta = \xi + i \tau_i = -i \frac{dw}{d\theta} - jw$$

ou

(35)
$$\zeta = \frac{1}{L} \int_{\Lambda}^{B} z \, e^{i\theta \frac{s}{L}} \left[1 + i\theta \left(\frac{s}{L} - j \right) \right] ds.$$

On en déduit

$$(35) \qquad \frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{1}{L} \int_{\Lambda}^{B} z \, e^{i\theta \frac{s}{L}} \left[i \left(\frac{2s}{L} - j \right) - \theta \frac{s}{L} \left(\frac{s}{L} - j \right) \right] \, ds.$$

18. Perturbation d'isochronisme. — Si l'on a un couple pergurbateur $f(\theta)$, la perturbation subie par la durée d'oscillation est donnée par la formule générale (2)

(37)
$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{L}{2\pi\theta_0 El} \int_0^{2\pi} f(\theta_0 \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi.$$

Appliquons ceci au couple

$$f(\theta) = -N = -\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{L}k^2} \frac{d(u^2 + v^2)}{d\theta}.$$

Si z désigne le nombre imaginaire conjugué de z, on a, d'après (34),

$$u^2 + v^2 = \frac{\theta^2}{L^2} \int \int z \overline{z'} e^{i\theta \frac{s-s'}{L}} ds ds'$$
 (0 < s < L. 0 < s' < L).

D'où

$$\frac{d(u^2+v^2)}{d\theta} = \frac{\theta}{L^2} \int \int z\overline{z'} \, e^{i\theta \frac{s-s'}{L}} \left(2 + i\theta \frac{s-s'}{L} \right) ds \, ds'.$$

Portant dans (37), il vient

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2\pi k^2 L^2} \int \int z\overline{z'} \, ds \, ds' \int_0^{2\pi} e^{im\cos\varphi} (2 + im\cos\varphi) \cos^2\varphi \, d\varphi,$$

en posant

$$m=\theta_0\,\frac{s-s'}{L}.$$

⁽¹⁾ Nous supprimons dorénavant l'indice i correspondant au centre de gravité \mathbf{G}_1 du spiral entier.

⁽²⁾ Cf. J. HAAG, loc. cit., p. 271.

L'intégrale définie qui se trouve sous le signe $\int \int s'$ exprime immédiatement au moyen des fonctions de Bessel, en utilisant la formule de Sommerfeld (1),

$$(38) \qquad \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi} e^{in\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi} e^{-ix\varphi} d\varphi = 2\pi i^n \mathbf{J}_n(x).$$

On a

$$\int_{0}^{2\pi} e^{imx} e^{i\phi} \left[\frac{e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}}{2} + 1 + im \frac{e^{3i\phi} + e^{-3i\phi} + 3e^{i\phi} + 3e^{-i\phi}}{8} \right] d\varphi$$

$$= 2\pi \left[-J_{2}(m) + J_{0}(m) - m \frac{J_{3}(m) - 3J_{1}(m)}{4} \right]$$

$$= 2\pi \left[J_{0}(m) - mJ_{1}(m) \right].$$

en utilisant des identités connues (2).

Posons (3)

(39)
$$\mathbf{F}(x) \equiv \mathbf{J}_0(x) - x\mathbf{J}_1(x) \equiv \frac{d}{dx} [x\mathbf{J}_0(x)]$$

Nous avons

(40)
$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{k^2 L^2} \int \int z \overline{z'} F\left(\theta_0 \frac{s-s'}{L}\right) ds ds'.$$

Cette élégante formule peut se mettre sous une forme entièrement géométrique :

(41)
$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{k^2 L^2} \int \int \overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OM'} F \left(\theta_0 \frac{\widehat{MM'}}{L} \right) ds ds'.$$

19. Perturbation de marche due au poids du spiral. — Cette perturbation est donnée par la formule (1)

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m L}{EI} \hat{g}.\hat{Z},$$

⁽¹⁾ Cf. JAHNER und EMDE, Funktionentafeln, p. 169.

⁽²⁾ Cf. loc. cit., p. 165.

⁽³⁾ Signalous que la fonction F(x) est une fonction paire.

^{(&#}x27;) Je signale, à ce propos, que la perturbation due au poids du balancier a

Ž désignant le vecteur représentatif du nombre imaginaire

$$\begin{split} \mathbf{Z} &= \frac{1}{2\pi\theta_0} \frac{1}{\mathbf{L}} \int_{\Lambda}^{\mathbf{B}} z \, ds \int_{0}^{2\pi} e^{i\theta_0 \frac{s}{\mathbf{L}} \cos \varphi} \\ &\times \left[i \left(\frac{2s}{\mathbf{L}} - j \right) - \frac{s}{\mathbf{L}} \left(\frac{s}{\mathbf{L}} - j \right) \theta_0 \cos \varphi \right] \cos \varphi \, d\varphi. \end{split}$$

