

Université Paris-Sud 11  
**Master 2 APIM et PIE**

## Introduction à la Physique des Plasmas

---

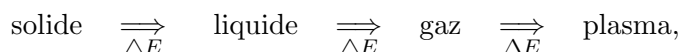
Jean-Luc Rimbault  
Laboratoire de Physique des Plasmas  
[jean-luc.rimbault@lpp.polytechnique.fr](mailto:jean-luc.rimbault@lpp.polytechnique.fr)



# Chapitre 1

## Introduction

Un plasma est un gaz ionisé. Comme tel, il est donc constitué en général d'électrons, d'ions, d'espèces atomiques ou moléculaires neutres et de photons. Un gaz ionisé étant obtenu par apport d'énergie à un gaz, les plasmas sont souvent présentés comme un "4ème état" de la matière, faisant suite aux phases solide, liquide et gazeuse :



le passage d'un état à l'autre étant réalisé par un certain apport d'énergie  $\Delta E$ .

### Génération et maintien des plasmas

A la différence des gaz neutres, les plasmas, du fait de leur caractère chargé, sont sensibles à l'action des forces électromagnétiques. Un gaz contenant toujours quelques charges libres (ne serait-ce que par l'effet du rayonnement cosmique), l'application d'un champ électrique peut communiquer une énergie suffisante aux particules les plus mobiles, les électrons, qui produisent une paire électron-ion par collisions sur les espèces neutres selon le schéma réactionnel :



où  $n$  désigne un atome ou une molécule neutre et  $i$  un ion. L'électron supplémentaire produit peut à son tour être accéléré par le champ électrique et entrer en collision avec un neutre, de sorte que l'on peut ainsi produire un plasma de densité finie par ce mécanisme *d'avalanche électronique*. La génération des plasmas par apport d'énergie électromagnétique n'est pas le seul processus de création des plasmas. L'apport direct de chaleur par élévation de la température (plasmas thermiques) ou par absorption de photons énergétiques (photoionisation) sont 2 autres exemples de processus générateurs de plasmas. L'ordre de grandeurs des énergies d'ionisation des atomes étant de l'ordre de quelques eV (pour les halogènes, sauf l'hydrogène) à la dizaine d'eV (pour les gaz rares), l'ordre de grandeur de l'énergie à apporter pour produire un plasma est de l'ordre de l'eV, soit 11 600 Kelvin.

Outre la question de génération des plasmas que nous venons de discuter brièvement, se pose la question essentielle de maintien du plasma. Dans les grandes lignes l'analyse de cet aspect résulte d'une problématique gains/pertes. Les espèces chargées sont créées en volume par ionisation mais perdues par diffusion (induites par les collisions ou la turbulence) vers les parois du réacteur (donc en surface), et éventuellement perdues également en volume si des mécanismes de recombinaisons de charges sont possibles dans le plasma étudié. Le maintien du plasma sur des temps suffisamment longs passe par cet équilibre.

### Diversité des plasmas

Pour prendre conscience de la grande diversité des plasmas naturels ou artificiels, il est courant de les placer schématiquement dans un diagramme  $n - T$  (cf. figure 1.1) Ce schéma est intéressant à plus d'un titre et va nous permettre d'affiner notre définition des plasmas. Le domaine limité par les droites  $k_B T = mc^2$ ,  $k_B T = E_F$ ,  $N_D = 1$  et  $k_B T = 1 \text{ eV}$  comprend la très grande majorité des plasmas les plus couramment étudiés : les plasmas dits "classiques". Aux extrémités de ce diagramme, on trouve les plasmas quantiques (aux basses températures et hautes densités) tels que  $E_F > k_B T$  où  $E_F$  est le niveau de Fermi<sup>1</sup>, relativistes (aux très hautes températures) où  $k_B T > mc^2$  et les plasmas très faiblement ionisés lorsque  $k_B T < 1 \text{ eV}$ .

Concentrons-nous sur la condition  $N_D > 1$  où  $N_D$  représente le nombre de charges dans la sphère dite de Debye. La sphère de Debye est la sphère de rayon  $R = \lambda_D$  où

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2}$$

est la longueur introduite par Debye et Hückel dans la théorie des électrolytes. Dans cette expression,  $n_0$  et  $T_e$  représentent respectivement la densité du plasma et la température électronique. La longueur de Debye joue un rôle central dans tous les systèmes comprenant des charges électriques libres, donc en particulier dans les plasmas. Pour montrer qu'elle apparaît de façon très naturelle, étudions le modèle le plus simple des plasmas : le plasma à une composante (OCP). Il s'agit d'un plasma où l'on considère que les seules charges mobiles sont les électrons, tandis que les ions, beaucoup plus massifs sont supposés immobiles et sont représentés par un fond uniforme chargé positivement qui assure la neutralité de l'ensemble. Si l'on suppose que les électrons sont en équilibre de Boltzmann, on peut donc écrire pour les densités d'électrons et d'ions :

$$n_e = n_0 \exp \left( \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right) \quad \text{et} \quad n_i = n_0,$$

où  $\varphi$  est le potentiel électrostatique. L'équation de Poisson de ce plasma s'écrit donc :

$$\Delta \varphi = -\frac{e}{\epsilon_0} \left( n_0 - n_0 \exp \left( \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right) \right)$$

Cette équation, que l'on appelle l'équation de Poisson-Boltzmann, est une équation différentielle non-linéaire qu'il n'est pas nécessaire de résoudre pour mettre en

---

1. On rappelle que le niveau de Fermi est tel que  $E_F \propto n^{2/3}$ .

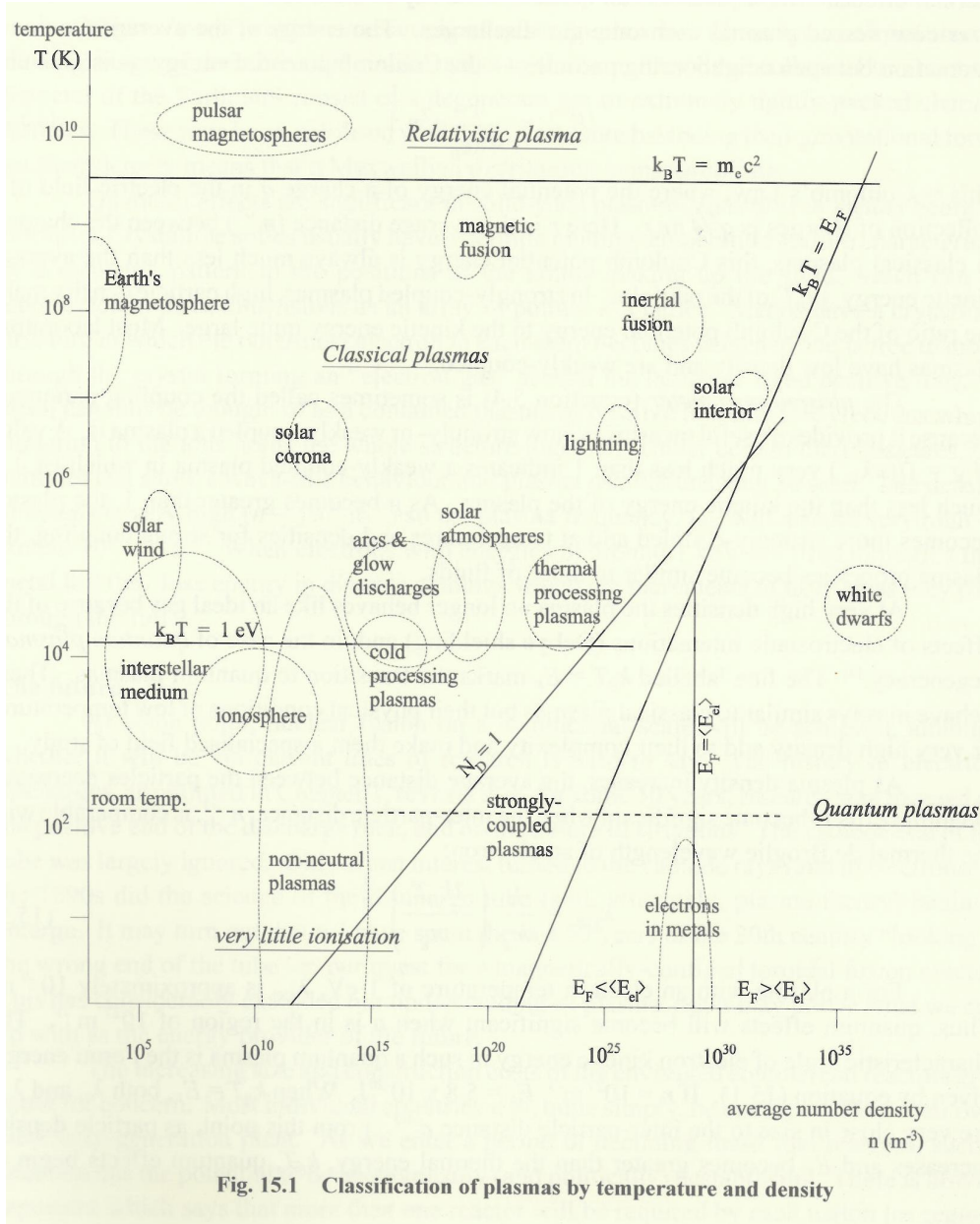


FIGURE 1.1 – Classification des plasmas (tiré de *Basic Plasma Physics*, Beryl Browning, Lulu, 2008)

évidence la longueur  $\lambda_D$ . Introduisons en effet un potentiel adimensionné par la définition  $\phi \equiv e\varphi/k_B T_e$ , et normalisons les distance à une longueur de référence  $L$  :  $X \equiv x/L$ . L'équation de Poisson Boltzmann s'écrit aussitôt sous la forme :

$$\left(\frac{\lambda_D}{L}\right)^2 \Delta\phi + \rho(\phi) = 0,$$

où  $\rho(\phi) \equiv 1 - e^\phi$  représente la densité de charges normalisée.

Deux cas limites sont à considérer :

- si  $\lambda_D \gg L$ , la densité de charges est négligeable, et l'équation de Poisson se réduit à l'équation de Laplace,  $\Delta\phi = 0$ , c'est-à-dire que le potentiel est le même que dans le vide : le plasma n'a pas altéré les variations spatiales du potentiel électrostatique. On dit également que c'est une situation sans écrantage.
- si  $\lambda_D \ll L$ , la densité de charges domine le premier terme, et l'équation de Poisson se ramène à l'équation de neutralité :  $\rho = 0$ . La neutralité est assurée exactement en tout point, on parle d'écrantage parfait dans cette situation.

Dans les situations intermédiaires, il s'opère une compétition entre la température qui contribue à homogénéiser la densité de charge et les forces électriques qui tendent à empêcher la séparation de charges. Plus précisément, on parle également de longueur d'écran pour la longueur de Debye, dans la mesure où le potentiel électrostatique se voit modifié sur une longueur de l'ordre de  $\lambda_D$ . Dit autrement, le plasma apparaît comme quasi-neutre sur des échelles de longueurs plus grandes que  $\lambda_D$ . Pour le voir il suffit de considérer l'équation de Poisson Boltzmann à une dimension d'espace dans sa limite linéarisée. On voit aisément dans cette situation, que l'on passe d'un potentiel non écranté linéaire à un potentiel exponentiellement décroissant avec la distance :

$$\varphi(x) = Ax + B \quad \text{dans le vide} \quad \implies \quad \varphi(x) \propto e^{-x/\lambda_D} \quad \text{dans le plasma}$$

Dans la situation générique, à 3 dimensions d'espace, le potentiel non écranté est le potentiel coulombien, le potentiel écranté un potentiel de Yukawa :

$$\frac{1}{r} \quad \implies \quad \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}$$

Le nombre de charges dans la sphère de Debye est donc tel que  $N_D \propto n_0 \lambda_D^3$ . Pour comprendre ce que traduit la condition  $N_D \gg 1$ , il est intéressant de considérer “le paramètre plasma”,  $\Xi$ , défini comme le rapport de l'énergie potentielle moyenne du plasma avec l'énergie cinétique moyenne du plasma. Pour évaluer cette dernière on peut utiliser le théorème d'équipartition de l'énergie qui conduit à l'approximation  $\langle E_c \rangle \sim k_B T_e$ . La distance moyenne entre les particules dans un plasma de densité  $n_0$  variant comme  $n_0^{-1/3}$ , l'énergie potentielle électrostatique varie comme  $e^2/(4\pi\epsilon_0 n_0^{-1/3})$ . On peut donc écrire :

$$\Xi \equiv \frac{\langle E_p \rangle}{\langle E_c \rangle} \propto \frac{e^2 n_0^{1/3} / \epsilon_0}{k_B T_e} \propto \frac{1}{N_D^{2/3}}$$

Ce résultat montre que la condition  $N_D \gg 1$ , correspond à des plasmas où l'énergie cinétique domine. Les plasmas “classiques” sont des systèmes désordonnés assimilables à des gaz chargés où les effets collectifs (cf. l'effet d'écran précédemment décrit) sont significatifs.

L'ensemble des considérations précédentes nous permet donc d'affiner notre définition des plasmas :

“Un plasma est un mélange quasi-neutre de particules chargées caractérisées par un comportement collectif”

A un niveau plus qualitatif, en fonction du domaine de densités et températures considérées, on remarquera que les plasmas classiques comprennent à la fois des plasmas qui relèvent de l’astrophysique (vent solaire, couronne solaire), de plasmas industriels (arcs, éclairage ...) ou de plasmas artificiels imaginés à des fins de production d’énergie (fusion magnétique et inertielle). De fait, depuis de l’origine de la discipline<sup>2</sup>, la communauté des plasmiciens s’est progressivement organisée en 3 sous-communautés (plasmas froids, chauds et spatiaux) dont nous présentons quelques traits caractéristiques dans ce qui suit.

### Plasmas de laboratoire : plasmas froids

*Les plasmas faiblement ionisés* (ou *plasmas froids* ou décharges électriques) sont créés au sein de réacteurs initialement remplis de gaz neutres et alimentés par une source extérieure d’énergie électromagnétique. Les paramètres extérieurs de contrôle d’une décharge comprennent donc le choix d’un gaz à une pression déterminée, les diverses longueurs qui fixent la géométrie du réacteur choisi, et les grandeurs physiques caractéristiques de la source d’énergie (fréquence caractéristique d’alimentation, tension d’alimentation ou puissance absorbée par le dispositif) (cf. figure 1.2).

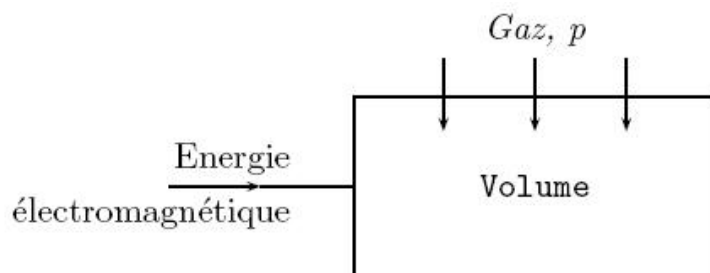


FIGURE 1.2 – Schéma de principe d’un réacteur à plasma

La nature des gaz utilisés dépend de l’application visée ; parmi les plus simples, on peut citer, l’argon ou le xénon, souvent utilisés comme gaz modèles pour les études académiques, l’oxygène moléculaire,  $O_2$ , et le fluorure de bore,  $BF_3$  utilisés respectivement pour la croissance de films d’oxyde de silicium ou de dépôt de bore sur des substrats de silicium.

Les gaz sont utilisés sur une large gamme de pression, typiquement du mTorr à la pression atmosphérique. Les unités courantes sont le Torr et le bar. On rappelle les correspondances :

---

2. Le physicien américain Irving Langmuir a introduit le terme “plasma” à la fin des années 20.

$$\begin{aligned}
1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr}, \\
1 \text{ bar} &= 10^5 \text{ Pa}, \\
1 \text{ Torr} &= 133.3 \text{ Pa}.
\end{aligned}$$

Plusieurs types de réacteurs, qui correspondent à différentes façons de coupler l'énergie électromagnétique au plasma ont été imaginés. Par exemple, dans les réacteurs dits capacitifs, une différence de potentiel, continue ou variable dans le temps est directement appliquée entre deux électrodes qui donne naissance à un champ électrique agissant sur les charges dans le plasma. Dans les réacteurs dits inductifs, on fait circuler un courant variable dans une des électrodes qui crée un champ magnétique variable et donc un champ électrique également variable par induction.

Selon le type de réacteur utilisé, les densités électroniques (ou ioniques) observées sont de l'ordre de  $10^9$  à  $10^{12}$  particules par  $\text{cm}^3$  (voire davantage pour les microdécharges où l'une au moins des dimensions du dispositif est micrométrique). Ces densités sont souvent très faibles par rapport à la densité des neutres qui sont les espèces majoritaires. Dans la plupart des plasmas froids, *les taux d'ionisation sont très faibles*, de  $10^{-5}$  à  $10^{-1}$ . On a donc en général pour le taux d'ionisation  $\alpha$  :

$$\alpha \equiv \frac{n_e}{n_e + n_n} \approx \frac{n_e}{n_n} \ll 1 \quad \text{plasmas faiblement ionisés}$$

Du fait du rapport des masses, les transferts de quantité de mouvement ou

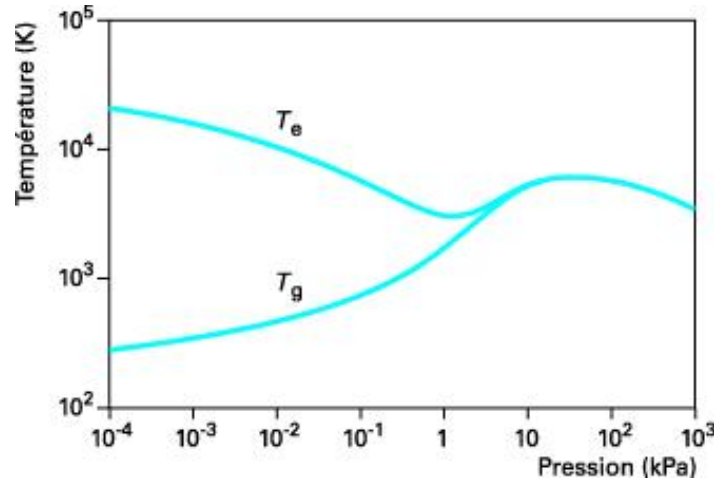


FIGURE 1.3 – Température électronique,  $T_e$ , et température du gaz,  $T_g$ , en fonction de la pression au sein d'un plasma d'argon.

d'énergie sont très faibles des électrons vers les neutres, et très efficaces (masses voisines) entre les ions et les neutres. En conséquence, les températures des espèces légères (électrons) et des espèces lourdes (ions, neutres) sont très différentes au sein d'un plasma froid (au moins à basse pression sur des échelles de temps suffisamment courtes) : *les plasmas froids ne sont pas des milieux à l'équilibre*



*thermodynamique*, les températures des ions et du gaz sont voisines, et d'un à 2 ordres de grandeurs plus faibles que la température des électrons :

$$T_i \approx T_n \quad \text{et} \quad \frac{T_i}{T_e} \ll 1 \quad \text{plasmas hors-équilibre}$$

Le raisonnement qui précède vaut pour les plasmas d'assez basses pressions où les collisions restent suffisamment peu nombreuses. En se rapprochant de la pression atmosphérique et au-delà, le faible transfert de quantité de mouvement entre électrons et atomes est compensé par le taux élevé des collisions et les températures des espèces légères et lourdes tendent à s'égaliser : les plasmas sont alors à l'équilibre thermodynamique<sup>3</sup>(cf. figure 1.3).

### Plasmas de laboratoire : plasmas chauds

Dans d'autres dispositifs, comme ceux à confinement magnétique (Tokamaks), à confinement par lasers (fusion inertielle) ou par compression magnétique (Z-pinch), les plasmas sont créés à plus hautes densités et beaucoup plus haute température électronique (on parle de *plasmas chauds*).

Dans les tokamaks par exemple, le confinement du plasma est obtenu par de forts champs magnétiques dont les lignes de courant s'entourent sur un tore (cf. figure 1). Les particules chargées du plasma suivent ces lignes de champ et restent ainsi confinées un certain temps.

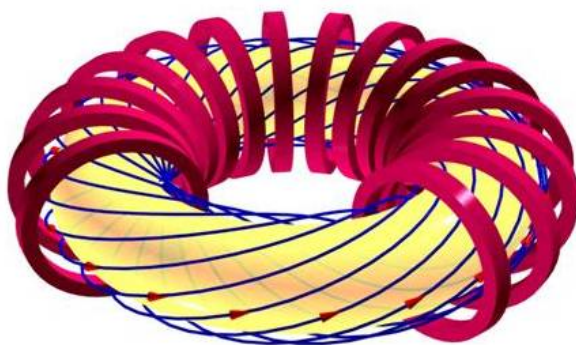
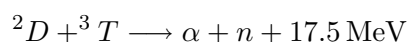


FIGURE 1.4 – Configuration Tokamak pour les plasmas de fusion magnétique. Les lignes bleues représentent les lignes de champ magnétique.

L'objectif recherché dans ce genre de dispositifs est la création d'énergie par fusion thermonucléaire contrôlée d'éléments légers, principalement selon la réaction :



On peut montrer que cette réaction ne peut s'entretenir que pour des températures de l'ordre du keV. A ces températures *le plasma est complètement ionisé* ( $\alpha \approx$

---

3. On peut également s'approcher de l'équilibre thermodynamique en augmentant la densité d'énergie déposée dans le milieu. Dans cette dernière situation, les atomes restituent l'énergie aux électrons par collisions dites superélastiques.

