

---

# Electromagnétisme classique du vide et des milieux continus

Ce cours est divisé en neuf chapitres, couvrant respectivement :

1. Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme
2. Electrostatique
3. Milieux diélectriques
4. Magnétostatique
5. Milieux magnétiques
6. Induction électromagnétique
7. Propagation dans le vide et les milieux diélectriques
8. Systèmes rayonnants
9. Electromagnétisme et relativité restreinte

Ces notes de cours sont volontairement extrêmement succinctes, en particulier sur le plan des explications qui seront principalement données en amphi. De même, certains calculs sont détaillés dans le polycopié, tandis que d'autres le seront en amphi. Ces notes complètent donc ce qui est dit en cours mais ne saurait dispenser d'une assiduité régulière.

Certains chapitres sont moins développés que d'autres. C'est notamment le cas des chapitres concernant l'électrostatique et la magnétostatique.

Dans le texte, les noms propres en gras correspondent à des physiciens dont les principales contributions à l'électromagnétisme ou à la relativité sont détaillées page 2 du préambule, même si c'était par le biais des mathématiques !

Ce polycopié doit beaucoup à ceux réalisés par les enseignants qui m'ont précédé (E. Augé, H. Doubre et J. Perez-Y-Jorba). Qu'ils en soient remerciés.

Patrick Puzo

---

# Le "who's who" de l'électromagnétisme

- André Marie **Ampère** (1775 - 1836), mathématicien et physicien français. Il donne les premières formulations mathématiques de l'électromagnétisme. On lui doit également les termes de *courant* et *tension* et l'invention du *galvanomètre* et du *solénoïde*. Il suppose également que les propriétés des aimants sont dues à des courants microscopiques dans la matière (*hypothèse d'Ampère*).
- Peter **Barlow** (1776 - 1862), mathématicien et physicien anglais. Il publie en 1820 son *Essai sur le magnétisme* et invente en 1828 la *roue de Barlow* dont on peut considérer qu'elle est le 1<sup>er</sup> convertisseur électromécanique.
- Jean-Baptiste **Biot** (1774 - 1862), astronome et physicien français. Il énonce avec **Savart** en 1820 la loi donnant le champ  $\vec{B}$  créé par un courant continu.
- Henry **Cavendish** (1731 - 1810), physicien et chimiste britannique. Il détermine la densité moyenne du globe à l'aide de sa balance de torsion, qui sert en outre à mesurer la force entre deux charges ponctuelles. Il en déduit que le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'une sphère creuse chargée. Il introduit le *potentiel électrostatique* et la *capacité* d'un condensateur.
- Pavel **Cherenkov** (1904 - 1990), physicien russe, prix Nobel de physique en 1958. Il découvre l'effet qui porte son nom en 1934 en observant la teinte bleutée d'une bouteille d'eau soumise à des irradiations.
- Rudolf **Clausius** (1822 - 1888), physicien allemand. Il démontre en 1879 la relation de *Clausius-Mossotti* entre la polarisabilité microscopique d'un milieu et sa permittivité macroscopique.
- Charles Augustin de **Coulomb** (1736 - 1806), physicien français. Il étudie les aiguilles aimantées et introduit en 1777 la notion de *moment magnétique*. Il montre expérimentalement en 1785 à l'aide d'une balance de torsion très sensible que la force entre deux charges électriques est en  $1/r^2$  et que les charges d'un conducteur en équilibre se répartissent sur sa surface.
- Peter **Debye** (1884 - 1966), physicien et chimiste néerlandais, prix Nobel de chimie en 1936. Il montre en 1920 que l'induction dipolaire entre molécules génère une force de type Van der Waals.
- Paul **Dirac** (1902 - 1984), physicien britannique, prix Nobel de physique en 1933.
- Peter-Gustav **Lejeune-Dirichlet** (1805 - 1859), mathématicien allemand.

- 
- Paul **Drüde** (1863 - 1906), physicien allemand. Il introduit en 1900 le modèle de la conductivité électrique dans les métaux en appliquant la théorie cinétique des gaz aux électrons des métaux.
  - Michael **Faraday** (1791 - 1867), physicien et chimiste anglais. Il invente le *disque de Faraday* en 1821. Expérimentateur de génie, il découvre le phénomène d'induction en 1831 et énonce la loi correspondante en 1854. Il introduit les termes de *champ* et de *ligne de champ*.
  - Hippolyte **Fizeau** (1819 - 1896), physicien français. Il effectue la première mesure précise de la vitesse de la lumière en 1851.
  - Léon **Foucault** (1819 - 1868), physicien français. Il découvre les courants induits dans la matière qui portent désormais son nom.
  - Benjamin **Franklin** (1706 - 1790), homme politique et physicien américain. Il découvre la nature électrique des éclairs et invente le paratonnerre en 1752. Il affirme l'existence de deux sortes d'électricité (*positive* et *négative*) et énonce une première forme qualitative du principe de conservation de la charge.
  - Lucien **Gaulard** (1850 - 1888), ingénieur français. Ses travaux ont permis la distribution à distance du courant électrique (transport à haute tension et abaisseur de tension sur le site d'utilisateur) par l'invention du transformateur. En 1884, il acheminait du courant sur 80 km.
  - Carl Friedrich **Gauss** (1777 - 1855), mathématicien et physicien allemand. Il effectue en 1832 les premières mesures du champ magnétique terrestre et montre qu'il a la structure du champ d'un dipôle magnétique. En électrostatique, il donne sa forme définitive au *théorème de Gauss* en 1839.
  - William **Gilbert** (1544 - 1603), physicien anglais. Il étudie qualitativement le magnétisme terrestre et introduit la notion de *pôle* d'un aimant. Il énonce en 1600 qu'il n'existe pas de charge magnétique. En électrostatique, il introduit les concepts de *conducteur* et d'*isolant*.
  - Stephen **Gray** (1670 - 1736), physicien anglais. Il découvre en 1729 que les phénomènes d'électrisation peuvent être transmis à grande distance par des fils métalliques.
  - George **Green** (1793 - 1841), mathématicien et physicien anglais. Il énonce une première forme du *théorème de Gauss* en 1828.
  - Edwin Herbert **Hall** (1855 - 1938), physicien américain. Il découvre l'effet qui porte son nom en 1879.
  - Joseph **Henry** (1797 - 1878), physicien américain. Il découvre l'auto-induction en 1832.
  - Hermann Ludwig von **Helmholtz** (1821 - 1894), physicien et physiologiste allemand. Il introduit en 1847 le concept d'*énergie électrostatique*.
  - Heinrich **Hertz** (1857 - 1894), physicien allemand. Il démontre en 1888 l'existence des

- 
- ondes électromagnétiques prédites par **Maxwell** en 1873.
- Willem Hendrik **Keesom** (1876 - 1956), physicien néerlandais, collègue puis successeur de Kamerlingh Onnes à la tête du laboratoire de Leyde. Il montre en 1921 que l'interaction dipôle-dipôle entre molécules polaires génère une force de type Van der Waals.
  - Paul **Langevin** (1872 - 1946), physicien français. Il introduit en 1905 la fonction qui porte son nom lors de son étude sur le paramagnétisme.
  - Pierre Simon **Laplace** (1749 - 1827), physicien français. Il est à l'origine de la notion de potentiel par l'introduction de l'équation qui porte son nom.
  - Pyotr **Lebedev** (1866 - 1912), physicien russe. Il prouve expérimentalement l'existence de la pression de radiation en 1900.
  - Heinrich **Lenz** (1804 - 1865), physicien russo-allemand. Son nom est resté attaché à la loi de modération reliant la force électromotrice induite dans un circuit à la variation du flux du champ magnétique à travers ce circuit.
  - Fritz **London** (1900 - 1954), physicien germano-américain. Il montre en 1930 que l'interaction instantanée dipôle-dipôle entre molécules non polaires génère une force de type Van der Waals.
  - Ludwig **Lorenz** (1829 - 1891), physicien danois. Il introduit la jauge qui porte désormais son nom et les potentiels retardés en 1867. A ne pas confondre avec **Lorentz**. Ils entretenaient d'ailleurs des relations exécrables...
  - Hendrik Antoon **Lorentz** (1853 - 1928), physicien néerlandais, prix Nobel de physique en 1902 pour sa théorie électronique de la matière. Il est également connu pour la transformation et la force qui portent son nom. A ne pas confondre avec **Lorenz**. Ils entretenaient d'ailleurs des relations exécrables...
  - James Clerk **Maxwell** (1831 - 1879), physicien britannique. Il rassemble l'électricité et le magnétisme sous une seule théorie (l'*électromagnétisme*) à partir de 1855. Il introduit le *courant de déplacement* en 1862 et prédit la pression de radiation en 1871.
  - Roberts **Millikan** (1868 - 1953), physicien américain, prix Nobel de physique en 1923. Il montre vers 1912 que la charge électrique est quantifiée.
  - Hermann **Minkowski** (1864 - 1909), mathématicien et physicien allemand. Il développe le formalisme quadridimensionnel en 1907.
  - Ottaviano-Fabrizio **Mossotti** (1791 - 1863), physicien italien. Il a introduit en 1850 la relation entre les constantes diélectriques de deux milieux différents.
  - Carl **Neumann** (1832 - 1925), mathématicien allemand.
  - Franz Ernst **Neumann** (1798 - 1895), physicien allemand. Il publie une théorie mathématique de l'induction en 1845.

- 
- Hans Christian **Oersted** (1777 - 1851), physicien danois. Il découvre en juillet 1820 l'influence d'un courant électrique sur le comportement de l'aiguille d'une boussole.
  - Georg Simon **Ohm** (1789 - 1854), physicien allemand. Il énonce la loi qui porte son nom en 1827.
  - Vassilievitch **Ostrogradski** (1813 - 1885), (1801 - 1861), mathématicien et physicien russe.
  - Siméon Denis **Poisson** (1781 - 1840), physicien français (élève de **Laplace**). Il étend à l'électrostatique en 1811 la *théorie du potentiel* développée par **Laplace** pour la gravitation.
  - John Henry **Poynting** (1852 - 1914), physicien anglais. Il énonce le théorème sur l'énergie électromagnétique et introduit la pression de radiation.
  - Ernest **Rutherford** (1871 - 1937), physicien britannique, prix Nobel de chimie en 1908.
  - Félix **Savart** (1791 - 1841), physicien français. Il énonce avec **Biot** en 1820 la loi donnant le champ  $\vec{B}$  créé par un courant continu.
  - Sir George Gabriel **Stokes** (1819 - 1903), mathématicien et physicien irlandais.
  - John William **Strutt** (1842 - 1919), physicien anglais (plus connu sous son titre de Lord **Rayleigh**), prix Nobel de physique en 1904 pour la découverte de l'argon. Spécialiste des phénomènes ondulatoires, il relie en 1871 la couleur du ciel à la diffusion de la lumière par les molécules de l'atmosphère. Il succède à **Maxwell** au Cavendish Laboratory en 1879.
  - Joseph John **Thomson** (1856 - 1940), physicien anglais. Il découvre l'électron en 1877.
  - Alessandro **Volta** (1745 - 1827), physicien italien. Il observe que les charges se condensent sur les faces en regard de deux conducteurs lorsqu'on les rapproche et introduit le terme de *condensateur*. Il invente en 1800 la pile première pile électrique, constituée d'un empilement de disques de cuivre et de zinc plongés dans une solution sulfurique.
  - Hermann **Weyl** (1885 - 1955), mathématicien allemand. Il est à l'origine des *théories de jauge*.

---

## Bibliographie "électromagnétique" : livres conseillés pour l'année du L3

Quelques ouvrages de référence disponibles actuellement dans toutes les bonnes librairies ou bibliothèques (choix personnel) :

1. E. Purcell, *Electricité et magnétisme - Cours de Physique de Berkeley, volume 2* (version française), Armand Colin, Paris, 1973
2. R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Cours de Physique - Electromagnétisme* (version française), InterEditions, Paris, 1979
3. J.D. Jackson, *Electrodynamique classique* (version française), 3<sup>ème</sup> édition, Dunod, Paris, 2001

Parmi les collections modernes de CPGE, les livres les plus complets traitant l'électromagnétisme sont sans doute (choix personnel) :

1. J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 1 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1996
2. J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 2 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1998
3. J.P. Perez, R. Carles et R. Fleckinger, *Electromagnétisme*, 3<sup>ème</sup> édition, Masson, 1997

## Bibliographie

- [1] W. Panofsky et W. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2<sup>e</sup> édition, Addison-Wesley, 1962
- [2] J.P. Barrat, *Electromagnétisme et Relativité Restreinte*, Ediscience, Paris, 1972
- [3] E. Purcell, *Electricité et magnétisme - Cours de Physique de Berkeley, volume 2* (version française), Armand Colin, Paris, 1973
- [4] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Cours de Physique - Electromagnétisme* (version française), InterEditions, Paris, 1979
- [5] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Cours de Physique - Mécanique* (version française), InterEditions, Paris, 1979
- [6] D.K. Cheng, *Field and Wave - Electromagnetics*, Addison-Wesley, 1983
- [7] H. Gié et J.P. Sarmant., *Electromagnétisme*, Tec et Doc, Paris, 1985
- [8] L. Landau et E. Lifchitz, *Physique Théorique Tome II, Théorie des champs*, 4<sup>e</sup> édition, Mir, Moscou, 1989
- [9] J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 1 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1996
- [10] J.P. Perez, R. Carles et R. Fleckinger, *Electromagnétisme*, 3<sup>ème</sup> édition, Masson, 1997
- [11] J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 2 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1998
- [12] J.P. Perez, *Relativité*, Dunod, Paris, 1999
- [13] M. Lambert, *Relativité restreinte et électromagnétisme*, Ellipses, Paris, 2000
- [14] J.D. Jackson, *Electrodynamique classique* (version française), 3<sup>ème</sup> édition, Dunod, Paris, 2001
- [15] D. Halliday, R. Resnick et J. Walker, *Physique*, 6<sup>ème</sup> édition, McGraw-Hill, Montréal, 2003

## Notations

Dans tout le polycopié on notera ( $V$ ) un volume et ( $S$ ) la surface fermée qui s'appuie sur ce volume. La normale sortante du volume ( $V$ ) sera notée  $\vec{n}$ .

On notera  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  le vecteur unitaire porté par la surface de séparation entre deux milieux (1) et (2) et orienté du milieu (1) vers le milieu (2).