En appliquant de nouveau la formule (38), l'intégrale en φ s'écrit

$$\begin{split} & 2 \pi \left(j - \frac{2 s}{L} \right) \mathbf{J}_1 \left(\theta_0 \frac{s}{L} \right) + \pi \left(j - \frac{s}{L} \right) \theta_0 \frac{s}{L} \left[\mathbf{J}_0 \left(\theta_0 \frac{s}{L} \right) - \mathbf{J}_2 \left(\theta_0 \frac{s}{L} \right) \right] \\ & = 2 \pi \frac{s}{L} \left[\left(j - \frac{s}{L} \right) \theta_0 \mathbf{J}_0 \left(\theta_0 \frac{s}{L} \right) - \mathbf{J}_1 \left(\theta_0 \frac{s}{L} \right) \right]. \end{split}$$

D'où

$$(43) \quad \overset{\rightarrow}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{L}^{2}} \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \overrightarrow{OM} \cdot s \left[\left(j - \frac{s}{\mathbf{L}} \right) \mathbf{J}_{0} \left(\mathbf{\theta}_{0} \frac{s}{\mathbf{L}} \right) - \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{\theta}_{0}} \mathbf{J}_{1} \left(\mathbf{\theta}_{0} \frac{s}{\mathbf{L}} \right) \right] ds.$$

20. Règle du point d'attache. — La formule (42) nous montre que la perturbation de marche due au poids du spiral est une fonction sinusoïdale de l'angle que fait la verticale avec une direction déterminée du chronomètre. On a l'acance maximum lorsque le vecteur L'est dirigé verticalement et vers le haut.

Les régleurs s'efforcent de fixer la position du point d'attache du spiral au balancier, de telle manière que cette avance maximum ait lieu lorsque la montre est au pendu (1). On voit qu'il suffit, pour cela, de s'arranger pour que le vecteur Z soit dirigé vers le pendant.

été évaluée par Caspari sous la forme

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{T^2 ag \cos \varphi}{\pi^2 R^2} S(\theta_{\bullet}),$$

où R désigne le rayon de gyration du balancier, a et φ les coordonnées polaires de son centre de gravité par rapport à la verticale descendante et S une fonction dont Caspari a calculé le développement en série. En réalité, cette fonction est égale à $\frac{\mathbf{J}_{+}(\theta_{0})}{\theta_{0}}$, ainsi qu'on le trouve directement en procédant comme ci-dessus. On peut aussi le vérifier, bien entendu, à partir du léveloppement en série.

(b) Cf. Grossmann, loc. cit., p. 212.

Dans ce cas, la perturbation est nulle pour les positions « pendant à droite » et « pendant à gauche ». On a le retard maximum pour la position « pendant bas ».

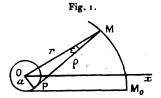
III. — Formules générales convenant à la fois au spiral cylindrique et au spiral plat.

21. Forme géométrique du spiral. — Pour poursuivre l'application concrète de notre théorie, nous sommes obligés de supposer que le spiral a une forme géométrique déterminée.

Pour le spiral cylindrique, il n'y a pas de difficulté; on l'assimile à un cercle.

Pour le spiral plat, au contraire, les avis sont partagés. Certains auteurs prétendent que c'est une spirale d'Archimède; d'autres le considèrent comme une développante de cercle. Nous allons montrer, d'une manière précise, que ces deux formes géométriques sont pratiquement équivalentes.

Prenons une développante de cercle. Soient a le rayon



du cercle développé, ρ le rayon de courbure PM, φ l'angle polaire de la normale. On a

$$\rho = \rho_0 - a \varphi$$
.

Calculons l'équation polaire. On a

$$r = \sqrt{\rho^2 + a^2} = \rho \left(1 + \frac{a^2}{2\rho^2} + \dots\right).$$

D'autre part,

$$\theta = \phi - \epsilon, \qquad \epsilon = arctang \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\alpha}{\rho} + \dots$$

Done

$$r = \rho_0 = a(0 + \varepsilon) + \frac{a^2}{2\rho} \quad \dots = \rho_0 = a0 = \frac{a^2}{2\rho} + \dots$$

Si l'on considère la spirale d'Archimède ayant pour équation

$$r'=z_0-a_0$$
.

on voit que la distance MM' des points des deux courbes qui ont même angle polaire est

$$r'-r=\frac{a^2}{2s}+\cdots$$

Voyons quel est l'ordre de grandeur de $\frac{a^2}{2\rho}$. Si R et R' sont les rayons extrêmes et n le nombre des spires, on a

$$a = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}'}{2n\pi};$$

ďoù

$$\frac{a^2}{2\rho} = \frac{(R - R')^2}{8n^2\pi^2\rho}$$
.

Prenons, par exemple, $R = i^{mm}$, R' = 1, n = 10; on a

$$\frac{a^2}{22} = \frac{1.14}{2} \cdot 10^{-3}.$$

La distance MM' varie entre 1,14 et 0,28 millièmes de millimètre. La formé du spiral n'est évidemment pas déterminée avec une précision d'un millième de millimètre. Donc, il est pratiquement indifférent de représenter le spiral par l'une ou l'autre des deux courbes géométriques ci-dessus.

On peut aussi se demander quelle est la différence des longueurs des deux courbes. La longueur de la développante de cercle est $\frac{R^2-R'^2}{2a}$. Celle de la spirale d'Archimède est $\frac{R^2-R'^2}{2a}+\frac{a}{2}\log\frac{R}{R'}$. La spirale d'Archimède est un peu plus longue que la développante de cercle. La différence est à peu près $\frac{1}{10\pi}$, soit $\frac{1}{30}$ de millimètre, dans l'exemple ci-dessus, sur une longueur totale de 157^{mm} environ. On voit que la différence est insignifiante.

