

Cours d'électromagnétisme

Guy Marquis, IPG Strasbourg

Le 12 Mai 2004

Chapitre 1

Introduction

Ce cours traite des interactions entre les ondes électromagnétiques (EM) et les matériaux terrestres. En effet, l'étude de ces interactions nous permet de caractériser les structures du sous-sol par leurs propriétés électriques. Nous nous intéresserons essentiellement ici à la caractérisation du sous-sol par la distribution de sa *conductivité électrique* (dénotée ici σ - en fait, on préfère souvent utiliser son inverse, la *résistivité électrique* $\rho = 1/\sigma$). Mais pourquoi s'intéresser à ce paramètre?

La réponse est dans la Figure 1.1: on remarque que ρ varie sur plusieurs (7) ordres de grandeur. Pour comparaison, prenez la vitesse des ondes P en sismique qui varie de 300 (air) à 8000 m/s (manteau) ou la densité qui varie de 1000 (eau) à 3000 kg/m³ (manteau). En fait, dans la terre, seule la viscosité a une dynamique plus grande que la conductivité électrique.

La Figure 1.1 nous permet également de faire en quelque sorte l'histoire des applications des méthodes EM. Chacun sait (ou devrait savoir) que les grandes réserves de minéraux métalliques lourds (Au, NI, Cu) sont souvent dans les amas sulfurés qu'on retrouve dans les cratons précambriens (e.g. Canada, Australie, Russie, Afrique du Sud, USA). Imaginez alors le problème pour le géophysicien: il doit détecter une cible de 0.1 $\Omega.m$ dans un encaissant de 10000 $\Omega.m$. Un tel contraste (comme le nez au milieu du visage) peut être mis en évidence même avec des méthodes primitives. Le domaine minier a donc été longtemps le principal champ d'application de l'EM.

La technologie progressant, tant pour les capteurs que pour les appareils d'enregistrement, on a pu progressivement détecter des cibles relativement proches de leurs encaissants, i.e. on a pu appliquer l'EM à des problèmes pour des matériaux au centre de la Figure 1.1. Par exemple, la détection d'eau ou la délimitation des bassins sédimentaires ou des zones d'altération. L'EM s'applique également très bien à la détection de cibles métalliques (tuyaux, câbles, mines, etc.) ou d'intérêt archéologique.

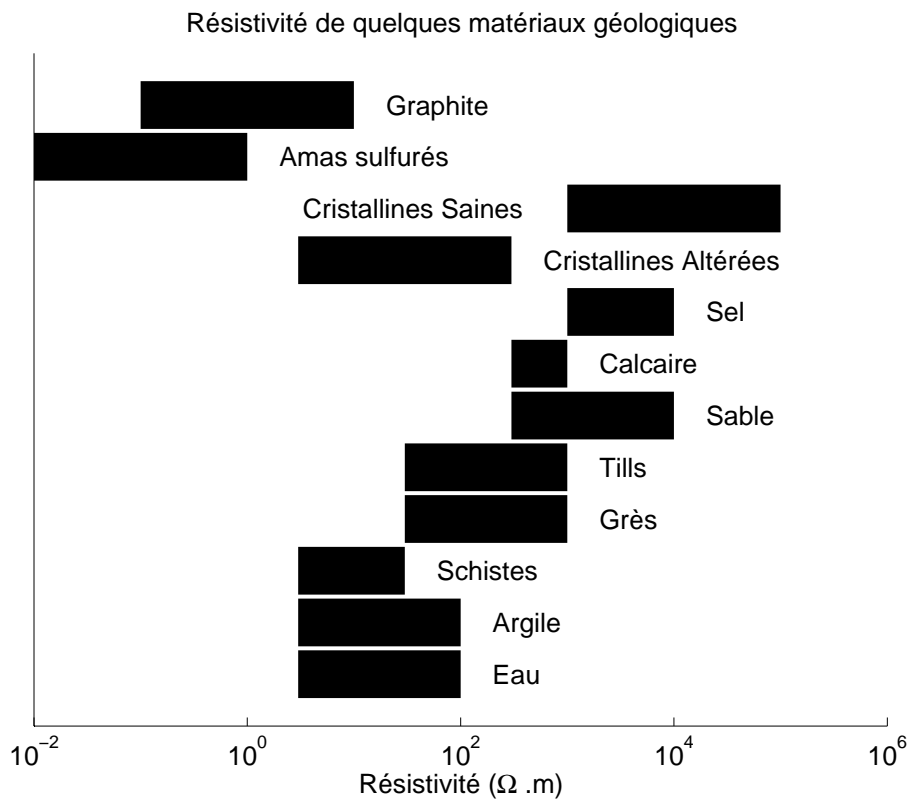


Figure 1.1: Résistivité électrique de quelques matériaux du sous-sol. Selon Palacky, in *Le P'tit Vert*.

Mais comment les courants électriques circulent-ils dans les matériaux géologiques?

La plupart des matériaux géologiques sont de mauvais conducteurs, sauf les oxydes et sulfures métalliques et le graphite.