1), les densités observées dans les tokamaks en fonctionnement sont de l'ordre de  $10^{12}$  à  $10^{13}$  particules par  $\text{cm}^3$ . Les difficultés associées au développement de tels dispositifs sont à la fois technologiques (génération de champs magnétiques intenses et stables, tenue des matériaux au flux de neutrons ...) et scientifiques (le problème majeur de la stabilité du plasma sur des échelles de temps suffisamment longues passe par la maîtrise des phénomènes de turbulences observées dans ces conditions expérimentales).

### Plasmas naturels : plasmas spatiaux

Mis à part ces plasmas créés en laboratoires (plasmas artificiels), il existe des plasmas naturels. Dans le voisinage de la terre, on peut mentionner les éclairs, les aurores boréales ou l'ionosphère. Dans l'espace, les environnements ou les intérieurs stellaires constituent d'autres exemples de plasmas présents dans l'univers. Le soleil, par exemple, génère un plasma très conducteur, le vent solaire, qui progresse à quelques centaines de  $\text{km/s}$  dans l'espace interplanétaire. Quand le vent solaire rencontre le champ magnétique terrestre, il subit une déviation et génère une onde de choc. Face au soleil, le champ se trouve comprimé, alors qu'il est étiré sous forme d'une longue queue magnétique du côté opposé (cf. figure 1).

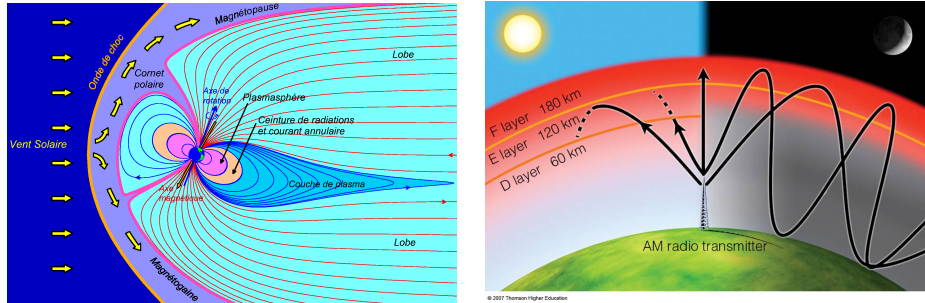


FIGURE 1.5 – Interaction du vent solaire avec la magnétosphère terrestre (à gauche) et propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère (à droite).

### Applications des plasmas

La principale application des plasmas chauds, encore en développement, consiste en la production d'énergie par fusion thermonucléaire contrôlée d'éléments légers. Compte tenu des températures d'amorçages nécessaires aux réactions de fusion, l'utilisation de réacteurs à parois matérielles n'est pas envisageable, de sorte que le confinement par champs magnétiques (Tokamaks) ou par laser (fusion inertielle) semble une des seules voies possibles de production d'énergie par fusion. En outre, les éléments impliqués, essentiellement le deutérium et le tritium, sont disponibles en quantité abondante et ne produisent que des déchets faiblement radioactifs et pas de  $\text{CO}_2$ .

Les autres applications des plasmas peuvent être classifiées schématiquement en considérant le plasma comme un convertisseur de l'énergie électromagnétique

reçue en diverses autres formes d'énergie (cf. figure 1.6). Citons en particulier :

- la conversion énergie électromagnétique/énergie lumineuse où l'on tente d'optimiser un processus d'excitation électronique particulier qui conduira à l'émission de photons (éclairage, écrans à plasmas, lasers X à plasma ...)
- la conversion énergie électromagnétique/énergie cinétique où le plasma est utilisé en tant que source de particules chargées (sources d'ions, faisceaux d'électrons, propulsion ionique ...)
- la conversion énergie électromagnétique/énergie chimique où l'on exploite le fait qu'un plasma peut être la source d'espèces chimiquement actives (traitement des matériaux, stérilisation, dépollution ...)

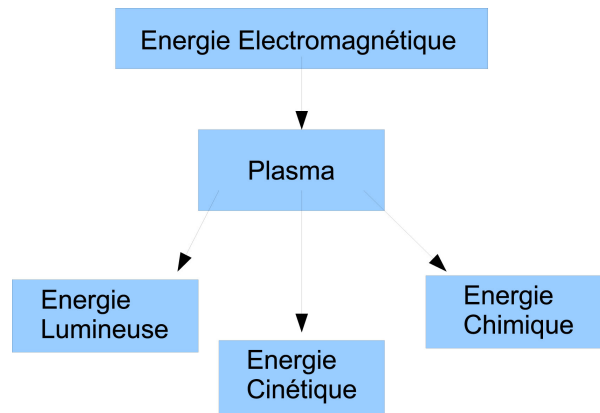


FIGURE 1.6 – Processus de conversion d'énergie par plasmas (tiré de *Plasmas froids*, J.P Boeuf, Université de Saint-Etienne, 2004)

### Modélisation des plasmas

Par ordre de complexité et d'exactitude les plasmas peuvent être modélisés à trois niveaux : fluide, cinétique ou particulaire (précinétique) :

- Dans une modélisation particulaire, la position et l'impulsion de chaque particule du plasma sont suivies au cours de leurs évolutions dans le temps. Les équations du mouvement de chaque particule sont donc celles de Newton (pour un plasma classique) :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} (\mathbf{e} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{b})$$

où  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{b}$  sont les champs électriques et magnétiques *microscopiques*. La résolution de ces équations suppose la connaissance de ces champs qui sont solutions des équations de Maxwell écrites au niveau microscopique. Les densités de charges et de courants, qui sont les sources de ces équations de Maxwell, dépendent elles-mêmes des positions et vitesses des particules. Dans cette approche, on doit donc suivre à la fois les trajectoires des particules et résoudre les équations de Maxwell pour une densité finie de particules. Dans un deuxième temps, des moyennes spatiales ou/et temporelles doivent être effectuées pour remonter aux grandeurs physiques macroscopiques mesurables. Cette voie peut être suivie à l'aide

de simulations numériques qui utilisent des méthodes approximatives afin de traiter un nombre suffisant de particules.

- Dans une modélisation cinétique, on adopte un point de vue probabiliste. La grandeur centrale est la fonction de distribution à un corps,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , telle que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$  dénombre le nombre de particules dans le volume  $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$  de l'espace des phases.  $f_1$  vérifie une équation d'évolution, l'équation cinétique, qui s'écrit formellement :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\delta f_1}{\delta t},$$

où  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  avec  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  les champs moyens électriques et magnétiques qui sont solutions des équations de Maxwell macroscopiques. Le membre de droite de l'équation cinétique correspond à une contribution due aux collisions et prend une forme qui dépend de la nature des particules considérées. Dans un plasma, il existe une fonction de distribution (et donc une équation cinétique) par composante (électrons, ions, neutres). Les différentes équations cinétiques sont couplées. La résolution de ces équations par des méthodes analytiques ou numériques permet ensuite de calculer les grandeurs physiques macroscopiques.

- Dans une approche fluide, on traite le plasma comme un fluide chargé réactif à plusieurs composantes. Le problème se ramène donc à résoudre simultanément les équations de Maxwell et les équations de la mécanique des fluides adaptées aux plasmas. Cette approche, très physique, est pertinente sur des échelles de temps et de longueurs mésoscopiques, c'est-à-dire, entre les échelles microscopiques et macroscopiques. Par rapport à l'approche cinétique, toute information dans l'espace des vitesses des particules est perdue : les divers champs solutions des équations, champs électromagnétiques, de vitesses, de pression, de densité ... sont des fonctions des seules variables  $\mathbf{r}$  et  $t$ . Aucun procédé de moyenne n'est nécessaire, les grandeurs physiques macroscopiques sont directement les solutions des équations.

Quel que soit le niveau de description retenu, l'originalité, la difficulté et la richesse de la physique des plasmas tient essentiellement dans cette nécessaire approche auto-cohérente qui traite la dynamique des particules et des champs sur un pied d'égalité.

---

## Bibliographie sélective

---

### Cours

- Plasmas Physics and Controlled Fusion, F. F. Chen, Plenum Press, 1984.  
(*Niveau L3-M1-M2*)
- Plasmas Dynamics, R. O. Dendy, Oxford Academic Press, 1990.  
(*Niveau L3-M1*)
- Physique des plasmas : J.-L. Delcroix, Editions de Physique, 1994.  
(*Niveau M1-M2*)
- Fundamentals of Plasma Physics, J. A. Bittencourt, Springer, 2004.  
(*Niveau L3-M1-M2*)
- Physique des Plasmas, J.-M. Rax, Dunod, 2005.  
(*Niveau M1-M2*)
- Basic Plasma Physics, B. Browning, Ed. Lulu, 2008.  
(*Niveau L3-M1*)

### Vulgarisation

- All about Lightning, M. A. Uman, Dover, 1986.  
(*Eclairs et Foudre*)
- L'énergie des Etoiles, P.-H. Rebut, Ed. Odile Jacob, 1999.  
(*Orienté Plasmas de fusion thermonucléaire*)
- L'univers des Plasmas, P. Bradu, Flammarion, 2002.  
(*Généralités sur les applications des plasmas*)
- L'état Plasma : le feu de l'Univers, T. Lehner, Vuibert, 2004.  
(*Orienté Plasmas Astrophysiques*)
- L'énergie bleue, G. Laval, Ed. Odile Jacob, 2007.  
(*Histoire de la fusion thermonucléaire*)
- The plasma universe, C. Suplee, Cambridge University Press, 2009.  
(*Applications des plasmas avec illustrations*)



## Chapitre 2

# Rappels d'Electrodynamique et de Mécanique des Fluides

Dans un plasma l'existence des charges électriques qui le constituent, ne peut être considérée indépendamment des champs électriques et magnétiques qui règnent en son sein. Une des caractéristiques de cette discipline est la nécessité de traiter sur un pied d'égalité la dynamique des particules et celles des champs. Nous commençons par rappeler succinctement les équations de Maxwell de l'Electromagnétisme ainsi que les équations de la mécanique des fluides appliquées aux plasmas.

### 2.1 Les équations de Maxwell

Les 2 sources du champ électrique sont les charges libres et les champs magnétiques dépendants du temps, ce que traduisent respectivement les relations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday :

$$\begin{array}{lcl} \nabla \cdot \mathbf{E} & = & \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{E} & = & -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array}$$

où  $\rho$  est la densité de toutes les charges électriques du plasma.

En utilisant les théorèmes d'analyse vectorielle<sup>1</sup>, ces équations locales, valables en tout point de l'espace, peuvent être écrites dans une région finie de l'espace, sous la forme du théorème de Gauss et de la loi de Faraday :

$$Q = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}, \quad (2.2)$$

---

1. Celui de la divergence et de Stokes.

où  $Q$  est la charge électrique totale comprise dans le volume limité par la surface  $S$ , et  $\Phi \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , le flux du champ magnétique à travers la surface  $S$  limitée par le contour  $C$ .

Il n'existe pas de monopôle magnétique, et les 2 sources du champ magnétique sont les charges en mouvement (de densité de courant  $\mathbf{J}$ ) et les champs électriques dépendant du temps. C'est le contenu des 2 autres relations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

On peut également écrire des formes intégrées qui correspondent, pour des champs indépendants du temps, aux théorèmes du flux et d'Ampère :

$$0 = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.3)$$

$$\mu_0 I = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}, \quad (2.4)$$

où  $I \equiv \int_S \mathbf{J}_{tot} \cdot d\mathbf{S}$  avec  $\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  est le courant total traversant la surface  $S$  limitée par le contour  $C$ .

En utilisant le fait que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle, on établit facilement la relation de conservation de la charge à partir des équations précédentes. Cette équation s'écrit sous forme locale ou globale de la façon suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.6)$$

En d'autres termes, les variations temporelles de charge électrique au sein d'un volume sont compensées par les charges qui traversent la surface limitant le volume.

On remarquera que les équations de Maxwell ont été écrites ici dans le vide, ce qui correspond à la situation typique pour les plasmas.  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont en effet les constantes diélectrique et perméabilité magnétique du vide, qui vérifient la relation bien connue :

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1,$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Soulignons que les équations précédentes doivent être complétées par des conditions aux limites adéquates qui dépendent du problème étudié. Pour terminer, on rappelle dans un tableau synthétique les unités courantes associées aux grandeurs électromagnétiques.

$\epsilon_0$	$F.m^{-1}$	$\mu_0$	$H.m^{-1}$	$\rho$	$C.m^{-3}$	$J$	$A.m^{-2}$	$E$	$V.m^{-1}$	$B$	$T$
--------------	------------	---------	------------	--------	------------	-----	------------	-----	------------	-----	-----



### 2.1.1 Remarques

1. Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère peuvent être interprétées comme des équations d'évolution des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

En tant qu'équations d'évolution, ces 2 équations doivent être complétées par des conditions initiales sur les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

En utilisant la relation de conservation de la charge et le fait que la divergence d'un rotationnel est nulle, les 2 équations d'évolution se récrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{div} \mathbf{B}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{div} \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) &= 0,\end{aligned}$$

Les 2 équations de Maxwell sur la divergence sont donc obtenues en fixant les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \frac{\rho(\mathbf{r}, 0)}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = 0$$

de sorte que si ces relations sont satisfaites à l'instant initial, elles le demeurent aux temps ultérieurs.

*Il est donc équivalent de se donner les 4 équations de Maxwell, ou les 2 équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère complétées par des conditions initiales adaptées.*

2. En physique des plasmas, comme on l'a indiqué plus haut, les sources  $(\rho, \mathbf{J})$  ou les champs  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  ne constituent pas des données indépendantes, mais sont reliées de façon complexe par les équations de la dynamique des charges électriques (i.e. les équations de l'hydrodynamique appliquées aux plasmas). Lorsque celles-ci permettent d'exprimer les sources en fonctions des champs, les équations d'évolution résultantes pour les champs prennent en général la forme d'équations aux dérivées partielles fortement non linéaires. *Une bonne partie de la difficulté et de la richesse de la physique des plasmas vient de cette auto-cohérence imposée entre la dynamique des particules et des champs.*

## 2.2 Rappels de Mécanique des fluides

Comme on l'a dit plus haut, un plasma peut être considéré comme un fluide à plusieurs composantes. Les diverses composantes sont les électrons, les différentes espèces d'ions, et éventuellement les neutres. A la différence des

fluides neutres où la force extérieure dominante est la gravité, la force à prendre en compte pour les plasmas est la force électromagnétique :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

On rappelle dans ce chapitre les équations de bilan de la mécanique des fluides qui devront être appliquées à chacune des espèces constituant le plasma. Ces équations peuvent être dérivées directement à l'échelle mésoscopique (cf. cours de mécanique des fluides) ou par le calcul des premiers moments de l'équation de Boltzmann (cf. cours de théorie cinétique).

Lorsque l'approche hydrodynamique est valide<sup>2</sup>, un état thermodynamique est défini, par composante  $\alpha$  ( $\alpha = e, i, n$ ), par la donnée de 2 champs scalaires : la densité  $n_\alpha(\mathbf{r}, t)$  et la température<sup>3</sup>  $T_\alpha(\mathbf{r}, t)$ , et un champ vectoriel : la vitesse fluide  $\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ . Ces grandeurs sont des fonctions supposées lentement variables de la position  $\mathbf{r}$  et du temps  $t$ . Elles rendent compte du comportement d'un nombre élevé de particules microscopiques, quoique suffisamment faible à l'échelle du problème étudié pour apprécier les variations spatiales et temporelles (notion de particule fluide et d'échelle mésoscopique). En d'autres termes, les propriétés des constituants microscopiques sont moyennées sur une échelle spatiale,  $\epsilon$ , intermédiaire entre le libre parcours moyen,  $\lambda$ , des constituants microscopiques et l'échelle macroscopique,  $L$ , à laquelle on décrit le problème étudié :

$$\lambda \ll \epsilon \ll L.$$

Les diverses composantes d'un plasma pouvant être créés et détruites (par ionisation, recombinaison ...), les plasmas sont assimilables à des fluides réactifs. Il en découle que le formalisme présenté dans ce chapitre s'apparente davantage à celui de l'aérothermochimie (comme en physico-chimie de la combustion par exemple), qu'à celui utilisé pour les fluides neutres à une seule composante.

### 2.2.1 Equations de bilans

Dans l'approche hydrodynamique, les équations à résoudre sont obtenues comme des équations de bilan de masse, quantité de mouvement voire d'énergie. Rappelons l'expression de ces équations dans le cadre de l'hydrodynamique usuelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{F} \end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide,  $\mathbf{F}$ , la force extérieure (la gravité le plus souvent pour les fluides ordinaires) et  $\mathbf{P}$ , le tenseur des contraintes dont la forme générale s'écrit (en composantes) :

$$P_{ij} = p \delta_{ij} + \pi_{ij}$$

2. Ce point ne peut être assuré que par la physique statistique.

3. ou la pression scalaire définie par la relation  $p_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_\alpha(\mathbf{r}, t) k_B T_\alpha(\mathbf{r}, t)$ .

où  $p$  est la pression scalaire et  $\boldsymbol{\pi}$ , le tenseur de viscosité. Rappelons encore que la notation  $\mathbf{D}_\alpha$  désigne la dérivée convective ou particulaire définie par la relation :

$$\frac{D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$$

Les plasmas sont des fluides réactifs pour lesquels les collisions inélastiques (par exemple l'ionisation) n'assurent pas la conservation du nombre de particules d'une espèce donnée. L'équation de bilan de masse, que nous écrirons plutôt en bilan de particules, comprend donc en général un terme source,  $S_\alpha$  qui sera compté positif si des particules de type  $\alpha$  sont créées et négativement dans le cas opposé :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = S_\alpha$$

Dans le bilan de quantité de mouvement appliqué aux plasmas, la force extérieure la plus importante est bien entendu, la force électromagnétique,  $\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B})$  (pour certains plasmas spatiaux, la force de gravité doit également être conservée). Comme une composante du plasma peut échanger de la quantité de mouvement avec les autres composantes,  $\beta$  du plasma au cours des collisions, il convient d'ajouter une force de friction que l'on écrit généralement<sup>4</sup> sous la forme :

$$-m_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta)$$

où  $\nu_{\alpha\beta}$  est la fréquence de collisions entre les particules de type  $\alpha$  et  $\beta$ . En revanche, les contributions de viscosité sont généralement négligeables pour les électrons et les ions (mais pas toujours pour les neutres) de sorte que  $\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla p$ . La forme généralement utilisée pour le bilan de quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\begin{aligned} n_\alpha m_\alpha \frac{D_\alpha \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} &= -\nabla p_\alpha + n_\alpha \mathbf{F}_\alpha - m_\alpha (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{U}_\alpha) S_\alpha \\ \mathbf{F}_\alpha &\equiv q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) - m_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) \end{aligned}$$

Un dernier commentaire concerne le terme  $-m_\alpha (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{U}_\alpha) S_\alpha$  dont l'origine est due aux collisions inélastiques où les particules créées ou détruites le sont avec une vitesse fluide moyenne  $\mathbf{U}_\alpha$ . Ainsi par exemple, des particules qui seraient créées sans vitesses initiales ( $\mathbf{U}_\alpha$ , ce serait une bonne approximation pour les ions créés par ionisation par collisions directes électrons-neutres) contribueraient négativement au bilan de quantité de mouvement dans le repère en mouvement avec la vitesse d'entraînement du fluide,  $\mathbf{V}_\alpha$ .

### 2.2.2 Fermeture des équations de bilans

Les 2 équations de bilan, de particules et d'impulsion dépendent, par composante, de 3 variables dynamiques, les 2 champs scalaires de densités  $n_\alpha(\mathbf{r}, t)$

4. Cette forme peut être rigoureusement démontrée dans le cas des collisions élastiques de type charge-dipôle induit.

et de pressions  $p_\alpha(\mathbf{r}, t)$ , et du champ vectoriel de vitesses  $\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ . Cela fait 5 inconnues scalaires pour 4 équations (l'équation de bilan de particules et les 3 composantes de l'équation de bilan de quantité de mouvement). Le problème n'est donc pas soluble en l'état. Dans l'approche traditionnelle utilisée en thermodynamique, on introduit une équation de bilan supplémentaire : l'équation de bilan d'énergie. Cette équation introduit à son tour une nouvelle inconnue, le flux de chaleur, que l'on relie aux autres inconnues par une considération thermodynamique (par exemple la loi de Fourier ou une hypothèse d'adiabacité).

Ce chemin peut également être suivi dans le cadre de l'étude des plasmas, mais il est plus simple d'introduire la contrainte thermodynamique au niveau de l'équation de bilan de quantité de mouvement. Les plasmas étant des milieux dilués, on peut utiliser l'équation d'état des gaz parfaits sous la forme <sup>5</sup> :

$$p_\alpha = n_\alpha (k_B T_\alpha) \quad (2.7)$$

Cette relation introduit cependant un nouveau champ inconnu, le champ de température  $T_\alpha(\mathbf{r}, t)$ , ce qui ne résout donc rien. Une façon de fermer les équations consiste à introduire une hypothèse physique suffisamment forte qui fixe le champ de pression.

Dans les situations où la pression au sein du fluide peut être négligée par rapport aux autres contributions <sup>6</sup> :

$$p_\alpha \rightarrow 0,$$

les 2 équations de conservation de la charge et de l'impulsion suffisent à déterminer les champs de densités :  $n_\alpha$ , et de vitesses  $\mathbf{V}_\alpha$ .

Dans le cas contraire, la pression (ou la température) reste inconnue. Il faut donc au moins une autre équation indépendante pour "fermer" l'ensemble des équations, ce qui est facile lorsque les échelles de temps associées à la dynamique des particules et à la diffusion de la chaleur sont bien séparées.