Le calcul numérique que nous venons de faire nous apprend que, dans le calcul des coordonnées d'un point quelconque du spiral, on peut négliger les quantités de l'ordre de $\frac{a^2}{R}$, qui seraient pratiquement illusoires.

Dans ce qui va suivre, nous assimilerons le spiral à la spirale d'Archimède définie par l'équation polaire

$$(4) r = R - az.$$

On a

$$\frac{ds}{dz} = r\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous prendrons

$$(45) ds = r dz.$$

commettant ainsi une erreur relative de l'ordre de $\frac{a^2}{r^2}$ et, par conséquent, inférieure à l'erreur relative inévitablement commise sur r.

22. Vecteur correspondant à une densité fictive du spiral. — Donnons au spiral une densité linéaire fictive, réelle ou imagiginaire, f(M), M désignant le point courant. A cette densité nous ferons correspondre le vecteur défini par l'intégrale géométrique

$$(46) \qquad \dot{V} = \frac{1}{L} \int_{\Lambda}^{B} \overrightarrow{OM} f(M) ds.$$

On pourra aussi considérer V comme représentant l'imaginaire

$$V = \frac{1}{L} \int_{A}^{B} z f(M) ds.$$

Nous allons calculer approximativement ce vecteur, en faisant les hypothèses suivantes sur la fonction $f(\mathbf{M})$:

- 1º Son module est au plus de l'ordre de grandeur de l'unité, quelle que soit la position de M sur le spiral.
- 2° Elle admet des dérivées successives par rapport à l'arc décrit par M, quand ce point suit le spiral. Si M suit le spiral en allant vers A, nous représenterons la dérivée première, par exemple, par la notation $f'_A(M)$. Si, au contraire, M va vers B, nous écrirons $f'_B(M)$.

- 3º La dérivée n^{ieur} est au plus de l'ordre de $\left(\frac{k}{L}\right)^n$, k désignant un nombre qui ne dépassera généralement pas 5.
- 23. Vecteur associé à une courbe terminale. Soit la courbe terminale T, qui se raccorde en H' avec le spiral proprement dit et se termine en H; de sorte que la lettre H devra être, par la suite, remplacée par A ou B, selon qu'il s'agira de la courbe extérieure (côté piton) ou de la courbe intérieure (côté virole).

Le point courant M étant pris sur cette courbe, développons f(M) per la formule de Taylor; nous avons, en appelant s l'arc H'M,

$$f(\mathbf{M}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} f_{\mathbf{H}}^{(n)}(\mathbf{H}').$$

D'après la troisième hypothèse du n° 22, cette série converge rapidement.

Considérons maintenant le centre de gravité g_p d'ordre p, défini par

$$\overrightarrow{Og_p} = \frac{p}{l^p} \int_0^l \overrightarrow{OM} s^{p-1} ds,$$

l désignant la longueur de la courbe. Nous avons

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{L}} \sum_{\mathbf{m}}^{\infty} \frac{f_{\mathbf{M}}^{(n-1)}(\mathbf{H}')}{(n-1)!} \int_{0}^{1} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \, s^{n-1} \, ds$$

ou

$$\tilde{V} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!} f_{\mathrm{H}}^{(n-1)}(\mathbf{H}'). \overrightarrow{\mathrm{Og}_n}.$$

Comme la série (48), cette série converge rapidement.

24. Vecteur associé au spiral proprement dit. — Appelons u le vecteur unitaire du rayon OM et φ son angle polaire, le sens positif de rotation étant le sens de l'enroulement. Nous avons

$$LV = \int_{\Lambda'}^{B'} r^2 f(M) e^{i\varphi} d\varphi$$

ou, en intégrant par parties et utilisant (44) et (45),

$$LV = \left[-ie^{i\varphi}r^2f(\mathbf{M})\right]_{\mathbf{A}'}^{\mathbf{B}'} = \int_{\mathbf{A}'}^{\mathbf{B}'} \left[-2raf(\mathbf{M}) + r^3f_{\mathbf{B}'}(\mathbf{M})\right]ie^{i\varphi}d\varphi.$$

On pourrait répéter indéfiniment cette opération. Mais, dès la troisième, les termes intégrés sont de l'ordre de a^2 ou de $\frac{\lambda^2 R^4}{L^2}$; il serait illusoire de les conserver. Nous nous contentons donc de deux intégrations et nous obtenons

(50)
$$\overrightarrow{LV} = \left[(i\mathbf{R} + 2\boldsymbol{\alpha})f(\mathbf{V}) + \mathbf{R}^{2}f_{\mathbf{A}}^{2}(\mathbf{V}) \right] \cdot \overrightarrow{OA}$$
$$+ \left[-(i\mathbf{R}' + 2\boldsymbol{\alpha})f(\mathbf{B}') + \mathbf{R}'^{2}f_{\mathbf{B}}^{2}(\mathbf{B}') \right] \cdot \overrightarrow{OB}'.$$