Il en résulte que la conduction dans les roches est la plupart du temps de nature électrolytique, i.e. due à la présence de fluide dans les pores et/ou les fractures de la roche. Evidemment, la nature du fluide joue un rôle essentiel: l'eau est plus conductrice que les hydrocarbures et sera d'autant plus conductrice que sa concentration en sels sera élevée.

Il existe plusieurs modèles reliant la porosité et la conductivité électrique. Nous nous limiterons ici à présenter la relation d'Archie. Développée pour les roches sédimentaires, mais appliquée à tous les types de roches, la Loi d'Archie est couramment utilisée. Il s'agit d'une relation empirique, donc n'étant pas à l'origine basée sur un modèle physique. Aujourd'hui, on peut

expliquer la relation en puissance par la dimension fractale ¹ du réseau poreux, mais M. Archie était bien loin de tout ça dans les années 1950 (et de toutes façons, vous verrez tout ça en détail l'an prochain en Physique des Roches). Cette Loi est une loi de puissance

$$\rho = \rho_f a \phi^{-m}$$

où ρ et ρ_f sont les résistivités de la roche et du fluide, a est le coefficient de saturation, ϕ est la porosité et m est l'exposant, aussi connu sous le nom de facteur de cimentation. Notez que cette relation n'est plus valable si la roche contient de l'argile. En effet, la présence d'argile dans une roche poreuse contribue largement à augmenter sa conductivité électrique, puisqu'il contribue à accroître la concentration des ions dans la phase aqueuse.

La figure suivante montre l'influence de la porosité sur la résistivité, pour une roche saturée en eau douce ($\rho_f = 100 \Omega.m$), et pour différentes valeurs de m . On remarque que plus m est élevé, moins la décroissance de ρ est grande, i.e. moins la porosité joue un rôle important.

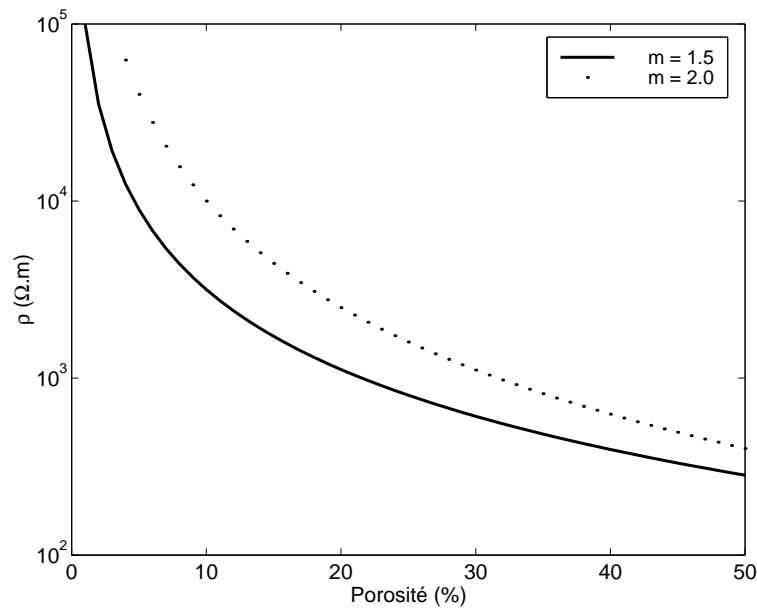


Figure 1.2: Loi d'Archie pour des porosités de 0 à 50%. La résistivité de l'eau est de $100 \Omega.m$.

Gardez à l'esprit que les méthodes permettant de déterminer la résistivité électrique (i.e. méthodes électriques et EM) sont particulièrement appro-

¹Voir par exemple Nigmatullin et al., J. Phys. D: Appl. Phys., vol. 25, pp. 32-37, 1992.

priées pour l'investigation des zones poreuses (e.g. nappes phréatique, zones de fractures, gouges de failles, zones de fusion partielle). Voici deux exemples à des échelles très différentes:

(a) Le premier est une prospection EM à l'aplomb du Gazoduc Trans-Européen (Fig. 1.3) qui passe juste au sud de Strasbourg (Geispolsheim). Ici, on a utilisé un système à deux bobines émettrice et réceptrice à une fréquence de 1075 Hz.