Considérons d'abord le cas d'une *évolution isotherme* du plasma ( $T_\alpha$  uniforme), c'est-à-dire que les gradients de température relaxent rapidement sur l'échelle de temps étudiée, l'équation manquante s'écrit donc :

$$\frac{p_\alpha}{n_\alpha} = \text{Cte} \quad \text{ou} \quad dp_\alpha = k_B T_\alpha dn_\alpha = C_\alpha d(n_\alpha m_\alpha),$$

où  $C_\alpha \equiv (k_B T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$  est la vitesse isotherme du son.

Dans le cas opposé d'une *évolution adiabatique* où la chaleur n'a pas eu le temps d'être transportée, la contrainte thermodynamique est la relation

$$p_\alpha n_\alpha^{-\gamma} = \text{Cte} \quad \text{ou} \quad dp_\alpha = \gamma k_B T_\alpha dn_\alpha = C_\alpha^\gamma d(n_\alpha m_\alpha),$$

---

5. L'utilisation, lorsque le fluide est en mouvement, d'une équation valable pour une situation à l'équilibre thermodynamique, correspond à l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local.

6. Cette situation correspond à celle dite des plasmas froids, puisque une température nulle implique une pression cinétique nulle.

où  $\gamma = c_p/c_v$  est le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants<sup>7</sup>, et où  $C_\alpha^\gamma \equiv (\gamma k_B T_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$  est la vitesse adiabatique du son. On remarquera que ce dernier cas comprend le précédent pour la valeur particulière  $\gamma = 1$ .

En résumé, il y a donc (au moins) 3 situations limites pour lesquelles on peut fermer les équations de bilan de particules et de quantité de mouvement :

Approximation des plasmas froids	:	$p_\alpha = 0,$
Approximation isotherme	:	$p_\alpha n_\alpha^{-1} = \text{Cte},$
Approximation adiabatique	:	$p_\alpha n_\alpha^{-\gamma} = \text{Cte}.$

---

7. Dans le cas des gaz parfaits à  $d$  dimensions,  $\gamma = (d + 2)/d$ .



## Chapitre 3

# Modélisation multifluides

Nous présentons dans ce chapitre les équations du modèle fluide où le plasma est assimilé à un fluide à plusieurs composantes en interaction. La résolution d'un tel système dans les cas les plus généraux est fort complexe et passe souvent par une résolution numérique. Nous étudions quelques cas limites, souvent obtenus en dimension réduite, lorsque certains termes sont négligés. Cette approche, où les approximations seront effectuées essentiellement sur l'équation de bilan de quantité de mouvement, permet de dégager plusieurs idées physiques importantes caractéristiques du comportement des plasmas. Plusieurs illustrations de cette modélisation fluide seront présentées dans les chapitres suivants.

### 3.1 Equations du modèle fluide

Dans le cadre d'une modélisation fluide, on assimile le plasma à un fluide chargé, réactif et à plusieurs composantes. Le fluide qui modélise le plasma est *multifluide* car il comprend nécessairement les différentes composantes du plasma. Un plasma étant globalement neutre, le nombre minimum de composantes est de 2 : les électrons et une espèce ionique positive. Ainsi en est-il pour les plasmas complètement ionisés. Dans le cas des plasmas faiblement ionisés, on peut être amené à prendre en compte plusieurs types d'ions (éventuellement de charges différentes et dans différents états d'énergies) ainsi que les atomes ou molécules neutres<sup>1</sup>. Le fluide est également *réactif* en général puisque des réactions d'ionisation, recombinaison ... conduisent à des transformations des espèces les unes dans les autres. Enfin, bien que le plasma soit globalement neutre, chacune de ses composantes (sauf les espèces neutres) est porteur d'une charge électrique et comme tel est soumis aux forces électromagnétiques.

Pour chaque composante  $\alpha$  (électrons, ions, neutres), nous introduisons les

---

1. Nous verrons cependant dans un chapitre ultérieur qu'une réduction à un seul fluide peut parfois être opérée et conduit alors à une formulation plus simple à un seul fluide (cf. Magnétohydrodynamique).

variables dynamiques : densités,  $n_\alpha$ , pressions,  $p_\alpha$ , et vitesses moyennes  $\mathbf{V}_\alpha$ . En outre règnent dans le plasma les champs électromagnétiques auto-cohérents  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  qui résultent à la fois d'éventuels champs extérieurs appliqués et des champs créés par le mouvement des charges dans le plasma. Toutes ces grandeurs physiques dépendent de la position  $\mathbf{r}$  considérée au sein du plasma, et du temps  $t$ .

L'ensemble des équations comprend les équations de bilans de matière et de quantité de mouvement associées aux équations de Maxwell<sup>2</sup>, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) &= S_\alpha, \\ m_\alpha n_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla \right] \mathbf{V}_\alpha &= -\nabla p_\alpha + n_\alpha \mathbf{F}_\alpha - m_\alpha (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{U}_\alpha) S_\alpha, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

auxquelles il convient d'ajouter des conditions initiales et aux limites adaptées.

Dans ces équations, on rappelle que  $\mathbf{U}_\alpha$  désigne la vitesse fluide de création ou de destruction des particules de la composante  $\alpha$ , et où la force extérieure,  $\mathbf{F}_\alpha$ , comprend généralement les forces électromagnétiques et de friction :

$$\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) - m_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta)$$

Par ailleurs, les densités de charges et de courant sont définies par les relations

$$\rho \equiv \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{J} \equiv \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha.$$

Tel quel, pour un système à  $N$  composantes, ce système comprend  $4N + 6$  équations pour les  $5N + 6$  champs inconnus,  $n_\alpha, p_\alpha, \mathbf{V}_\alpha, \mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Pour clore le système, il convient de rajouter les  $N$  équations de fermeture sur la pression déjà discuté dans un chapitre précédent :

$$\begin{aligned} \text{Approximation des plasmas froids} &: p_\alpha = 0, \\ \text{Approximation isotherme} &: p_\alpha n_\alpha^{-1} = \text{Cte}, \\ \text{Approximation adiabatique} &: p_\alpha n_\alpha^{-\gamma} = \text{Cte}. \end{aligned}$$

Ce scénario cohérent consiste à ne retenir que les 2 premières équations de bilans (les 2 premiers moments de l'équation de Boltzmann). Une autre possibilité consiste à retenir les 3 premières équations de bilan (matière, quantité de mouvement et énergie). Cela rajoute une variable par composante, la température

---

2. Nous n'écrivons dans ce qui suit que les 2 équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday puisque les 2 autres équations sur les divergences peuvent être fixées par les conditions initiales (cf. Rappels d'Electromagnétisme). Il pourra cependant apparaître plus commode dans certains problèmes d'être redondant et d'utiliser explicitement l'équation de Maxwell-Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  et l'équation  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .



$T_\alpha$ . En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, acceptables pour les milieux dilués,  $p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha$ , on obtient alors un système de  $6N + 6$  équations pour  $6N + 6$  inconnues. Cette alternative permet une discussion des profils de température mais ne sera pas présentée dans ce cours.

## 3.2 Plasmas collisionnels

Lorsque le libre parcours moyen des particules chargées (électrons ou ions) est faible devant les dimensions caractéristiques du plasmas, les espèces subissent de nombreuses collisions avant de ressentir toute accélération significative. Dans ces conditions, on peut raisonnablement négliger les forces d'inertie devant les autres forces (friction, électromagnétiques et de pression), de sorte que l'équation de bilan de quantité de mouvement de l'espèce  $\alpha$  s'écrit<sup>3</sup> :

$$-\nabla p_\alpha + n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) - m_\alpha n_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) = 0 \quad (3.1)$$

Pour fixer les idées, limitons-nous aux cas des plasmas faiblement ionisés pour lesquels les collisions dominantes sont les collisions ions-neutres et électrons-neutres. La composante  $\alpha$  représentant, soit les électrons, soit les ions, la seule composante  $\beta$  à retenir est celle représentant les espèces neutres. Du fait que ces dernières ne sont pas sensibles aux champs électromagnétiques, on pourra en général considérer que la vitesse fluide des neutres est négligeable devant celles des espèces chargées. Ici, on aura donc  $\mathbf{V}_\beta \ll \mathbf{V}_\alpha$  de sorte que la force de friction, pour les plasmas faiblement ionisés, s'écrit :

$$-m_\alpha n_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) \approx -m_\alpha n_\alpha \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha$$

où on a posé  $\nu_{\alpha n} \equiv \nu_\alpha$  puisque les seules collisions retenues sont avec les neutres.

L'équation (3.1) s'écrit donc :

$$\mathbf{V}_\alpha = -\frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) \quad (3.2)$$

### 3.2.1 Plasmas collisionnels non-magnétisés : diffusion et mobilité

Considérons d'abord la situation sans champ magnétique :  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{0}$ . Les plasmas étant des milieux dilués pour lesquels l'équation d'état  $p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha$  s'applique, l'équation de bilan de quantité de mouvement prend la forme dite de *mobilité-diffusion* :

$$\mathbf{V}_\alpha = \mu_\alpha \mathbf{E} - D_\alpha \frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} \quad (3.3)$$

---

3. Rigoureusement, le terme de friction est proportionnel à la masse réduite  $\mu_{\alpha\beta}$  et non à  $m_\alpha$ . Cet abus de notation (qui peut être compris en renormalisant la fréquence de collision) est très fréquent et sera donc utilisé dans la suite.

où  $\mu_\alpha$  et  $D_\alpha$  sont des coefficients de transports, respectivement appelés *mobilité* et *coefficient de diffusion* :

$$\mu_\alpha \equiv \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \quad D_\alpha \equiv \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \quad (3.4)$$

Ces 2 coefficients ne sont pas indépendants mais reliés par *la relation d'Einstein* :

$$\frac{D_\alpha}{\mu_\alpha} = \frac{k_B T_\alpha}{q_\alpha}$$

qui est une des formes du théorème de fluctuation-dissipation.

L'équation de diffusion-mobilité montre explicitement que la vitesse fluide des électrons ou des ions au sein d'un plasma collisionnel a pour origine commune l'existence de gradients. Chacun des gradients éventuellement présents dans le plasma : gradients de densité, de température ou de potentiel électrostatique contribue à la vitesse fluide totale. On notera en outre que la direction de la vitesse est celle des gradients (le sens dépend du signe de la charge pour les termes de mobilité).

On remarquera également que le gradient de pression contient, a priori, une contribution due au gradient de température et une due au gradient de densité :

$$\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} = \frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha} + \frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha}$$

### 3.2.2 Plasmas collisionnels magnétisés

Lorsque le champ magnétique n'est pas nul, l'équation (3.2) ne donne plus explicitement la vitesse qui apparaît également dans la force de Laplace :

$$\mathbf{V}_\alpha = \mu_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) - D_\alpha \frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} \quad (3.5)$$

Néanmoins, on remarquera que cette équation est une équation vectorielle *algébrique* et *linéaire* pour la vitesse (et pas différentielle non-linéaire comme dans sa forme sans approximations). Elle peut donc être explicitement résolue. Pour cela, on peut soit projeter cette équation sur 3 directions orthogonales et exprimer les différentes composantes (cf. TD 2), ou procéder directement sur l'équation vectorielle.

On part de l'expression donnée ci-dessus (sans les  $\alpha$ ) :

$$\mathbf{V} = \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla p}{p} + \mu \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

or,

$$\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{E} \times \mathbf{B} - D \frac{\nabla p}{p} \times \mathbf{B} - \mu (B^2 \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B})$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - D \frac{\nabla p}{p} \cdot \mathbf{B}$$

En substituant cette expression dans la précédente, on obtient une nouvelle expression pour  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$  et de là pour  $\mathbf{V}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla p}{p} \\ &+ \mu^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mu D \frac{\nabla p}{p} \times \mathbf{B} \\ &- \mu^2 B^2 \mathbf{V} + \mu^2 \left[ \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - D \frac{\nabla p}{p} \cdot \mathbf{B} \right] \mathbf{B}\end{aligned}$$

Or,  $\mu B = \omega_c / \nu$ .

$$\begin{aligned}\left[ 1 + \left( \frac{\omega_c}{\nu} \right)^2 \right] \mathbf{V} &= \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla p}{p} + \mu^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mu D \frac{\nabla p}{p} \times \mathbf{B} \\ &+ \mu^2 \left[ \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - D \frac{\nabla p}{p} \cdot \mathbf{B} \right] \mathbf{B}\end{aligned}$$

Dans cette expression, les 2 derniers termes sont dans la direction de  $\mathbf{B}$  (notée  $\parallel$ ).

A priori, les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\nabla p$  ont chacun 3 composantes : une parallèle à  $\mathbf{B}$  et 2 dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ , ce qu'on notera :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}, \\ \nabla p &= \nabla_{\parallel} p + \nabla_{\perp} p\end{aligned}$$

Il en résulte aussitôt que :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B} \quad \nabla p \times \mathbf{B} = \nabla_{\perp} p \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= E_{\parallel} B \quad \nabla p \cdot \mathbf{B} = B \nabla_{\parallel} p\end{aligned}$$

On peut alors regrouper à part les termes dans la direction du champ magnétique de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\left[ 1 + \left( \frac{\omega_c}{\nu} \right)^2 \right] \mathbf{V} &= \mu \mathbf{E}_{\parallel} - D \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} + \mu^2 \left[ \mu B E_{\parallel} - D B \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} \right] \mathbf{B} \\ &+ \mu^2 \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B} - \mu D \frac{\nabla_{\perp} p}{p} \times \mathbf{B} + \mu \mathbf{E}_{\perp} - D \frac{\nabla_{\perp} p}{p}\end{aligned}$$

En introduisant le vecteur unitaire  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B$ , et en utilisant à nouveau la relation  $\mu B = \omega_c / \nu$ , on obtient :

$$\mu \mathbf{E}_{\parallel} - D \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} + \mu^2 \left[ \mu B E_{\parallel} - D B \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} \right] \mathbf{B} = \left[ 1 + \left( \frac{\omega_c}{\nu} \right)^2 \right] \left( \mu E_{\parallel} - D \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} \right) \mathbf{b}$$

de sorte que  $\mathbf{V}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mu \mathbf{E}_{\parallel} - D \frac{\nabla_{\parallel} p}{p} \\ &+ \mu_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} - D_{\perp} \frac{\nabla_{\perp} p}{p} \\ &+ \mu_{\times} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b} - D_{\times} \frac{\nabla_{\perp} p}{p} \times \mathbf{b}\end{aligned}$$

avec  $\mu_{\perp} = \mu / (1 + (\omega_c / \nu)^2)$  et  $\mu_{\times} = \mu (\omega_c / \nu) (1 + (\omega_c / \nu)^2)$ .

Lorsque  $\mathbf{E}$  et  $\nabla p$  sont dans le même plan, on peut associer 3 directions orthogonales aux 3 lignes précédentes.

#### Remarque

Certains auteurs utilisent les notations  $\nabla_{\parallel} \equiv \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)$  et  $\nabla_{\perp} \equiv -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla)$ , ce qui se justifie à partir de la relation vectorielle :

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla) = \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla) - b^2 \nabla \quad \Rightarrow \quad \nabla = \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}$$

D'après ce qui précède, en ignorant l'indice  $\alpha$  pour simplifier l'écriture, le vecteur vitesse peut donc être décomposé en 3 vecteurs :

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp} + \mathbf{V}_{\times}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\parallel} &= \mu_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} - D_{\parallel} \frac{\nabla_{\parallel} p_{\alpha}}{p_{\alpha}} & (3.6) \\ \mathbf{V}_{\perp} &= \mu_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} - D_{\perp} \frac{\nabla_{\perp} p_{\alpha}}{p_{\alpha}} & (3.7) \\ \mathbf{V}_{\times} &= \mu_{\times} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b} - D_{\times} \frac{\nabla_{\times} p_{\alpha}}{p_{\alpha}} \times \mathbf{b} & (3.8) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{b}$  est le vecteur normalisé donnant la direction du champ magnétique :  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/\|\mathbf{B}\|$ . Dans ces expressions les coefficients de transport sont définis par les relations suivantes :

$$\frac{\mu_{\parallel}}{\mu} = \frac{D_{\parallel}}{D} = 1, \quad \frac{\mu_{\perp}}{\mu} = \frac{D_{\perp}}{D} = \frac{1}{1 + (\omega_c/\nu)^2}, \quad \frac{\mu_{\times}}{\mu} = \frac{D_{\times}}{D} = \frac{\omega_c/\nu}{1 + (\omega_c/\nu)^2}.$$

où  $\omega_c \equiv qB/m$  est la fréquence cyclotron. Dans les directions  $\parallel$  et  $\perp$ , les solutions en présence de champ magnétique sont formellement analogues à celle sans champ magnétique, mais avec des coefficients de transport qui dépendent de la direction considérée.

Plusieurs remarques découlent de ces expressions :

1. Le mouvement dans la direction du champ magnétique n'est pas modifié par la présence du champ magnétique.
2. L'expression des coefficients de transport montre que l'importance des contributions dans les directions  $\perp$  et  $\times$  dépend du rapport  $\omega_c/\nu$ , c'est-à-dire de l'importance relative de la force magnétique et de la force de friction.

A collisionnalité fixée (i.e. à  $\nu$  fixé) :

- La mobilité et la diffusion transverse  $\perp$  ont un comportement monotone décroissant en fonction du champ magnétique : ce dernier a donc un effet qui confine le plasma.
- Au contraire, la mobilité et la diffusion Hall  $\times$  varient de façon non monotone, croissant puis décroissant lorsque le champ magnétique augmente.

A fort champ magnétique :

- Les coefficients  $\perp$  sont proportionnels à  $\nu$  (contrairement à  $D$  et  $\mu$  qui varient en  $\nu^{-1}$ ).
  - Les coefficients de Hall sont quant à eux indépendants de la fréquence de collision.
3. Les termes proportionnels à  $\mu_{\parallel}, \mu_{\perp}$  et  $D_{\times}$  dépendent du signe de la charge électrique des particules étudiées, les autres contributions ont même sens pour les électrons et pour les ions.

4. Le terme proportionnel à  $\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{b}$  s'appelle *la vitesse de dérive de champs croisés* (même sens de dérive pour les électrons et les ions), les termes proportionnels à  $\nabla_\perp n \times \mathbf{b}$  et  $\nabla_\perp T \times \mathbf{b}$  sont appelés *vitesse diamagnétiques* (sens opposé de mouvement pour les électrons et les ions).

### Exemple : colonne cylindrique magnétisée

Pour illustrer ces résultats, considérons le cas d'une longue colonne cylindrique de plasma soumis à un champ magnétique axial. Soit  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  le système de coordonnées cylindriques associé. Le système étant invariant par translation le long de  $Oz$  et par rotation autour de  $Oz$ , tous les gradients sont nécessairement radiaux. C'est le cas du champ électrique (gradient de potentiel) généralement dirigé vers la périphérie du cylindre. Au contraire, la densité du plasma est maximale au centre, le gradient correspondant étant donc dirigé vers l'axe du cylindre. Tant qu'on reste assez loin de la surface latérale qui confine le plasma, les gradients de température sont généralement faibles et on les négligera par la suite. La situation est donc la suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}_\parallel = B \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_\perp = E \mathbf{e}_r, \\ \nabla n_\alpha &= \nabla_\perp n_\alpha = -\|\nabla n_\alpha\| \mathbf{e}_r, \\ \nabla T_\alpha &\approx 0\end{aligned}$$

Les sens des différentes contributions des vitesses fluides, radiales et orthoradiales, sont représentées sur la Figure 3.1.

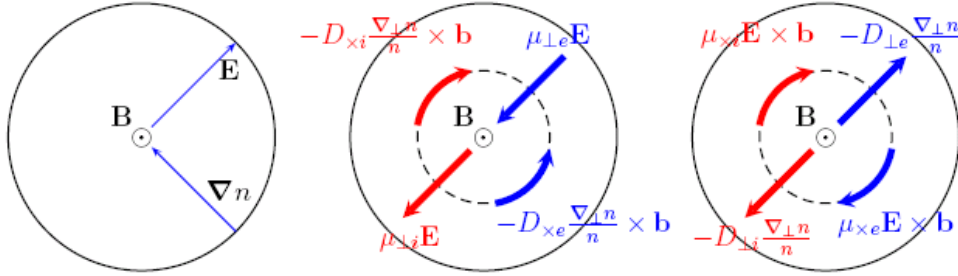


FIGURE 3.1 – La figure de gauche représente la configuration des champs et gradients étudiée. La figure centrale représente les contributions de sens opposé pour les ions et les électrons (radiales dues aux termes de mobilités  $\perp$  et azimuthales dues aux contributions diamagnétiques). La figure de droite représente les contributions de même sens pour les ions et les électrons (radiales dues aux termes de diffusion  $\perp$  et azimuthales dues aux dérive de champ croisés).

### 3.2.3 Diffusion ambipolaire et non ambipolaire

Dans un plasma collisionnel, du fait des rapport de masses, les électrons diffusent plus rapidement que les ions. La densité de charges qui apparaît au

cours du mouvement, crée en réaction un champ électrique qui tend à ralentir les électrons et à accélérer les ions. Les charges ont donc tendance à diffuser ensemble, les flux ionique et électronique sont sensiblement égaux :  $\mathbf{\Gamma}_e \approx \mathbf{\Gamma}_i$ , on parle, dans cette situation, de *diffusion ambipolaire*. Bien que cet effet semble vraisemblable, nous montrerons dans la suite que cette situation n'est en rien générique et que les plasmas collisionnels ont un comportement non-ambipolaire dans de nombreuses situations expérimentales.

Dans une première partie nous traiterons en détail le cas d'un plasma collisionnel électron-ion quasi-neutre ( $n_e = n_i \equiv n$ ) non magnétisé. Certains des effets dus à la présence d'un champ magnétique seront étudiés dans une deuxième partie sous la forme d'un problème.