Champ électrique	V/m	$\vec{E}$
Potentiel scalaire	V	$\Phi$
Champ magnétique	T	$\vec{B}$
Potentiel vecteur	Tm	$\vec{A}$
Polarisation	C/m <sup>2</sup>	$\vec{P}$
Vecteur $\vec{D}$	C/m <sup>2</sup>	$\vec{D}$
Aimantation	A/m	$\vec{M}$
Vecteur $\vec{H}$	A/m	$\vec{H}$
Vecteur de Poynting		$\vec{R}$
Densité volumique d'énergie électromagnétique	J/m <sup>3</sup>	$u$
Densité volumique de charges	C/m <sup>3</sup>	$\rho$
Densité volumique de courants	A/m <sup>2</sup>	$\vec{J}$
Densité superficielle de charge	C/m <sup>2</sup>	$\sigma$
Densité superficielle de courant	A/m	$\vec{K}$
Intensité d'un courant permanent	A	$I$
Intensité d'un courant variable	A	$i$

# Annexe A

## Rappels mathématiques

### Sommaire

<b>A.1</b>	<b>Formes différentielles . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>A.2</b>	<b>Outils mathématiques . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>A.3</b>	<b>Systèmes de coordonnées . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>A.4</b>	<b>Résolution de l'équation de Bessel . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>A.5</b>	<b>Quelques notions sur l'analyse de Fourier . . . . .</b>	<b>12</b>

### Introduction

Les notations utilisées dans ce chapitre seront utilisées tout au long du polycopié.

### A.1 Formes différentielles

En notant  $\vec{r}$  le rayon vecteur, on pourrait montrer que l'on a :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{r}) = 3 \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \text{ si } r \neq 0 \quad (\text{A.5})$$

On note  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  trois vecteurs quelconques et  $\phi$  et  $\psi$  des fonctions scalaires arbitraires. On pourrait montrer les relations suivantes :

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi \vec{\nabla}(\psi) + \psi \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta(\phi\psi) = \phi \Delta\psi + \psi \Delta\phi + 2 \vec{\nabla}(\phi) \cdot \vec{\nabla}(\psi) \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (\text{A.13})$$

Enfin, en combinant les opérateurs différentiels du 1<sup>er</sup> ordre, on peut montrer que l'on a :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0} \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \nabla^2(\phi) = \Delta\phi \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} \quad (\text{A.17})$$

## A.2 Outils mathématiques

### A.2.1 Interprétation physique des opérateurs différentiels

#### Interprétation physique du gradient

Pour donner une interprétation intuitive au gradient d'une fonction  $f$ , il faut se souvenir de la propriété fondamentale suivante :

$$df = \vec{\nabla}(f) \cdot d\vec{OM} \quad (\text{A.18})$$

qui vient directement de la définition du gradient. L'équation  $f(x, y, z) = \lambda$ , définit des *surfaces de niveau* pour chaque valeur de la constante  $\lambda$ . Pour tout déplacement  $d\vec{OM}$  s'effectuant sur la surface  $f(x, y, z) = \lambda$ , la propriété fondamentale du gradient rapportée ci-dessus s'écrit  $\vec{\nabla}(f) \cdot d\vec{OM} = 0$ , ce qui montre que  $\vec{\nabla}(f)$  est normal à tout déplacement  $d\vec{OM}$  se faisant sur la surface  $f(x, y, z) = \lambda$  au voisinage de  $M$ .

De plus, lorsqu'on passe d'une surface de niveau à une surface voisine correspondant à une valeur supérieure de  $f$ , la relation (A.18) montre que le  $\vec{\nabla}(f)$  est dirigé suivant les valeurs croissantes de  $f$ .

En résumé, on retiendra que  $\vec{\nabla}(f)$  est **normal aux surfaces**  $f = Cste$  et **dirigé vers les valeurs croissantes de  $f$** .

#### Interprétation physique de la divergence

On considère un champ de vecteur  $\vec{a}$ , défini par  $\vec{a} = \lambda \vec{r}$  où  $\lambda$  est une constante réelle. Les lignes de champ sont radiales. Suivant que  $\lambda$  est positif ou négatif, le champ diverge depuis l'origine  $O$  ou converge vers  $O$  (figure A.1). Comme de plus  $a_x = \lambda x$ ,  $a_y = \lambda y$  et  $a_z = \lambda z$ , on a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 3\lambda$ , c'est à dire que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$  a le signe de  $\lambda$ .

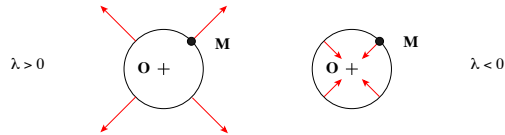


FIGURE A.1 – Interprétation physique de la divergence.

En résumé, on retiendra que le **signe de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$  est lié au caractère convergent ou divergent des lignes du champ  $\vec{a}$  à partir de l'origine**.

#### Interprétation physique du rotationnel

On considère un contour de surface donnée. On peut montrer que le rotationnel d'un champ de vecteurs est la limite du rapport :

$$\frac{\text{Intégrale curviligne autour du contour}}{\text{Aire du contour}}$$

lorsque la surface du contour tend vers zéro. Considérons par exemple un champ de vecteur vitesse dont le rotationnel est non nul. On peut alors représenter les vitesses de ce champ par les schémas de la figure A.2, auxquels on superpose une dérive d'ensemble.

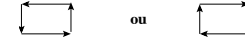


FIGURE A.2 – Le rotationnel d'un champ de vecteur.

#### Interprétation physique du laplacien scalaire

On considère un champ scalaire quelconque  $V(M)$  autour d'un point  $M$ . On note  $V(M_0)$  la valeur du champ en un point  $M_0$  et  $\epsilon$  le rayon d'une petite sphère centrée sur  $M_0$ . On appelle *valeur moyenne* de  $V$  sur le domaine  $(\mathcal{D})$  la grandeur  $\langle V \rangle$  telle que :

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{(\mathcal{D})} V(M) dS$$

On peut montrer que :

$$\langle V \rangle = V(M_0) + \frac{\epsilon^2}{6} \Delta V(M_0) + O(\epsilon^2)$$

où le laplacien  $\Delta V(M_0)$  est évalué en  $M_0$ . Ce laplacien permet donc de comparer  $V(M_0)$  à la valeur moyenne du champ au voisinage de  $M_0$ . En particulier, si  $M_0$  est un minimum local, on a nécessairement  $\Delta V(M_0) > 0$ . De même, si  $M_0$  est un maximum local, on a nécessairement  $\Delta V(M_0) < 0$ .

### A.2.2 Transformation des domaines d'intégration

Certaines relations mathématiques ont une importance particulière dans tous les domaines de la physique, et principalement en électromagnétisme. On peut citer principalement, en notant  $\vec{A}$  un champ vectoriel à dérivées partielles bornées et  $\phi$  et  $\psi$  des fonctions scalaires :

1. la relation reliant le flux d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  à travers une surface fermée  $(S)$  à l'intégrale de sa divergence dans le volume  $(V)$  délimité par cette surface, connue sous le nom de *théorème d'Ostrogradsky* ou *théorème de la divergence* :

$$\oint_{(S)} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \equiv \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV \quad (\text{A.19})$$

La normale  $\vec{n}$  à la surface est orientée sortante du volume.

2. la relation reliant la circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  le long d'une courbe fermée  $(C)$  au flux de son rotationnel à travers une surface ouverte quelconque  $(S)$  qui s'appuie sur  $(C)$ , connue sous le nom de *théorème de Stokes* :

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \equiv \iint_{(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.20})$$

3. la relation reliant le flux du produit vectoriel de la normale  $\vec{n}$  à une surface fermée ( $S$ ) avec un champ de vecteurs  $\vec{A}$  à travers cette surface, à l'intégrale de son rotationnel dans le volume ( $V$ ) délimité par cette surface, connue sous le nom de *formule du rotationnel* :

$$\oint_{(S)} (\vec{n} \times \vec{A}) dS \equiv \iiint_{(V)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV \quad (\text{A.21})$$

4. la relation reliant le flux d'une fonction scalaire  $\phi$  à travers une surface fermée ( $S$ ) à l'intégrale de son gradient dans le volume ( $V$ ) délimité par cette surface, connue sous le nom de *formule du gradient* :

$$\oint_{(S)} \phi d\vec{S} \equiv \iiint_{(V)} \vec{\nabla}(\phi) dV \quad (\text{A.22})$$

5. la relation reliant la circulation d'une fonction scalaire  $\phi$  le long d'une courbe fermée ( $C$ ) au flux du produit vectoriel de la normale  $\vec{n}$  à une surface ( $S$ ) s'appuyant sur ce contour par le gradient de la fonction scalaire, connue sous le nom de *formule de Kelvin* :

$$\oint_{(C)} \phi d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{n} \times \vec{\nabla}(\phi) dS \quad (\text{A.23})$$

6. La formule suivante s'appliquant à une surface fermée ( $S$ ) est connue sous le nom de *formule de Green* :

$$\iiint_{(V)} [\phi \Delta(\psi) - \psi \Delta(\phi)] dV = \oint_{(S)} [\phi \vec{\nabla}(\psi) - \psi \vec{\nabla}(\phi)] \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.24})$$

En se souvenant des propriétés des opérateurs différentiels (A.14) à (A.17), les formules de changement de domaine d'intégration ci-dessus permettent de passer de la formulation intégrale d'une loi à sa formulation locale, et vice versa (voir table A.1).

Propriété du champ	Formulation intégrale	Formulation différentielle en champ	Formulation différentielle avec potentiels
Circulation conservative	$\int_{(C)} \vec{h} \cdot d\vec{r} = 0$ ( $C$ ) fermée quelconque	$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0}$	$\vec{h} = \vec{\nabla}(f)$
Flux conservatif	$\int_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = 0$ ( $S$ ) fermée quelconque	$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0$	$\vec{g} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$

TABLE A.1 – Formulations mathématiques des principales propriétés des champs

### A.2.3 Unicité de la définition d'un champ par des équations locales

#### Cas d'un champ scalaire

On considère une fonction scalaire  $f$  satisfaisant en tout point d'un volume ( $V$ ) limité par une surface ( $S$ ) l'équation :

$$\Delta f = \phi(\vec{r})$$

où  $\phi(\vec{r})$  est une fonction définie en tout point du volume ( $V$ ), sans singularité. On peut alors montrer que la solution est unique si une des trois conditions suivantes est remplie :

1. La valeur de  $f$  est connue en chaque point de la surface ( $S$ ) (condition dite de **Dirichlet**).
2. La valeur de  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(f)$  est connue en chaque point de la surface ( $S$ ), où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à ( $S$ ) au point considéré (condition dite de **Neumann**).
3. La valeur de  $f$  est connue sur une partie de ( $S$ ), et la valeur de  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(f)$  est connue sur la partie complémentaire de ( $S$ ).

**Remarque :** Ceci est également valable si le volume ( $V$ ) est l'espace entier à condition que la fonction  $f$  s'annule en dehors d'une portion finie de l'espace et que  $\phi(\vec{r})$  tende vers zéro à l'infini au moins comme  $1/r$ .

#### Cas d'un champ vectoriel

On considère un champ vectoriel  $\vec{A}$  dans un volume ( $V$ ) limité par une surface ( $S$ ). On suppose que  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  sont définis en chaque point, sans singularité. La connaissance en chaque point de la surface ( $S$ ) de  $\vec{n} \cdot \vec{A}$  (où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface ( $S$ ) en chaque point) assure l'unicité du champ vectoriel  $\vec{A}$ .

**Remarque 1 :** Ceci est également valable si le volume ( $V$ ) est l'espace entier à condition que  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{0}$  en dehors d'une portion finie de l'espace et que  $\vec{A}(\vec{r})$  tende vers zéro à l'infini au moins comme  $1/r^2$ .

**Remarque 2 :** Ceci est une conséquence du *théorème d'Helmholtz* qui dit que tout vecteur  $\vec{A}$  est parfaitement connu à une constante additive près si on connaît en tout point sa divergence et son rotationnel.

### A.2.4 Dérivation d'une intégrale

On considère une fonction de la forme  $I(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ . Si les bornes  $a$  et  $b$  dépendent de  $x$ , on aura :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] = f(x, b) \frac{db(x)}{dx} - f(x, a) \frac{da(x)}{dx} + \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (\text{A.25})$$

Si au contraire les bornes  $a$  et  $b$  ne dépendent pas de  $x$ , alors on aura simplement :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (\text{A.26})$$

De plus,  $I$  sera continûment dérivable si  $f$  admet des dérivées partielles continues.

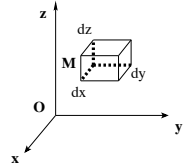
### Exercice 1.1 : Calcul symbolique

On donne  $\vec{F} = (3y - c_1 z) \vec{u}_x + (c_2 x - 2z) \vec{u}_y - (c_3 y + z) \vec{u}_z$ . En supposant que  $\vec{F}$  est irrotationnel, déterminer les constantes  $c_i$  puis la fonction  $\Phi$  telle que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}(\Phi)$ .

## A.3 Systèmes de coordonnées

On donne ici quelques résultats importants. Les calculs, sans difficultés particulières, sont détaillés dans de nombreux ouvrages, par exemple dans [10, page 609 et suivantes]. On vous demandera de connaître les résultats en coordonnées cartésiennes (§ A.3.1). Les expressions dans les autres systèmes de coordonnées ne sont pas à retenir.