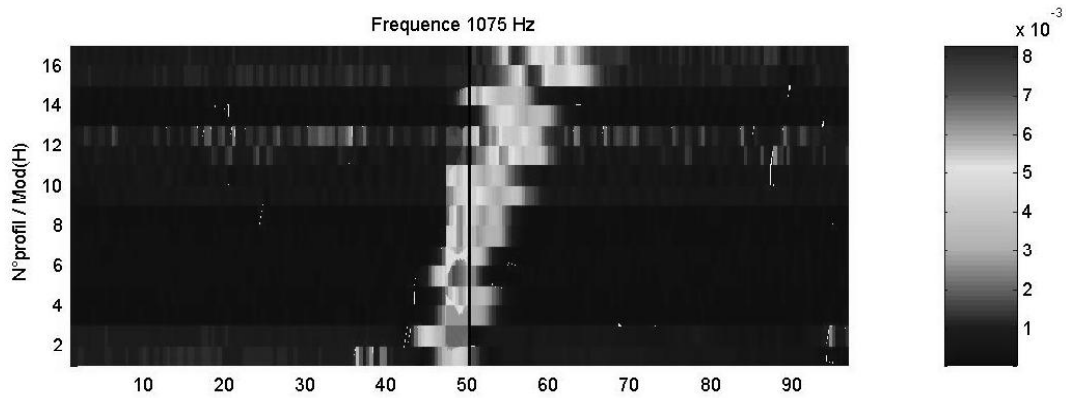


Figure 1.3: Où est donc ce pipeline?

(b) Le deuxième est une prospection magnétotellurique qui utilise les champs EM naturels de la terre pour étudier sa conductivité électrique. Nous avons réalisé une prospection MT le long d'un profil traversant le Népal (de l'Inde au Tibet; Fig. 1.4). La structure la plus remarquable est cette zone très peu résistante sous les stations 33 à 31. Elle semble être juste en-dessous des hypocentres des séismes enregistrés dans cette région (points), suggérant une relation entre conducteurs et séismes profonds.

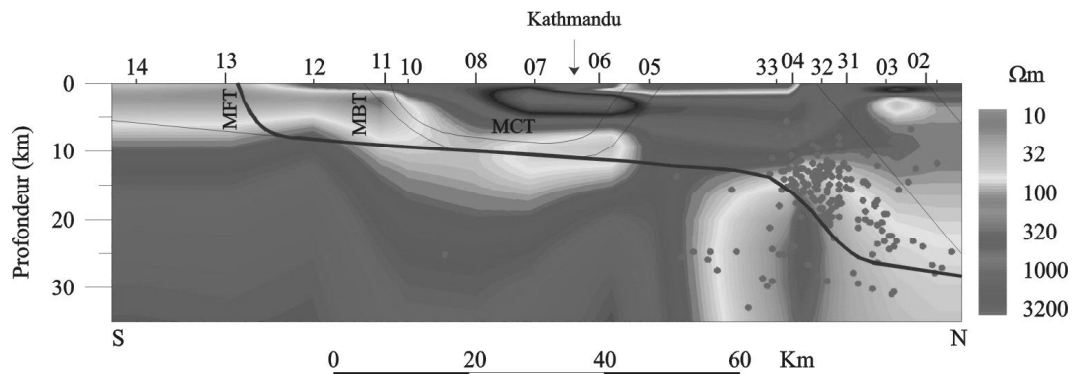


Figure 1.4: Coupe de la résistivité électrique sous le Népal.

Chapitre 2

Les équations de Maxwell homogènes

J.C. Maxwell ¹ a unifié les travaux d'Ampère et de Faraday. Les équations qui portent son nom gouvernent tous les phénomènes électromagnétiques et peuvent être couplées grâce aux *relations constitutives* (cf. chapitre suivant). Par homogène, on entend ici qu'il n'y a pas de source dans le volume d'intérêt. Dans plusieurs applications géophysiques, cette restriction est justifiée: par exemple en prospection VLF pour laquelle la source est à plusieurs centaines de km du domaine d'étude.

$$\nabla \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{h} = \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} + \vec{j} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{b} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{d} = \rho \quad (2.4)$$

où \vec{e} est le champ électrique (V/m), \vec{b} l'induction magnétique* (Tesla), \vec{d} le déplacement diélectrique (C/m²), \vec{h} le champ magnétique* (A/m), \vec{j} la densité de courant (A/m²) et ρ la densité de charge électrique (C/m³).

Un petit mot sur la notation. Dans le but d'alléger le texte, on utilisera les conventions suivantes dans ce cours: les champs en domaine temporel

¹Les bonnes biographies de James Clerk Maxwell sont nombreuses. Notons seulement ici qu'il a présenté sa première conférence à la Royal Society of Edinburgh à l'âge de 14 ans (sujet: les ovales) et que malgré ses dons exceptionnels, il n'a pas été Major de son collège, ayant été devancé par un type (nommé Campbell) devenu plus tard prof de Grec ancien. Campbell a par la suite écrit une biographie de Maxwell.

sont en minuscules, les champs en domaine de Fourier (fréquentiel) sont en MAJUSCULES. On spécifiera lorsque la transformation de Fourier concerne également les variables spatiales. Par défaut, les T.F. ne se font qu'en temps vs fréquence.

Prenons la divergence de (2.2): on obtient

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{h} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \quad (2.5)$$

Les champs et courants sont continus et dérivables en tous points car il n'y a pas de singularité reliée à une source. On peut donc permuter l'ordre de dérivation.