### Cas d'un plasma non magnétisé

#### Généralités

Pour chacune des espèces  $\alpha$  du plasma (électrons et ions), l'équation de bilan de particules et l'équation de mobilité-diffusion (c'est-à-dire l'équation de bilan de quantité de mouvement lorsqu'on néglige les termes d'inertie) s'écrivent :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha = S, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = -\nabla (D_\alpha n_\alpha) + \mu_\alpha n_\alpha \mathbf{E} \quad (3.10)$$

où nous avons supposé que les termes sources (notés  $S$ ) des équations de bilan de masse sont identiques pour les électrons et pour les ions (c'est le cas par exemple dans le cas de l'ionisation) ; la fréquence de collision  $\nu_\alpha$  est également supposée uniforme.

En utilisant la relation de quasineutralité  $\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \equiv 0$ , en multipliant l'équation de bilan de particules par  $q_\alpha$  et en sommant sur  $\alpha$ , on trouve l'équation de continuité du courant  $\mathbf{J} \equiv \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{\Gamma}_\alpha$  sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Dans une situation unidimensionnelle, cette relation implique une densité de courant constante (éventuellement nulle si aucun courant ne traverse le plasma). Il n'en est évidemment pas de même en général dans les situations à 2D ou 3D.

La relation entre  $\mathbf{J}$  et le champ électrique peut être obtenue à partir de l'équation de mobilité diffusion :

$$\mathbf{J} = -\nabla \left[ n \sum_\alpha (D_\alpha q_\alpha) \right] + n \mathbf{E} \sum_\alpha \mu_\alpha q_\alpha,$$

soit encore :

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla [n \sum_\alpha (D_\alpha q_\alpha)]}{n \sum_\alpha \mu_\alpha q_\alpha} + \frac{\mathbf{J}}{n \sum_\alpha \mu_\alpha q_\alpha} \equiv \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_c, \quad (3.11)$$

Ainsi, dans le cas le plus général, le champ électrique a donc 2 contributions, une première  $\mathbf{E}_a$ , dite *ambipolaire*, déterminée par les gradients de densités et de températures, et une autre, le champ de conduction,  $\mathbf{E}_c$ , du au courant électrique circulant dans le plasma.

#### *Non-ambipolarité dans le cas 2D*

Pour montrer que la condition d'ambipolarité n'est en général pas satisfaite dans les plasmas réels, et qu'il existe en conséquence des courants (vortex) circulant dans le plasma, nous nous plaçons dans la situation la plus simple, à savoir un plasma 2D limité par des parois isolantes (tout autre complication comme la présence d'un champ magnétique ou la présence de parois conductrices devraient a fortiori faciliter l'établissement d'un courant dans le plasma). Cette preuve de la non ambipolarité a été donnée récemment par Bogdanov, Chirtsov et Kudryavtsev (Physical Review Letters, **106**, 195001, 2011). Pour fixer les idées supposons que les seuls gradients non nuls dans le plasma sont les gradients de densité, de température électronique et de champ électrique, respectivement,  $\nabla T_e$ ,  $\nabla n$ ,  $\nabla \varphi$  où  $\varphi$  est le potentiel électrostatique<sup>4</sup>.

Nous allons montrer dans un premier temps que si le gradient de température électronique et le gradient de densité sont non nuls et non parallèles en un point, i.e. si  $\nabla T_e \times \nabla n \neq \mathbf{0}$ , alors la densité de courant est elle-même non nulle en ce même point (et donc le champ n'est pas strictement ambipolaire). Pour ce faire, établissons la contraposée : si  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  en tout point du plasma, alors  $\nabla T_e \times \nabla n = \mathbf{0}$  en tout point du plasma.

En effet, si  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  en tout point du plasma, l'équation (3.11) s'écrit :

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla \varphi = \frac{\nabla [n \sum_{\alpha} (D_{\alpha} q_{\alpha})]}{n \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} q_{\alpha}} = \frac{\nabla [\sum_{\alpha} (D_{\alpha} q_{\alpha})]}{\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} q_{\alpha}} + \frac{\sum_{\alpha} (D_{\alpha} q_{\alpha})}{\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} q_{\alpha}} \nabla \ln n$$

Le rotationnel d'un gradient étant nul, on obtient aussitôt l'égalité :

$$\nabla \left[ \sum_{\alpha} (D_{\alpha} q_{\alpha}) \right] \times \nabla \ln n = \mathbf{0}$$

Or  $\sum_{\alpha} D_{\alpha} = k_B T_e / m_e \nu_e + \sum_i D_i$ . Comme  $T_i$  est supposé uniforme, on en déduit donc que :

$$\nabla T_e \times \nabla n = \mathbf{0}$$

est vérifiée en tout point du plasma si  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Nous venons donc de démontrer (par contraposition) que s'il existe un point où  $\nabla T_e \times \nabla n \neq \mathbf{0}$ , alors, en ce point,  $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ , et le champ n'est donc pas ambipolaire en tout point.

De plus, s'il existe des points où  $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ , on peut également montrer qu'il existe également des points où  $\nabla \times \mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ . Autrement dit, les lignes de courant

---

4. Rappelons qu'on a déjà considéré les fréquences  $\nu_{\alpha}$  uniformes, ce qui implique des mobilités  $\mu_{\alpha}$  également uniformes. Les gradients de température ioniques,  $\nabla T_i$  pourraient être pris en compte, mais ils sont généralement faibles.

ont la forme de tourbillons (vortex). Raisonnons encore une fois par contraposition en montrant que si  $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$  en tout point du plasma, il en résulte nécessairement que  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . En effet, si  $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$ , il existe une fonction scalaire  $\psi$  telle que  $\mathbf{J} = \nabla\psi$ . Or, la divergence de  $\mathbf{J}$  est identiquement nulle. Il en résulte que  $\psi$  est solution de l'équation de Laplace,  $\Delta\psi = 0$ , dans tout le plasma. Les parois du plasma étant isolantes, la densité de courant normale aux parois y est nulle :  $J_n = \nabla\psi \cdot \mathbf{k} = 0$  où  $\mathbf{k}$  est un vecteur normal aux parois. Cette condition constitue donc une condition aux limites de Neumann pour le problème de Laplace. La seule solution de ce problème est une constante,  $\psi = \text{Cte}$ , ce qui implique que  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  dans tout le plasma.

La Figure 3.2 présente des simulations numériques qui illustrent ces résultats dans le cas d'un plasma d'argon à 200 mTorr chauffé par induction (en  $z = 0$  sur les figures). On notera en particulier que les lignes de courant sont bien refermées sur elles-mêmes et que les lignes de gradients de densité et température électronique ne sont en général pas parallèles.

#### *Cas particuliers d'ambipolarité*

Enfin, toujours dans le cas 2D, en utilisant le même genre d'arguments que développés ci-dessus, on peut montrer que si  $\nabla T_e = \mathbf{0}$  dans tout le plasma, alors la densité de courant y est également nulle en tout point,  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ , lorsque le plasma est limité par des parois isolantes. Dans ces conditions particulières, la condition dite d'ambipolarité  $\Gamma_e = \Gamma_i \equiv \Gamma_a$  est satisfaite, et il est facile de montrer que les expressions du champs électrique et du flux ambipolaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a &= \frac{D_e - D_i}{\mu_e - \mu_i} \nabla \ln n, \\ \Gamma_a &= -D_a \nabla n \end{aligned}$$

où  $D_a$  est le coefficient de diffusion ambipolaire défini par la relation :

$$D_a \equiv \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e}, \quad (3.12)$$

A 1D, la condition d'ambipolarité est satisfaite aux bords d'un plasma lorsque celui-ci est limité par des parois isolantes (des parois isolantes ne tirent aucun courant, et donc,  $\Gamma_e = \Gamma_i$ , *sur les parois*). Dans ce cas unidimensionnel, la conservation générale du courant,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  assure la propagation de la condition d'ambipolarité de la surface vers le cœur, et donc en tout point du plasma.

#### *Equation de diffusion*

Cherchons maintenant à déterminer l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit la densité du plasma. Pour ce faire, il suffit d'éliminer  $\Gamma_\alpha$  entre les équations (3.9) et (3.10) et d'utiliser l'expression du champ électrique donnée



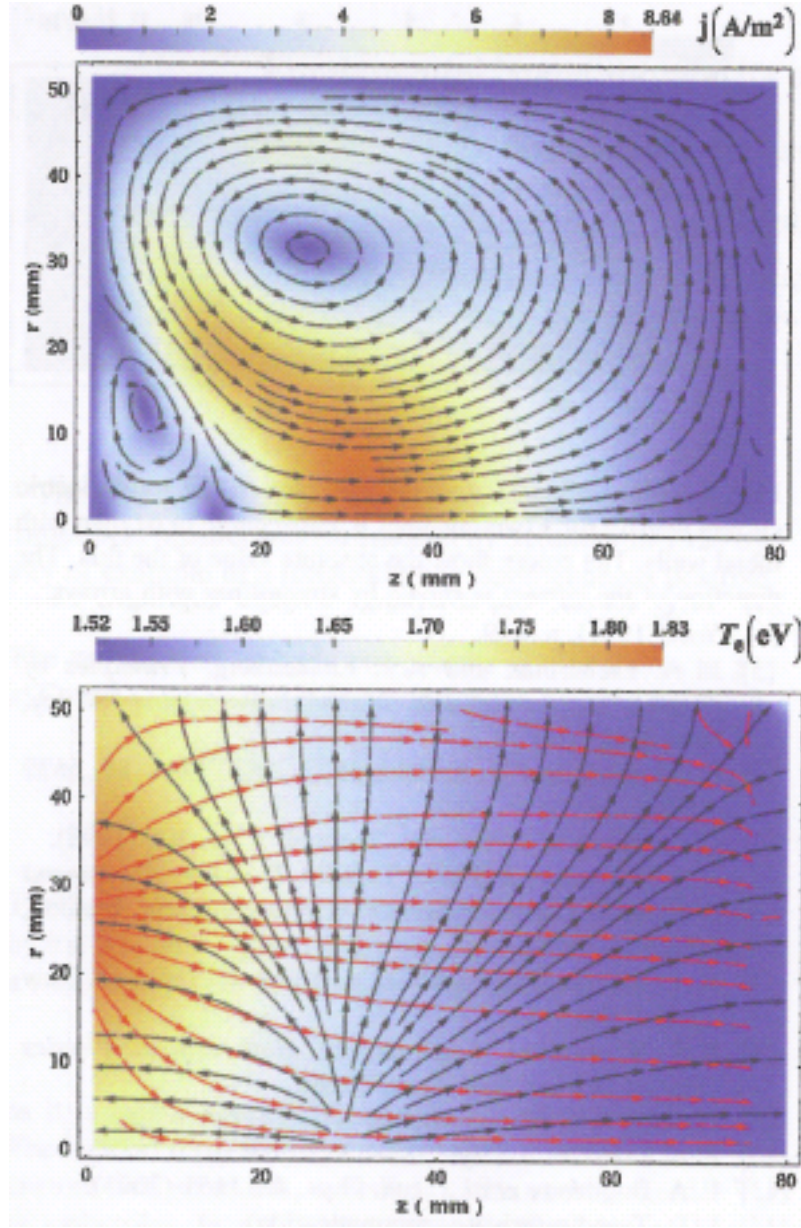


FIGURE 3.2 – Densité de courant (figure du haut) et directions de  $\nabla T_e$  (gris) et  $\nabla n$  (noir) (figure du bas) dans une décharge d'argon limitée par des parois isolantes. La pression est de 200 mTorr, la puissance déposée est de 1 W (tiré de Bogdanov et al., Physical Review Letters, 106, 195001, 2011)

par l'équation (3.11). Après un peu d'algèbre, on trouve l'expression suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \Delta(D_a n) = S, \quad (3.13)$$

où  $D_a$  est le *coefficient de diffusion ambipolaire* défini plus haut. L'équation (3.13) a la structure d'une équation de diffusion. La densité évolue par une compétition entre un terme de production de charges : le terme source (due à

l'ionisation en volume au sein du plasma) et un terme de perte de charges (la diffusion ambipolaire des charges électriques perdues au parois).

Il est remarquable que la densité de courant  $\mathbf{J}$  n'apparaisse pas explicitement dans cette expression. Notez qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser l'égalité  $\mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{\Gamma}_e$  pour établir cette équation, qui est donc valable même s'il existe des courants au sein du plasma. Quelques solutions particulières de cette équation seront étudiées en problème.

### Cas d'un plasma magnétisé

Une première approche de la diffusion dans un plasma collisionnel magnétisé sera présenté en TD. Il s'agit d'une situation idéalisée où le plasma remplit une colonne cylindrique supposée infiniment longue dans la direction du champ électrique et où la température électronique est supposée uniforme.

*Sous ces hypothèses simplificatrices*, on montre que le flux ambipolaire du plasma dans la direction parallèle au champ magnétique n'est pas modifié par la présence du champ, tandis que dans la direction perpendiculaire au champ magnétique, le flux reste proportionnel au gradient de densité mais avec un coefficient de diffusion renormalisé :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_{a\parallel} &= -D_{a\parallel} \nabla n, \\ \mathbf{\Gamma}_{a\perp} &= -D_{a\perp} \nabla n,\end{aligned}$$

avec,

$$D_{a\parallel} = D_a \quad \text{et} \quad D_{a\perp} = \frac{\mu_{i\perp} D_{e\perp} - \mu_{e\perp} D_{i\perp}}{\mu_{i\perp} - \mu_{e\perp}}$$

A la différence du cas non magnétisé présenté dans la section précédente, il n'existe pas de discussion systématique du caractère ambipolaire ou non ambipolaire de la diffusion dans un plasma collisionnel en présence de champ magnétique.

## 3.3 Plasmas non collisionnels : inertie et équilibre

Dans cette section, nous considérons les situations où le libre parcours moyen des particules est grand devant la taille du système étudié. Dans ces conditions, tous les termes de collisions sont négligeables, et l'équilibre se réalise, pour une espèce donnée, par compensation des forces d'inertie, de pression et des forces électromagnétiques :

$$nm \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + nq (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Cette équation est encore bien compliquée aussi nous restreignons-nous dans la suite au cas *stationnaire* ( $\partial_t \equiv 0$ ), et *isotherme* ( $\nabla T \equiv 0$ ), soit :

$$m (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + k_B T \frac{\nabla n}{n} + q \nabla \varphi - q \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0, \quad (3.14)$$

où nous avons utilisé les relations  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  et  $p = nk_B T$  et où nous avons divisé par  $n$ . Bien que simplifiée, cette équation n'est cependant pas triviale dans ces conséquences. On notera en particulier la présence du *terme non-linéaire* en vitesse dû aux forces d'inertie.

On peut maintenant utiliser la relation vectorielle  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} + \nabla (V^2/2)$  qui montre que le produit scalaire de l'équation (3.14) par le vecteur  $\mathbf{V}$  conduit au résultat :

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} m V^2 + k_B T \ln n + q\varphi \right) = 0$$

On en déduit donc l'existence de l'invariant le long d'une ligne de courant :

$$\boxed{\frac{1}{2} m V^2 + k_B T \ln n + q\varphi = \text{Cte}}$$

Ce résultat constitue une forme particulière de la *la formule de Bernoulli*<sup>5</sup> qui s'applique aux fluides parfaits et l'équation (3.14) n'est autre que l'équation d'Euler en présence des forces électromagnétiques. Bien que les lignes de courant soient évidemment modifiées en présence de champ magnétique, il est cependant remarquable que la forme générale de cet invariant se conserve en présence du champ magnétique.

Selon les situations particulières du plasma ou selon la composante du plasma (électrons ou ions) considérée, 2 des 3 termes peuvent être prépondérant par rapport au 3ème, ce que nous détaillons dans ce qui suit.

### 3.3.1 Equilibre thermodynamique

Cette situation correspond au cas où l'énergie cinétique peut être négligée. C'est le cas par exemple, dans le cas des plasmas froids, pour les électrons, dont les très faibles masses tendent à rendre négligeable le terme d'origine inertiel. Les électrons sont alors à l'équilibre entre eux, sans toutefois être en équilibre avec les autres composantes du plasmas (ions et espèces neutres) qui possèdent en général une température inférieure d'un à 2 ordres de grandeurs. Dans certaines situations de plasmas chauds, les ions et les électrons peuvent se trouver à la même température et donc l'équilibre thermodynamique est complet.

L'équation (3.15) s'écrit donc :

$$k_B T \ln n + q\varphi = \text{Cte},$$

---

5. Dans le cas des fluides incompressibles comme l'eau (mais ce n'est pas le cas des plasmas qui s'assimilent plutôt à des gaz!), la formule de Bernoulli s'écrit sous la forme légèrement différente (chacun des termes est homogène à une densité d'énergie et non pas à une énergie) :

$$\frac{1}{2} (nm) V^2 + p + (nq)\varphi = \text{Cte}$$

ce qui traduit l'uniformité du potentiel électrochimique<sup>6</sup> le long des lignes de courant. Soit  $n_0$  la densité là où le potentiel électrostatique s'annule, on aura donc

$$k_B T \ln n + q\varphi = k_B T \ln n_0 \quad \Leftrightarrow \quad n(\mathbf{r}) = n_0 e^{-q\varphi(\mathbf{r})/(k_B T)}$$

Il s'agit là d'une forme de la densité en  $e^{-E/(k_B T)}$  qui correspond donc à la relation d'équilibre de Boltzmann. Les composantes du plasma qui vérifient cette équation sont appelées *boltzmanniennes*.

### 3.3.2 Mouvement inertiel

Supposons maintenant qu'il soit possible de négliger le terme proportionnel à la température. Cette approximation est envisageable pour les ions au sein d'un plasma partiellement ionisé. L'équation correspondante s'écrit :

$$\frac{1}{2} m V^2 + q\varphi = \text{Cte}$$

ce qui correspond à la conservation de l'énergie totale, somme des énergies cinétique et potentielle. On notera que sous ces hypothèses, cette composante du plasma ne se comporte plus comme un fluide mais comme une particule. Comme nous l'avons déjà noté, en l'absence de température (ou de pression), le caractère de milieu continu du fluide est perdu et devient particulaire. Soit  $V_0$  la vitesse des particules où le potentiel s'annule, alors :

$$\frac{1}{2} m V^2 + q\varphi = \frac{1}{2} m V_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad V(\mathbf{r}) = V_0 \sqrt{1 - 2q\varphi(\mathbf{r})/(mV_0^2)}$$

Cette expression peut être comparée avec la vitesse de chute libre d'une masse placée dans un champ de gravitation. Ici, c'est le potentiel électrostatique qui freinera ou accélérera les charges en fonction de leur signe.

---

6. On rappelle que le potentiel chimique du gaz parfait est tel que  $\mu_{GP} = k_B T \ln(n\Lambda^3)$  où  $\Lambda$  est la longueur d'onde thermique de la particule.

## Chapitre 4

# Ondes dans les plasmas

De même que dans les milieux neutres (gaz ou liquides), des ondes peuvent se propager dans les plasmas. Du fait qu'il existe un couplage entre les variables hydrodynamiques et électrodynamiques dans les plasmas, la variété des ondes pouvant y exister est considérable. La caractérisation des ondes et leurs conditions de propagation constitue un champ d'études à lui seul de la physique des plasmas. Sans souci d'exhaustivité, nous présenterons dans ce chapitre quelques exemples caractéristiques d'ondes linéaires. D'autres exemples seront donnés en TD. Faute de temps, nous ne mentionnons pas le cas pourtant très important des ondes non-linéaires dans les plasmas.

Pour mettre en évidence les ondes linéaires dans les plasmas, on peut partir de la modélisation fluide générale et *linéariser* les contributions non-linéaires par rapport à un état de référence. Comme on le verra plus bas, cela revient essentiellement à négliger la contribution inertielle d'accélération (i.e. le terme  $v \partial_x v$ ). Cette approche n'est acceptable que pour des amplitudes faibles des grandeurs physiques perturbées. La mise en évidence des ondes linéaires nous informent donc sur la réponse des plasmas à de faibles perturbations extérieures.

### 4.1 Ondes acoustiques ioniques

Les collisions de contact entre molécules sont à l'origine des ondes de pression dans un gaz neutre. Ces ondes sont caractérisées par leur vitesse de propagation : la vitesse du son. *Comme nous l'avons déjà noté, certains plasmas peuvent être considérés sans collisions. Nous montrons dans cette section que des ondes acoustiques peuvent cependant exister dans un plasma sans collisions du seul fait des interactions coulombiennes entre électrons et ions.*

Considérons un plasma non collisionnel, unidimensionnel, décrit dans l'approximation quasi-neutre :  $n_i = n_e = n$ , où les ions positifs sont considérés comme froids ( $T_i = 0$ ), et les électrons boltzmanniens. Les équations caractérisant

ce plasma sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_t n + \partial_x(nv_i) &= 0, \\ Mn (\partial_t v_i + v_i \partial_x v_i) &= +en E, \\ k_B T_e \partial_x n &= -en E\end{aligned}$$

Si on se limite à rechercher des ondes de faibles amplitudes, on peut considérer le système linéarisé autour d'un état de référence de densité uniforme et stationnaire tel que :  $n = n_0$  et  $\partial_x n_0 = \partial_t n_0 = 0$ ,  $v = 0$ ,  $E = 0$ . Par rapport à cet état de référence, les densités, vitesses et champ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}n &= n_0 + n_1, \\ v_i &= v_1, \\ E &= E_1\end{aligned}$$

où les grandeurs indexées par 1 représentent des perturbations par rapport à l'état de référence. La linéarisation consiste à utiliser ces expressions dans les équations du système différentiel en ne gardant que les termes d'ordre 1 (les contributions non-linéaires, comme  $v_1 \partial_x v_1$  par exemple, sont négligées en tant que produit de 2 grandeurs perturbatives) :

$$\begin{aligned}\partial_t n_1 + n_0 \partial_x v_1 &= 0, \\ M n_0 \partial_t v_1 &= +en_0 E_1, \\ k_B T_e \partial_x n_1 &= -en_0 E_1\end{aligned}$$

En combinant les équations entre elles, on peut obtenir l'équation pour les perturbations de densités sous la forme<sup>1</sup> :

$$\partial_{tt}^2 n_1 - \frac{k_B T_e}{M} \partial_{xx}^2 n_1 = 0$$

Il s'agit manifestement de l'équation de propagation d'une onde de densité avec la vitesse  $(k_B T_e / M)^{1/2}$ .