### A.3.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)



$$d\tau = dx dy dz$$

- Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.27})$$

- Gradient :

$$(\vec{\nabla} f)_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\vec{\nabla} f)_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.28})$$

- Rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

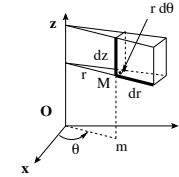
- Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.30})$$

- Laplacien vectoriel :

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x) \vec{u}_x + (\Delta A_y) \vec{u}_y + (\Delta A_z) \vec{u}_z \quad (\text{A.31})$$

### A.3.2 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)



$$d\tau = r dr d\theta dz$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

- Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.32})$$

- Gradient :

$$(\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\vec{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.33})$$

- Rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

- Laplacien scalaire :

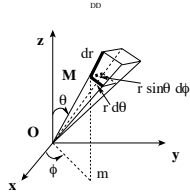
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.35})$$

- Laplacien vectoriel :

$$\Delta \vec{A} = \left[ \Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left( A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_r + \left[ \Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} \left( A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_\theta + (\Delta A_z) \vec{u}_z$$



### A.3.3 Coordonnées sphériques ( $r, \theta, \phi$ )



$$dr = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

- Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) A_\theta] \right] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.36})$$

- Gradient :

$$(\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\vec{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\vec{\nabla} f)_\phi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\text{A.37})$$

- Rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) A_\phi] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\phi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

- Laplacien scalaire :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

- Laplacien vectoriel :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= \left[ \Delta A_r - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left( A_r \sin(\theta) + \frac{\partial(\sin(\theta) A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_r + \\ &\quad \left[ \Delta A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left( \frac{A_\theta}{2} - \sin^2(\theta) \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \cos(\theta) \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_\theta + \\ &\quad \left[ \Delta A_\phi - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left( \frac{A_\phi}{2} - \sin(\theta) \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \cos(\theta) \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_\phi \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

#### Exercice 1.2 : Calcul symbolique

1. Calculer le gradient et le laplacien du champ scalaire  $U = \vec{A} \cdot \vec{r}$ , où  $\vec{A}$  représente un champ vectoriel uniforme
2. Calculer la divergence, le rotationnel et le laplacien du champ vectoriel  $\vec{a} = \vec{r}$

## A.4 Résolution de l'équation de Bessel

### A.4.1 Equation de Bessel

La résolution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ ) :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

peut se faire en cherchant une solution de la forme  $V = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$ . En multipliant ensuite le résultat par  $r^2/(\Theta Z)$ , on obtient l'équation décrivant l'évolution de  $R$  sous la forme :

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2) R = 0$$

En substituant  $x = kr$ , on obtient l'équation de Bessel d'ordre  $\nu$  :

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - \nu^2) R = 0 \quad (\text{A.41})$$

### A.4.2 Fonctions de Bessel et fonctions de Neumann

Une solution de (A.41) est la fonction de Bessel de 1<sup>er</sup> espèce  $J_\nu(x)$  définie par :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{\nu+2k} \quad (\text{A.42})$$

où  $\Gamma(x)$  est la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{A.43})$$

Les variations des premières fonctions de Bessel sont données sur la figure A.3. Une autre solution de l'équation de Bessel (A.41) est  $J_{-\nu}(x)$ . Lorsque  $\nu$  n'est pas un entier,  $J_\nu(x)$  et  $J_{-\nu}(x)$  sont linéairement indépendants. Si  $\nu = n$  est entier, on peut montrer que :

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x) \quad (\text{A.44})$$

La fonction de Bessel de 2<sup>e</sup> espèce ou fonction de Neumann  $N_\nu(x)$  est définie par :

$$N_\nu(x) = \lim_{m \rightarrow \nu} \left( \frac{\cos(m\pi) J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} \right) \quad (\text{A.45})$$

Les variations des premières fonctions de Neumann sont données sur la figure A.4. On peut montrer que :

$$N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^{-\nu} \quad \text{et} \quad N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$$

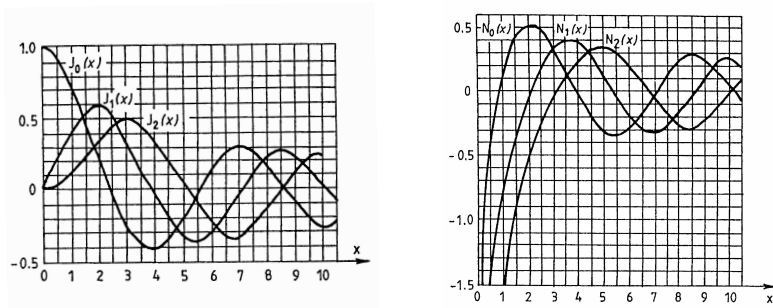


FIGURE A.3 – Les trois premières fonctions de Bessel  $J_n(x)$ .

FIGURE A.4 – Les trois premières fonctions de Neumann  $N_n(x)$ .

Pour résoudre l'équation de Bessel (A.41), on doit considérer deux cas :

1. Si  $\nu$  n'est pas entier, la solution  $R_\nu(x)$  est une combinaison linéaire de  $J_\nu(x)$  et  $J_{-\nu}(x)$  :

$$R_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

2. Si  $\nu = n$  est entier,  $J_n(x)$  et  $J_n(-x)$  ne sont pas linéairement indépendants d'après (A.44). On peut montrer que la solution  $R_n(x)$  est alors une combinaison linéaire de  $J_n(x)$  et  $N_n(x)$  :

$$R_n(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x)$$

## A.5 Quelques notions sur l'analyse de Fourier

Ce paragraphe est uniquement qualitatif et ne prétend pas à la moindre rigueur mathématique. Se reporter à un cours spécialisé pour des démonstrations rigoureuses (voir par exemple [7, Tome 2 - Annexe B]).

### A.5.1 Coefficients de Fourier

On considère une fonction  $f(t)$  périodique de période  $T$ . On pose  $\omega_1 = 2\pi/T$ . Sous certaines conditions mathématiques assez peu restrictives en physique,  $f$  peut s'écrire, avec  $n$  entier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(i\omega_n t) \quad \text{avec} \quad \omega_n = n\omega_1 \quad (\text{A.46})$$

L'équation (A.46) définit une *série de Fourier* dont les coefficients  $c_n$  se calculent selon :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \quad (\text{A.47})$$

L'ensemble des modules des coefficients  $c_n$  est appelé le *spectre de Fourier* de  $f$  (figure A.5).

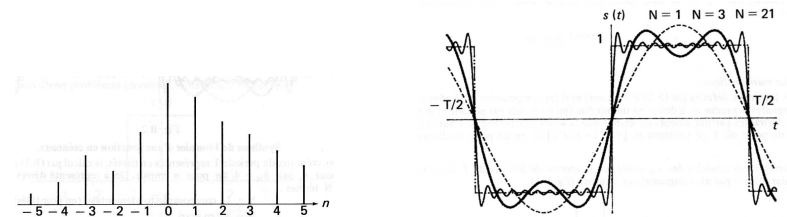


FIGURE A.5 – Exemple de spectre de Fourier.

FIGURE A.6 – Superposition des harmoniques de la fonction créneau jusqu'à  $N = 3$  (trait épais) et  $N = 21$  (trait fin). Le fondamental est représenté en pointillés.

Si la fonction  $f$  est réelle, les coefficients  $c_n$  vérifient  $c_{-n} = c_n^*$ . On peut alors réécrire (A.46) sous la forme :

$$f(t) = a_{n=1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (\text{A.48})$$

$a_0$  représente simplement la moyenne de la fonction  $f$ . Pour  $n \geq 1$ , les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt \quad (\text{A.49})$$

Ces relations montrent que le spectre d'un signal périodique est un *spectre de raie* : à chaque valeur de  $n$  correspond une *harmonique* (de rang  $n$ ). L'harmonique de rang 1 est le *mode fondamental*. La figure A.6 représente la superposition de divers harmoniques d'une fonction en créneaux. Au fur et à mesure que le nombre d'harmoniques utilisées croît, la fonction se rapproche de plus en plus de la fonction originelle.

### A.5.2 Transformations de Fourier

On considère une fonction  $s(t)$  qui n'est pas forcément périodique. Sous certaines conditions mathématiques peut restrictives en physique, on montre que  $s(t)$  peut s'exprimer sous forme d'une *intégrale de Fourier* :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) dt \quad \text{avec} \quad S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{A.50})$$

Les fonctions  $s(t)$  et  $S(\omega)$  sont les *transformées de Fourier* l'une de l'autre. Ces relations montrent que le spectre d'un signal continu est en général continu.

L'intégrale de Fourier (A.50) est l'homologue, pour une fonction quelconque, du développement en série de Fourier donné par (A.46) pour une fonction périodique. La fonction  $S(\omega)$  ne fait que traduire le poids relatif des diverses pulsations.

#### Exemple d'une fonction créneau

On considère la fonction créneau définie par  $s(t) = 1$  pour  $-\tau < t < \tau$ , 0 sinon. Sa transformée de Fourier vaut :

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{+\tau} s(t) \exp(-i\omega t) dt = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(X)}{X} \quad \text{avec} \quad X = \omega\tau \quad (\text{A.51})$$

et est représentée sur la figure A.7. On appelle *sinus cardinal* la fonction  $\sin(x)/x$  dont la forme caractéristique est à retenir.

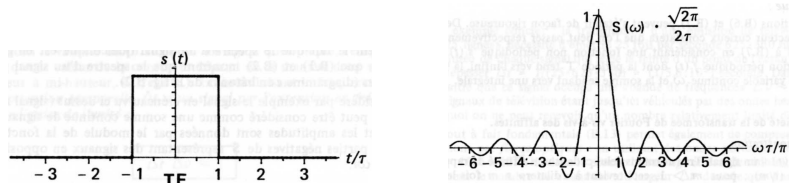


FIGURE A.7 – Fonction créneau (à gauche) et sa transformée de Fourier normalisée (à droite).

#### Exemple d'une fonction sinusoïdale limitée

On considère la fonction définie par  $s(t) = \cos(\omega_0 t)$  pour  $-\tau < t < \tau$ , 0 sinon. Sa transformée de Fourier vaut :

$$S(\omega) = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin[(\omega + \omega_0)\tau]}{(\omega + \omega_0)\tau} + \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau]}{(\omega - \omega_0)\tau} \right) \quad (\text{A.52})$$

et est représentée sur la figure A.8. Dans un large domaine de pulsation, elle peut être considérée comme la somme de deux sinus cardinaux centrés sur  $\pm\omega_0$ .

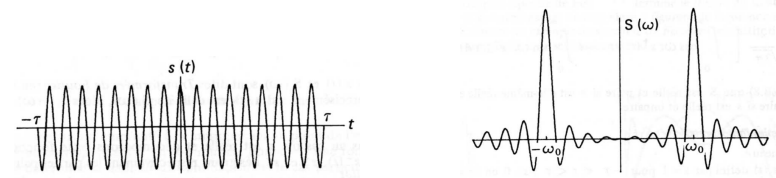


FIGURE A.8 – Fonction sinusoïdale limitée (à gauche) et sa transformée de Fourier (à droite).

### A.5.3 Extension du signal et largeur de son spectre

On considère la fonction créneau. Il est "naturel" au vu de la figure A.7 de définir son extension temporelle par  $\Delta t = 2\tau$  et l'extension spectrale de sa transformée de Fourier par  $\Delta\omega \approx \pi/\tau$ . On a alors :

$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi \quad \text{ou} \quad \Delta\nu \Delta t \approx 1 \quad (\text{A.53})$$

en introduisant le spectre en fréquence  $\nu = \omega/(2\pi)$ . On admettra que (A.53) est généralisable pour un signal quelconque.

# Chapitre 1

## Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme

### Sommaire

1.1	Distributions de charges et de courants . . . . .	16
1.2	Equations de Maxwell dans le vide . . . . .	18
1.3	Champ électromagnétique . . . . .	20
1.4	Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme . . . . .	23
1.5	Invariances et symétries du champ électromagnétique . . . . .	24
1.6	Conditions aux limites du champ électromagnétique . . . . .	29

### Introduction

Ce chapitre fondamental part des équations de Maxwell pour étudier le champ électromagnétique dans toute sa généralité. Il s'achève par des rappels sur les symétries et les conditions aux limites auxquelles est soumis le champ électromagnétique.

### 1.1 Distributions de charges et de courants

#### 1.1.1 La charge électrique

Diverses expériences ont montré que la charge n'était pas uniformément répartie dans tout l'espace mais localisée en quelques sites (par exemple l'expérience de diffusion de **Rutherford** décrite dans [14, page 654]), tandis que d'autres ont montré que la charge électrique de tout système à l'état libre était quantifiée (par exemple l'expérience de **Millikan** décrite dans [10, page 26]).

On montre ainsi qu'il existe deux types de charges : les charges *positives* et les charges *negatives*.

#### 1.1.2 Choix de l'élément de volume - Grandeurs nivelées

Pour avoir un sens, la densité volumique de charge  $\rho = \Delta Q / \Delta V$  ne doit pas dépendre de la forme exacte du volume  $\Delta V$  et doit être raisonnablement constante si on déplace "légèrement" le volume d'intégration. Pour des raisons de commodité, on prend souvent une sphère de centre  $M$  et de rayon  $R$  pour évaluer la densité volumique  $\rho$  en  $M$ . D'un côté, le rayon  $R$  doit être grand à l'échelle atomique pour pouvoir contenir un grand nombre de charges, ce qui implique  $R \gg 0,1 \text{ \AA}$ . De l'autre, il doit être petit à l'échelle microscopique. Comme le meilleur état de surface actuellement réalisable est de l'ordre du micron, on doit avoir  $R \ll 1 \text{ }\mu\text{m}$ . Finalement,  $R$  doit valoir approximativement 100 à 1000  $\text{\AA}$ .

Or le champ à la surface d'une sphère de rayon 100  $\text{\AA}$  contenant une unique charge élémentaire en son centre vaut  $1,5 \cdot 10^7 \text{ V/m}$ . C'est à dire que l'existence d'une charge en plus ou en moins dans la sphère de rayon  $R$  modifie considérablement le champ électrique, ce qui est incompatible avec l'hypothèse du début de ce paragraphe de constance du résultat en déplaçant "légèrement" la sphère.

Ceci montre qu'on ne doit pas procéder ainsi mais *niveler* la densité volumique de charges en remplaçant la "vraie" variation  $\rho_{vrai}$  par une grandeur débarrassée de toutes les fluctuations spatiales. On remplace donc une charge quasi ponctuelle centrée sur  $M$  (figure 1.1) par une distribution continue  $\rho_{niv}$  centrée sur  $M$  mais s'étalant sur 100 à 1000  $\text{\AA}$ . La forme de la fonction de distribution  $\rho_{niv}$  n'a pas d'importance, il suffit qu'elle soit continue et étalée sur  $(100 \text{ \AA})^3$  à  $(1000 \text{ \AA})^3$ .

L'utilisation d'une sphère pour moyenner les grandeurs microscopiques n'est pas entièrement satisfaisante. On pourrait montrer qu'il est préférable d'utiliser une *fonction de nivellement* continue, centrée en  $\vec{r}$  et à symétrie sphérique. La distance caractéristique sur laquelle cette fonction est non nulle est une distance mésoscopique de 0,3 à 1  $\text{\AA}$ . La fonction  $f$  doit vérifier :

$$\iiint_{\text{Espace}} f(\vec{r}) dV = 1 \quad (1.1)$$

Par exemple, une charge ponctuelle  $q_i$  en un point  $\vec{r}_i$  est remplacée par la fonction continue  $\rho_i = q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i)$  et la densité volumique de charge  $\rho$  nivelée est donnée par :

$$\rho = \sum_i q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (1.2)$$

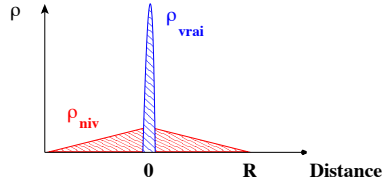


FIGURE 1.1 – On remplace une densité volumique  $\rho_{\text{vrai}}$  assimilable à une fonction de Dirac par une fonction nivelée  $\rho_{\text{niv}}$  de même intégrale dont l'extension spatiale est de l'ordre de 100 à 1000 Å (voir texte).

où la sommation s'effectue sur toutes les charges du système. La forme de la fonction  $f$  fait que dans la pratique, seules les charges qui se trouvent proche de  $\vec{r}$  apportent une contribution effective à  $\rho$ .