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{h} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{d} + \nabla \cdot \vec{j} \quad (2.6)$$

Le terme de gauche est identiquement nul. Insérons (2.4) dans l'équation ci-dessus:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{j} \quad (2.7)$$

Pour un milieu homogène peu conducteur, tels que par exemple les matériaux géologiques, les charges libres ρ_l se dissipent très rapidement (i.e. redeviennent liées). Par exemple, pour un matériau de résistivité $10000 \Omega.m$, cette dissipation dure moins d'une microseconde. Comme les fréquences utilisées en EM sont la plupart du temps inférieures à 10 kHz, on peut supposer que $\partial \rho_l / \partial t = 0$. Il ne reste donc que

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.8)$$

Notez que ceci ne sera valable que pour un milieu homogène. Nous verrons plus loin que des hétérogénéités provoquent des accumulations de charges aux interfaces et que par conséquent $\partial \rho / \partial t \neq 0$.

**Digression.* Dans les cours de physique que vous avez suivis jusqu'à maintenant, vos profs vous ont sans doute dit que \vec{b} était le champ magnétique. Ici, on vous dit que c'est \vec{h} ! On vous aurait menti?

Non, pas vraiment. Ça dépend de quoi on parle: si on traite de la quantité physique fondamentale, alors \vec{h} est le vrai champ magnétique. Là où le bât blesse, c'est que tout fondamental qu'il soit, \vec{h} n'est pas mesurable. Ce qui est mesuré est \vec{b} . Par exemple, si on place une bobine pour mesurer le champ magnétique, ce qui est mesuré est la force électromotrice *induite* dans la bobine, i.e. $N\pi r^2 \partial \vec{b} / \partial t$ pour une bobine circulaire de rayon r constituée de N tours.

Chapitre 3

Les relations constitutives

Elles relient entre elles les champs, charges et courants introduits ci-dessus et sont habituellement dépendantes de la fréquence

$$\vec{D} = \epsilon(\omega, \vec{e}, \vec{r}, T, P, \dots) \vec{E} \quad (3.1)$$

$$\vec{B} = \mu(\omega, \vec{e}, \vec{r}, T, P, \dots) \vec{H} \quad (3.2)$$

$$\vec{J} = \sigma(\omega, \vec{e}, \vec{r}, T, P, \dots) \vec{E} \quad (3.3)$$

où les tenseurs ϵ, μ, σ sont la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique respectivement et qui dépendent, entre autres, de la fréquence (ils peuvent aussi dépendre de la position, de la température, de la pression, etc.). Ces paramètres ne sont que les propriétés physiques des roches du sous-sol: la composition, la porosité, le degré d'altération, par exemple, peuvent aussi bien sûr influencer ces propriétés.

Les éléments de ces tenseurs sont complexes, ce qui entraîne bien sûr un déphasage entre \vec{D} et \vec{E} , \vec{B} et \vec{H} , \vec{J} et \vec{E} . Ils peuvent aussi avoir un comportement non linéaire, i.e. ϵ dépendant de \vec{E} .

Cependant pour l'immense majorité des cas en exploration EM, les propriétés physiques tensorielles exprimées ci-haut peuvent être simplifiées moyennant ces deux hypothèses:

- tous les milieux sont linéaires, isotropes et homogènes et leurs propriétés physiques ne varient qu'avec la fréquence, ce qui a pour effet de ramener les tenseurs à des scalaires,

- la perméabilité magnétique est égale à celle du vide, i.e. $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H/m}$.

Nous ne tiendrons plus compte de ces hypothèses lorsque nous traiterons certains cas particuliers plus loin, mais elles nous permettront d'alléger un

peu le traitement des équations de base sans avoir de conséquences dramatiques sur leur signification physique. Moyennant ces restrictions, les relations constitutives deviennent:

$$\vec{D} = [\epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega)]\vec{E} = \epsilon\vec{E} \quad (3.4)$$

$$\vec{J} = [\sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega)]\vec{E} = \sigma\vec{E} \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (3.6)$$

où la permittivité et la conductivité sont des fonctions complexes de la fréquence alors que la perméabilité magnétique est réelle et ne dépend pas de la fréquence.

En domaine temporel, ces produits dans le domaine fréquentiel deviennent des convolutions et les relations constitutives sont alors

$$\vec{d} = \epsilon * \vec{e} \quad (3.7)$$

$$\vec{j} = \sigma * \vec{e} \quad (3.8)$$

$$\vec{b} = \mu * \vec{h} \quad (3.9)$$

Pour simplifier, on supposera ici que ϵ , σ et μ sont indépendants de la fréquence et donc

$$\vec{d} = \epsilon\vec{e} \quad (3.10)$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{e} \quad (3.11)$$

$$\vec{b} = \mu\vec{h} \quad (3.12)$$

Chapitre 4

Les Ondes électromagnétiques

Prenons le rotationnel des deux premières équations de Maxwell

$$\nabla \times \nabla \times \vec{e} + \nabla \times \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{h} - \nabla \times \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} = \nabla \times \vec{j} \quad (4.2)$$

et, faisant appel aux relations constitutives temporelles,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{e} + \mu \nabla \times \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{h} - \epsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \sigma \nabla \times \vec{e} \quad (4.4)$$