Rappelons que dans un gaz neutre (à une seule composante), la vitesse de propagation du son  $c_s$  est définie par la relation thermodynamique :

$$c_s^2 \equiv \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0},$$

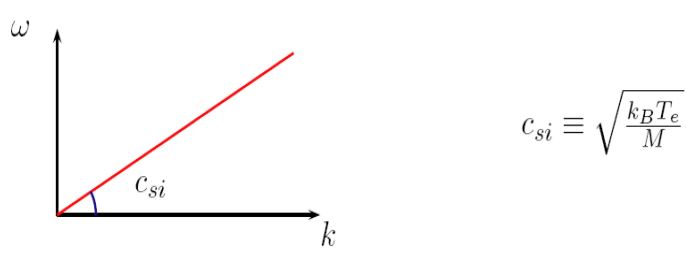
où  $\rho \equiv nm$  est ici la densité de masse. Dans le cas du gaz parfait,  $p = (nm) k_B T / m$ , et donc

$$c_s^2 = \frac{k_B T}{m} = \frac{p}{nm}$$

Dans le plasma, la pression n'est due qu'aux électrons  $p = p_e \approx k_B T_e n$  (puisque nous avons supposé les ions froids), tandis que l'inertie ne dépend que des ions  $nM$  (puisque nous avons négligé la masse des électrons en les supposant

---

1. La vitesse et le potentiel obéissent à la même équation.



boltzmanniens), ce qui conduit bien à une vitesse du son dite *vitesse acoustique ionique* :

$$c_{si} \equiv \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}}$$

En cherchant des solutions de l'équation d'onde sous la forme d'ondes progressives,  $n_1 \sim e^{j(kx - \omega t)}$ , on obtient

$$(-\omega^2 + c_{si}^2 k^2) n_1 = 0$$

ce qui conduit à la *relation de dispersion* :

$$\frac{\omega}{k} = c_{si}$$

*Les ondes acoustiques ioniques sont donc sans dispersion et les vitesses de phase et de groupe sont identiques<sup>2</sup>, ce sont des ondes propagatives de vitesses constantes. L'étude du système linéarisé montre également que la vitesse acoustique ionique est la vitesse "naturelle" de propagation de faibles perturbations extérieures. Cette vitesse joue encore un rôle important lorsque les effets non-linéaires sont pris en compte et marque, à l'instar de la vitesse du son, une frontière entre les comportements subsonique et supersonique.*

#### Remarques

1. Il est facile de montrer (faites-le) que la prise en compte de la température ionique (qui interviendrait dans le terme de pression dans l'équation de bilan de quantité de mouvement des ions) conduirait à une vitesse acoustique ionique égale à  $\sqrt{(k_B T_e + k_B T_i)/M}$ .

A la différence de ce qui se passe dans les fluides neutres, il est remarquable que la vitesse des ions ne s'annule pas, même si  $T_i \rightarrow 0$ , car il reste la contribution de pression (souvent dominante du reste) due aux électrons. Remarquons enfin que la vitesse acoustique ionique prend, dans les plasmas hors-équilibre où  $T_i \ll T_e$ , une valeur intermédiaire entre les vitesses thermiques des électrons et des ions :

$$\sqrt{\frac{k_B T_i}{M}} < \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} \ll \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}$$

Les ordres de grandeurs correspondants sont de l'ordre de quelques centaines de m/s pour les vitesses thermiques ioniques, quelques milliers de m/s pour

---

2. On rappelle que la vitesse de phase est définie par le rapport  $\omega/k$ , la vitesse de groupe par la dérivée  $d\omega/dk$ .

les vitesses acoustiques ioniques, et quelques millions de m/s pour les vitesses thermiques électroniques.

2. Les termes sources et/ou les termes de collisions que nous avons négligés sont responsables de l'amortissement de ces ondes. Les équations de bilan des ions sont modifiées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\partial_t n + \partial_x (nv) &= \nu_I n, \\ Mn (\partial_t v + v \partial_x v) &= -k_B T_e \partial_x n - (\nu_{in} n + \nu_I n) Mv\end{aligned}$$

Dans ce cas le système d'équations linéarisées devient :

$$\begin{aligned}\partial_t n_1 + n_0 \partial_x v_1 &= \nu_I n_1, \\ M n_0 \partial_t v_1 &= -k_B T_e \partial_x n_1 - (\nu_{in} + \nu_I) M n_0 v_1,\end{aligned}$$

En combinant ces équations entre elles, on trouve que l'équation d'onde correspondante s'écrit :

$$\partial_{tt}^2 n_1 - c_{si}^2 \partial_{xx}^2 n_1 = (\nu_{in} + \nu_I) \nu_I n_1 - \nu_{in} \partial_t n_1$$

Le terme de dérivée temporelle du premier ordre est clairement responsable de l'amortissement des ondes tandis que le terme linéaire (qui dépend essentiellement de la fréquence d'ionisation) ne joue significativement que pour les longueurs d'ondes  $\lambda \gg \lambda_I \equiv u_B / \nu_I$ .

## 4.2 Oscillations du plasma

Les forces électriques sont très fortes au sein d'un plasma si bien que son comportement étudié à une échelle suffisamment grande (plus grande que la longueur de Debye) apparaît comme quasi-neutre : les électrons et les ions positifs sont fortement liés. Du fait de leur différence de masses, les comportements dynamiques des ions et des électrons sont cependant très différents. *De fait, si le plasma vient à être perturbé, les électrons réagissent beaucoup plus vite que les ions, mais la force de Coulomb agit comme une force de rappel qui tend à ramener les électrons vers les ions, voire lorsqu'il n'y a pas trop d'amortissement à provoquer un mouvement d'oscillation des électrons autour des ions.*

Considérons un plasma constitué d'ions positifs que nous supposons immobiles, ce qui peut être justifié par la très grande différence de masses entre ions et électrons<sup>3</sup>  $M \gg m$ . Les électrons sont donc les seules particules réagissant aux perturbations. Cette classe de plasma où une seule composante (les électrons) est prise en compte, l'autre composante assurant seulement une neutralité électrique globale, s'appelle un plasma à une composante (OCP : one component plasma, en anglais). En considérant, une fois encore ce plasma unidimensionnel et sans collision, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\partial_t n_e + \partial_x (n_e v_e) &= 0, \\ mn_e (\partial_t v_e + v_e \partial_x v_e) &= -k_B T_e \partial_x n_e - en E, \\ \epsilon_0 \partial_x E &= e(n_0 - n_e)\end{aligned}$$

---

3. Dans le cas le plus défavorable du plasma d'hydrogène, le rapport est déjà de l'ordre de 2000.



où on a posé, une fois pour toute,  $n_i = n_0$ .

En suivant la même démarche que dans la section précédente, après avoir posé,  $n_e = n_0 + n_1$ ,  $v_e = v_1$  et  $E = E_1$ , on procède à la linéarisation qui conduit au système :

$$\begin{aligned} \partial_t n_1 + n_0 \partial_x v_1 &= 0, \\ m n_0 \partial_t v_1 &= -k_B T_e \partial_x n_1 - e n_0 E_1, \\ \epsilon_0 \partial_x E_1 &= -e n_1 \end{aligned}$$

En éliminant  $E_1$  et  $v_1$  entre ces équations, on trouve facilement :

$$\partial_{tt}^2 n_1 - \frac{k_B T_e}{m} \partial_{xx}^2 n_1 + \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} n_1 = 0$$

Les coefficients intervenant dans les second et troisième termes sont respectivement homogènes aux carrés d'une vitesse et d'une fréquence :

$$v_{T_e} \equiv \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_{Pe} \equiv \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}$$

Il s'agit respectivement de la *vitesse thermique électronique* et de la *fréquence plasma électronique*. Ces deux grandeurs sont reliées à la longueur de Debye par la relation :

$$v_{T_e} = \lambda_D \omega_{Pe}$$

L'équation différentielle peut donc s'écrire sous la forme :

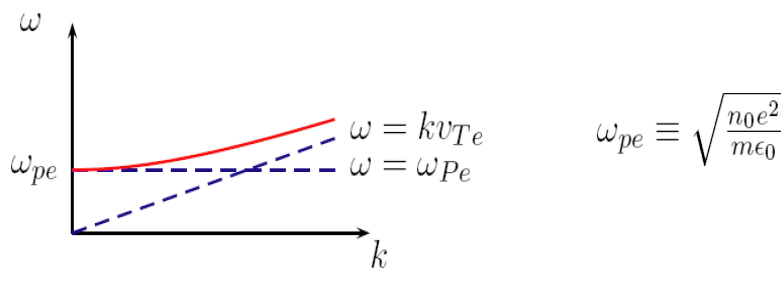
$$\partial_{tt}^2 n_1 - v_{T_e}^2 \partial_{xx}^2 n_1 + \omega_{Pe}^2 n_1 = 0 \quad (4.1)$$

Déterminons la relation de dispersion associée en cherchant les solutions de cette équation sous la forme d'une onde progressive. On trouve aussitôt :

$$-\omega^2 + (k v_{T_e})^2 + \omega_{Pe}^2 = 0$$

soit encore

$$\omega = \omega_{Pe} \sqrt{1 + (k \lambda_D)^2}$$



Le système passe donc d'un système purement oscillant à la fréquence plasma pour les grandes longueurs d'ondes ( $k \lambda_D \ll 1$ ) à un système propagatif à la vitesse thermique dans la limite opposée ( $k \lambda_D \gg 1$ ). Le même type de conclusion peut être obtenue à partir de l'équation différentielle (4.1).

### 4.3 Ondes d'Alfvén

Dans certaines circonstances que l'on précisera dans un chapitre ultérieur, il est possible de décrire le plasma comme un fluide unique incompressible et parfaitement conducteur (c'est le cas du mercure liquide par exemple). Dans ces conditions, les équations de la magnétohydrodynamique s'appliquent et s'écrivent :

$$\begin{aligned}\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\end{aligned}$$

Comme,

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

l'équation de bilan de quantité de mouvement s'écrit donc également sous la forme :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla (p + p_m) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

où  $p_m \equiv B^2/(2\mu_0)$  est la pression (ou densité d'énergie) magnétique. Une solution stationnaire simple de ces équations est donnée par les 2 conditions :

$$p + p_m = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \pm \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

On peut considérer que cette solution est une solution *d'équipartition* puisque l'expression de la vitesse en fonction de  $\mathbf{B}$  est équivalente à l'égalité :

$$\frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Ainsi, au cœur même du problème non-linéaire apparaît naturellement une vitesse associée à la présence du champ magnétique, *la vitesse dite d'Alfvén* définie par la relation :

$$\boxed{\mathbf{V}_A \equiv \pm \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}}$$

Considérons maintenant le problème linéarisé par rapport à un état de référence où le champ magnétique est stationnaire et uniforme, la pression et la densité uniformes et la vitesse fluide nulle. La démarche usuelle de linéarisation conduit donc aux équations :

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} &= -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0), \\ \nabla \cdot \mathbf{V}_1 &= \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0\end{aligned}$$

Cherchons des solutions sous la forme d'ondes progressives  $e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ . Le système d'équation aux dérivées partielles devient algébrique et s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\rho_0 \omega \mathbf{V}_1 &= -p_1 \mathbf{k} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0, \\ \omega \mathbf{B}_1 &= \mathbf{k} \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0), \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1 &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{V}_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{B}_0 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{V}_1,$$

de sorte que  $\omega \mathbf{B}_1 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{V}_1$ , donc,

$$\omega (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0 \times (\omega \mathbf{B}_1 \times \mathbf{k}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 \mathbf{V}_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{k}$$

et pour finir,

$$\rho_0 \omega^2 \mathbf{V}_1 \times \mathbf{k} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 \mathbf{V}_1 \times \mathbf{k}$$

La relation de dispersion est donc :

$$\frac{\omega}{k} = V_A \cos \theta$$

où  $V_A$  est le module de la vitesse d'Alfvén déjà définie et  $\theta$  l'angle entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ . *La vitesse d'Alfvén est donc la vitesse maximale de propagation des ondes. On notera que leur propagation est anisotrope : non propagative dans la direction orthogonale au champ magnétique et de vitesse maximale dans la direction du champ.*

Notons pour terminer que la prise en compte d'une conductivité finie conduit à un amortissement des ondes d'Alfvén. L'hypothèse d'incompressibilité est acceptable pour un liquide chargé comme le mercure qui constitue l'archétype des liquides conducteurs, mais discutable<sup>4</sup> pour les gaz ionisés intrinsèquement compressibles. Lorsque le milieu est compressible, les ondes d'Alfvén se couplent avec les ondes acoustiques pour former des *ondes magnétonosonores*.

---

4. Les effets de compressibilité peuvent être négligés dans les plasmas lorsque la vitesse d'Alfvén est très faible devant la vitesse acoustique  $c_s = \sqrt{p/\rho_0}$ , c'est-à-dire :

$$\frac{B_0^2}{\mu_0} \ll p$$



## Chapitre 5

# Dérives électromagnétiques

Dans ce chapitre, on abandonne la démarche auto-cohérente qui couple l'hydrodynamique et l'électrodynamique pour se concentrer sur quelques aspects du mouvement des particules dans des champs électromagnétiques *donnés*. L'étude du mouvement d'une particule chargée placée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme conduit au *mouvement cyclotronique* qui est brièvement rappelé dans la première section. En présence de champs dépendant du temps mais homogènes, le problème reste linéaire et admet une solution exacte. Il est cependant fréquent que les variations temporelles des champs soient lentes à l'échelle du mouvement cyclotronique. Dans ces conditions, il est très utile d'introduire la théorie dite *des dérives* - due à l'astrophysicien suédois Alfvén - qui fournit une analyse très physique de la dynamique des particules chargées. En présence de champs inhomogènes, le problème devient non-linéaire, mais peut également être appréhendé par la théorie des dérives.

### 5.1 Mouvement cyclotronique

Considérons donc le cas le plus simple, celui d'une particule, de charge  $q$ , de masse  $m$  placée dans un champ magnétique,  $\mathbf{B}$  uniforme et stationnaire, tel que  $\mathbf{B} = B \vec{e}_z$ .

L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

Cette équation, projetée sur chacune des directions ( $Ox, Oy, Oz$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= +\omega_c V_y, \\ \dot{V}_y &= -\omega_c V_x, \\ \dot{V}_z &= 0\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le point pour désigner la dérivée par rapport à  $t$ , et où nous avons introduit *la fréquence cyclotron ou de Larmor* ou plus correctement

la pulsation cyclotronique définie par :

$$\omega_c \equiv \frac{qB}{m}$$

Pour un champ de 1000 Gauss la fréquence cyclotronique des électrons est de l'ordre du GHz, celle des ions dans le même champ étant inférieur d'un facteur  $m_e/m_i$ , donc très inférieure au MHz pour beaucoup d'atomes.

La forme des équations du mouvement dans le plan  $(Ox, Oy)$  où  $\dot{V}_x$  est couplée à  $V_y$  et réciproquement est caractéristique d'un mouvement de rotation. Pour le mettre en évidence, il est commode d'introduire une grandeur complexe,  $\mathcal{V}_\perp$ , qui caractérisera la vitesse dans le plan perpendiculaire au champ magnétique :

$$\mathcal{V}_\perp \equiv V_x + i V_y$$

Le système d'équations se réduit donc à :

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}_\perp(t) &= -i\omega_c \mathcal{V}_\perp(t), \\ \dot{V}_z(t) &= 0\end{aligned}$$

dont les solutions sont clairement :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\perp(t) &= |\mathcal{V}_{\perp 0}| e^{-i\omega_c t}, \\ V_z &= \text{Cte}\end{aligned}$$

où nous avons posé  $\mathcal{V}_{\perp 0} \equiv \mathcal{V}_\perp(0)$ , et fixé la phase de  $\mathcal{V}_\perp(0)$  à 0 par un choix convenable de l'origine des temps. Il s'agit d'un mouvement uniforme dans la direction du champ magnétique et de rotation à la fréquence  $\omega_c$  dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ . Le mouvement est donc hélicoïdal : les particules avancent en s'enroulant autour des lignes de champs.

En revenant aux grandeurs réelles, on obtient donc dans le plan transverse :

$$\begin{aligned}V_x(t) &= +|\mathcal{V}_{\perp 0}| \cos \omega_c t & \text{et} & & x(t) &= x(0) + \rho_L \sin \omega_c t \\ V_y(t) &= -|\mathcal{V}_{\perp 0}| \sin \omega_c t & & & y(t) &= y(0) + \rho_L (\cos \omega_c t - 1)\end{aligned}$$

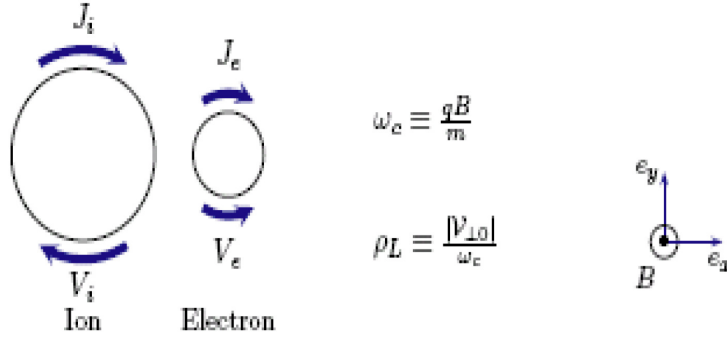
où nous avons introduit le rayon de l'orbite cyclotronique,  $\rho_L$  appelé *rayon de Larmor* :

$$\rho_L \equiv \frac{|\mathcal{V}_{\perp 0}|}{\omega_c}$$

Le vecteur de coordonnées  $(x(0), y(0), z(0) + V_z t)$  est appelé *le centre-guide*. Si l'on prend pour vitesse caractéristique la vitesse thermique des particules,  $\sqrt{k_B T/m}$ , on voit que  $\rho_L \sim \sqrt{m}$ . Les rayons de Larmor des électrons sont donc significativement plus petits que ceux des ions. Dans les plasmas, lorsque les champs magnétiques restent modérés (quelques centaines de Gauss), il existe des situations où les électrons sont magnétisés tandis que les trajectoires ioniques sont peu affectées par la présence du champ magnétique.

Le sens de rotation sur les trajectoires cyclotroniques dépend du signe de la charge considérée. On vérifiera que le sens de rotation est tel que le champ

magnétique créé par le mouvement de rotation de la charge est de sens contraire au champ magnétique appliqué. Il s'agit donc d'un effet *diamagnétique* (l'effet s'oppose à la cause).



## 5.2 Quelques exemples de la théorie des dérives

Le mouvement dans un champ magnétique homogène et stationnaire, c'est-à-dire le mouvement cyclotronique, constitue le mouvement de référence de notre étude. Le cas général consiste dans l'étude du mouvement des champs électriques et magnétiques, éventuellement inhomogène et instationnaire. La méthode, dite *des dérives*, initiée par le plasmicien suédois Alfvén, concerne l'étude du mouvement dans la limite dite *adiabatique* où les champs appliqués varient lentement à l'échelle de temps ou d'espace du mouvement cyclotronique, c'est à dire très peu par rapport à  $\omega_c^{-1}$  ou  $\rho_L$ . Cette approximation, justifiée dans un certain nombre de situations pratiques, permet d'interpréter le mouvement des particules dans un plasma, comme une somme de contributions comprenant le mouvement cyclotronique et divers mouvements de dérives dont on peut donner une interprétation assez intuitive que nous présentons dans les sections qui suivent.

### 5.2.1 Dérive électrique temporelle : dérive de champs croisés

Nous considérons le cas d'une particule  $(q, m)$  placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire *et* dans un champ instationnaire  $\mathbf{E}(t)$ .

L'équation du mouvement est donc :

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q \mathbf{V} \times \mathbf{B} + q \mathbf{E}(t)$$

En introduisant une vitesse complexe dans le plan transverse comme dans la section précédente et en posant

$$\mathcal{E}_\perp(t) = \frac{q}{m} (E_x(t) + iE_y(t)),$$

l'équation différentielle s'écrit :

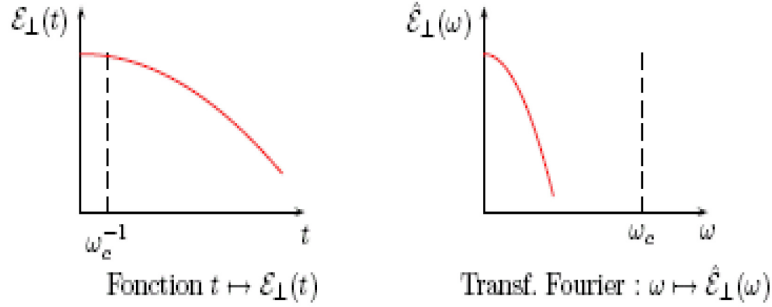
$$\dot{\mathcal{V}}_{\perp}(t) + i\omega_c \mathcal{V}_{\perp}(t) = \mathcal{E}_{\perp}(t) \quad (5.1)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire (dans la variable  $\mathcal{V}_{\perp}(t)$ ), du 1er ordre, avec second membre. Une solution générale de l'équation sans second membre s'écrit  $\mathcal{V}_{\perp}(t) = \text{Cte} e^{-i\omega_c t}$ , de sorte qu'en appliquant la méthode de la variation de la constante, on trouve pour solution générale de l'équation (5.1) :

$$\mathcal{V}_{\perp}(t) = \mathcal{V}_{\perp 0} e^{-i\omega_c t} + \int_0^t e^{-i\omega_c (t-\tau)} \mathcal{E}_{\perp}(\tau) d\tau$$

Ainsi, pour un champ électrique dont la variation temporelle est quelconque, trouvons-nous que le mouvement est la somme du mouvement cyclotronique précédemment identifié et d'un mouvement qui résulte de la convolution temporelle du mouvement cyclotronique avec le champ électrique.