On procède de même pour les autres grandeurs que l'on souhaite niveler :  $\sigma$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , ...

### 1.1.3 Equation de continuité

En régime variable, la conservation de la charge totale impose que la densité volumique  $\rho$  en tout point de l'espace soit liée à la densité de courant au voisinage de ce point par l'équation de continuité ou équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.3)$$

Cette relation signifie simplement qu'une diminution au cours du temps de la charge totale contenue dans un petit volume correspond à un flux de charge sortant à travers la surface délimitant ce volume.

Dans le cas particulier où les charges sont mobiles mais où leur densité volumique  $\rho$  reste constante au cours du temps, l'équation de continuité est simplement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.4)$$

On dit alors qu'il s'agit d'un régime *permanent* ou *stationnaire*. La densité de courant  $\vec{J}$  est alors à *flux conservatif*. Si en plus  $\vec{J}$  est constant, on aura un *courant continu*.

### 1.1.4 Changement de référentiel

On note  $\rho$  et  $\vec{J}$  les densités volumiques de charges et de courants dans un référentiel galiléen (R). Dans un autre référentiel (R') en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{u}$  par rapport à (R), ces distributions sont respectivement  $\rho'$  et  $\vec{J}'$ .

On verra au § 9 qu'un traitement relativiste est nécessaire pour une réponse exacte. Néanmoins, dans le cadre de l'approximation galiléenne, on montre que :

$$\rho' = \rho \quad \text{et} \quad \vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{u} \quad (1.5)$$

## 1.2 Equations de Maxwell dans le vide

### 1.2.1 Equations de Maxwell

En notant  $\rho(\vec{r}, t)$  et  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  les densités respectives de charges et de courants volumiques, la forme locale des équations de Maxwell dans le vide s'écrit en fonction des champs  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell - Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi\text{)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell - Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Maxwell - Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

en fonction des deux constantes universelles  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m (*permittivité diélectrique du vide*) et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m (*perméabilité magnétique du vide*).

### 1.2.2 Invariances de jauge

Il est parfois plus simple d'introduire les potentiels que de résoudre directement les équations de Maxwell, qui sont des équations couplées du 1<sup>er</sup> ordre. On obtient alors moins d'équations, mais d'un ordre plus élevé.

#### Jauge de Lorentz

Il est trivial de montrer que les définitions des potentiels vecteurs et potentiels scalaires par :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.7)$$

satisfont les équations (MΦ) et de (MF). Il est évident que (MG) entraîne alors :

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

tandis que (MA) permet d'écrire :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.9)$$

Le champ  $\vec{B}$  reste inchangé par la transformation :

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}(\Lambda) \quad (1.10)$$

où  $\Lambda$  est une fonction scalaire quelconque. Pour que  $\vec{E}$  donné par (1.7) reste inchangé, il faut que  $\phi$  se transforme simultanément en :

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (1.11)$$

On admettra que la liberté de choix offerte par  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}(\Lambda)$  et (1.11) permet de choisir  $\vec{A}$  et  $\phi$  tels que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.12)$$

et que l'on peut toujours trouver des potentiels  $\vec{A}$  et  $\phi$  qui satisfont cette condition. La relation (1.12) permettant de fixer de manière univoque les potentiels est connue sous le nom de *condition de Lorentz*. En combinant cette relation avec (1.8) et (1.9), on obtient ainsi deux équations découplées qui sont équivalentes aux équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad (1.13)$$

L'ensemble des deux transformations (1.10) et (1.11) s'appelle une *transformation de jauge*, tandis que l'invariance des champs sous une telle transformation s'appelle une *invariance de jauge*. Si  $\vec{A}$  et  $\phi$  vérifient la condition de Lorentz, alors la *transformation de jauge restreinte* ( $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$  et  $\phi \rightarrow \phi'$ ) vérifie la condition de Lorentz si :

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (1.14)$$

Les potentiels de cette classe restreinte constituent la *jauge de Lorentz*. Cette jauge est couramment utilisée en électromagnétisme car elle conduit à un traitement identique pour le potentiel scalaire  $V$  et le potentiel vecteur  $\vec{A}$  (1.13).

### Jauge de Coulomb

Il existe une autre jauge couramment utilisée pour les phénomènes statiques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.15)$$

C'est la *jauge de Coulomb*. En l'utilisant, la relation très générale (1.8) peut s'écrire :

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette relation montre que dans cette jauge, le potentiel scalaire vérifie l'équation de Poisson (d'où son nom de *jauge de Coulomb*). La solution de cette équation est simplement le potentiel de Coulomb instantané dû à  $\rho$  :

$$\phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Espace} \frac{\rho(P)}{PM} d^3P \quad (1.16)$$

### Remarque sur la causalité

La relation (1.16) indique que  $\phi$  se propage instantanément, alors que les relations (1.13) indiquent que  $\vec{A}$  et  $\phi$  se propagent à la vitesse  $c$ . Les domaines d'application de ces relations seront donc différents.

## 1.3 Champ électromagnétique

### 1.3.1 Energie du champ

#### Localisation de l'énergie

Les deux expériences schématisées sur la figure 1.2 permettent de mettre en évidence le fait que l'énergie se propage dans le vide, ce qui implique la nécessité de pouvoir faire un bilan local de l'énergie.

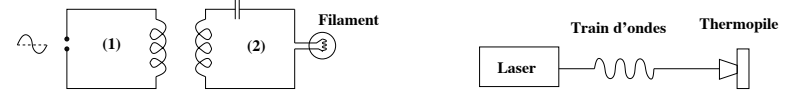


FIGURE 1.2 – Ces deux expériences mettent en évidence la propagation de l'énergie dans le vide, en l'absence de support matériel.

#### Puissance cédée par le champ à des charges

L'énergie fournie par le champ électromagnétique pendant  $dt$  aux charges contenues dans le volume  $dV$  se met sous la forme :

$$\frac{\delta^2 W}{dV} = \frac{d\vec{F}}{dV} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d\vec{F}}{dV} \cdot \vec{v} dt \quad (1.17)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse moyenne des particules et  $d\vec{F}/dV$  la densité volumique de force. Comme  $d\vec{F}/dV = \rho \vec{E}$  et  $\vec{v} = \vec{J}/\rho$ , on a finalement :

$$\frac{\delta^2 W}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} dt$$

dont on déduit que la puissance volumique cédée par le champ aux charges vaut :

$$\frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1.18)$$

#### Relation locale de conservation de l'énergie

On note  $u$  la densité volumique d'énergie électromagnétique,  $\vec{R}$  son flux par unité de surface et  $\sigma$  la densité volumique d'énergie perdue par le champ électromagnétique. La variation  $d\mathcal{E}$

de l'énergie électromagnétique pendant  $dt$  peut se mettre sous la forme :

$$d\mathcal{E} = \iint_{(S)} (-\vec{R} dt) \cdot d\vec{S} - \left( \iiint_{(V)} \sigma dV \right) dt$$

soit :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(V)} \sigma dV = 0 \quad (1.19)$$

Le 1<sup>er</sup> terme de cette relation peut s'écrire d'après (A.26) :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iiint_{(V)} u dV \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

tandis que le 2<sup>e</sup> devient en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{R}) dV$$

Finalement, on peut réécrire (1.19) sous la forme :

$$\iiint_{(V)} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \sigma \right) dV = 0$$

Comme ceci est valable pour tout volume de contrôle  $V$ , on en déduit l'équation locale de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \sigma = 0 \quad (1.20)$$

### Identité de Poynting

On part des formes suivantes de (MF) et (MA) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

En multipliant scalairement la 1<sup>re</sup> équation par  $\vec{B}$  et en lui soustrayant la 2<sup>e</sup> multipliée par  $\vec{E}$  puis en divisant l'ensemble par  $\mu_0$ , on obtient :

$$\frac{1}{\mu_0} \left( \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{B} \times \vec{B}) \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 c^2} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

D'après (A.9), on reconnaît  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$  dans le 1<sup>er</sup> terme, tandis que  $\vec{B} \cdot \partial \vec{B} / \partial t$  et  $\vec{E} \cdot \partial \vec{E} / \partial t$  s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2}{2} \right)$$

Finalement, on obtient l'identité de Poynting :

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1.21)$$

En identifiant avec (1.20), il semble naturel de poser :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \sigma = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (1.22)$$

$\vec{R}$  est appelé le *vecteur de Poynting*.

### 1.3.2 Impulsion du champ

On peut voir sur l'exemple de la figure 1.3 que la force exercée par la particule (1) sur la particule (2) n'est pas l'opposée de la force exercée par la particule (2) sur la particule (1). Cela signifie que la somme des deux impulsions  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$  n'est pas constante. On peut montrer que la loi de conservation de la quantité de mouvement s'applique à  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_{\text{champ}}$  où  $\vec{p}_{\text{champ}}$  est la quantité de mouvement associée au champ électromagnétique.

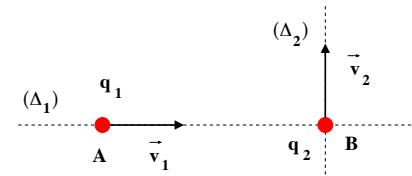


FIGURE 1.3 – Dans cette configuration, la force exercée par la particule (2) sur la particule (1) n'est pas l'opposée de celle exercée par la particule (1) sur la particule (2) - voir texte.

On montre qu'à tout champ électromagnétique, on associe une densité volumique d'impulsion  $\vec{g}$  telle que :

$$\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\vec{R}}{c^2} \quad (1.23)$$

### 1.3.3 Moment cinétique du champ

De la même manière qu'on associe de l'énergie et de la quantité de mouvement au champ électromagnétique, on peut lui associer un moment cinétique. On pourrait montrer que la quantité de mouvement contenue dans le volume  $dV$  entourant un point  $M$  correspond à un moment cinétique de densité volumique :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dV} = \vec{d} \times \vec{g} \quad \text{avec} \quad \vec{d} = \overrightarrow{OM} \quad (1.24)$$

La loi de conservation du moment cinétique doit prendre en compte le moment cinétique du champ, en sus de celui des particules chargées contenues dans le champ.

### 1.3.4 Conclusion sur le champ électromagnétisme

En électromagnétisme, on ne doit pas parler de la force que deux charges exercent l'une sur l'autre, mais de la force qu'une charge subit dans le champ créé par l'autre.

---

## 1.4 Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme

### 1.4.1 Régime permanent

On appelle *régime permanent* le régime pour lequel les variations temporelles des termes sources du champ sont nulles. Le couplage entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  disparaît alors et les équations de Maxwell (1.6) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell - Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi\text{)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} & \text{Maxwell - Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{Maxwell - Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Dans ce cas, il est possible de séparer l'électromagnétisme en deux branches :

1. l'étude du champ électrique permanent  $\vec{E}(\vec{r})$  ayant pour source  $\rho(\vec{r})$
2. l'étude du champ magnétique permanent  $\vec{B}(\vec{r})$  ayant pour source  $\vec{J}(\vec{r})$

**Remarque :** On peut noter que l'étude des champs magnétiques permanent est la *magnétostatique*, tandis que l'étude des champs électriques permanent n'est pas l'*électrostatique*.

### 1.4.2 Approximation des régimes quasi stationnaires

En négligeant l'influence de la propagation, on retombe sur l'*approximation des Régimes Quasi Stationnaires* (ARQS ou AEQS pour certains auteurs) qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell - Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi\text{)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell - Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{Maxwell - Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

On remarque en particulier que l'intensité est conservative dans l'ARQS. C'est une propriété de base de l'électrocinétique.

---

## 1.5 Invariances et symétries du champ électromagnétique

Les propriétés d'invariance et de symétrie du champ électromagnétique sont basées sur le *principe de Curie* (1894) qui reste valable tant que la solution du problème est unique :

*Si une cause présente une certaine symétrie (ou invariance), alors son effet aura la même symétrie (ou la même invariance), ou une symétrie supérieure*

Appliqué à l'électromagnétisme, ceci implique que les éléments de symétrie ou d'antisymétrie des distributions de charge et de courant doivent se retrouver dans les champs et les potentiels. Le principe de Curie permet de dire que si un système possède un certain degré de symétrie, on peut déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets créés en un autre point à l'aide de six propriétés, valables aussi bien en régime statique qu'en régime variable tant qu'on néglige le temps de propagation.

### 1.5.1 Invariances du champ électromagnétique

#### Invariance par translation

Si un système est invariant dans toute translation parallèle à un axe, les effets sont indépendants des coordonnées de cet axe (propriété #1)

#### Symétrie axiale

Si un système est invariant dans toute rotation autour d'un axe donné, alors ses effets ne dépendent pas de l'angle qui définit la rotation (propriété #2)

Par exemple, l'invariance d'une densité volumique de charge  $\rho$  par rapport à un axe  $Oz$  permet d'écrire en tout point  $M$  :

$$V(M) = V(r, z) \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, z) \vec{u}_z$$

#### Symétrie cylindrique

Si un système est invariant par translation et rotation, ses effets ne dépendent que de la distance à l'axe de rotation (propriété #3)

#### Symétrie sphérique

Si un système est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe, ses effets ne dépendent que de la distance à ce point (propriété #4)



## 1.5.2 Symétries du champ électromagnétique

### Qu'est-ce que le *champ magnétique* ?

Expérimentalement, on montre que dans toute région de l'espace subissant l'influence de courants ou d'aimants permanents, la force  $d\vec{F}$  à laquelle est soumise un élément  $d\vec{\ell}$  de circuit parcouru par un courant  $I$  dépend linéairement de  $I d\vec{\ell}$ . On peut mathématiquement traduire ceci par :

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} I d\ell_x \\ I d\ell_y \\ I d\ell_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (B) = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

On observe également que  $d\vec{F}$  et  $I d\vec{\ell}$  sont perpendiculaires, ce qui se traduit par  $dF_x I d\ell_x + dF_y I d\ell_y + dF_z I d\ell_z = 0$ . Comme ceci est valable pour toute longueur  $d\ell$ , on en déduit finalement que :

$$B_{xx} = B_{yy} = B_{zz} = 0 \quad B_{yx} = -B_{xy} \quad B_{xz} = -B_{zx} \quad B_{zy} = -B_{yz}$$

La matrice des coefficients de  $(B)$  définie par (1.27) est donc antisymétrique. Il suffit de trois quantités pour décrire l'action, sur l'élément de longueur  $d\vec{\ell}$ , du *champ magnétique*. On pose donc  $B_x = B_{yz}$ ,  $B_y = B_{zx}$  et  $B_z = B_{xy}$ , soit :

$$(B) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

On voit donc que même si la nécessité de le visualiser pousse à représenter le champ magnétique  $\vec{B}$  sous forme vectorielle ( $\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z$ ), les trois coordonnées  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  du champ magnétique sont en réalité les composantes d'un tenseur antisymétrique d'ordre deux<sup>1</sup>.