Comme les fonctions vectorielles \vec{e} et \vec{h} et leurs dérivées premières et secondes sont continues dans tout le domaine, on peut interchanger l'ordre des opérateurs de dérivation. Les équations deviennent alors

$$\nabla \times \nabla \times \vec{e} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{h} = 0 \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{h} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{e} = \sigma \nabla \times \vec{e} \quad (4.6)$$

Substituant à $\nabla \times \vec{h}$ et $\nabla \times \vec{e}$ leurs équivalences obtenues des équations de Maxwell,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{e} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = 0 \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{h} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0 \quad (4.8)$$

Rappel: $\nabla \times \nabla \times \vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}$. On peut alors développer les relations précédentes. Mais que valent $\nabla \cdot \vec{e}$ et $\nabla \cdot \vec{h}$?

Pour celle-ci, on sait que $\nabla \cdot \vec{b} = 0$, comme $\vec{h} = \vec{b}/\mu$ et que μ est scalaire et égal à μ_0 pour la plupart des roches, alors $\nabla \cdot \vec{h} = 0$. Ce n'est pas si simple pour $\nabla \cdot \vec{e}$: on a montré dans la section 1 que $\nabla \cdot \vec{j} = 0$. Développons:

$$\nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot \sigma \vec{e} = 0 \quad (4.9)$$

$$= \nabla \sigma \cdot \vec{e} + \sigma \nabla \cdot \vec{e} = 0 \quad (4.10)$$

Comme le milieu est homogène, $\nabla \sigma = 0$ et donc $\nabla \cdot \vec{e} = 0$. Mais on doit insister sur le fait que ceci n'est vrai que pour un milieu homogène. Dans la plupart des situations, $\nabla \cdot \vec{e} \neq 0$. (En fait, les contrastes de σ jouent le rôle de sources secondaires. Mais on reparlera de tout ça plus tard.)

$$\Delta \vec{e} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = 0 \quad (4.11)$$

$$\Delta \vec{h} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0 \quad (4.12)$$

Arrêtons-nous un moment aux dérivées temporelles: on voit qu'il y a un terme en dérivée seconde et un en dérivée première. Quelle est la signification physique de ces deux termes? Pour en savoir plus, passons un moment dans le domaine de Fourier (rappel: $\frac{\partial A}{\partial t} = i\omega A$)

$$\Delta \vec{e} + (\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma) \vec{e} = 0 \quad (4.13)$$

$$\Delta \vec{e} + k^2 \vec{e} = 0 \quad (4.14)$$

Cette dernière équation est aussi connue sous le nom d'équation de Helmholtz, que nous reverrons plus tard, où

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma \quad (4.15)$$

k étant le nombre d'onde EM. Tout est là-dedans, donc apprenez cette relation par coeur SVP. Regardons k^2 de plus près: on voit qu'il s'agit d'un nombre complexe. On va donc s'intéresser à deux cas de figure.

1er cas. $\omega^2 \mu \epsilon \gg \omega \mu \sigma$ ou $\frac{\omega \epsilon}{\sigma} \gg 1$. Dans ce cas, $k^2 \approx \omega^2 \mu \epsilon$ est réel et donc k l'est aussi. Ici, les ondes EM sont sensibles à la permittivité diélectrique ϵ . Si l'on retourne dans le domaine temporel, on a

$$\Delta \vec{e} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.16)$$

On reconnaît ici l'équation d'onde utilisée en sismique. Elle décrit une onde se propageant à la vitesse $1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Ce terme en dérivée seconde est donc un terme de *propagation*. Il est relié au courant de *déplacement*.

La propagation se retrouve dans deux cas de figure: soit une conductivité électrique σ très faible, soit une fréquence très élevée. C'est le cas pour le géoradar aux fréquences supérieures à la dizaine de MHz.

2e cas. $\omega\mu\sigma \gg \omega^2\mu\epsilon$ ou $\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \ll 1$. En Physique, on parle de l'approximation en régime quasi-stationnaire (ARQS, quasi-static approximation en v.o.) ou approximation basse fréquence.

Dans ce cas, $k^2 \approx -i\omega\mu\sigma$ est un imaginaire pur et donc k est complexe. La propriété physique prépondérante ici est la conductivité électrique σ . Dans le domaine temporel, on a

$$\Delta \vec{e} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = 0 \quad (4.17)$$

On reconnaît ici l'équation de diffusion (comparer sa forme avec celle de l'équation de la chaleur). Il s'agit ici d'un champ diffusant, donc dont l'amplitude diminue avec la distance caractéristique $1/\sqrt{\mu\sigma}$. Ce terme est donc un terme de *diffusion*. On remarque aussi que nous avons affaire à un courant de *conduction*.

Pour avoir diffusion, il faut avoir soit de basses fréquences, soit une conductivité élevée. C'est le cas pour l'immense majorité des méthodes EM. Nous allons donc nous consacrer essentiellement à ce cas de figure.