Plaçons-nous maintenant dans la situation où la variation temporelle du champ électrique est *lente* à l'échelle de  $\omega_c^{-1}$ . Il est bien connu<sup>1</sup> que la transformée de Fourier d'une fonction large est une fonction étroite (et vice versa). Pour le cas qui nous intéresse, la situation est illustrée sur la figure suivante :



On retiendra que la transformée de Fourier de  $\mathcal{E}_{\perp}(t)$ , à savoir la fonction  $\hat{\mathcal{E}}_{\perp}(\omega)$  n'est non nulle que pour  $\omega/\omega_c \ll 1$ .

Prenons la transformée de Fourier de l'équation (5.1). On trouve aussitôt<sup>2</sup> qu'une solution particulière de (5.1) vérifie l'équation algébrique :

$$i\omega \hat{\mathcal{V}}_{\perp}(\omega) + i\omega_c \hat{\mathcal{V}}_{\perp}(\omega) = \hat{\mathcal{E}}_{\perp}(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\mathcal{V}}_{\perp}(\omega) = \frac{\hat{\mathcal{E}}_{\perp}(\omega)}{i\omega_c} \frac{1}{1 + \omega/\omega_c}$$

Comme  $\hat{\mathcal{E}}_{\perp}(\omega)$  s'annule très vite lorsque  $\omega/\omega_c$  croît, on peut sans danger développer la fraction  $(1 + \omega/\omega_c)^{-1} = 1 - \omega/\omega_c + \dots$ , ce qui conduit au développement :

$$\hat{\mathcal{V}}_{\perp}(\omega) = \frac{\hat{\mathcal{E}}_{\perp}(\omega)}{i\omega_c} (1 - \omega/\omega_c + \dots)$$

1. Le cas limite est donné par la distribution de Dirac  $\delta$ , infiniment étroite, dont la transformée de Fourier est la fonction constante 1, infiniment large.

2. Si  $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$  désigne la TF de la fonction  $t \mapsto f(t)$ , on montre (par intégration par parties) que la transformée de la fonction  $t \mapsto \dot{f}(t)$  est la fonction  $\omega \mapsto +i\omega \hat{f}(\omega)$ .



En revenant dans l'espace temporel, on trouve :

$$\mathcal{V}_\perp(t) = \frac{\mathcal{E}_\perp(t)}{i\omega_c} + \frac{1}{\omega_c^2} \frac{d\mathcal{E}_\perp(t)}{dt} + \dots$$

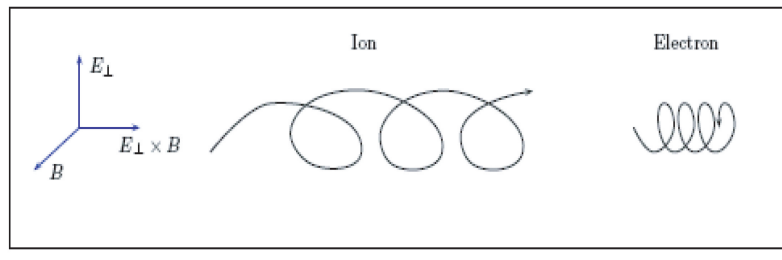
On en déduit les composantes de la vitesse dans le plan transverse :

$$\begin{aligned} V_x(t) &= +\frac{E_y(t)}{B} + \frac{m}{qB^2} \frac{dE_x(t)}{dt} + \dots \\ V_y(t) &= -\frac{E_x(t)}{B} + \frac{m}{qB^2} \frac{dE_y(t)}{dt} + \dots \end{aligned}$$

Rappelons qu'il s'agit là d'une solution particulière. Pour obtenir la solution générale de l'équation (5.1), il convient d'ajouter la solution de l'équation sans second membre (c'est-à-dire la solution cyclotronique obtenue à la section précédente), que nous noterons  $\mathbf{V}_c(t)$  :

$$\mathbf{V}_\perp(t) = \mathbf{V}_c(t) + \frac{\mathbf{E}_\perp(t) \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{E}_\perp(t)}{dt} + \dots \quad \text{pour } t \gg \omega_c^{-1}$$

Le deuxième terme de ce développement est la *dérive électrique de champs croisés*. On notera que ce terme est indépendant de la charge. Sous son influence, les électrons et les ions dérivent dans une même direction orthogonale à la fois à  $\mathbf{E}_\perp$  et  $\mathbf{B}$  :



Le dernier terme du développement, proportionnel à la dérivée du champ, provoque un mouvement de dérive, dans le sens du champ  $\mathbf{E}_\perp$ , opposé pour les ions et pour les électrons. On l'appelle *dérive de polarisation*.

### 5.2.2 Dérive magnétique spatiale : dérive de gradient

A la différence du cas où le champ magnétique est uniforme, le mouvement d'une particule dans un champ magnétique inhomogène est non-linéaire et ne peut être traité exactement dans les cas les plus généraux. Si l'on se restreint aux champs à variations spatiales lentes (c'est-à-dire tels que le champ varie peu à l'échelle des rayons de Larmor), on peut mettre en œuvre une méthode perturbative qui ramène le problème en champ magnétique inhomogène à celui en champ électrique dépendant du temps.

Concrètement, dans un système de coordonnées cartésiennes, considérons un champ magnétique inhomogène axial possédant un gradient selon  $Oy$  :

$\mathbf{B} = B(y) \mathbf{e}_z$  et  $\nabla \mathbf{B} = \frac{dB}{dy} \mathbf{e}_y$ . Les équations du mouvement dans la direction orthogonale au champ s'écrivent :

$$\dot{\mathcal{V}}_{\perp}(t) + i\omega(y) \mathcal{V}_{\perp}(t) = 0$$

où  $\omega(y) \equiv qB(y)/m$ . Comme  $\mathbf{B}$  est supposé quasi-uniforme le long d'une orbite, on peut le développer autour du centre guide :

$$\omega(y) = \omega_c + (y - y_0) \omega'_0 + \dots$$

où on a posé par commodité  $\omega'_0 \equiv d\omega(0)/dy$ . Soit  $L$  la longueur caractéristique du gradient du champ magnétique  $\omega'_0 \approx \omega_c/L$ . Le rapport des 2 premiers termes vaut donc :

$$\left| \frac{\omega'_0 (y(t) - y_0)}{\omega_c} \right| = \left| \frac{(y(t) - y_0)}{L} \right| \approx \left| \frac{\rho_L}{L} \right| \ll 1$$

Il s'ensuit que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\dot{\mathcal{V}}_{\perp}(t) + i\omega_c \mathcal{V}_{\perp}(t) = -i\omega'_0 (y(t) - y_0) \mathcal{V}_{\perp}(t) + \dots$$

Le terme du second membre étant petit, on peut le remplacer en première approximation par la solution obtenue dans le cas du mouvement cyclotronique parfait, i.e.  $y(t) - y(0) = \rho_L (\cos \omega_c t - 1)$  et  $\mathcal{V}_{\perp}(t) = |\mathcal{V}_{\perp 0}| e^{-i\omega_c t}$  ce qui donne :

$$\dot{\mathcal{V}}_{\perp}(t) + i\omega_c \mathcal{V}_{\perp}(t) \approx -i\omega'_0 \rho_L |\mathcal{V}_{\perp 0}| (\cos \omega_c t - 1) e^{-i\omega_c t}$$

Cette équation est analogue à celle étudiée dans la section précédente où le champ électrique dépendant du temps serait tel que :

$$\mathcal{E}_{\perp}(t) = -i\omega'_0 \rho_L |\mathcal{V}_{\perp 0}| (\cos \omega_c t - 1) e^{-i\omega_c t}$$

Sous ces approximations, le problème en champ magnétique inhomogène se ramène donc à celui en champ électrique dépendant du temps. On en déduit aussitôt les vitesses de dérives selon  $Ox$  ou  $Oy$  :

$$\begin{aligned} V_x^D(t) &= +\frac{E_y(t)}{B} = -\frac{\omega'_0 \rho_L |\mathcal{V}_{\perp 0}|}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \cos(\omega_c t), \\ V_y^D(t) &= -\frac{E_x(t)}{B} = -\frac{\omega'_0 \rho_L |\mathcal{V}_{\perp 0}|}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

Cette forme met donc en évidence des contributions non seulement à la fréquence  $\omega_c$  mais également à la fréquence  $2\omega_c$ . Cependant, on notera que la vitesse de dérive moyennée sur une orbite cyclotronique est telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} \langle V_x^D(t) \rangle &= -\frac{\omega'_0 |\mathcal{V}_{\perp 0}|^2}{2\omega_c^2}, \\ \langle V_y^D(t) \rangle &= 0 \end{aligned}}$$

où on a utilisé  $\rho_L = |\mathcal{V}_{\perp 0}|/\omega_c$ , et où  $\langle V^D(t) \rangle = (\omega_c/2\pi) \int_0^{2\pi/\omega_c} V^D(t) dt$ .

*Ainsi, un champ magnétique dans la direction  $Oz$ , avec un gradient dans la direction  $Oy$  produit une dérive dans la direction  $Ox$ . Cette dérive se produit en sens opposé pour les ions positifs et pour les électrons.*

### 5.2.3 Force pondéromotrice

Nous venons de traiter le cas où le gradient de champ magnétique est orthogonal à  $\mathbf{B}$ . La théorie des orbites peut également être appliquée aux cas où le gradient est parallèle à  $\mathbf{B}$ , ce qui conduit aux effets de *miroirs magnétiques*. Cet effet d'oscillations des charges est observé dans la magnétosphère entre les 2 pôles du champ magnétique terrestre (*ceintures de van Allen*). D'autres applications intéressantes de la théorie des orbites concernent l'étude des effets de courbure du champ magnétique.

Dans cette section, nous étudions le mouvement d'une particule chargée dans le champ électrique d'une onde électromagnétique d'amplitude inhomogène. Nous allons voir que la densité d'énergie électrostatique  $\mathcal{E} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  joue dans ce problème un rôle équivalent à la pression dans les fluides ordinaires : les particules ressentent une force,  $\propto -\nabla \mathcal{E}$ , qui les poussent loin des régions de fortes densités d'énergie électrostatique. Cet effet est négligeable avec des champs d'intensités modérées, mais peut devenir très important dans les études où des micro-ondes ou lasers de puissance sont utilisés pour confiner ou chauffer les plasmas. La fréquence de référence n'est plus la fréquence cyclotronique comme dans les cas étudiés précédemment, mais la fréquence de l'onde.

Considérons donc un électron placé dans un champ électrique inhomogène de haute fréquence ( $\omega_{pe} < \omega$ ) :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$ . L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$$

Comme dans les cas précédents, le variation spatiale de l'amplitude de l'onde est supposée lentement variable. Par rapport à une position de référence  $\mathbf{r}_0$ , on peut donc écrire :

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) + \dots$$

Si le champ était uniforme, on ne retiendrait que le premier terme de ce développement et l'équation du mouvement aurait pour solution :

$$\mathbf{v}(t) \approx -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega} \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}_0 + \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega^2} \cos(\omega t)$$

L'équation à résoudre en prenant en compte le terme dû au gradient du champ électrique s'écrit :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cos(\omega t) - e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cos(\omega t)$$

Utilisons à nouveau une méthode itérative pour résoudre cette équation : on y substitue donc la solution obtenue dans le cas homogène, soit :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cos(\omega t) - \frac{e^2 \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \mathbf{E}_0}{m\omega^2} \cos^2(\omega t)$$

Sur une échelle de temps beaucoup plus longue que  $\omega^{-1}$ , la moyenne temporelle de l'équation précédente s'écrit :

$$m \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2 \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \mathbf{E}_0}{2m\omega^2} = -\frac{e^2}{m\epsilon_0\omega^2} \nabla \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle \right)$$

où on a utilisé la relation  $\langle E^2 \rangle = E_0^2/2$ . Le terme de droite de cette expression est une force que l'on appelle pondéromotrice et qui tend à pousser les électrons loin des zones de champs intenses. Si le plasma est homogène de densité,  $n_0$ , la densité de force associée s'écrit encore :

$$-n_0 \frac{e^2}{m\epsilon_0\omega^2} \nabla \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle \right) = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \nabla \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle \right)$$

## Chapitre 6

# Introduction à la magnétohydrodynamique

Dans le cadre de la magnétohydrodynamique (MHD), les écarts à la neutralité au sein du plasma sont supposés suffisamment faibles pour que, partant de la modélisation usuelles à 2 fluides, un jeu de variables réduites puisse être introduit, conduisant à décrire le plasma à l'aide d'un seul fluide effectif, dont la mobilité est essentiellement due aux électrons et l'inertie due aux ions. Nous donnons une brève introduction à ce formalisme qui est un exemple de réduction fluide (un exemple de réduction électrohydrodynamique sera traité en Td).

### 6.1 Bilan global de masse et de charge

Partons de l'équation de bilan de particules de la composante  $\alpha$  (électrons, ions ou neutres) :

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = S_\alpha$$

où on rappelle que  $S_\alpha$  désigne le nombre de particules de l'espèce  $\alpha$  créées ou détruites par unité de volume et de temps au cours des collisions.

En multipliant cette équation par  $m_\alpha$  ou  $q_\alpha$  (masse ou charge des particules constituant la composante  $\alpha$ ), et en sommant sur  $\alpha$  on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \right) + \nabla \cdot \left( \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_\alpha \right) &= \sum_\alpha m_\alpha S_\alpha, \\ \partial_t \left( \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \right) + \nabla \cdot \left( \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{V}_\alpha \right) &= \sum_\alpha q_\alpha S_\alpha \end{aligned}$$

Or, la masse et la charge sont conservées dans toutes les réactions élémentaires entre particules. Il en résulte que :

$$\sum_\alpha m_\alpha S_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha S_\alpha = 0$$

Par exemple, dans les réactions de recombinaison :  $e^- + i^+ \rightarrow n$  ou d'ionisation :  $e^- + n \rightarrow i^+ + 2e^-$ , on aurait :

$$S_e = S_i = -S_n = -K_r n_e n_i + K_I n_e n_n,$$

où  $K_r$  et  $K_I$  sont les taux de recombinaison et d'ionisation. Du fait que  $m_e + m_i = m_n$  et que  $q_e + q_i = 0 = q_n$ , on en déduit bien que  $\sum_{\alpha} m_{\alpha} S_{\alpha} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} S_{\alpha} = 0$ .

Dès lors, il convient d'introduire *les variables collectives* suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} &\equiv \rho_m, \\ \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} &\equiv \rho, \\ \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} &\equiv \rho_m \mathbf{V}, \\ \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} &\equiv \mathbf{J} \end{aligned}$$

qui permettent de récrire les équations de bilans sous la forme simplifiée

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) &= 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \end{aligned}}$$

Ainsi, à l'aide des variables collectives, ces équations apparaissent comme celles d'un fluide unique.

La vitesse  $\mathbf{V}_{\alpha}$  de chaque composante est en général différente de la vitesse moyenne  $\mathbf{V}$ . Introduisons *la vitesse de diffusion* de la composante  $\alpha$ ,  $\delta \mathbf{V}_{\alpha} \equiv \mathbf{V}_{\alpha} - \mathbf{V}$ , telle que :

$$\mathbf{V}_{\alpha} \equiv \mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_{\alpha}$$

On notera que par définition de  $\mathbf{V}$ , on a :  $\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \delta \mathbf{V}_{\alpha} = \mathbf{0}$ , et que le courant total  $\mathbf{J}$  s'écrit :

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{V} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \delta \mathbf{V}_{\alpha}$$

Le premier terme est *le courant de convection*, le second *le courant de diffusion*.

## 6.2 Bilan global de quantité de mouvement

On suit la même démarche pour le bilan de quantité de mouvement. Le point de départ est l'équation de bilan de la quantité de mouvement de la composante  $\alpha$  :

$$m_{\alpha} n_{\alpha} (\partial_t + \mathbf{V}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{\alpha} = -\nabla p_{\alpha} + n_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}$$

où :

$$\mathbf{f}_{\alpha} = q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_{\alpha} \times \mathbf{B}) - m_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_{\alpha} - \mathbf{V}_{\beta})$$

En remarquant que la somme de toutes les forces interparticulaires est nulle<sup>1</sup> :  $\sum_{\alpha,\beta} n_\alpha m_\alpha \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) \equiv 0$ , le bilan global de quantité de mouvement s'écrit simplement :

$$\rho_m (\partial_t + \mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{V}_\alpha = -\nabla p + \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

où on a introduit la pression totale,  $p$  :

$$p \equiv \sum_{\alpha} p_{\alpha}$$

En utilisant la décomposition :  $\mathbf{V}_\alpha \equiv \mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_\alpha$ , la force d'inertie s'écrit :

$$\rho_m (\partial_t + \mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{V}_\alpha = \rho_m (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \sum_{\alpha} m_\alpha n_\alpha \delta \mathbf{V}_\alpha \cdot \delta \mathbf{V}_\alpha$$

puisque  $\sum_{\alpha} m_\alpha n_\alpha \delta \mathbf{V}_\alpha = \mathbf{0}$ . Si l'on néglige le dernier terme (termes quadratiques en  $\delta \mathbf{V}_\alpha$ ), a priori faible pour de petites fluctuations autour de la vitesse moyenne, l'équation de bilan s'exprime seulement en fonction de variables collectives :

$$\rho_m (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Sur des échelles de longueurs supérieures à la longueur de Debye, on peut considérer que le plasma est quasi-neutre :  $\rho \approx 0$ . L'équation précédente se simplifie sous la forme :

$$\rho_m (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

où on a introduit la densité de masse  $\rho_m \equiv nm$ .

## 6.3 Equilibres MHD

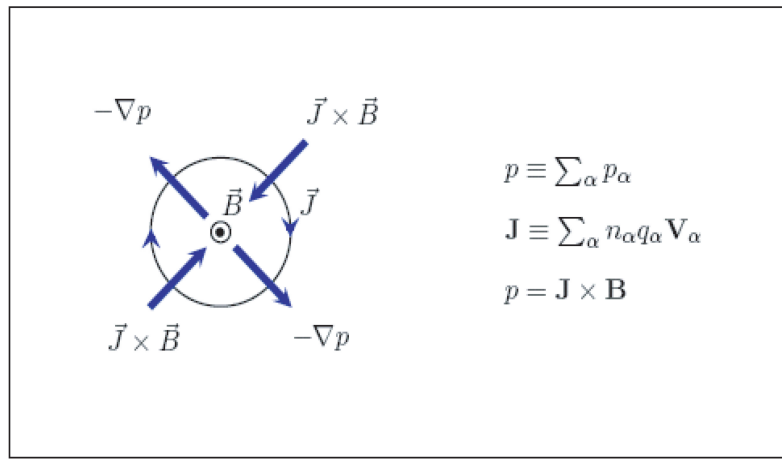
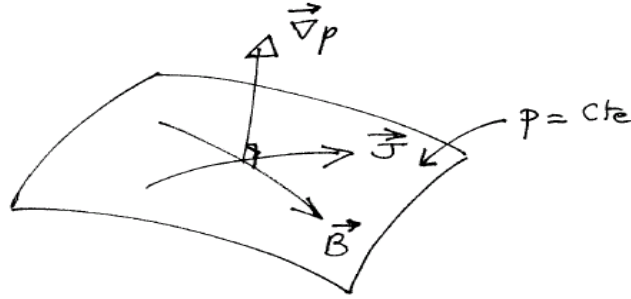
On se restreint dans cette section aux conditions dans lesquels un équilibre peut être réalisé dans le cadre de la description magnétohydrodynamique : on parle d'*équilibres MHD*.

En l'absence de mouvement, la vitesse fluide d'ensemble  $\mathbf{V} \equiv \mathbf{0}$ . Les équilibres MHD sont donc décrits par le système simplifié d'équations :

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}$$

qui correspond à l'équilibre des forces et à l'équation de Maxwell-Ampère.

On déduit immédiatement de l'équilibre entre la force de pression et la force de Laplace que  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{B}$  sont tous 2 orthogonaux à  $\nabla p$ . Les surfaces orthogonales à  $\nabla p$  sont des surfaces à pression constante : on parle de surfaces isobares. Les surfaces contenant les lignes de champs magnétiques sont appelées surfaces



magnétiques. On déduit donc de l'équilibre des forces MHD, que *les surfaces isobares sont les surfaces magnétiques pour les équilibres MHD.*

*Illustration : Equilibre cylindrique droit :  $\theta$ -pinch*

Considérons une colonne cylindrique de plasma placée dans un champ extérieur uniforme axial  $B_0 \mathbf{e}_z$ . Le mouvement cyclotronique des charges autour des lignes de champ magnétique s'accompagne de la création d'une densité de courant orthoradiale  $\mathbf{J} = J_\theta(r) \mathbf{e}_\theta$ . Cette densité de courant crée à son tour un champ magnétique  $\mathbf{B} = B_z(r) \mathbf{e}_z$  qui tend à s'opposer au champ extérieur.