### Une autre façon de voir les choses

On peut introduire le champ magnétique d'une façon différente, à partir de l'action qu'il exerce sur une particule de charge  $q$ , c'est à dire à partir de la *force de Lorentz* :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.29)$$

On voit sur cette relation que, pour que la force  $\vec{F}$  soit une observable physique (puisque'elle est liée à l'énergie!), le champ  $\vec{B}$ , au contraire du champ  $\vec{E}$ , doit dépendre de la **convention d'orientation de l'espace**.

1. On appellera *tenseur* un tableau de coefficients traduisant des propriétés physiques, au contraire d'une *matrice* qui traduit simplement une variation linéaire entre diverses quantités. L'ordre d'un tenseur est le nombre d'indices matriciels nécessaires pour le décrire. Par exemple, la masse et toute autre quantité scalaire est un tenseur d'ordre 0, mais une force ou toute autre quantité vectorielle est un tenseur d'ordre 1.

## Représentation vectorielle de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

On représente donc  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par des vecteurs dans l'espace à trois dimensions, même si comme on vient de le voir, cette schématisation peut amener des confusions pour  $\vec{B}$ .

On appellera *parité* l'opération de symétrie par rapport à une origine  $O$ . Cette définition permet d'introduire deux types de "vecteurs" :

1. un vecteur sera dit *polaire* ou *vrai vecteur* si Parité  $(\vec{V}) = -\vec{V}$ . Le champ électrique  $\vec{E}$ , le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , la densité volumique de courant  $\vec{J}$ , le vecteur position  $\vec{r}$ , la vitesse  $\vec{v}$ , la force de Lorentz  $\vec{F}$ , etc .. sont des vecteurs polaires.
2. un vecteur sera dit *axial* ou *pseudo-vecteur* si Parité  $(\vec{V}) = \vec{V}$ . Comme le produit vectoriel de deux vecteurs polaires est un vecteur axial, le champ magnétique  $\vec{B}$  est un vecteur axial car la force magnétique  $q \vec{v} \times \vec{B}$  s'écrit alors comme le produit de deux vecteurs polaires.

Le principe de Curie permet de dire que si un système admet un plan de symétrie, alors en tout point de ce plan, un effet vectoriel est contenu dans ce plan tandis qu'un effet axial est perpendiculaire à ce plan (propriété #5).

De manière équivalente, si un système admet un plan d'antisymétrie, alors en tout point de ce plan, un effet vectoriel est perpendiculaire à ce plan tandis qu'un effet axial est contenu dans ce plan (propriété #6).

### Symétrie par rapport à un point

Si une distribution de charge possède un centre de symétrie,  $\vec{E}$  est nul en ce point.

Si une distribution de courants possède un centre de symétrie,  $\vec{B}$  est nul en ce point.

### Symétrie par rapport à un axe

Si une distribution de charge possède un axe de symétrie,  $\vec{E}$  est porté par cet axe.

Si une distribution de courants possède un axe de symétrie,  $\vec{B}$  est nul en tout point de celui-ci.

### Symétrie par rapport à un plan

On dira d'une distribution de charge qu'elle possède un *plan de symétrie* ( $\pi$ ) si deux éléments de volume symétriques par rapport à ce plan contiennent la même charge. On notera  $M'$  le symétrique de  $M$  par rapport au plan ( $\pi$ ) dans tout ce paragraphe. On peut montrer que l'on a (figure 1.4) :

$$\begin{cases} \vec{E}_{//}(M') = \vec{E}_{//}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad V(M') = V(M) \quad (1.30)$$

En particulier, si un point  $M$  appartient à un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ électrique en  $M$  est contenu dans ce plan.

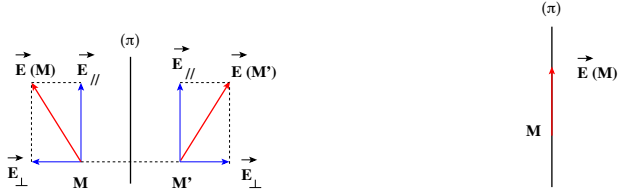


FIGURE 1.4 – Distribution de charge ayant un plan  $(\pi)$  de symétrie : cas d'un point  $M$  situé en dehors du plan (à gauche) et d'un point  $M$  situé sur le plan (à droite).

De même, on dira d'une distribution de courant qu'elle possède un *plan de symétrie*  $(\pi)$  si les courants volumiques  $\vec{J}$  en deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à ce plan sont eux-mêmes symétriques :

$$\vec{J}_{\perp}(P') = -\vec{J}_{\perp}(P) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{//}(P') = \vec{J}_{//}(P)$$

On peut montrer que l'on a (figure 1.5) :

$$\begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = -\vec{B}_{//}(M) \\ \vec{A}_{//}(M') = \vec{A}_{//}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) \\ \vec{A}_{\perp}(M') = -\vec{A}_{\perp}(M) \end{cases} \quad (1.31)$$

En particulier, si un point  $M$  appartient à un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en  $M$  est normal au plan tandis que le potentiel vecteur est contenu dans le plan.

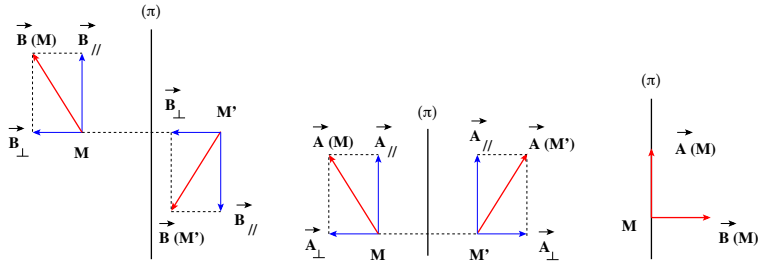


FIGURE 1.5 – Distribution de courant ayant un plan  $(\pi)$  de symétrie : cas d'un point  $M$  situé en dehors du plan (à gauche et au centre) et d'un point  $M$  situé sur le plan (à droite).

### Cas des antisymétries

On peut aisément déduire du paragraphe précédent les propriétés de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans une antisymétrie par rapport à un point, à un axe ou à un plan.

Par exemple, on dira d'une distribution de charge qu'elle possède un *plan d'antisymétrie*  $(\pi)$  si deux éléments de volume symétriques par rapport à ce plan contiennent des charges opposées. Dans ce cas, on a (figure 1.6) :

$$\begin{cases} \vec{E}_{//}(M') = -\vec{E}_{//}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = \vec{E}_{\perp}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad V(M') = -V(M) \quad (1.32)$$

En particulier, si un point  $M$  appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrique en  $M$  est normal à ce plan.

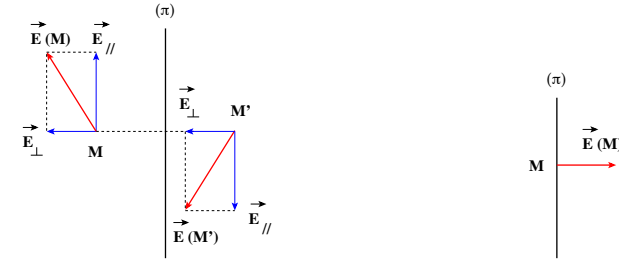


FIGURE 1.6 – Distribution de charge ayant un plan  $(\pi)$  d'antisymétrie : cas d'un point  $M$  situé en dehors du plan (à gauche) et d'un point  $M$  situé sur le plan (à droite).

De même, on dira d'une distribution de courant qu'elle possède un *plan d'antisymétrie*  $(\pi)$  si les courants volumiques  $\vec{J}$  en deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à ce plan sont eux-mêmes antisymétriques, c'est à dire opposés à leur symétrique :

$$\vec{J}_{\perp}(P') = \vec{J}_{\perp}(P) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{//}(P') = -\vec{J}_{//}(P)$$

On peut montrer que l'on a (figure 1.7) :

$$\begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = \vec{B}_{//}(M) \\ \vec{A}_{//}(M') = -\vec{A}_{//}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \\ \vec{A}_{\perp}(M') = \vec{A}_{\perp}(M) \end{cases} \quad (1.33)$$

En particulier, si un point  $M$  appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en  $M$  est contenu dans ce plan tandis que le potentiel vecteur est normal au plan.

Si une distribution de charge possède un axe d'antisymétrie,  $\vec{E}$  est perpendiculaire à cet axe. Si une distribution de courants possède un axe d'antisymétrie,  $\vec{B}$  est porté par cet axe.

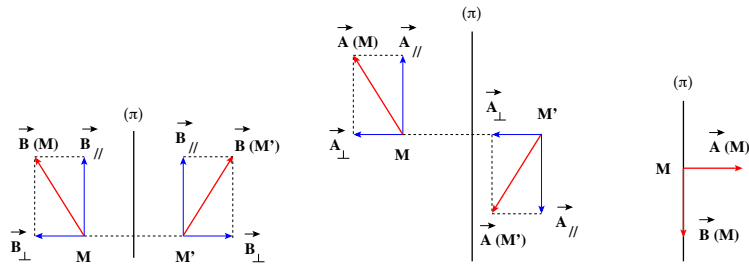


FIGURE 1.7 – Distribution de courant ayant un plan  $(\pi)$  d'antisymétrie : cas d'un point  $M$  situé en dehors du plan (à gauche et au centre) et d'un point  $M$  situé sur le plan (à droite).

### Exercice 1.1 : Théorème de Gauss et champ coulombien

Montrer en électrostatique que si le champ  $\vec{E}$  satisfait au théorème de Gauss, c'est un champ coulombien (radial et variant en  $1/r^2$ ). Comment se fait-il que le champ d'une charge en mouvement puisse satisfaire au théorème de Gauss sans être forcément coulombien ?

## 1.6 Conditions aux limites du champ électromagnétique

Les propriétés de continuité/discontinuité du champ électromagnétique dépendent de la nature des distributions et donc du modèle utilisé. Dans ce paragraphe, on suppose des milieux caractérisés par  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ .

### 1.6.1 Densités ponctuelles, linéiques et volumiques

Pour une densité de charges ponctuelles, on déduit des expressions du potentiel  $\Phi_{punct}$  et du champ  $\vec{E}_{punct}$  :

$$\Phi_{punct}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{punct} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (1.34)$$

qu'il existe des singularités au voisinage des charges. On observe le même phénomène pour un modèle linéique :

$$\Phi_{lin}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \text{et} \quad \vec{E}_{lin} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r \quad (1.35)$$

Par contre, dans le cas d'un modèle volumique, les équations de définition de  $\Phi_{vol}$  et du champ  $\vec{E}_{vol}$  s'écrivent :

$$\Delta\Phi_{vol} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{vol} = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{vol} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.36)$$

Elles indiquent que  $\Phi_{vol}$  et  $\vec{E}_{vol}$  sont définis (pas de singularité) et continus en tout point (car leurs dérivées partielles sont bornées).

### 1.6.2 Densités surfaciques

Le cas des densités surfaciques est plus complexe.

#### Discontinuité en physique et en mathématiques

On considère deux milieux (1) et (2) séparés par une surface (S). Avec les notations de la figure 1.8, une fonction  $F(x, y, z, t)$  est *discontinue en  $z$*  au point  $M$  si  $F_1 \neq F_2$  avec :

$$F_i = \lim_{M_i \rightarrow M} (F(x, y, z, t))$$

La *discontinuité* est mesurée par  $F_2 - F_1$ . Mathématiquement, la valeur de  $\partial F/\partial z$  n'est pas définie en  $M$ . En fait, en physique, il n'existe pas de discontinuité si brutale qu'on ne puisse la voir. La variation de  $F$  est simplement tellement rapide sur  $[M_1, M_2]$  (figure 1.8) que  $\partial F/\partial z$  est très élevée, mais reste finie, de même que :

$$F_2 - F_1 = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

puisque  $\partial F/\partial z$  a une valeur très élevée mais finie (figure 1.9). Dans le cas d'une discontinuité en  $z$ , on supposera toujours que dans les autres dimensions ( $x, y$  et  $t$ ), la fonction  $F$  est continue. Par exemple :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M_2} \left( \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = 0$$

On supposera toujours la même chose pour  $\partial F/\partial y$  et  $\partial F/\partial t$ .

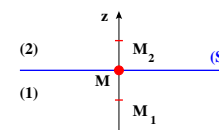


FIGURE 1.8 – La discontinuité d'une quantité  $F$  s'exprime par la différence  $F_2 - F_1$  dans les deux milieux (1) et (2)

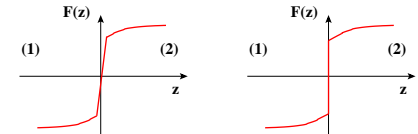


FIGURE 1.9 – Une variation rapide de  $\partial F/\partial z$  (à gauche) est souvent assimilée à une discontinuité (à droite).

### Composante normale de $\vec{E}$

On considère une surface chargée ( $\Sigma$ ) de forme quelconque, de densité surfacique  $\sigma$ , séparant deux milieux (1) et (2) de densités volumiques respectives  $\rho_1$  et  $\rho_2$  (figures 1.10 et 1.11). Les champs électrostatiques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  sont des fonctions de classe  $C^1$  mais ne sont pas définis sur la surface ( $\Sigma$ ).

Si le volume ( $V$ ) de la figure 1.10 est suffisamment petit, c'est à dire si la surface latérale du cylindre est négligeable, on peut écrire, en notant ( $S$ ) la surface parallèle à ( $\Sigma$ ) :

$$\iint_{Cylindre} \vec{E} \cdot d\vec{S} \approx (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \Delta S \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (1.37)$$

où  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  est un vecteur unitaire normal à la surface orienté du milieu (1) au milieu (2).