Solution de l'équation de diffusion

Reprenons l'équation de diffusion, en se limitant au cas 1D dans la direction verticale

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0 \quad (4.19)$$

dont les solutions sont classiquement connues

$$\vec{e} = \vec{e}_0^+ e^{-i(kz-\omega t)} + \vec{e}_0^- e^{-i(-kz-\omega t)} \quad (4.20)$$

$$\vec{h} = \vec{h}_0^+ e^{-i(kz-\omega t)} + \vec{h}_0^- e^{-i(-kz-\omega t)} \quad (4.21)$$

où \vec{e}_0^+ et \vec{e}_0^- sont les champs électrique descendant et montant à la surface respectivement.

Le nombre d'onde étant complexe, exprimons-le par $k = \alpha - i\beta$ où α et β sont bien sûr des nombres réels. Dans l'approximation quasi-stationnaire, α

et β sont identiques et égaux à $\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$, car $k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma}$. En nous limitant aux solutions descendantes pour lesquelles on s'attend à ce que les champs diminuent avec la profondeur (z croissant), on retrouve

$$\vec{e} = \vec{e}_0^+ e^{-i\alpha z} e^{-\beta z} e^{i\omega t} \quad (4.22)$$

$$\vec{h} = \vec{h}_0^+ e^{-i\alpha z} e^{-\beta z} e^{i\omega t} \quad (4.23)$$

Qu'est-ce qu'il y a là-dedans?

a) $e^{-i\alpha z}$: on a une oscillation selon z

b) $e^{i\omega t}$: on a une oscillation selon t

c) $e^{-\beta z}$: on a une diminution de l'amplitude du champ avec la profondeur (atténuation). Une onde EM verra son amplitude diminuer d'un facteur $1/e$ ($\approx 36,8\%$) à une profondeur $\delta = 1/\beta$ mètres. Ici, l'atténuation ne doit pas être comprise comme une perte d'énergie, comme c'est le cas en sismique. La correspondance avec le paramètre sismique Q est discuté plus bas.

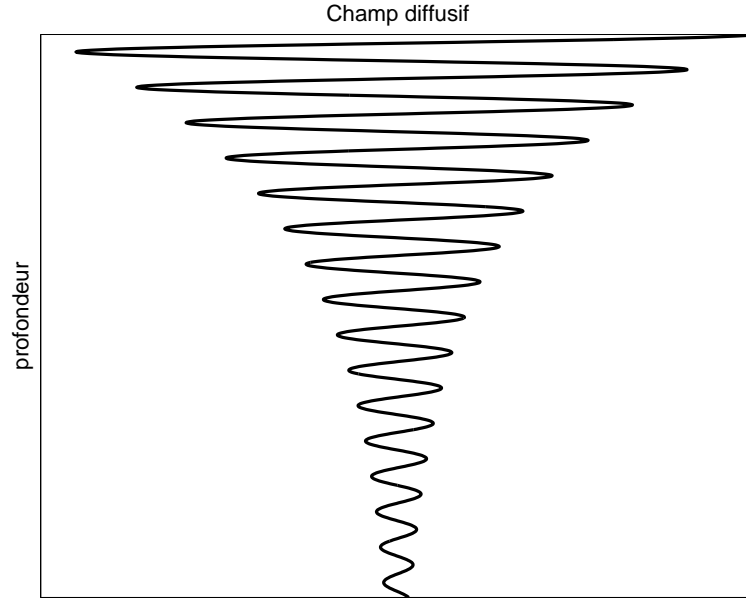


Figure 4.1: $\vec{e}_0^+ e^{-i\alpha z} e^{-\beta z}$.

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \approx 503 \sqrt{\frac{1}{\sigma f}} m \quad (4.24)$$

On remarque que cette profondeur (appelée souvent profondeur de pénétration ou profondeur de peau) sera d'autant plus faible que la conductivité ou la fréquence sont élevées. Par exemple, chacun sait que les rayons ultraviolets

(haute fréquence) se contentent de dorer votre épiderme, alors que les rayons infrarouges (basse fréquence) réchauffent tout votre être. En Physique, on parle d'effet de peau (skin effect). Ceci est bien entendu un point fondamental à retenir pour tout type d'exploration au moyen d'ondes électromagnétiques. Cette formule pour la profondeur de peau est un peu la "formule magique" de l'explo EM. Tâchez de vous en souvenir!

Les équations de Maxwell nous indiquent également que \vec{e} et \vec{h} sont perpendiculaires car \vec{h} est parallèle au rotationnel de \vec{e} . Par exemple, pour le cas d'une onde se propageant selon z , on aura \vec{e}_x et \vec{h}_y qui définiront une onde plane.

Qu'en est-il de la phase? On peut définir un plan à phase constante:

$$\vec{e} = \vec{e}_0^+ e^{-i(\alpha z - \omega t)} e^{-\beta z} = \vec{e}_0^+ e^{-ic} e^{-\beta z} \quad (4.25)$$

où c représente la phase qui détermine l'amplitude de l'onde en fonction de z et t , $c = \alpha z - \omega t$. On peut obtenir la vitesse de phase V_{ph}

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\alpha} = V_{ph} \quad (4.26)$$

qui sera positive si l'onde se propage vers le bas et négative si elle se propage vers le haut.