Compte tenu des symétries,

$$(\nabla \times \mathbf{B})_\theta = \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta = -\frac{\partial B_z}{\partial r} \mathbf{e}_\theta = \mu_0 \mathbf{J}$$

et donc :

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \times B_z \mathbf{e}_z = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B_z^2}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r$$

1. Il s'agit du principe des actions réciproques ou 3ème loi de Newton.



Ainsi, en éliminant  $\mathbf{J}$  entre les 2 équations d'équilibre MHD, on obtient qu'un équilibre magnétohydrodynamique peut se réaliser dans une telle colonne de plasma si la pression totale se conserve :

$$p(r) + \frac{B_z^2(r)}{2\mu_0} = \text{Cte}$$

Idéalement, à la limite extérieure du plasma, la densité (et donc la pression) s'annule, de sorte que la pression maximum vaut  $B_0^2/(2\mu_0)$ . Le rapport entre l'énergie cinétique et la pression (totale) de confinement maximum est mesuré par le paramètre  $\beta$  :

$$\beta(r) \equiv \frac{p(r)}{B_0^2/2\mu_0} = 1 - \frac{B_z^2(r)}{B_0^2}$$

D'autres équilibres pression/champ magnétique sont possibles. On peut par exemple induire un champ magnétique orthoradial en faisant circuler un courant purement axial dans une colonne cylindrique de plasma (*Z-pinch*), ou en combinant les 2 effets précédents : champ magnétique uniforme axial et courant axial (*Screw-pinch*).

## 6.4 Equations simplifiées de la MHD

Les 2 équations de bilans obtenues ci-dessus :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) &= 0, \\ \rho_m \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

ne constituent pas un système fermé d'équations. Un jeu simplifié d'équations qui complètent ces équations est constitué des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla p &= v_s^2 \nabla \rho_m, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \mathbf{J} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

où  $v_s \equiv (\gamma p / \rho_m)^{1/2}$  et  $\sigma$  désignent respectivement la vitesse du son dans des conditions adiabatiques et la conductivité.

Ces équations ne sont pas toujours valables mais assez largement utilisées pour les fluides très conducteurs (cf. la dernière équation qui est une loi d'Ohm généralisée non exacte) et pour étudier des phénomènes de basses fréquences (notez que le courant de déplacement est négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère).  $p$  et  $\mathbf{J}$  peuvent facilement être éliminés de ces équations en utilisant la loi d'Ohm généralisée et la relation d'adiabaticité. Il reste bien 10 équations pour les 10 champs,  $\rho, \mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ .

Ces équations présentent un certain nombre de propriétés dont nous donnons quelques illustrations dans la suite.

## 6.5 Viscosité magnétique

Montrons comment on peut obtenir une équation d'évolution pour le champ magnétique  $\mathbf{B}$  à partir des équations de la MHD. Le rotationnel de la loi d'Ohm s'écrit :

$$\nabla \times J = \sigma [\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})]$$

En utilisant les équations de Maxwell, on trouve aussitôt :

$$-\frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Il est utile d'introduire la *viscosité magnétique* définie par la relation :

$$\eta_m \equiv \frac{1}{\mu_0 \sigma}$$

de sorte que :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta_m \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

Au vu de cette équation, il apparaît que  $\eta_m$  est un coefficient de diffusion. L'importance relative des 2 termes du second membre, peut être apprécié, comme en hydrodynamique, en introduisant un nombre dit de *Reynolds magnétique*,  $R_m \equiv VL/\eta_m$  où  $V$  et  $L$  sont des vitesses et longueurs caractéristiques du problème.

Lorsque  $R_m \ll 1$ , les phénomènes de diffusion l'emportent, le champ magnétique diffuse (et décroît) avec un temps caractéristique en  $L^2/\eta_m$ . Ce temps de diffusion dépend de la taille caractéristique du système considéré : de l'ordre de 10 s pour une sphère de cuivre d'un rayon d'un mètre, mais de l'ordre de 10 mille années pour le champ magnétique terrestre.

Dans la limite opposée, lorsque  $R_m \gg 1$ , les lignes de champs magnétiques suivent l'écoulement du fluide : on dit que les lignes de champ magnétiques sont *gelées* au plasma.

## Chapitre 7

# Travaux dirigés

### 7.1 Plasma inertiel en régime stationnaire non confiné

On considère un plasma partiellement ionisé, constitué d'électrons, de charges  $-e$  et de masse  $m$ , d'atomes neutres, et d'ions positifs monovalents, de masses  $M$  et de charges  $+e$ . Pour simplifier, on considèrera une situation unidimensionnelle : les variables dynamiques ne dépendent que d'une seule variable d'espace, disons  $x$ . Le taux d'ionisation est suffisamment faible pour que l'on puisse supposer la densité des neutres uniforme :  $n_n = \text{Cte}$ , et négliger la (lente) dynamique des atomes :  $v_n \approx 0$ . On suppose en outre que le plasma n'est pas magnétisé :  $B = 0$ .

Nous étudions l'expansion spatiale du plasma en régime stationnaire sous l'effet des seules forces qui agissent en son sein. On suppose, en outre, que la pression du gaz neutre est suffisamment faible pour que les termes de collisions ions-neutres puissent être négligés. Cette situation peut apparaître dans les plasmas spatiaux après la formation des nuages interstellaires, mais également dans certains régimes de fonctionnement des réacteurs à plasmas exploités industriellement à basses pressions de neutres.

Le plasma est décrit dans le cadre d'un modèle à 2 fluides, et dépend donc des 5 variables suivantes : densités et vitesses électroniques,  $n_e(x), v_e(x)$ , densités et vitesses ioniques :  $n_i(x), v_i(x)$ , et potentiel électrostatique  $\varphi(x)$ .

$$\begin{aligned}\partial_x(n_e v_e) &= +\nu_I n_e, \\ \partial_x(n_i v_i) &= +\nu_I n_e, \\ 0 &= -k_B T_e \partial_x n_e + e n_e \partial_x \varphi, \\ M n_i v_i \partial_x v_i &= -e n_i \partial_x \varphi, \\ \epsilon_0 \partial_{xx}^2 \varphi &= -e(n_i - n_e)\end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $\partial_x$  et  $\partial_{xx}^2$  désignent une dérivée première et seconde par rapport à la variable  $x$ .

Le système différentiel précédent est complété par les conditions aux limites

suivantes :

$$n_e(0) = n_i(0) = n_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad v_e(0) = v_i(0) = 0.$$

1. Rappeler quelle est la dimension de la constante  $\nu_I$  et sa signification.
2. Discuter succinctement mais précisément le contenu physique de chacune des équations précédentes. On soulignera en particulier quels sont les termes négligés dans cette modélisation<sup>1</sup>.
3. L'étude du système d'équations est facilitée par un adimensionnement des variables. On pose :

$$N_i \equiv \frac{n_i}{n_0}, \quad N_e \equiv \frac{n_e}{n_0}, \quad V = \frac{v_i}{u_B}, \quad V_e = \frac{v_e}{u_B}, \quad \phi \equiv \frac{e\varphi}{k_B T_e}, \quad X \equiv \frac{x}{\lambda_I},$$

où  $u_B \equiv (k_B T_e / M)^{1/2}$  est la vitesse dite de Bohm, et  $\lambda_I \equiv u_B / \nu_I$ , la longueur d'ionisation.

Montrer que les équations s'écrivent sous la forme :

$$(N_e V_e)' = +N_e, \quad (7.1)$$

$$(N_i V_i)' = +N_e, \quad (7.2)$$

$$N_e' = +N_e \phi', \quad (7.3)$$

$$V_i V_i' = -\phi', \quad (7.4)$$

$$\epsilon^2 \phi'' = N_e - N_i, \quad (7.5)$$

avec  $\epsilon \equiv \lambda_D / \lambda_I$ , et  $\lambda_D$ , la longueur de Debye. L'apostrophe désigne une dérivée par rapport à la variable  $X$  ; par exemple :  $N_e' \equiv \frac{dN_e}{dX}$ .

4. Montrer que  $\epsilon = \nu_I / \omega_{pi}$ , où  $\omega_{pi}$  est la fréquence plasma ionique. On rappelle que  $\nu_I = K n_g$ , où  $K$  est une constante et  $n_g$ , la densité du gaz neutre. Estimer  $\epsilon$  pour un plasma d'hydrogène tel que  $K = 10^{-14} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $n_g = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ,  $n_0 = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ ,  $M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , et  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .
5. La résolution numérique du système d'équations (7.1-7.5) avec les conditions aux limites :

$$N_e(0) = N_i(0) = 1, \quad \phi(0) = 0, \quad V_e(0) = V_i(0) = 0. \quad (7.6)$$

et  $\epsilon = 0.001$  conduit aux résultats reportés sur les figures suivantes.

En observant le schéma des densités, dire pour quelle raison la région centrale est considérée comme un *plasma*, tandis que la région périphérique est assimilée à *une gaine* ?

6. Les résultats numériques suggèrent l'approximation  $N_e = N_i \equiv N$  pour étudier la région plasma.

Etablir les 2 lois de conservation :

$$V_e = V_i, \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{2} V_i^2 + \ln N = 0 \quad (7.8)$$

## 7.1. PLASMA INERTIEL EN RÉGIME STATIONNAIRE NON CONFINÉ<sup>61</sup>

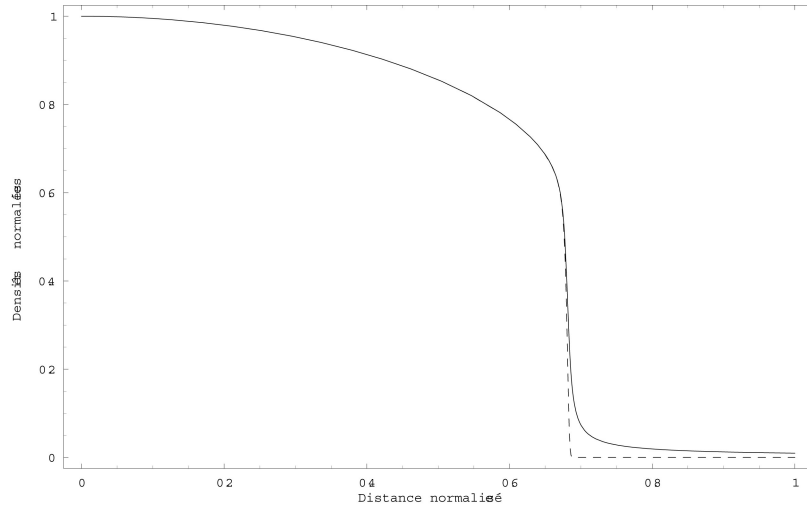


FIGURE 7.1 – Densité électronique,  $N_e$  (tirets) et densité ionique,  $N_i$  (traits pleins), lorsque  $\nu_I/\omega_{pi} = 0.001$ .

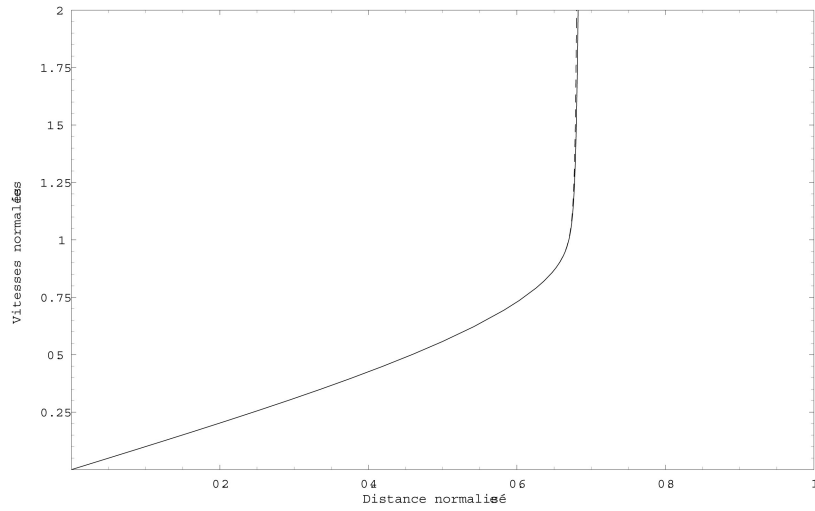


FIGURE 7.2 – Vitesse électronique  $V_e$  (tirets) et vitesse ionique,  $V_i$  (traits pleins), lorsque  $\lambda_D/\lambda_I = 0.001$ .

7. Quelle interprétation physique peut-on donner de l'équation (7.8) ?  
On discutera en particulier les situations au centre et au bord du plasma.
8. Posons  $V \equiv V_e = V_i$ . Le plasma est donc assimilable à un fluide unique de densité  $N$  et de vitesse  $V$ .

---

1. L'emploi du terme de diffusion dans la situation présente est un peu abusive : les ions, froids et non collisionnels se comportent comme des particules. La diffusion suppose des collisions.

Montrer que le plasma satisfait les 2 équations :

$$(NV)' = +N, \quad (7.9)$$

$$NVV' = -N' \quad (7.10)$$

9. Combiner ces 2 équations pour les écrire sous la forme :

$$N'(V^2 - 1) = NV, \quad (7.11)$$

$$V'(V^2 - 1) = -1 \quad (7.12)$$

10. Utilisez le système différentiel précédent pour répondre aux questions suivantes :

- A quelle vitesse physique la vitesse normalisée  $V = 1$  correspond-elle ?
- Quel est le signe des gradients de densités et de vitesses au voisinage de  $X = 0$  ?
- Que peut-on dire des gradients de densités et de vitesses lorsque  $V \rightarrow 1$  ?

11. L'équation (7.12) s'écrit sous la forme différentielle :  $V^2 dV - dV = -dX$ . Intégrer cette équation et en déduire que la position  $\bar{x}$  où la vitesse vaut 1 vérifie :

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \lambda_I$$

Comparer avec les résultats numériques.

12. Utiliser les équations (7.4) et (7.8) pour déterminer les variations de densités  $\bar{n}/n_0$  et de potentiel  $e\bar{\varphi}$  à la position  $x = \bar{x}$ .

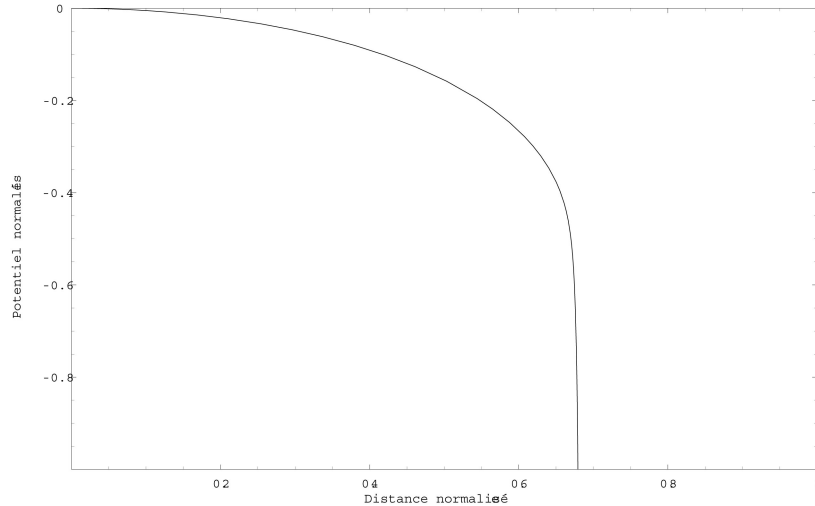


FIGURE 7.3 – Potentiel électrostatique,  $\phi$ , lorsque  $\lambda_D/\lambda_I = 0.001$ .

13. Lorsque les ions sont créés sans vitesses initiales, l'équation de bilan de quantité de mouvement des ions doit être modifiée et écrite sous la forme :

$$M n_i v_i \partial_x v_i = -e n_i \partial_x \varphi - M v_i (\nu_I n_e)$$

Les équations de ce modèle s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\partial_x(n_i v_i) &= +\nu_I n_e, \\ 0 &= -k_B T_e \partial_x n_e + e n_e \partial_x \varphi, \\ M n_i v_i \partial_x v_i &= -e n_i \partial_x \varphi - M v_i (\nu_I n_e), \\ \epsilon_0 \partial_{xx}^2 \varphi &= -e(n_i - n_e)\end{aligned}$$

Combiner ces équations et établir la relation :

$$M n_i v_i^2 + k_B T_e n_e - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \text{Cte},$$

où  $E = -\partial_x \varphi$  désigne le champ électrique.

14. La relation (7.13) est valable dans tout le système (plasma et gaine).
  - Déterminer la dimension des grandeurs apparaissant dans (7.13), et en déduire la nature de cette relation de conservation.
  - Interpréter physiquement chaque terme.
  - Quelles sont les contributions dominantes dans le plasma et dans la gaine ?
  - Représenter schématiquement chaque contribution de (7.13) en fonction de la position  $x$ .

## 7.2 Diffusion d'un plasma quasi-neutre dans un champ magnétique

On étudie la diffusion d'un plasma quasi-neutre ( $n_e \approx n_i \equiv n$ ) en présence d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$  tous deux uniformes, et en présence d'un gradient de densité  $\vec{\nabla} n$ . On utilise une description fluide en régime collisionnel.

### 7.2.1 Généralités

On considère d'abord une des composantes du fluide (ions ou électrons), dont on notera les charges et masses par  $q$  et  $m$ .  $\vec{u}$  représente la vitesse d'entraînement et  $n$  la densité.

L'équation d'équilibre des forces s'écrit :

$$k_B T \vec{\nabla} n + m n \nu \vec{u} = n q \left( \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right) \quad (7.13)$$

Dans cette expression  $T$  désigne la température (supposée uniforme) du fluide et  $\nu$  représente une fréquence de collisions.

1. Préciser succinctement quelle est l'origine physique de chacun de ces termes.

2. Montrer que cette relation d'équilibre peut être obtenue à partir de l'équation du bilan de quantité de mouvement du fluide lorsqu'on fait une approximation que l'on précisera.
3. On utilise un système d'axe cartésien orthonormal  $Oxyz$ , et on choisit la direction de l'axe  $Oz$  dans la direction du champ magnétique  $\vec{B}$ . Projeter l'équation (7.13) sur chacun des axes  $Ox, Oy$  et  $Oz$ .
4. Montrer que les composantes de la vitesse  $(u_x, u_y, u_z)$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$u_x = F E_x - G \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + H u_y, \quad (7.14)$$

$$u_y = F E_y - G \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - H u_x, \quad (7.15)$$

$$u_z = F E_z - G \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (7.16)$$

On donnera l'expression des constantes  $F$ ,  $G$  et  $H$  en fonction des coefficients de mobilité  $\mu$  et de diffusion  $D$  introduits dans le cours, ainsi qu'en fonction du coefficient  $\omega_c \tau$ , où  $\tau \equiv \nu^{-1}$  et  $\omega_c$  est la fréquence cyclotron des particules.

5. Quel est l'effet du champ magnétique dans la direction parallèle au champ  $\vec{B}$ ?
6. Combiner les équations précédentes, et montrer qu'en définissant

$$\begin{aligned} \vec{u}_\perp &\equiv u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y, \\ \vec{E}_\perp &\equiv E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \end{aligned}$$

on trouve :

$$\vec{u}_\perp = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4, \quad (7.17)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &\equiv +\mu_\perp \vec{E}_\perp, \\ \vec{u}_2 &\equiv -D_\perp \frac{\vec{\nabla} n}{n}, \\ \vec{u}_3 &\equiv +\frac{(\omega_c \tau)^2}{1 + (\omega_c \tau)^2} \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}, \\ \vec{u}_4 &\equiv -\frac{(\omega_c \tau)^2}{1 + (\omega_c \tau)^2} \frac{D}{\mu} \frac{\vec{\nabla} n \times \vec{B}}{n B^2} \end{aligned}$$

avec  $\mu_\perp \equiv \alpha \mu$ ,  $D_\perp \equiv \alpha D$  où  $\alpha \equiv (1 + (\omega_c \tau)^2)^{-1}$  (on utilisera éventuellement la relation  $\omega_c \tau = \mu B$ ).

7. Parmi les 4 composantes de  $\vec{u}_\perp$ , quelles sont celles qui dépendent du signe de la charge  $q$ ?
8. On considère la limite  $\omega_c \tau \rightarrow 0$ .



- (a) A quelle situation physique cette limite correspond-elle ?
  - (b) Discuter le comportement de  $\mu_{\perp}$ ,  $D_{\perp}$  et  $u_{\perp}$  dans cette limite.
9. On considère la limite  $\omega_c \tau \rightarrow \infty$ .
- (a) A quelle situation physique cette limite correspond-elle ?
  - (b) Discuter le comportement de  $\mu_{\perp}$ ,  $D_{\perp}$  et  $u_{\perp}$  dans cette limite.

### 7.2.2 Diffusion du plasma

On utilise les résultats de la partie précédente pour discuter la diffusion d'un plasma quasi-neutre composé d'ions et d'électrons. *Dans toute cette partie, on choisira la direction de l'axe  $Ox$  dans la direction du vecteur  $\vec{E}_{\perp}$ , et on supposera que le gradient de densité est également selon  $Ox$ . On pourra donc écrire :*

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\perp} &= E_x \vec{e}_x, \\ \vec{\nabla} n &= \frac{\partial n}{\partial x} \vec{e}_x\end{aligned}$$

1. On suppose que  $E_x > 0$  et  $\partial n / \partial x < 0$ .  
Représenter les 4 composantes du vecteur vitesse  $\vec{u}_{\perp}$  dans le plan  $Oxy$  (on fera un schéma pour les ions et un autre pour les électrons).
2. Montrer en utilisant l'équation (3) ou l'équation (5) que les composantes  $u_x$  et  $u_y$  satisfont la relation :

$$u_y = -(\omega_c \tau) u_x$$

3. On utilise l'indice  $i$  pour désigner les coefficients de transport et la vitesse des ions :  $\mu_{\perp i}, D_{\perp i}, \vec{u}_i$ , et l'indice  $e$  pour désigner les mêmes grandeurs pour les électrons  $\mu_{\perp e}, D_{\perp e}, \vec{u}_e$ .  
Montrer que les flux ionique et électronique selon  $Ox$  vérifient les équations suivantes (on rappelle que le plasma est quasi-neutre :  $n_e = n_i = n$ ) :

$$\begin{aligned}n u_{ix} &= +\mu_{\perp i} n E_x - D_{\perp i} \frac{\partial n}{\partial x}, \\ n u_{ex} &= +\mu_{\perp e} n E_x - D_{\perp e} \frac{\partial n}{\partial x},\end{aligned}$$

4. Les conditions aux limites et les symétries du problème étudié sont telles que les vitesses selon  $Ox$  sont égales :  $u_{ix} = u_{ex}$ .  
Éliminer le champ électrique entre ces 2 équations et en déduire que le flux commun selon  $Ox$ ,  $\Gamma_x \equiv n u_x$ , peut s'écrire :

$$\Gamma_x = -D_{a\perp} \frac{\partial n}{\partial x},$$

où  $D_{a\perp}$  est un coefficient de diffusion dont on donnera l'expression et dont on commentera la forme.