De plus, on a dans le volume ( $V$ ) :

$$\iiint_{(V)} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta S \quad (1.38)$$

En combinant (1.37) et (1.38), le théorème de Gauss (2.17) permet d'écrire :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.39)$$

Il est important de souligner qu'en réalité (c'est-à-dire dans un modèle volumique), le champ électrique  $\vec{E}$  est continu de classe  $C^1$ . La discontinuité donnée par (1.39) est due à l'approximation faite en négligeant l'épaisseur de la nappe chargée.

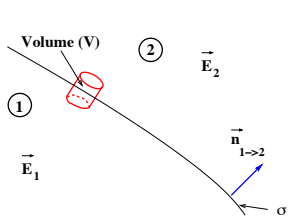


FIGURE 1.10 – Volume de contrôle qui amène la discontinuité de la composante normale de  $\vec{E}$ .

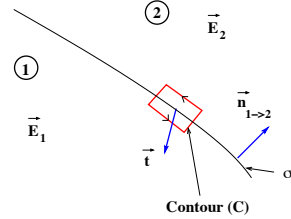


FIGURE 1.11 – Surface de contrôle qui amène la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ .

### Composante tangentielle de $\vec{E}$

Le théorème de Stokes (A.20) appliqué à l'équation de Maxwell-Faraday entraîne que :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{t} dS \quad (1.40)$$

En notant  $\Delta \ell$  la grande longueur du contour fermé ( $C$ ) de la figure 1.11, on peut écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = (\vec{t} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Delta \ell \quad (1.41)$$

où  $\vec{t}$  représente un vecteur unitaire tangent à la surface et orthogonal au contour ( $C$ ). En appelant ( $S$ ) une surface ouverte délimitée par ( $C$ ), on a :

$$\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{t} dS \approx 0 \quad (1.42)$$

car  $\partial \vec{B} / \partial t$  a une valeur finie sur la surface et  $S$  tend vers zéro lorsqu'on fait tendre l'épaisseur du contour vers zéro. Finalement, (1.40) peut s'écrire :

$$(\vec{t} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

dont on déduit que :

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad (1.43)$$

qui montre que la composante tangentielle de  $\vec{E}$  est continue au passage de la surface chargée ( $\Sigma$ ).

On peut regrouper (1.39) et (1.43) sous la forme :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (1.44)$$

### Composante normale de $\vec{B}$

On considère une nappe de courant ( $\Sigma$ ) de forme quelconque, de densité surfacique de courant  $\vec{K}$ , séparant deux milieux (1) et (2) de densités volumiques de courant respectives  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  (figures 1.12 et 1.13). Les champs magnétiques  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  sont des fonctions de classe  $C^1$  mais ne sont pas définis sur la nappe de courant ( $\Sigma$ ).

En utilisant le même raisonnement que celui appliqué au paragraphe précédent pour la composante normale de  $\vec{E}$ , on peut montrer que la composante normale de  $\vec{B}$  est continue :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (1.45)$$

### Composante tangentielle de $\vec{B}$

Le théorème de Stokes (A.20) appliqué à l'équation de Maxwell-Ampère entraîne que :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \left[ \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{t} dS \quad (1.46)$$

Le même raisonnement que précédemment permet d'annuler à la limite le terme en  $\partial \vec{E} / \partial t$  dans l'intégrale de droite. Le terme de gauche de cette même intégrale s'écrit  $\mu_0 \vec{K} \cdot \vec{t} \Delta \ell$ .

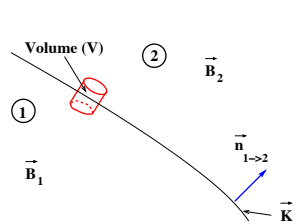


FIGURE 1.12 – Volume de contrôle qui amène la continuité de la composante normale de  $\vec{B}$ .

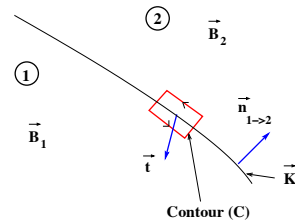


FIGURE 1.13 – Surface de contrôle qui amène la discontinuité de la composante tangentielle de  $\vec{B}$ .

Le terme de gauche de (1.46) s'écrit à la limite des faibles épaisseurs :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = (\vec{t} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \Delta \ell \quad (1.47)$$

Finalement, (1.46) peut s'écrire :

$$(\vec{t} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K} \cdot \vec{t}$$

dont on déduit que :

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K} \quad (1.48)$$

qui montre que la composante tangentielle de  $\vec{E}$  est discontinue au passage de la nappe de courant.

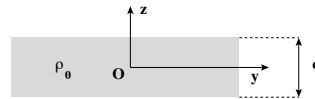
Avec les mêmes arguments que pour le champ  $\vec{E}$ , la discontinuité donnée par (1.48) est en fait due à l'approximation faite en négligeant l'épaisseur de la nappe de courant.

On peut regrouper (1.45) et (1.48) sous la forme :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (1.49)$$

### Exercice 1.2 : Potentiel et champ d'une plaque uniformément chargée

Calculer le potentiel  $\Phi$  et le champ  $\vec{E}$  en tout point de l'espace lorsque la source est une plaque uniformément chargée en volume de densité  $\rho_0$ . Que se passe-t-il lorsque l'épaisseur  $e$  de la plaque tend vers zéro ?



# Chapitre 2

## Electrostatique

### Sommaire

2.1	Electrostatique . . . . .	36
2.2	Aspects énergétiques liés à l'électrostatique . . . . .	43
2.3	Conducteurs en électrostatique . . . . .	51
2.4	Dipôle électrostatique . . . . .	51
2.5	Le problème du "zéro" des potentiels . . . . .	62

### Introduction

Pour les phénomènes ne dépendant pas du temps, la conservation de la charge totale (1.3) implique que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , mais n'interdit pas  $\vec{J} = Cste \neq \vec{0}$ . L'*électrostatique* (ou *électrostatique du vide*) correspond à l'étude des charges immobiles ( $\vec{J} = \vec{0}$ ) dans le vide. Le cas où  $\vec{J} \neq \vec{0}$  correspond à l'*électrocinétique*.

### 2.1 Electrostatique

On appelle *électrostatique* l'étude du champ électrique produit par des charges immobiles. On supposera donc que la densité volumique de charge  $\rho$  est indépendante du temps. D'après (1.3), ceci n'implique pas que la densité volumique de courant  $\vec{J}$  soit nulle. On fera cependant dans ce chapitre l'hypothèse supplémentaire que  $\vec{J} = \vec{0}$ . Le cas où  $\vec{J} \neq \vec{0}$  sera traité au § 2.3. Les observables physiques traitées dans ce chapitre sont donc indépendantes du temps.

**Remarque :** Le domaine de validité de l'électrostatique s'étend jusqu'à l'infini pour les grandes dimensions. Dans le domaine microscopique, cette théorie cesse de s'appliquer dès qu'il faut prendre en compte les effets quantiques. On aborde alors l'électrodynamique quantique (QED).

#### 2.1.1 Loi de Coulomb

La force d'interaction créée par une charge  $q_1$  (fixe) et s'exerçant sur une charge  $q_2$  (fixe) est donnée par la *loi de Coulomb* :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1 \rightarrow 2}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad (2.1)$$

où  $r_{1 \rightarrow 2}$  est la distance entre les deux charges et  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  un vecteur unitaire orienté de la charge (1) vers la charge (2). La constante  $\epsilon_0$  est la *permittivité diélectrique du vide* et vaut  $8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m dans le système international<sup>1</sup>. Cette loi expérimentale est à la base de tout l'électrostatique.

#### 2.1.2 Principe de superposition

Pour une distribution de charges discrètes, le *principe de superposition* stipule que la force  $\vec{F}_i$  s'exerçant sur une charge  $i$  peut s'écrire comme la somme des forces  $\vec{F}_{j \rightarrow i}$  que chacune des charges  $j$  (autres que la charge  $i$ ) exerce sur la charge  $i$  :

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Ceci permet de ramener l'étude des interactions électrostatiques au cas de deux charges ponctuelles et revient à dire que les équations de l'électrostatique doivent être linéaires.

#### 2.1.3 Champ électrique

Le *champ électrique*  $\vec{E}_1$  créé par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$  est par définition :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1 \quad \text{soit} \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad (2.2)$$

où  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  est la force de Coulomb. Cette définition n'est donc valable que pour des charges  $q_1$  et  $q_2$  fixes (puisque la loi de Coulomb ne s'applique que pour des charges fixes).

1. On pourra retenir que  $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \times 10^9$  SI.

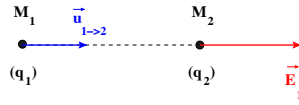


FIGURE 2.1 – Champ électrique  $\vec{E}_1$  exercé par une charge  $q_1 > 0$ . La force qui s'exerce sur la charge  $q_2$  est orientée selon  $\vec{E}_1$  si  $q_2 > 0$ .

Dans le cas d'une distribution de charges discrètes, le champ électrique s'exprimera selon :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (2.3)$$

Dans le cas d'une distribution continue de charges, on considère le volume mésoscopique  $d^3P$  qui entoure le point  $P$  et qui contient la charge totale  $\delta q$ . On attribue par définition à ce volume la *densité volumique de charge*  $\rho(P)$  telle que :

$$\delta q = \rho(P) d^3P$$

En considérant (2.3) comme une somme de Riemann<sup>2</sup>, on obtient finalement l'expression du champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\mathcal{D})} \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d^3P \quad (2.4)$$

où  $\rho(P)$  est la densité volumique de charge (exprimée en C/m<sup>3</sup>) au point  $P$  et où l'intégrale est effectuée sur la distribution volumique de charge  $(\mathcal{D})$  décrite par le point courant  $P$ .

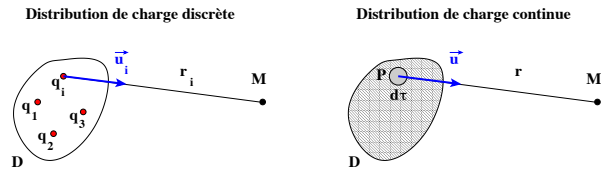


FIGURE 2.2 – Distribution de charge discrète (gauche) ou continue (droite).

La table 2.1 donne quelques ordres de grandeur de champs électriques.

2. A toute fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[a, b]$ , on associe la *somme de Riemann* :

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [1, n] \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

où  $(x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b)$  est une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . Si la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ , alors les sommes de Riemann sont d'autant plus proches de l'intégrale que l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision est proche de zéro. On utilise allègrement ce résultat en physique pour faire un *passage à l'intégrale* ou *passage à la limite continue*, sans toujours avoir en tête les hypothèses sous-jacentes ...

Dans un laser de puissance	$1\text{-}2 \cdot 10^{10} \text{ V/m}$
Lors d'un claquage dans l'air	$10^6 \text{ V/m}$
Dans la basse atmosphère	$10^2 \text{ V/m}$
A l'intérieur d'un conducteur en cuivre à l'équilibre	$10^{-2} \text{ V/m}$

TABLE 2.1 – Quelques valeurs typiques de champs électriques

### 2.1.4 Circulation du champ d'une charge ponctuelle - Potentiel électrique

On considère une charge ponctuelle  $q$  située à l'origine du repère  $Oxyz$ . Le champ  $\vec{E}$  que cette charge crée en un point  $M(x, y, z)$  est donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r} \quad (2.5)$$

La circulation élémentaire  $d\mathcal{C}$  de  $\vec{E}$  correspondant à un déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$  est donc :

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{OM}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

car  $\vec{u} \cdot d\vec{OM}$  n'est autre que la projection de  $d\vec{OM}$  sur  $\vec{u}$ , c'est à dire  $dr$  (voir figure 2.3)! On peut donc finalement introduire une fonction  $\Phi$  telle que :

$$d\mathcal{C} = -d\Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{Cste} \quad (2.6)$$

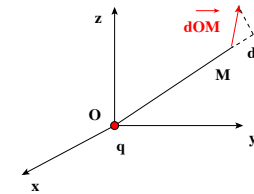


FIGURE 2.3 – La circulation du champ  $\vec{E}$  d'une charge ponctuelle fait apparaître une fonction scalaire  $\Phi$  (voir texte).

La relation (2.6) montre que la circulation élémentaire  $d\mathcal{C}$  du champ électrostatique d'une charge ponctuelle est une différentielle totale (puisque  $\oint d\mathcal{C} \equiv 0$ ). Or un champ possédant cette propriété est un champ de gradient (voir par exemple [9, page 27]). La fonction  $\Phi$ , appelée *potentiel scalaire* et définie à une constante additive près, vérifie donc :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) \quad (2.7)$$

ou encore de manière équivalente par :

$$\Phi(A) - \Phi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.8)$$

D'après (2.6), le potentiel électrique de la charge ponctuelle a pour expression :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + Cste \quad (2.9)$$

La relation (2.8) montre que la circulation du champ électrostatique entre deux points ne dépend que de la valeur du potentiel en ces deux points. En particulier, sa circulation le long d'un contour fermé ( $\mathcal{C}$ ) est nulle :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (2.10)$$

En fixant la constante arbitraire par la convention  $\Phi(\infty) = 0$ , le potentiel d'un système de charges s'écrit :

$$\begin{cases} \Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} & \text{pour une distribution de charges discrètes} \\ \Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\mathcal{D})} \frac{\rho(P)}{PM} d^3P & \text{pour une distribution continue de charges} \end{cases} \quad (2.11)$$

où l'intégrale est effectuée sur la distribution volumique de charge ( $\mathcal{D}$ ) décrite par le point courant  $P$ .

D'après (A.15), on déduit immédiatement de (2.7) que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (2.12)$$

**Remarque 1 :** Les expressions du potentiel données par (2.11) supposent que pour chaque charge  $q_i$ , la constante dans l'expression du potentiel est nulle. Ceci n'est possible pour l'ensemble des charges que si celles-ci sont réparties dans un volume fini de l'espace. Ces expressions ne sont donc correctes que s'il n'y a pas de charges à l'infini. S'il y a des charges à l'infini, les expressions (2.11) ne sont plus correctes. Cela ne veut pas dire pour autant que le potentiel électrostatique n'est pas défini. Il faut alors le calculer en utilisant la circulation du champ électrique entre deux points  $A$  et  $B$  donnée par (2.8).