25. Vecteur associé au spiral entier. — Écrivons la formule (49), limitée à ses deux premiers termes, successivement pour les deux courbes terminales et ajoutons à (50); il vient

$$\begin{split} \overrightarrow{LV} &= f(\Lambda'). \left(\overrightarrow{l \circ g_1} + i \overrightarrow{R \circ \Lambda'} \right) + f(B'). \left(\overrightarrow{l' \circ g_1'} - i \overrightarrow{R' \circ B'} \right) \\ &+ f_{A}'(\Lambda'). \left(\frac{l^2}{2} \overrightarrow{O g_2} + \overrightarrow{R^2 \circ \Lambda'} \right) + f_{B}'(B'). \left(\frac{l'^2}{2} \overrightarrow{O g_2'} + \overrightarrow{R'^2 \circ B'} \right) \\ &+ 2a \left[f(\Lambda') \overrightarrow{O \Lambda'} - f(B') \overrightarrow{O B'} \right]. \end{split}$$

A chaque courbe terminale, associons les deux points définis de la manière suivante. Prenons, par exemple, la courbe AA'. Menons la perpendiculaire à OA' et, sur cette perpendiculaire, portons, du côté de la courbe, $Op_4 = \frac{R^2}{l}$. Sur la demi-droite opposée à OA', portons $Op_2 = \frac{2R^3}{l^2}$. Construisons les points analogues p'_1 et p'_2 pour la courbe BB'. On a

(51)
$$l \overrightarrow{Op_1} = -iR \overrightarrow{OA'}, \quad l' \overrightarrow{Op'_1} = iR'\overrightarrow{OB'};$$

$$(52) l^{2}\overrightarrow{Op_{2}} = -2R^{2}\overrightarrow{OA'}, l^{2}\overrightarrow{Op_{2}'} = -2R^{2}\overrightarrow{OB'}.$$

Dès lors, la formule ci-dessus devient

(53)
$$\overrightarrow{LV} = lf(\Lambda')\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{g_1} + l'f(B')\overrightarrow{p_1'}\overrightarrow{g_1'} + \frac{l^2}{2}f'_A(\Lambda')\overrightarrow{p_2}\overrightarrow{g_2} + \frac{l'^2}{2}f'_B(B')\overrightarrow{p_2'}\overrightarrow{g_2'} + \frac{2a[f(\Lambda')\overrightarrow{OA'} - f(B')\overrightarrow{OB'}].$$

6

On vérifie, comme il fallait s'y attendre, que cette formule ne change pas quand on intervertit A et B, A' et B'.

26. A la courbe A'A, associons les axes suivants : OX suivant OA', OY perpendiculaire à OX et dirigé vers la courbe. Nous appellerons φ_1 , φ_1 les coordonnées polaires du vecteur $\frac{\overline{p_1g_1}}{Op_1} = \frac{lp_1g_1}{R^2}$ et φ_2 , φ_2 les coordonnées polaires du vecteur $\frac{\overline{p_2g_2}}{Op_2} = \frac{l^2\overline{p_2g_2}}{2R^3}$. Ces quatre nombres se calculent à l'aide des formules suivantes :

$$(54) \begin{cases} \varphi_1 \cos \varphi_1 = \frac{1}{R^2} \int_0^t X ds, & \varphi_1 \sin \varphi_1 = \frac{1}{R^2} \int_0^t Y ds = 1; \\ \varphi_2 \cos \varphi_2 = \frac{1}{R^3} \int_0^t s X ds = 1, & \varphi \sin_2 \varphi_2 = \frac{1}{R^3} \int_0^t s Y ds. \end{cases}$$

Nous désignerons par des lettres accentuées les quantités analogues relatives à la courbe BB'.

Appelons enfin \(\lambda\) l'angle de OA' avec OB', te sens positif de rotation étant le sens de l'enroulement, de sorte que cet angle est positif et mesure tout simplement l'angle d'enroulement du spiral proprement dit. Avec ces conventions, nous avons

$$\begin{split} l \ \overrightarrow{p_1} \ \overrightarrow{g_1} &= R \ \overrightarrow{\varphi_1} \ \overrightarrow{e}^{-i \overrightarrow{\varphi_1}} \overrightarrow{O} \ \overrightarrow{V}, \qquad \frac{l^2}{2} \ \overrightarrow{p_2} \ \overrightarrow{g_2} &= R^2 \ \overrightarrow{\varphi_2} \ e^{-i \overrightarrow{\varphi_2}} \overrightarrow{O} \ \overrightarrow{V}; \\ l' \ \overrightarrow{p_1'} \ \overrightarrow{g_1'} &= R' \ \overrightarrow{\varphi_1'} \ \overrightarrow{OB'}, \qquad \frac{l'^2}{2} \ \overrightarrow{p_2'} \ \overrightarrow{g_2'} &= R'^2 \ \overrightarrow{\varphi_2'} \ e^{i \overrightarrow{\varphi_2'}} \overrightarrow{OB'}. \end{split}$$