On remarque que la vitesse de phase est fonction de la fréquence, ce qui nous amène à conclure que les milieux géologiques sont dispersifs en mode diffusif. Il est intéressant de constater que cette dispersion est présente même si les propriétés physiques du milieu ne dépendent pas de la fréquence. En d'autres mots, même pour un milieu isotrope, homogène, linéaire, etc. ce phénomène de dispersion des ondes EM sera présent. En effet

$$V_{ph} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (4.27)$$

donc même avec μ et σ constant, le milieu est dispersif.

A fortiori, ce phénomène sera également important lorsque les propriétés physiques seront complexes. Revenons à la seconde équation de Maxwell en domaine de Fourier:

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + i\epsilon\omega) \vec{E} \quad (4.28)$$

On constate que le courant de conduction est en phase avec le champ électrique si σ est réel mais que le courant de déplacement est en quadrature avec celui-ci pour ϵ réel. Mais que se passe-t-il si la conductivité et la permittivité sont complexes?

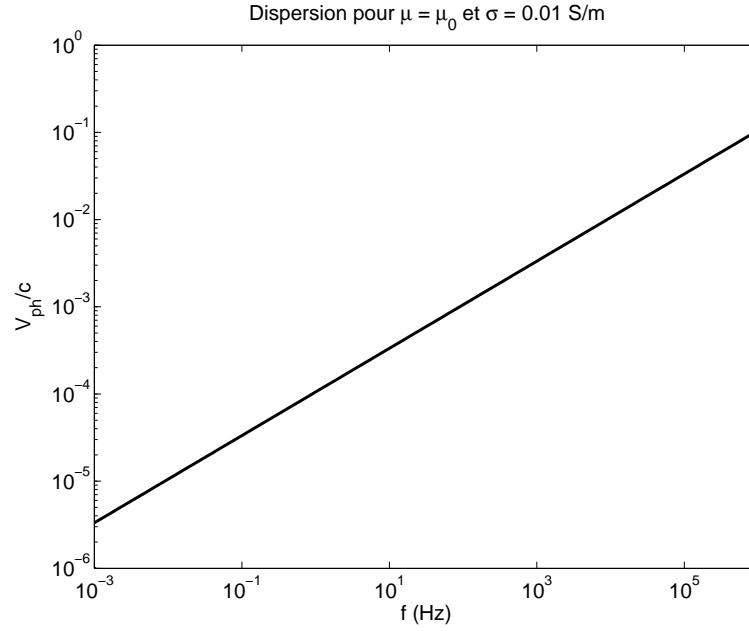


Figure 4.2: Dispersion d'une onde EM pour un milieu homogène. La vitesse est normalisée à $3 \cdot 10^8$ m/s.

$$\nabla \times \vec{H} = [(\sigma' + i\sigma'') + i(\epsilon' - i\epsilon'')\omega]\vec{E} = [(\sigma' + \omega\epsilon'') + i(\omega\epsilon' + \sigma'')]\vec{E} \quad (4.29)$$

On voit donc que les effets combinés de la partie réelle de σ et de la partie imaginaire de ϵ sont en phase. On définit l'angle de perte δ

$$\tan \delta = \frac{\sigma' + \omega\epsilon''}{\omega\epsilon' + \sigma''} \quad (4.30)$$

Plus haut, on a parlé d'atténuation pour le terme en $e^{-\beta z}$ (avec les bémols qui s'imposaient). Ici, il s'agit de l'atténuation au sens propre. En effet, le facteur de qualité Q utilisé pour les ondes sismiques est obtenu via $Q = 1/\delta$.

A très basses fréquences, $\tan \delta = \sigma'/\sigma''$ et à très hautes fréquences, $\tan \delta = \epsilon''/\epsilon'$. Aux fréquences d'intérêt en prospection EM, on peut considérer ϵ comme étant réel. Donc

$$\tan \delta = \frac{\sigma'}{\omega\epsilon + \sigma''} \quad (4.31)$$

On peut démontrer que la solution de l'équation d'onde est la même que précédemment avec

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \delta} + 1} \quad (4.32)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \delta} - 1} \quad (4.33)$$

Une grande valeur de $\tan \delta$ implique un grand β et donc une faible profondeur de pénétration.