**Remarque 2 :** Dans le cas d'une répartition surfacique de charges caractérisée localement par la densité surfacique  $\sigma = dq/dS$  en chaque point d'une surface ( $\Sigma$ ), on aura :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{r} \quad (2.13)$$

De même, on aura pour une distribution linéique de charges caractérisée localement par la densité linéique  $\lambda = dQ/d\ell$  en chaque point d'une courbe ( $\Gamma$ ) :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda d\ell}{r} \quad (2.14)$$

## 2.1.5 Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Les *surfaces équipotentielles* sont par définition les surfaces pour lesquelles  $\Phi = cste$ . On en déduit d'après (2.8) que le champ  $\vec{E}$  est normal aux équipotentielles en tout point de l'espace.

Les *lignes de champ*<sup>3</sup> sont par définition les courbes tangentes en chaque point au champ  $\vec{E}$ . Elles vérifient donc, en notant  $k$  un scalaire arbitraire :

$$d\vec{OM} = k \vec{E} \quad \text{ou encore} \quad \vec{E} \times d\vec{OM} = \vec{0}$$

Les lignes de champ sont donc normales aux surfaces équipotentielles. Les équations différentielles qui décrivent les lignes de champ sont :

$$\begin{cases} \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z} & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} = r \sin(\theta) \frac{d\phi}{E_\phi} & \text{en coordonnées sphériques} \end{cases} \quad (2.15)$$

Les lignes de champ sont orientées dans le sens de  $\vec{E}$ , c'est à dire dans le sens des potentiels décroissants. Ce sont des courbes ouvertes qui ne peuvent être fermées car le potentiel ne cesse de décroître tout au long de la ligne de champ.

Les *tubes de champ* sont par définition les surfaces fermées constituées par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé (figure 2.4).

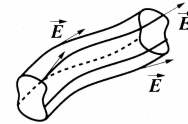


FIGURE 2.4 – Tube de champ

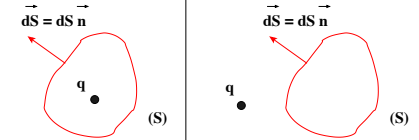


FIGURE 2.5 – Le théorème de Gauss relie la charge interne à un volume à l'intégrale du champ électrique sur la surface qui délimite le volume.

## 2.1.6 Relations avec les charges

### Théorème de Gauss

On considère une surface fermée ( $S$ ) telle que celle de la figure 2.5. On note comme d'habitude  $\vec{n}$  le vecteur unitaire orthogonal à la surface en un point et dirigé vers l'extérieur. D'après la

3. La notion de ligne de champ a été introduite par **Faraday** pour représenter les *lignes de force* qui, dans la description de l'époque, entouraient chaque corps soumis à des forces. Le concept de lignes de force a disparu depuis, mais les lignes de champ sont restées !



définition du champ électrique (2.2), la composante normale de  $\vec{E}$  en tout point de la surface peut s'écrire :

$$\vec{E} \cdot \vec{n} dS = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS$$

or  $\cos(\theta) dS = r^2 d\Omega$  où  $d\Omega$  est l'angle solide sous lequel on voit  $dS$  depuis la charge  $q$ . En intégrant la composante normale de  $\vec{E}$  sur toute la surface fermée ( $S$ ), on voit que :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \text{ se trouve à l'intérieur de } S \\ 0 & \text{si } q \text{ se trouve à l'extérieur de } S \end{cases} \quad (2.16)$$

Cette relation constitue le *théorème de Gauss pour une charge ponctuelle*. Pour une densité de charge  $\rho(\vec{r})$  continue, le théorème de Gauss devient :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho(\vec{r}) dV \quad (2.17)$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky (A.19), cette dernière relation permet d'écrire :

$$\iiint_{(V)} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

Comme le volume d'intégration ( $V$ ) est arbitraire, on en déduit la *forme locale du théorème de Gauss* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.18)$$

**Remarque :** Le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrostatique dans des problèmes où la symétrie des sources est suffisante pour que le calcul du flux  $\phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  sortant d'une surface convenablement choisie soit simple. La surface ( $S$ ) à travers laquelle on calcule le flux  $\phi$  est appelée *surface de Gauss*.

## Equation de Poisson

En combinant (A.16) et (2.7), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla}(\Phi) \right) = -\Delta\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Le potentiel scalaire vérifie donc l'*équation de Poisson* :

$$\Delta\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.19)$$

qui donne l'*équation de Laplace* en l'absence de charge :

$$\Delta\Phi = 0 \quad (2.20)$$

Le § A.2.3 traitait de l'unicité de la solution de cette équation. Les surfaces fermées considérées y sont les surfaces extérieures des conducteurs en équilibre électrostatique. La solution de (2.19) et (2.20) est donc unique si :

1. le **potentiel des conducteurs (donc de leur surface) est connu** (*condition de Dirichlet*)
  2. le **champ est connu sur la surface des conducteurs** (*condition de Neumann*)
  3. Le potentiel est connu sur certains conducteurs, alors que le champ l'est sur les autres
- Ce résultat est parfois connu sous le nom de *théorème d'unicité*.

## 2.1.7 Méthodes de calcul du champ $\vec{E}$

Il existe trois méthodes pour calculer le champ électrique, connaissant la distribution de charges :

1. **calcul direct par l'intégrale vectorielle :**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho \vec{u}}{r^2} dV$$

2. **calcul indirect à l'aide du potentiel scalaire :**

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho}{r} dV \quad \text{suivi de} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

3. **calcul direct à l'aide du théorème de Gauss :**

Dans ce cas, la distribution de charges doit présenter un degré suffisant de symétrie pour que le calcul du flux à travers la surface de Gauss soit facile et/ou faisable.

### Exercice 2.1 : Quelques calculs classiques en électrostatique

Calculer le champ et le potentiel créés par :

1. Un fil infini de charge linéique uniforme  $\lambda$
2. Un plan infini de charge surfacique uniforme  $\sigma$
3. Une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée en surface (charge totale  $Q$ )
4. Une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée en volume (charge volumique  $\rho$ )

### Exercice 2.2 : Etude naïve d'une distribution sphérique

Une distribution à symétrie sphérique autour d'un point  $O$  crée le potentiel électrostatique  $\Phi$  tel que :

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-\lambda r)}{r} \quad \text{avec} \quad \lambda > 0 \quad \text{et} \quad q > 0$$

1. Calculer la densité de charge  $\rho(r)$  et préciser son signe
2. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer la charge  $Q(r)$  située à l'intérieur d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Comment peut-on comparer ce résultat avec celui de la question précédente ?

---

### Exercice 2.3 : Distribution de Dirac et charges ponctuelles

On considère un point  $M$  de coordonnées  $r$   $\vec{u}_r$  et une distribution de charge ( $\mathcal{D}$ ) constituée d'une unique charge  $q$  située à l'origine  $O$  du référentiel.

1. Quel est le gradient de  $U = 1/r$ ? Montrer que  $\Delta U$  est nul en tout point différent de l'origine
  2. Calculer  $\iiint \Delta U dV$  où l'intégration est étendue à tout l'espace
  3. En déduire que  $U$  s'exprime simplement à l'aide de la fonction de Dirac à trois dimensions  $\delta(\vec{r})$
  4. Montrer que ( $\mathcal{D}$ ) peut être assimilée à une densité volumique de charges  $\rho$
  5. En déduire l'expression de  $\Delta \Phi$  où  $\Phi$  est le potentiel électrostatique créé par la charge  $q$
- 

## 2.2 Aspects énergétiques liés à l'électrostatique

### 2.2.1 Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique

On considère un point matériel plongé dans un champ de force  $\vec{f}$ . On montre en mécanique que si  $\vec{f}$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}(E_p(\vec{r})) \quad (2.21)$$

alors le travail de la force  $\vec{f}$  lors d'un déplacement du point matériel ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiales et finales. La fonction  $E_p(\vec{r})$  est appelée *énergie potentielle du point matériel dans le champ de force*.

Dans le cas d'un ensemble de  $n$  points matériels, on montre que si la force  $\vec{f}_k$  traduisant l'interaction des autres points matériel avec le point  $k$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(U_I(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{k-1}, \vec{r}_{k+1}, \dots, \vec{r}_n)) \quad (2.22)$$

alors le travail des forces internes et externes est donné par :

$$dW_{int} = -dU_I \quad \text{et} \quad dW_{ext} = d(E_c + U_I) \quad (2.23)$$

La fonction  $U_I$  est alors appelée *énergie potentielle d'interaction des  $n$  points matériels*.

### 2.2.2 Cas de charges ponctuelles dans le vide

On supposera dans tout ce paragraphe que le champ électrostatique  $\vec{E}$  est constant.

---

### Cas d'une seule charge

Si une charge  $q$  se trouve en un point  $M$  où le potentiel électrostatique est  $\Phi(M)$  et le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$ , elle subit une force  $\vec{F}$  telle que :

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

ou encore :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(U_I) \quad \text{avec} \quad U_I = q \Phi$$

Par définition, on dira que  $U_I$  est l'*énergie potentielle de la charge  $q$  dans le champ  $\vec{E}$* , ou de manière équivalente l'*énergie d'interaction de la charge ponctuelle  $q$  avec la distribution ( $\mathcal{D}$ ) qui engendre  $\vec{E}$  et  $\Phi$* . Cette définition de  $U_I$  en donne l'origine : elle est nulle lorsque la charge se trouve à une distance infinie de la distribution ( $\mathcal{D}$ ) qui engendre le potentiel  $\Phi$ , c'est à dire lorsque  $\Phi$  est nul.

Le travail élémentaire  $dw$  de la force électrostatique lors d'un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  de la charge  $q$  vaut :

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}(q\Phi) \cdot d\vec{r} = -q d\Phi = -dU_I$$

Si l'on suppose qu'un opérateur va fournir le travail externe  $dW$  pour effectuer ce déplacement, le théorème de l'énergie cinétique<sup>4</sup> appliqué à la charge s'écrit :

$$dW + dw = dE_c \quad \text{soit} \quad dW = d(E_c + U_I) \quad (2.24)$$

On se place ici dans le cas de charges fixes. Cela signifie que si les charges sont amenées à se déplacer, on se limitera à des situations où dans les états initiaux et finaux les particules ont une vitesse nulle. Dans notre cas particulier d'une charge plongée dans le potentiel  $\Phi$ , la relation (2.24) s'écrit :

$$dW = dU_I \quad (2.25)$$

car la charge est immobile dans les états initiaux et finaux.

### Cas de deux charges

On considère cette fois que le potentiel est créé par une charge ponctuelle  $q_1$ . Une deuxième charge  $q_2$  est soumise au potentiel  $\Phi_1$  tel que :

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

---

4. Le théorème de l'énergie cinétique énonce que :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique  $E_c$  d'un point matériel soumis à une force  $\vec{f}$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  est égale au travail élémentaire de cette force pendant  $dt$ , soit :

$$dE_c = \delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

---

L'énergie potentielle d'interaction des deux charges s'écrit :

$$U_I = q_2 \Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (2.26)$$

et est ainsi entièrement déterminée (elle est nulle lorsque les deux charges sont infiniment éloignées l'une de l'autre). Cette énergie potentielle représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener depuis l'infini la charge  $q_2$  à la distance  $r_{12}$  de la charge  $q_1$ , la charge  $q_2$  étant immobile dans ses positions initiales et finales.

Comme on peut également écrire  $U_I = q_1 \Phi_2$  (obtenu en rapprochant cette fois  $q_1$  dans le champ créé par  $q_2$ ), on peut écrire :

$$U_I = \frac{1}{2} (q_1 \Phi_2 + q_2 \Phi_1) \quad (2.27)$$

**Remarque :** D'après (2.26), l'énergie d'interaction  $U_I$  est positive si les charges sont de même signe et négative si elles sont de signe contraire.

### Cas de $n$ charges

En reprenant les notations du § 2.2.1, la force  $\vec{F}_k$  représentant l'action des  $n-1$  charges sur la charge  $k$  (par l'intermédiaire de la loi de Coulomb) s'écrit :

$$\vec{F}_k = -q_k \vec{E}(\vec{r}_k) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(\vec{r}_k) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(\Phi) \quad \text{et} \quad \Phi = \sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{ik}}$$

soit :

$$\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} \left[ \sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \right] \quad (2.28)$$

Il est facile de vérifier que la fonction  $U_I$  donnée par :

$$U_I = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.29)$$

rempli les conditions requises pour pouvoir être appelée *énergie potentielle d'interaction des  $n$  charges ponctuelles*, c'est à dire que  $\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(U_I)$ .

**Remarque :** L'énergie d'interaction  $U_I$  peut encore se mettre sous la forme :

$$U_I = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i \quad (2.30)$$

où  $\Phi_i$  est le potentiel créé au point où se trouve la charge  $q_i$  par l'ensemble des autres  $n-1$  charges.

---

### Travail d'un opérateur construisant le système

On suppose que l'opérateur construit la distribution précédente en apportant depuis l'infini toutes les charges une à une à leur position finale. Les charges étant supposées immobiles aux instants initiaux et finaux, on déduit de (2.23) donnant  $dW_{ext}$  que le travail  $W$  de l'opérateur est  $W = U_I$  (on utilise également le fait que  $U_I = 0$  lorsque les charges sont infiniment éloignées les unes des autres).

En décomposant le travail nécessaire pour construire cette distribution, on obtient :

$$4\pi\epsilon_0 \times W = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + q_3 \left[ \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right] + \dots \\ + q_i \left[ \sum_{j < i} \frac{q_j}{r_{ij}} \right] + \dots + q_n \left[ \sum_{j < n} \frac{q_j}{r_{nj}} \right]$$

soit :

$$W = \sum_i \sum_{j < i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.31)$$

L'énergie d'interaction  $U_I$  est parfois appelée *énergie de constitution*.

### 2.2.3 Cas d'une distribution continue de charges dans le vide

On considère une distribution continue de charges dans le vide, occupant un volume ( $D$ ), caractérisée en chaque point de ce volume par une densité volumique  $\rho(\vec{r})$  créant le potentiel électrostatique  $\Phi(\vec{r})$ .

Le passage d'une distribution de charges ponctuelles à une distribution continue s'effectue sans problème pour le calcul du champ électrique  $\vec{E}$  et du potentiel électrostatique  $\Phi$ . Ce n'est pas le cas pour l'énergie d'interaction  $U_I$ . En effet, on peut considérer la distribution continue ( $D$ ) comme la moyenne géométrique d'une distribution de charges ponctuelles mais l'expression de l'énergie d'interaction de  $n$  charges ponctuelles n'étant pas linéaire, il n'est pas évident que l'énergie de la distribution continue soit donnée par la moyenne de (2.29). En particulier, si on remplace les  $q_i$  par  $q'_i = \alpha q_i$ , l'énergie d'interaction devient  $U'_I = \alpha^2 U_I$ .