En portant dans (53), il vient

$$(\mathfrak{F}) = \mathbf{L} \overset{\circ}{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} (\mathbf{R} \, \boldsymbol{\rho}_1 \, \mathbf{e}^{-i\boldsymbol{\varphi}_1} \, \cdots \, \boldsymbol{\alpha}) f(\mathbf{V}') + \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\rho}_2 \, \mathbf{e}^{-i\boldsymbol{\varphi}_2} f_{\mathbf{A}}'(\mathbf{A}')) |\overrightarrow{\mathbf{O}} \overset{\circ}{\mathbf{V}}|$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{R}' \boldsymbol{\rho}_1' \, \mathbf{e}^{i\boldsymbol{\varphi}_1'} \, \cdots \, \mathbf{e}^{i\boldsymbol{\varphi}_2}) f(\mathbf{B}') + \cdots \mathbf{R}^{i\boldsymbol{\varphi}_2} \boldsymbol{\rho}_2' \, \mathbf{e}^{i\boldsymbol{\varphi}_2'} \, f_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}') |\overrightarrow{\mathbf{OB}'}|.$$

27. Conditions de Phillips. — Si les courbes terminales ont une forme quelconque, les formules (53) et (55) montrent que le vecteur $\tilde{\mathbf{V}}$ est de l'ordre de $\frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{L}}$ ou de $\frac{\mathbf{R}}{\lambda}$. Il est infiniment petit du premier ordre, si l'on prend $\frac{1}{\lambda}$ pour infiniment petit principal. Pour l'abaisser au second ordre, quelle que soit la fonction f,

il faut et il suffit que g_1 soit en p_1 et g'_1 en p'_1 . Ce sont les conditions de Phillips bien connues.

Pour l'abaisser au troisième ordre, il faut que a soit nul et que g_2 soit en p_2 et g_2 en p_2' . Autrement dit, le spiral doit être cylindrique et chaque courbe terminale doit satisfaire non seulement aux conditions de Phillips, mais encore aux deux conditions supplémentaires qui expriment que son centre de gravité du second ordre se trouve au point p_2 défini au n° 25 (1).

Je n'ai pu trouver aucune courbe satisfaisant à ces quetre conditions. Mais, je pense néanmoins qu'il en existe. Faute de posséder une telle courbe, on peut chercher, parmi les courbes de Phillips connues, celles qui donnent la plus petite valeur à ρ₂. J'ai fait le calcul pour les courbes suivantes, empruntées à Grossmann (loc. cit., p. 114 et suiv.).

- 1. Un arc de cercle : $\rho_2 = 1,045$; $\varphi_2 = 151^{\circ}, 7$.
- II. Deux quarts de cercle et une droite: $\rho_2 = 1,316; \varphi_2 = 102^{\circ},5.$
- III. Deux arcs de cercle : $\rho_2 = 1,048$; $\varphi_2 = 147^{\circ}, 5$.
- IV. Une droite (2): $g_2 = 1,48$; $\varphi_2 = 82^{\circ},6$.

On voit que les deux meilleures courbes sont les courbes let III, qui sont à peu près équivalentes.

On pourrait pousser plus loin le développement de la formule (53) et, dans le cas du spiral cylindrique, reculer de plus en plus l'ordre de grandeur du vecteur $\tilde{\mathbf{V}}$, en imposant de nouvelles conditions aux courbes terminales (3). Mais, de tels calculs seraient pratiquement illusoires, à cause de l'indétermination de la forme géométrique du spiral (1). Nous pensons donc que la for-

⁽¹⁾ Cf. J. HAAG, Extension des conditions de Phillips concernant le spiral (Comptes rendus, 1, 189, 1929, p. 86).

⁽²⁾ Je signale que, pour cette courbe, il y a lieu de faire des réserves sur la validité de la théorie. En effet, au point de raccordement avec le spiral, se trouve un point anguleux, dont le rayon de courbure est nul. Or, l'extension de la théorie de Saint-Venant au spiral n'est légitime que si l'épaisseur est infiniment petite vis-à-vis du rayon de courbure [cf. J. Haag, Extension de la théorie de Saint Venant aux fils élastiques (Annales de l'École Normale supérieure, t. 46, p. 105)].

⁽¹⁾ Cf. J. HAAG, Extension des conditions de Phillips (loc. cit.).

⁽⁴⁾ On peut ajouter aussi que la formule fondamentale (1) est elle-même une formule approchée (cf. J. HAAG, Extension de la théorie de Saint-Venant (loc. cit.) dont l'approximation n'est pas illimitée.

mule (53), qui entraîne, pour \vec{V} , une erreur du troisième ordre, atteint le maximum de précision compatible avec les données physiques du problème.

28. Calcul du vecteur w. -- D'après (34), la densité fictive correspondante est

$$f(\mathbf{M}) = i \theta e^{i\theta} \frac{s}{L}, \qquad s = \widehat{\Lambda \mathbf{M}}.$$

Portant dans (55), il vient

(56)
$$\vec{w} = -\frac{\theta}{L} \left[i (R \rho_1 e^{-i\vec{\varphi}_1} + 2\alpha) + \frac{\theta}{L} R^2 \rho_2 e^{-i\vec{\varphi}_2} \right] \overrightarrow{\rho} \overleftarrow{\uparrow}_0$$

$$+ \frac{\theta}{L} \left[i (R' \rho_1' e^{i\vec{\varphi}_1'} - 2\alpha) - \frac{\theta}{L} R'^2 \rho_2' e^{i\vec{\varphi}_2'} \right] \overrightarrow{OB}_0,$$

en appelant A_0 et B_0 les positions des points A' et B', pour l'élongation θ du balancier.