5. Utilisez les résultats précédents pour montrer que la densité du plasma vérifie une équation de diffusion que l'on ne cherchera pas à résoudre.

### 7.3 Post-décharge et maintien d'un plasma confiné

Dans un plasma collisionnel, du fait des rapport de masses, les électrons diffusent plus rapidement que les ions. La densité de charges qui apparaît au cours du mouvement, crée un champ électrique qui tend à ralentir les électrons et à accélérer les ions. Les charges ont donc tendance à diffuser ensemble : on parle de *diffusion ambipolaire*.

Dans cette partie nous traitons de la diffusion d'un plasma quasi-neutre collisionnel en régime dépendant du temps.  $n_e(x, t)$ ,  $v_e(x, t)$ , et  $\Gamma_e \equiv n_e v_e$  désignant respectivement la densité, la vitesse et le flux des électrons ( $n_i(x, t)$ ,  $v_i(x, t)$ , et  $\Gamma_i \equiv n_i v_i$  pour les ions), on effectuera les approximations suivantes :

- Le plasma étant de dimensions largement supérieures à la longueur de Debye, on le considèrera comme quasi-neutre :  $n_e = n_i \equiv n$ .
  - Le terme source des équations de conservation des électrons ou des ions est identique pour les 2 espèces :  $S_e = S_i = S(x, t)$ .
  - Le plan médian est un plan de symétrie où  $\Gamma_e = \Gamma_i = 0$ .
  - On se place dans l'approximation isotherme : les températures électronique,  $T_e$ , et ionique,  $T_i$ , sont supposées uniformes.
  - Les termes d'inertie sont négligés.
1. Montrer en combinant les équations de conservation des électrons et des ions que  $\Gamma_i = \Gamma_e$  en tout point de la décharge.
  2. Le plasma est suffisamment collisionnel pour qu'on puisse négliger les termes d'inertie dans les équations de conservation de la quantité de mouvement. Déterminer l'expression donnant  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_i$  en fonction des mobilités  $\mu_i$  et  $\mu_e$ , des coefficients de diffusion  $D_i$  et  $D_e$ , et du champ électrique  $E$ .
  3. Utilisez l'égalité  $\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma$  pour éliminer le champ électrique, et en déduire l'expression du flux ambipolaire  $\Gamma$  en fonction de la densité  $n$ .
  4. En déduire que la densité vérifie l'équation de diffusion :

$$\partial_t n(x, t) - D_a \partial_{xx}^2 n(x, t) = S(x, t),$$

où  $D_a$  est le coefficient dit de diffusion ambipolaire dont on donnera l'expression.

On étudie maintenant la diffusion d'un plasma quasi-neutre collisionnel, lorsque celui-ci est compris entre deux parois situées en  $x = 0$  et  $x = +2L$ . On considèrera les parois comme parfaitement absorbantes : toutes les charges qui les atteignent sont supposées perdues.

#### 7.3.1 Relaxation d'un plasma confiné sans source d'ionisation

On commence par étudier comment un profil de densité relaxe en absence de terme source :  $S \equiv 0$ .

Le problème mathématique se ramène donc à étudier l'équation de diffusion :

$$\partial_t n - D_a \partial_{xx}^2 n = 0,$$

pour  $t > 0$  et  $x \in [0, +2L]$ , avec pour conditions aux limites et condition initiale :

$$\begin{aligned} n(0) &= n(+2L) = 0, \\ n(x, 0) &= n_0(x) \end{aligned}$$

On cherche la solution par *la méthode de séparation des variables* :

$$n(x, t) = f(x)g(t)$$

1. Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  satisfont les équations différentielles :

$$\begin{aligned} f''(x) + \lambda^2 f(x) &= 0, \\ g'(t) + \lambda^2 D_a g(t) &= 0, \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est une constante réelle.

2. Résoudre ces équations et utilisez les conditions aux limites pour montrer que  $\lambda \equiv \lambda_n$  avec

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3. En déduire que la solution générale de l'équation de diffusion peut s'écrire :

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 D_a t} \sin(\lambda_n x), \quad (7.18)$$

où les constantes  $A_n$  sont déterminées par la relation  $n_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x)$ .

4. Quel est le comportement asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) de la densité ?  
Commenter.  
Quelle est la contribution dominante dans la somme (7.18) aux temps longs ?
5. On rappelle la relation d'orthogonalité  $\int_0^{+2L} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n x) dx = L \delta_{mn}$ .  
Montrer que  $A_n$  vérifie :

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^{+2L} n_0(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad (7.19)$$

Que représentent les coefficients  $A_n$  ?

6. La figure suivante est représentée à différents instants lorsque le profil initial est donné par :

$$n_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(3\pi x) + \frac{1}{4} \sin(5\pi x),$$

où le coefficient de diffusion  $D_a = 0.005$  et  $2L = 1$ .

Déterminer la solution  $n(x, t)$  et commenter la figure.

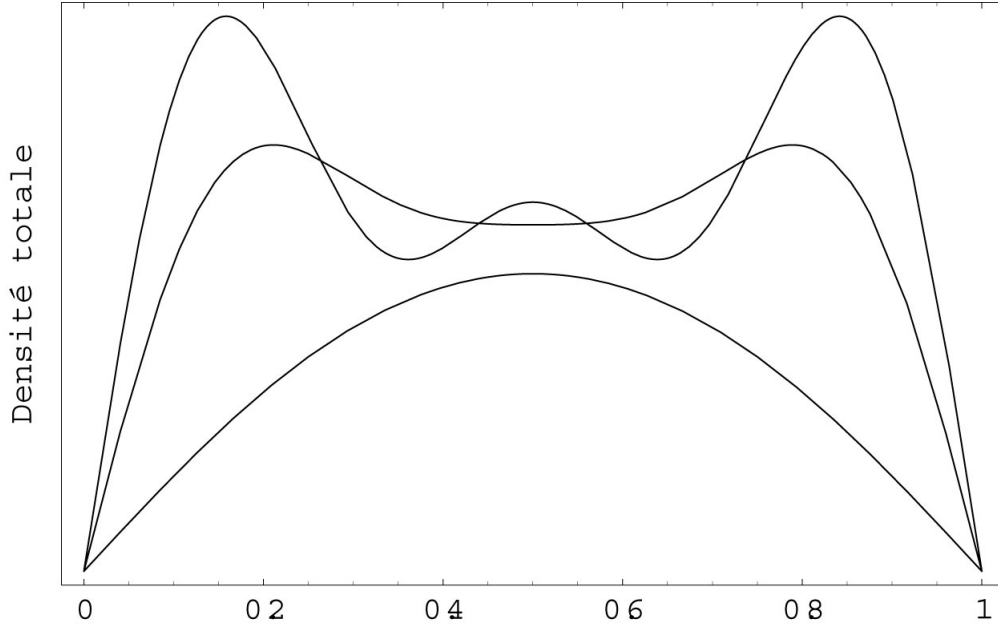


FIGURE 7.4 – Relaxation temporelle de la densité sans terme source pour  $t = 0, 1, 10$ .

### 7.3.2 Maintien d'un plasma confiné

On considère maintenant le plasma en présence d'un terme source  $S(x, t)$ . Du point de vue mathématique, on doit donc maintenant considérer le problème *inhomogène*

$$\partial_t n - D_a \partial_{xx}^2 n = S(x, t),$$

pour  $t > 0$  et  $x \in [0, +2L]$ , toujours avec pour conditions aux limites et condition initiale :

$$\begin{aligned} n(0) &= n(+2L) = 0, \\ n(x, 0) &= n_0(x) \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, on utilise *la méthode de développement sur une base de fonctions propres*. On cherche encore la solution sous la forme d'une série :

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) f_n(x),$$

où les fonctions  $f_n$  sont les fonctions (propres) que nous avons déterminées lors de la résolution du problème homogène qui satisfont l'équation :

$$f_n''(x) = -\lambda_n^2 f_n(x),$$

avec les conditions aux limites  $f_n(0) = f_n(+2L) = 0$ .

On pourra donc écrire :

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin(\lambda_n x), \quad (7.20)$$

où les fonctions  $g_n$  de la variable  $t$  restent à déterminer.

1. Les fonctions propres de l'opérateur  $d^2/dx^2$  peuvent également être utilisées comme base de développement du terme source :

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \sin(\lambda_n x), \quad (7.21)$$

Déterminer les coefficients  $s_n$  en fonction du terme source  $S(x, t)$ .

2. Substituer les équations (7.20) et (7.21) dans l'équation de diffusion, et en déduire que  $g_n$  vérifie l'équation différentielle :

$$g'_n(t) + D_a \lambda_n^2 g_n(t) = s_n(t),$$

avec la condition initiale  $g_n(0) = A_n$ .

3. Résoudre cette équation différentielle, et en déduire la solution :

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n^2 D_a t) \sin(\lambda_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \exp(-\lambda_n^2 D_a (t - \tau)) s_n(\tau) d\tau \right] \sin(\lambda_n x)$$

A quoi correspondent les 2 parties de cette expression ?

4. Quelle est la contribution dominante dans cette somme aux temps longs ?
5. Dans le cas des plasmas faiblement ionisés où l'on peut négliger la recombinaison des charges en volume, la contribution dominante au terme de source vient du terme d'ionisation, proportionnel à la densité électronique. On écrira donc :

$$S(x, t) = \nu_I n(x, t),$$

où  $\nu_I \equiv \nu_I(T_e, p)$  est une fonction de la pression de neutres,  $p$ , et de la température électronique,  $T_e$ .

- (a) Montrer que  $s_n = \nu_I g_n$ .
- (b) En déduire que la contribution dominante à la densité aux temps longs s'écrit :

$$n(x, t) \sim A_1 \exp(-(\nu_I - \lambda_1^2 D_a) t) \sin(\lambda_1 x)$$

- (c) En déduire la condition de maintien du plasma en régime stationnaire (dans le cadre de ce modèle, on l'appelle la *condition de Schottky*) :

$$\boxed{\frac{\nu_I}{D_a} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 = \lambda_1^2}$$

Expliquez pour quelles raisons la température électronique ne dépend que du produit  $pL$ , où  $p$  est la pression des neutres.

$$T_e = f(pL)$$

- (d) Montrer que l'on retrouve le même résultat en résolvant directement l'équation stationnaire :

$$-D_a \partial_{xx}^2 n(x) = \nu_I n(x)$$

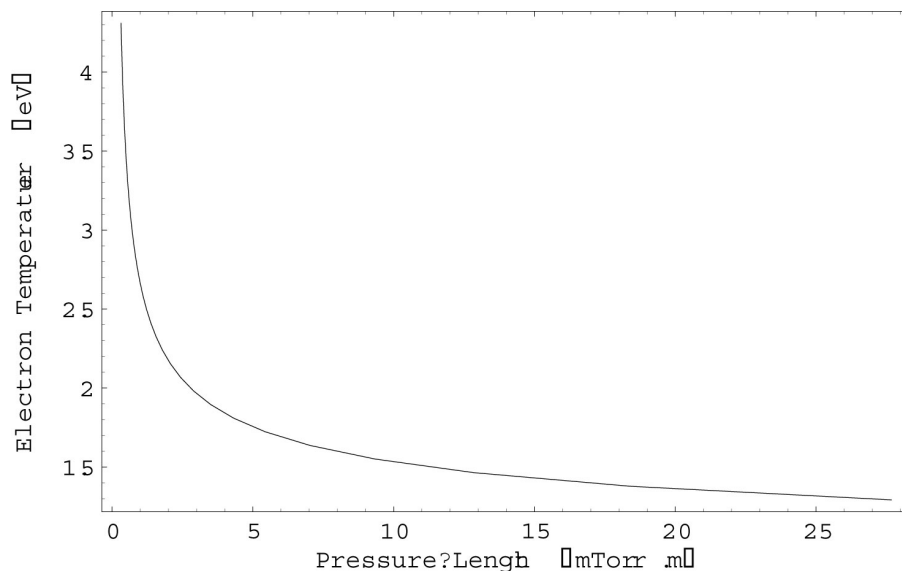
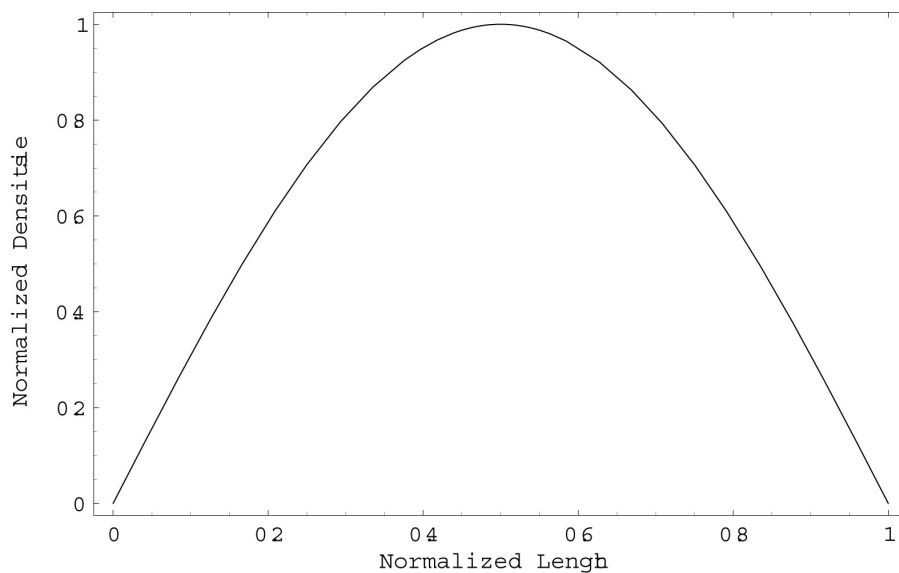
FIGURE 7.5 – Température électronique en fonction du produit  $pL$ .

FIGURE 7.6 – Profil stationnaire de densité.

## 7.4 Critère de Bohm dans les plasmas faiblement ionisés

L'étude des plasmas faiblement ionisés et confinés, en absence de champ magnétique, montre que les charges électriques s'y organisent en 2 régions bien distinctes :

- une région centrale (loin des parois) où la densité de charges est faible et où le plasma peut être considéré comme quasi-neutre,
- une région à proximité des parois, appelée *gaine*, où la densité de charges

est significative et où le potentiel électrostatique doit s'adapter aux conditions électriques imposées aux parois.

Nous étudions uniquement la gaine dans ce problème, successivement dans les cas d'un plasma électropositif puis électronégatif par des méthodes complémentaires. On établit que la vitesse des ions positifs doit excéder la vitesse acoustique ionique (c'est le *critère* dit de *Bohm*) pour qu'un profil de potentiel monotone puisse s'établir dans la gaine.

#### 7.4.1 Critère de Bohm dans un plasma électropositif

La densité de charges d'espace n'étant pas négligeable dans la gaine, l'approximation plasma ne peut pas y être utilisée, et on devra avoir recours à l'équation de Poisson. Du fait que les densités chutent dans le plasma, du centre vers les parois, la densité électronique est généralement suffisamment faible dans la gaine pour qu'on puisse négliger les contributions d'ionisation dans l'équation de bilan du nombre de particules. Le flux ionique se conserve donc dans la gaine en régime stationnaire. Dans le cas d'un plasma électropositif qui ne comprend que des électrons et une espèce d'ions positifs, nous effectuons donc la modélisation (1D) de la gaine en régime stationnaire à partir du jeu d'équations suivant :

$$(n_i v)' = 0, \quad (7.22)$$

$$M n_i v v' = -e n_i \varphi', \quad (7.23)$$

$$k_B T_e n_e' = +e n_e \varphi', \quad (7.24)$$

$$-\epsilon_0 \varphi'' = e(n_i - n_e) \quad (7.25)$$

Comme on ne s'intéresse qu'à la gaine, il est commode de choisir l'origine des coordonnées et du potentiel électrostatique à l'entrée de la gaine. L'entrée de la gaine correspondant avec la sortie de la région centrale supposée quasi-neutre, on supposera la neutralité vérifiée à l'entrée de la gaine. Les conditions initiales associées au jeu d'équations précédentes sont donc les suivantes :

$$n_i(0) = n_e(0) \equiv n_s, \quad v(0) = v_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = \varphi_L$$

$L$  représente la taille de la gaine.  $\varphi_L$  est le potentiel imposé à la paroi (éventuellement auto-consistant si on est en potentiel flottant). Pour fixer les idées, on supposera  $\varphi_L < 0$  dans la suite. Le critère de Bohm fournit une condition sur la vitesse initiale des ions  $v_0$  pour que le potentiel présente des variations monotones dans la gaine.

1. Discuter succinctement le contenu physique des équations étudiées.
2. Montrer à partir de ces équations que la densité de charges dans la gaine peut s'écrire sous la forme :

$$\rho[\varphi] = n_s e \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{e\varphi}{M v_0^2/2}}} - e^{+\frac{e\varphi}{k_B T_e}} \right)$$

3. La densité de charges peut donc être considérée comme une fonctionnelle du potentiel  $\varphi : \rho = \rho[\varphi]$ .

En effectuant un développement de Taylor de l'équation de Poisson au voisinage de l'origine (donc à l'entrée de la gaine), montrer que

$$\left. \frac{d\rho}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} \leq 0$$

si l'on suppose le potentiel concave ( $\varphi'' < 0$ ).

Cette inégalité constitue la forme générale du *critère de Bohm* qui peut être utilisée aussi bien dans le cadre d'une dérivation cinétique des densités que dans le cadre d'une dérivation fluide.

4. En utilisant la forme explicite des densités fluides établies ci-dessus, montrer que la condition  $d\rho/d\varphi(0) \leq 0$  est équivalente à la condition sur  $v_0$  :

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}}$$

Cette inégalité est la forme particulière du critère de Bohm pour un plasma électro-positif considéré dans le cas d'une approche fluide. C'est dans ce contexte que la vitesse acoustique ionique est généralement appelée *la vitesse de Bohm*.

5. Montrer que la prise en compte de la température ionique,  $T_i$ , conduit au critère de Bohm suivant :

$$v_0 > \sqrt{\frac{k_B T_e + k_B T_i}{M}}$$

#### 7.4.2 Vitesse de Bohm dans un plasma électronégatif

Un plasma électronégatif est un plasma qui comprend des électrons, des ions positifs et des ions négatifs. Le plasma est décrit par les équations suivantes :

$$(n_+ v_+)' = S_+, \quad (7.26)$$

$$(n_e v_e)' = S_e, \quad (7.27)$$

$$(n_- v_-)' = S_- \quad (7.28)$$

$$m_+ (n_+ v_+^2)' = -kT_+ n_+' + n_+ e E - F_+, \quad (7.29)$$

$$0 = -kT_e n_e' - n_e e E, \quad (7.30)$$

$$0 = -kT_- n_-' - n_- e E, \quad (7.31)$$

$$n_+ = n_e + n_- \quad (7.32)$$

où  $F_+$  est une densité de force de collisions entre les ions et les neutres.

1. Discuter succinctement le contenu physique de chaque équation.
2. Etablir l'égalité :

$$m_+ (n_+ v_+^2)' + kT_+ n_+' + kT_e n_e' + kT_- n_-' = -F_+$$



#### 7.4. CRITÈRE DE BOHM DANS LES PLASMAS FAIBLEMENT IONISÉS 73

3. Comment peut-on interpréter cette équation dans le cas où  $F_+ \rightarrow 0$  ?
4. Dans une première étape, on cherche à éliminer le gradient de vitesse des ions positifs de l'équation précédente.  
Montrer que l'on peut écrire :

$$(kT_+ - m_+ v_+^2) n'_+ = -2S_+ m_+ v_+ - kT_e n'_e - kT_- n'_- - F_+$$

5. Eliminer le champ électrique des équations (5), (6) et (7), et établir les relations qui lient les gradients de densité des espèces négatives avec le gradient de densité des ions positifs :

$$\begin{aligned} n'_e &= \frac{kT_- n_e}{kT_e n_- + kT_- n_e} n'_+, \\ n'_- &= \frac{kT_e n_-}{kT_e n_- + kT_- n_e} n'_+ \end{aligned}$$

6. En déduire que les gradients de densité deviennent singuliers (et le modèle n'est donc plus défini) lorsque la vitesse des ions positifs satisfait l'égalité :

$$v_+^2 = \frac{kT_e}{m_+} \left( \frac{T_+}{T_e} + \frac{1 + \gamma_s}{1 + (T_e/T_-) \gamma_s} \right)$$

où  $\gamma_s \equiv n_-(x_s)/n_e(x_s)$  est calculé au point  $x = x_s$  où les gradients deviennent infinis.

7. Etudier cette expression dans les 2 limites distinctes suivantes :
  - $\gamma_s \rightarrow 0$ ,
  - $\gamma_s \rightarrow \infty$ .
 Commentez.