Appendice I - Unités SI

Symbole	Paramètre		Unité SI
I	Courant électrique		A
U	Potentiel électrique		V
R	Résistance	Ω	V/A
L	Self-inductance	H	V.s/A
C	Capacitance	F	A.s/V
σ	Conductivité électrique	S/m	A/V.m
ρ	Résistivité électrique	$\Omega.m$	V.m/A
ϵ	Permittivité diélectrique	F/m	A.s/V.m
μ	Perméabilité magnétique	H/m	V.s/A.m
\vec{E}	Champ électrique	$-\nabla U$	V/m
\vec{H}	Champ magnétique		A/m
\vec{D}	Déplacement diélectrique	$\epsilon \vec{E}$	A.s/m ²
\vec{B}	Induction magnétique	$\mu \vec{H}$	V.s/m ²
\vec{J}	Densité de courant électrique	$\sigma \vec{E}$	A/m ²
ρ	Densité de charges	C/m ³	A.s/m ³
\vec{M}	Polarisation magnétique		A/m ²
\vec{P}	Polarisation électrique		A.s/m ²
\vec{A}	Potentiel vecteur électrique	$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$	A
\vec{F}	Potentiel vecteur magnétique	$\vec{E} = -\nabla \times \vec{F}$	V
ϕ	Flux magnétique	Wb	V.s
Z	Impédance onde plane	E/H	V/A
Y	Admittance onde plane	H/E	A/V
\vec{J}_e^s	Densité de source électrique		A/m ²
\vec{J}_m^s	Densité de source magnétique		V/m ²
e	Force électromotrice		V
N	Nombre d'induction	s/δ	1
γ	Paramètre d'induction	$\omega \mu \sigma s^2$	1

Ressources

En appui à ce cours, nous disposons d'ouvrages, revues et logiciels.

Papier

Ces titres sont tous disponibles à la bibliothèque enseignement

- Nabighian, M.N. (éditeur). *Electromagnetic methods in applied geophysics*. Investigations in geophysics No. 3, Soc. Explor. Geophys., Tulsa.

Cet ouvrage comporte deux volumes: le premier (surnommé P'tit Vert) porte sur la théorie et le second (Gros Vert) sur les applications. Les deux volumes sont disponibles à la bibliothèque. La structure de notre cours est fortement inspirée du chapitre 4 du P'tit Vert écrit par Ward & Hohmann.

- Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, R.E. & Keys, D.A. *Applied Geophysics*. Cambridge University Press.

Un grand classique couvrant les principales méthodes géophysiques. Contient juste la théorie qu'il faut et regorge d'exemples d'applications. Il y a de bons TD (voire des TP!) à la fin de chaque chapitre (le 7 pour nous).

- Weaver, J.T. *Mathematical theory of electromagnetic induction*. Editeur?

J'ai eu la chance d'avoir M. Weaver comme professeur. Malgré son titre laissant croire qu'il s'agit d'un bouquin pour les matheux, la physique y est brillamment présentée. Ce livre s'adresse à ceux qui sont intéressés par l'EM à grande échelle (GDS, MT). La discussion dans le chapitre 13 est basée sur cet ouvrage.

- Wait, J.R. *Geo-electromagnetism*, Editeur?

Encore un grand nom de l'EM. Ce livre regorge de démonstrations pour toutes les méthodes possibles et imaginables, souvent développées par l'auteur.

- Nous avons à la bibliothèque recherche les revues *Geophysics*, *Geophysical Prospecting*, *Journal of Applied Geophysics*, *Geophysical Journal International*, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* dans lesquelles on retrouve les derniers développements sur le sujet.

· Elmag en général : Les éditeurs français produisent en quantité pléthorique des ouvrages sur l'elmag de base étudié en Sup/Spé et en DEUG. A mon avis, les livres d'occasion sont plus utiles (en plus de coûter moins cher) car les programmes ont évolué ces dernières années vers des contenus de moins en moins proches de ce que l'on traite ici.

Logiciels

Nous avons en salle info différents logiciels en appui aux TD d'Elmag 1A-Licence ainsi que pour l'interprétation des données des camps de terrain 3A-DEA. De nouveaux programmes sont ajoutés de temps à autre: demandez à Pascal ou à moi.

- GeoTutor : C'est la version "Education" d'un logiciel commercial (Petros Eikon, Canada) qui permet, entre autres, de modéliser les réponses EM de corps simples (prismes, plaques) pour une multitude de dispositifs. L'interface graphique nous facilite grandement les choses et un très bon outil de visualisation 3D permet de faire tourner l'image dans tous les sens et de zoomer. Ce logiciel peut également modéliser l'électrique et les méthodes potentielles.

- DIR2D : ce logiciel développé par l'équipe de J.T. Weaver permet de calculer rapidement la réponse en onde plane (i.e. AMT, MT, VLF) d'une distribution de conductivité 2D pour les modes TE et TM. Un shell Matlab permet de visualiser le modèle et les résultats.

- INV1D : développé aussi chez J.T. Weaver, ce programme réalise une inversion 1D de données AMT ou MT avec un algorithme minimisant le nombre de couches. C'est un peu l'anti-Niblett-Bostick!

- gemplot : Shell Matlab qui permet de visualiser des cartes de mesures GEM-2 (le ski).

- FullContact ¹ : programme calculant les champs EM en tout point (y,z) d'un contact (cf. chapitre XX) pour une onde plane incidente en mode TM. Un shell Matlab permet de visualiser le modèle et les résultats.

¹Pour mettre fin aux rumeurs, nous tenons à préciser ici que Jean-Claude van Damme n'a PAS contribué à la rédaction de ce soft, ni à son bêta-testing.