29. Calcul du centre de gravité. — D'après (35), la densité fictive correspondant au vecteur ζ est

$$f(\mathbf{M}) = \left[\mathbf{I} + i\theta \left(\frac{s}{\mathbf{L}} - j\right)\right] e^{i\theta \frac{s}{\mathbf{L}}}, \quad s = \widehat{\mathbf{A}\mathbf{M}}.$$

Portant dans (55), il vient

$$\begin{split} (57) \quad \mathbf{L} \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \left[(\mathbf{R} \, \boldsymbol{\rho}_1 \, \boldsymbol{e}^{-i \boldsymbol{\varphi}_1} + 2 \boldsymbol{a}) (\mathbf{I} - i \boldsymbol{j} \, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{R}^2 \boldsymbol{\rho}_2 \, \boldsymbol{e}^{-i \boldsymbol{\varphi}_2} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{L}} (2 \, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \, \boldsymbol{\theta}) \right] \dot{O} \dot{\boldsymbol{\Lambda}} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \left[(\mathbf{R}' \boldsymbol{\rho}_1' \, \boldsymbol{e}^{i \boldsymbol{\varphi}_1'} \, - 2 \, \boldsymbol{a}) (\mathbf{I} + i \boldsymbol{j}' \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{R}'^2 \boldsymbol{\rho}_2' \, \boldsymbol{e}^{i \boldsymbol{\varphi}_2'} \, \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{L}} (2 \, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}' \boldsymbol{\theta}) \right] \dot{O} \dot{\boldsymbol{B}} \dot{\boldsymbol{\theta}}. \end{split}$$

Dans cette formule, on a posé j'=1-j. De plus, on a négligé, dans chaque crochet, des termes en $\frac{l}{L}$ ou $\frac{l'}{L}$, qui sont toujours très petits vis-à-vis du terme principal.

Il nous reste à évaluer j et j'. On a, en négligeant les courbes terminales,

$$L^{2}h^{2} = \int_{R'}^{R} \frac{r^{2}(R^{2} - r^{2})}{2a^{2}} r dr = \frac{(R^{2} - R'^{2})^{2}(R^{2} + 2R'^{2})}{24a^{2}} = \frac{L^{2}}{6} (R^{2} + 2R'^{2});$$

d'où

$$h^2 = \frac{\mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R}'^2}{6}$$

et (1)

$$j = \frac{1}{3} \, \frac{\mathbf{R}^2 + 2 \, \mathbf{R}'^2}{\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}'^2} \, \cdot$$

Pour le spiral cylindrique, on a $j = j' = \frac{1}{2}$ Pour le spiral plat, on a, en négligeant R'2 devant R2,

$$j=\frac{1}{3}, \qquad j'=\frac{2}{3}.$$

30. Calcul de la perturbation d'isochronisme. - Elle est donnée par la formule (41).

Le point M' étant fixe, prenons pour densité fictive $F\left(\theta_0 \frac{\hat{M}'\hat{M}}{L}\right)$ et soit V le vecteur correspondant. En lui appliquant la formule (53), il prend la forme

$$(58) \qquad \qquad \stackrel{\triangleright}{\mathbf{V}} = \sum_{n=1}^{8} f_n(\mathbf{M}') \stackrel{\rightarrow}{\mathbf{U}_n}.$$

en posant

en posant
$$\overrightarrow{U}_{1} = \overrightarrow{p_{1}} \, \overrightarrow{g_{1}}, \quad f_{1}(M') = \frac{l}{L} \quad F\left(\theta_{0} \, \frac{\widehat{\Lambda'M'}}{L}\right);$$

$$\overrightarrow{U}_{2} = \overrightarrow{p_{1}} \, \overrightarrow{g_{1}}, \quad f_{2}(M') = \frac{l'}{L} \quad F\left(\theta_{0} \, \frac{\widehat{B'M'}}{L}\right);$$

$$\overrightarrow{U}_{3} = \overrightarrow{p_{2}} \, \overrightarrow{g_{2}}, \quad f_{3}(M') = \frac{l^{2}}{2 L^{2}} \theta_{0} F'\left(\theta_{0} \, \frac{\widehat{A'M'}}{L}\right);$$

$$\overrightarrow{U}_{4} = \overrightarrow{p_{2}'} \, \overrightarrow{g_{2}'}, \quad f_{4}(M') = \frac{l'^{2}}{2 L^{2}} \theta_{0} F'\left(\theta_{0} \, \frac{\widehat{A'M'}}{L}\right);$$

$$\overrightarrow{U}_{5} = \overrightarrow{OA'}, \quad f_{5}(M') = \frac{2a}{L} \quad F\left(\theta_{0} \, \frac{\widehat{A'M'}}{L}\right);$$

$$\overrightarrow{U}_{6} = \overrightarrow{OB'}, \quad f_{6}(M') = -\frac{2a}{L} \quad F\left(\theta_{0} \, \frac{\widehat{B'M'}}{L}\right);$$

$$Lk^{2} = \int_{R'}^{R} \frac{r^{3} dr}{a} = L \frac{R^{2} + R'^{2}}{2};$$

d'où

$$k^2 = \frac{R^2 + R'^2}{2}$$

⁽¹⁾ Remarquer que

en convénant que l'arc $\widehat{A'M'}$ est compté positivement de A' vers B' et que l'arc $\widehat{B'M'}$ est compté positivement de B' vers A' (†).

Nous avons maintenant

$$-k^2\frac{\Delta T}{T}=\frac{1}{L}\int_0^{-L}\overset{\searrow}{V},\overset{\sim}{OM'}ds'=\sum_n \overset{\searrow}{U_n},\int_0^{-L}f_n(W)OM'ds'.$$

Appliquant de nouveau la formule (53), on a

(60)
$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{R^2} \sum_{n} \sum_{p} g_{np} U_n . \overrightarrow{U_p},$$
en posant
$$g_{ni} = \frac{l}{L} f_n(\Lambda'), \qquad g_{ni} = -\frac{l'}{2L} f_{nk}(B').$$

$$g_{ni} = \frac{l^2}{2L} f'_{nk}(\Lambda'), \qquad g_{ni} = -\frac{2a}{2L} f'_{nk}(B').$$

$$g_{ni} = \frac{2a}{L} f_n(\Lambda'), \qquad g_{ni} = -\frac{2a}{L} f_n(B').$$

En se reportant aux formules (59) et remarquant que

$$F(\alpha) = 1, \quad F'(\alpha) = 0, \quad F''(\alpha) = -\frac{3}{2},$$

on trouve

$$g_{11} = \frac{l^2}{L^2}, \qquad g_{12} = \frac{ll'}{L^2} F(\theta_1), \qquad g_{13} = 0, \qquad g_{14} = \frac{ll'^2}{2 L^3} \theta_0 F'(\theta_1),$$

$$g_{15} = \frac{2al}{L^2}, \qquad g_{16} = -\frac{2al}{L^2} F(\theta_1);$$

$$\begin{split} g_{22} &= \frac{I^2}{L^2}, \qquad g_{23} = \frac{I^2 I^2}{2 L^3} \, \theta_0 \, F'(\theta_{10}), \qquad g_{23} = 0, \qquad g_{23} = \frac{2 \, a I}{L^2} \, F(\theta_{10}), \\ g_{24} &= -\frac{2 \, a I}{L^2}; \\ g_{33} &= \frac{3 \, I^4}{8 \, L^4} \, \theta_0^2, \qquad g_{34} = \frac{I^2 \, I^2}{4 \, L^4} \, \theta_0^2 \, F''(\theta_{10}), \qquad g_{35} = 0, \\ g_{36} &= -\frac{a \, I^2}{L^2} \, \theta_0 \, F''(\theta_{10}); \\ g_{46} &= 0; \end{split}$$

 $g_{55} = g_{66} = \frac{4a^2}{12}, \qquad g_{56} = -\frac{4a^2}{12} F(\theta_1);$

⁽⁴⁾ Il faut remarquer que la fonction $F^*(x)$ est impaire.

où l'on a posé

$$\theta_1 =: \theta_0 \, \frac{L'}{L}$$

L' = L - (l + l') =longueur du spiral proprement dit.

Les produits scalaires se calculent aisément et l'on trouve finalement

(61)
$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{R^2 + R^2} \left[\Lambda + B \theta_0^2 + CF \left(\theta_0 \frac{L'}{L} \right) + KH \left(\theta_0 \frac{L'}{L} \right) \right],$$
 en posant

en posant

(62)
$$\begin{cases} G(z) = zF'(z) \approx -z[J_1(z) + zJ_0(z)], \\ H(z) = z^2F''(z) = z(1 + z^2)J_1(z) - 2z^2J_0(z) \end{cases}$$

et

$$A = \frac{R^{4} \rho_{1}^{2} + R^{'4} \rho_{1}^{'2} + \left(\alpha (R^{3} \rho_{1} \cos \varphi_{1} - R^{'3} \rho_{1}^{'2} \cos \varphi_{1}^{'4}) + 4\alpha^{2} (R^{2} + R^{'2})}{L^{2}},$$

$$B = \frac{3}{2} \frac{R^{6} \rho_{2}^{2} + R^{'6} \rho_{2}^{'2}}{L^{4}},$$

$$C = 2 \frac{\left(R^{2} R^{'2} \rho_{1} \rho_{1}^{'4} \cos(\lambda + \varphi + \varphi_{1}^{'4}) - R \rho_{1} \cos(\lambda + \varphi_{1}) - 2\alpha \cos\lambda\right)}{L^{2}},$$

$$D = \frac{2RR}{L^{2}L} \left[RR^{'2} \rho_{1} \rho_{2}^{'2} \cos(\lambda + \varphi_{1} + \varphi_{2}^{'4}) + R^{2}R^{'} \rho_{1}^{'4} \rho_{2} \cos(\lambda + \varphi_{1}^{'4} + \varphi_{2}) + 2\alpha R^{'2} \rho_{2}^{'4} \cos(\lambda + \varphi_{2}^{'4}) - 2\alpha R^{2} \rho_{2} \cos(\lambda + \varphi_{2}^{'4})\right],$$

$$A = \frac{2R^{3} R^{'3} \rho_{2} \rho_{2}^{'2} \cos(\lambda + \varphi_{2} + \varphi_{2}^{'4})}{L^{2}L^{'2}}.$$

On vérifie que si l'on échange les notations se rapportant aux deux extrémités du spiral, les formules ne changent pas (1), comme cela est évident a priori.

31. La formule (53) ne nous donne le vecteur V qu'au troisième ordre près (2), lorsque la fonction f est de l'ordre de l'unité. Si elle est d'ordre n, l'erreur sur \overrightarrow{V} est d'ordre n+3. Si les vecteurs U, et U, ne sont pas infiniment petits, on en conclut que

^{(1).} Ne pas oublier que a change de signe.

⁽²⁾ On suppose que $\frac{l}{L}$ et $\frac{l'}{L}$ sont de l'ordre de $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire du premier ordre.

l'erreur imputable à la formule (61) est du quatrième ordre. Donc, les termes du quatrième ordre des formules (63) sont, dans ce cas, illusoires. Ils ne doivent être conservés que si les courbes terminales satisfont aux conditions de Phillips, auquel cas l'erreur est du cinquième ordre.

32. Répercussion d'une petite déformation du spiral. — Soit u le déplacement infiniment petit du point M sous l'action de cette déformation. On a, en tenant compte de la symétrie de l'intégrale (41),

$$\delta\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = -\frac{2}{k^2 L^2} \int \int \overrightarrow{OM} \cdot \delta \overrightarrow{OM} \cdot F\left(\theta_0 \frac{s-s'}{L}\right) ds ds'.$$

En intégrant d'abord par rapport à s et appliquant la formule (58), ceci s'écrit

$$\delta\left(\frac{\Delta T}{T}\right) \simeq -\frac{2}{k^2} \Sigma \widetilde{U}_i, c_i$$

en posant

$$\vec{v_i} = \frac{1}{L} \int_0^L f_i(\mathbf{M}) \, \vec{n} \, ds,$$

Les densités f_1 et f_2 sont infiniment petites du premier ordre, tandis que les autres sont du second ordre. Dès lors, s'il n'y a pas de courbes de Phillips, on peut écrire

$$\delta\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = -\frac{\gamma}{k^2 L^2} \left[Ip_1g_1 \int_0^L u F\left(\theta_0 \frac{\widehat{VM}}{L}\right) ds + I \widehat{p_1g_1} \int_0^L u F\left(\theta_0 \frac{\widehat{BM}}{L}\right) ds\right].$$

S'il y a des courbes de Phillips. l'ordre infinitésimal de la perturbation est reculé d'une unité.

On voit donc que la présence des courbes de Phillips, outre qu'elle améliore l'isochronisme, réduit considérablement les perturbations de marche provenant des petites déformations accidentelles du spiral.

33. Calcul de la perturbation due au poids du spiral. — Le

vecteur z, défini par (43), correspond à la densité fictive

$$f(s) = \frac{s}{L} \left[\left(j - \frac{s}{L} \right) \mathbf{J}_0 \left(\mathbf{0}_0 \, \frac{s}{L} \right) - \frac{1}{\mathbf{0}_0} \, \mathbf{J}_1 \left(\mathbf{0}_0 \, \frac{s}{L} \right) \right], \qquad s = \widehat{\mathbf{AM}}.$$

Appliquons-lui la formule (53). On a, en réduisant chaque second membre à sa partie principale,

$$\begin{split} f(\mathbf{A}') &= \frac{f_j}{\mathbf{L}}, \qquad f(\mathbf{B}') = (j-1) \, \mathbf{J}_0(\theta_0) - \frac{1}{\theta_0} \, \mathbf{J}_1(\theta_0), \qquad f_{\mathbf{A}}'(\mathbf{A}') = -\frac{j}{\mathbf{L}}; \\ f_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}') &= \frac{1}{\mathbf{L}} \left[(j-1) \, \mathbf{J}_0(\theta_0) - \frac{\mathbf{J}_1(\theta_0)}{\theta_0} - \mathbf{J}_0(\theta_0) - (j-1) \, \theta_0 \, \mathbf{J}_1(\theta_0) - \mathbf{J}_1'(\theta_0) \right] \end{split}$$

ou, en remplaçant $J_1(\theta_0)$ par

$$J_n(\theta_0) = \frac{1}{\theta_0} J_1(\theta_0)$$

et se reportant à la formule (39),

$$f_{\mathrm{B}}'(\mathrm{B}') = \frac{1}{L} [(j-1)\mathrm{F}(\theta_0) + 2\mathrm{J}_0(\theta_0)].$$

Portant dans (55), il vient

$$(66) \quad \ddot{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{j}}{L^2} \left[l(\mathbf{R} \, \boldsymbol{\rho}_1 \, e^{-i\boldsymbol{\varphi}_1} + 2\boldsymbol{a}) - \mathbf{R}^2 \, \boldsymbol{\rho}_2 \, e^{-i\boldsymbol{\varphi}_1} \right] \overrightarrow{OA'}$$

$$- \frac{1}{L} \left[(\mathbf{R'} \, \boldsymbol{\rho}_1' \, e^{i\boldsymbol{\varphi}_1'} - 2\boldsymbol{a}) \, \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\theta}_0) + \frac{\mathbf{R'}^2}{L} \, \boldsymbol{\rho}_2' \, e^{i\boldsymbol{\varphi}_1'} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\theta}_0) \right] \overrightarrow{OB'}.$$

en posant

(67)
$$\begin{cases} F_1(x) = (1-j)J_0(x) + \frac{J_1(x)}{x}, \\ F_2(x) = 2J_0(x) + (1-j)F(x). \end{cases}$$
 (A suivre.)