**Remarque :** L'habitude fait qu'on parle plutôt d'*énergie d'interaction*  $U_I$  pour une distribution de charges discrètes et d'*énergie électrostatique*  $U_e$  dans le cas d'une distribution continue. Fondamentalement, rien ne nous oblige à parler ici de  $U_e$  en lieu et place de  $U_I$ , mais on fera comme tout le monde ...

### Energie électrostatique ou énergie de constitution

D'après le § 2.2.1, l'existence de  $U_e$  est assurée par le fait que la force  $d\vec{F}$  qui s'exerce sur chaque élément de volume  $dV$  portant la charge  $dq = \rho dV$  s'écrit :

$$d\vec{F} = dq \vec{E} = -\vec{\nabla} [dq \Phi(\vec{r})]$$

On introduit la distribution  $\rho'(\vec{r}) = \lambda \rho(\vec{r})$  où  $\lambda$  est un paramètre (indépendant de  $\vec{r}$ ) variant de 0 à 1. On retrouve la distribution originelle si  $\lambda = 1$ , alors que l'espace est vide de charge

si  $\lambda = 0$ . A la nouvelle distribution de charge  $\rho'(\vec{r})$  correspond en chaque point de l'espace le potentiel électrostatique  $\Phi'(\vec{r}) = \lambda \Phi(\vec{r})$ . On va construire la répartition  $\rho(\vec{r})$  en faisant varier  $\lambda$  de 0 à 1.

Lorsque  $\lambda$  varie de  $d\lambda$ , on doit apporter de l'infini dans le volume  $dV$  la charge supplémentaire :

$$d^2q = d\lambda \rho(\vec{r}) dV$$

En supposant une transformation réversible, le travail  $\delta^2W$  de l'opérateur qui amène cette charge de l'infini est :

$$\delta^2W = \lambda \Phi(\vec{r}) d^2q = \lambda d\lambda \Phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \quad (2.32)$$

En sommant les contributions de tous les éléments de volume  $dV$  de la distribution  $(\mathcal{D})$ , on obtient :

$$\delta W = \lambda d\lambda \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV$$

Pour obtenir le travail total de l'opérateur pour construire la distribution  $\rho(\vec{r})$ , on intègre en faisant varier  $\lambda$  de 0 à 1 :

$$W = \left( \int_0^1 \lambda d\lambda \right) \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV$$

D'après (2.25), l'énergie électrostatique de la distribution de charges est donc :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(P) \Phi(P) dV \quad (2.33)$$

Cette énergie est parfois appelée *énergie de constitution* et suppose  $\Phi(\infty) \equiv 0$  car (2.32) le supposait implicitement. L'énergie de constitution  $U_e$  est l'énergie nécessaire pour créer le système en l'absence de tout champ extérieur de manière quasi-statique. Cette énergie correspond au travail qu'un opérateur doit fournir pour amener les charges une à une de l'infini (où on suppose le champ nul) jusqu'à leur position finale.

**Remarque :** On verra plus tard (§ 2.2.4) que l'énergie électrostatique de la distribution de charges  $U_e$  est toujours positive.

### Energie d'interaction de deux distributions

On considère deux distributions de charges, de densités respectives  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , créant les potentiels  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . La densité totale est  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  et le potentiel total est  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  (d'après la linéarité des équations de l'électrostatique). A la distribution  $\rho$  et au potentiel  $\Phi$  on associe d'après le paragraphe précédent l'énergie électrostatique  $U_e$  :

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 + \rho_2) (\Phi_1 + \Phi_2) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho_1 \Phi_1 dV + \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho_2 \Phi_2 dV + \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 \Phi_2 + \rho_2 \Phi_1) dV \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont les énergies électrostatiques de chacune des distributions prises séparément. Le troisième terme représente l'*énergie potentielle d'interaction*  $U_e(1, 2)$  des deux distributions qu'on peut écrire :

$$U_e(1, 2) = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 \Phi_2 + \rho_2 \Phi_1) dV = \iiint_{(D)} \rho_1 \Phi_2 dV = \iiint_{(D)} \rho_2 \Phi_1 dV$$

On veut vérifier par le calcul que ces trois expressions sont bien égales. On en déduit donc que l'énergie potentielle de la distribution de charges  $\rho_1$  dans le champ créé par  $\rho_2$  est égale à l'énergie potentielle de la distribution de charges  $\rho_2$  dans le champ créé par  $\rho_1$ . Cette relation est connue sous le nom d'*identité de Gauss*. L'énergie d'interaction peut être de signe quelconque.

### Remarque : Energie électrostatique et charges ponctuelles

Les expressions de l'énergie électrostatique ci-dessus ont été établies pour des distributions de charges continues. En les appliquant à des charges ponctuelles, on tombe sur une des limites de l'électrostatique. En effet, l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon  $R$  portant la charge  $Q$  uniformément répartie en surface s'écrit :

$$U_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Pour considérer l'énergie d'une charge ponctuelle, on peut être tenté de faire tendre  $R$  vers zéro dans l'expression ci-dessus. Or cette expression diverge ! Pour évaluer la distance en dessous de laquelle cette expression n'a plus de sens, on procède généralement ainsi : on attribue à l'électron un rayon fini qui délimite le volume à la surface duquel est uniformément répartie la charge élémentaire  $e$ . L'ordre de grandeur en dessous duquel la théorie électrostatique n'a plus de sens est donné par la distance  $r_0$  à laquelle l'énergie électrostatique est égale à l'énergie de masse  $m_e c^2$ . On en déduit que le *rayon classique de l'électron*  $r_0$  doit valoir :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2,818 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Mais avant d'atteindre cette distance, il existe une autre limite, quantique, puisque la longueur d'onde Compton de l'électron vaut  $\lambda_e = h/m_e c \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ , ce qui veut dire que la notion de rayon classique de l'électron n'a aucun sens physique !

### 2.2.4 Aspect local de l'énergie électrostatique

Les équations locales de l'électrostatique permettent de donner une expression de l'énergie électrostatique différente de (2.33). On considère pour cela un volume  $(V)$  englobant la distribution de charges  $(D)$  dont tous les points sont supposés à distance finie (figure 2.6). On exclu donc le cas de charges à l'infini. On note  $(S)$  la surface englobant le volume  $(V)$ .

En utilisant l'équation locale  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  (valable en tout point du volume  $(V)$  englobant la distribution  $(D)$ ), on pourra écrire

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) \Phi dV \quad (2.34)$$

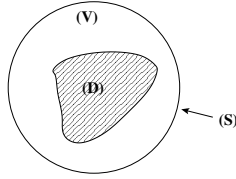


FIGURE 2.6 – Le calcul de la forme locale de l'énergie électrostatique repose sur un volume ( $V$ ) englobant la distribution ( $D$ ) dans son ensemble (voir texte).

où l'intégrale est prise sur le volume ( $V$ ). En utilisant (A.8) qui s'écrit ici :

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) \quad \text{soit} \quad \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) + E^2$$

on obtient une nouvelle expression de l'énergie électrostatique :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 E^2 dV$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky (A.19), on obtient :

$$U_e = \frac{1}{2} \oint_{(S)} \epsilon_0 \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 E^2 dV \quad (2.35)$$

Cette relation est valable quelle que soit la surface ( $S$ ), tant que le volume ( $V$ ) qu'elle délimite englobe la distribution  $\mathcal{D}$ . En prenant comme surface ( $S$ ) une sphère de très grand rayon  $R$ , le potentiel  $\Phi$  décroît sur la sphère au moins comme  $1/R$  et le champ électrique au moins comme  $1/R^2$ . Pour un angle solide  $d\Omega$  donné,  $dS$  tend vers l'infini comme  $R^2 d\Omega$ . L'élément d'intégration dans le 1<sup>er</sup> terme de (2.35) varie donc avec  $R$  comme :

$$\frac{1}{R} \times \frac{1}{R^2} \times R^2 d\Omega = \frac{1}{R} \times d\Omega$$

qui tend vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$ . On en déduit donc que l'énergie électrostatique se met sous la forme :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{Espace} \epsilon_0 E^2 dV \quad (2.36)$$

où l'intégrale est désormais prise sur l'espace entier. Tout se passe comme si l'énergie électrostatique était répartie dans l'espace entier avec la densité volumique :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (2.37)$$

**Remarque :** La relation (2.36) montre que  $U_e$  est toujours positive. Ceci démontre le résultat annoncé au § 2.2.3.

## 2.2.5 Energie électrostatique d'un condensateur

### Définition de l'énergie électrostatique

On considère un condensateur dont les armatures rigides, portées aux potentiels  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , portent les charges  $Q_1$  et  $Q_2 = -Q_1$ . La capacité  $C$  du condensateur vérifie  $Q_1 = C(\Phi_1 - \Phi_2)$ . On ne peut pas appliquer brutalement (2.30) pour obtenir l'énergie potentielle de ces charges, car cette relation a été obtenue pour des charges dans le vide alors que dans un condensateur, les charges se situent dans les armatures, c'est à dire "dans de la matière".

On procède donc différemment. En apportant<sup>5</sup> depuis l'infini deux petites charges  $dQ_1$  et  $dQ_2 = -dQ_1$ , le travail de l'opérateur extérieur sera :

$$dW = \Phi_1 dQ_1 + \Phi_2 dQ_2 = \frac{Q_1}{C} dQ_1 = d\left(\frac{Q_1^2}{2C}\right)$$

Le travail  $dW$  de l'opérateur extérieur est donc la différentielle d'une fonction qui ne dépend que du condensateur. Par définition, on posera que cette fonction est l'*énergie électrostatique*  $U_e$  du condensateur :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (2.38)$$

où  $Q$  est la charge du condensateur et  $V_0 = \Delta\Phi$  la différence de potentiel entre ses deux armatures.

**Remarque 1 :** On peut remarquer que cette expression a été obtenue sans aucune hypothèse sur la géométrie du condensateur.

**Remarque 2 :** On a calculé l'énergie électrostatique du condensateur en calculant le travail qu'un opérateur doit fournir au cours d'une transformation réversible. Il est important de souligner que le travail extérieur n'est égal à la variation de l'énergie électrostatique que parce que la transformation est supposée réversible, au sens de la thermodynamique (succession d'états d'équilibre infiniment proches). Si la transformation n'est pas réversible, l'énergie emmagasinée sera inférieure au travail fourni par l'opérateur. On considère par exemple un condensateur relié à un générateur de force électromotrice  $e$  constante. L'énergie du condensateur est  $Ce^2/2$  à l'équilibre. Le générateur ayant fourni la charge  $Q = Ce$ , l'énergie électrocinétique qu'il a délivré est  $Ce^2$ . La différence ( $Ce^2/2$ ) a été dissipée par effet Joule dans le circuit.

### Cas d'un condensateur déformable

On considère désormais un condensateur dont une seule armature reste fixe. La distance  $x$  entre les deux armatures n'est donc pas constante. Néanmoins, à  $x$  donné, l'énergie électrostatique du condensateur relié à une source de tension constante est :

$$U_e = \frac{1}{2} C(x) V_0^2$$

Si la capacité varie de  $dC$  suite à une variation  $dx$  de  $x$ , l'énergie électrostatique varie de :

$$dU_e = \frac{1}{2} V_0^2 dC \quad (2.39)$$

<sup>5</sup>. Il est équivalent de faire ceci avec des générateurs ou avec un transport physique des charges.

Il faut noter que cette énergie électrostatique est différente du travail fourni par l'opérateur. En effet, le déplacement de l'armature implique un travail mécanique. Le bilan énergétique s'écrit alors :

$$dU_e = dW_{Elec} + dW_{Meca} \quad (2.40)$$

On suppose une transformation suffisamment lente pour que le condensateur passe par une succession d'états d'équilibre infiniment proches, c'est à dire que la transformation est réversible au sens de la thermodynamique. Dans ce cas, la tension  $V_0$  du condensateur reste constante. Sa charge  $Q$  varie de :

$$dQ = V_0 dC$$

Le travail fourni par la source de tension est donc :

$$dW_{Elec} = V_0 dQ = V_0^2 dC \quad (2.41)$$

La différence entre (2.39) et (2.41) correspond au travail mécanique que l'opérateur doit fournir pour déplacer l'armature de  $dx$ .

## 2.3 Conducteurs en électrostatique

## 2.4 Dipôle électrostatique

Un dipôle électrostatique (figure 2.7) est constitué de deux charges opposées séparées par une distance  $d$  très faible devant la distance d'observation. Leur importance vient du fait que sous l'action d'un champ appliqué, certains corps, globalement neutres, peuvent se comporter comme des ensembles de dipôles. Par exemple, les molécules peuvent souvent être considérées comme des dipôles électrostatiques, d'où l'importance de cette notion en chimie. De plus, le dipôle apparaît quasiment automatiquement lorsque l'on cherche à calculer le champ et le potentiel d'une distribution de charges à grande distance.

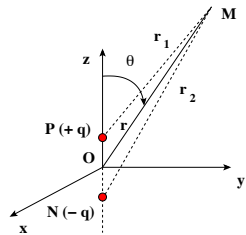


FIGURE 2.7 – Un dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges opposées, séparées par une distance très faible devant la distance d'observation.

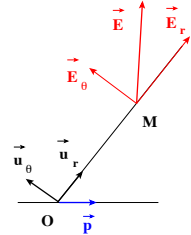


FIGURE 2.8 – Par raison de symétrie, le champ du dipôle est contenu dans le plan contenant l'axe du dipôle et le point  $M$  d'observation.

En utilisant les notations de la figure 2.7, on introduit le *moment dipolaire électrique*  $\vec{p} = q \vec{NP}$ , ou *moment du dipôle* dont l'unité est le Coulomb.mètre (Cm). On supposera dans toute la suite que  $q > 0$ . On appellera *dipôle rigide* un dipôle dont le moment dipolaire  $\vec{p}$  n'est pas modifié par un champ externe appliqué. Ce type de dipôle modélise bien les molécules polaires (HCl par exemple).

**Remarque :** On peut également dire qu'un dipôle électrostatique est la limite d'un ensemble de deux charges opposées  $+q$  et  $-q$ , placées en deux points  $N$  et  $P$ , lorsque  $NP \rightarrow 0$  tandis que  $p = q NP$  reste constant.

### 2.4.1 Potentiel et champ du dipôle électrostatique

#### Potentiel créé par un dipôle

Le potentiel est simplement la somme des potentiels créés par les deux charges. Un calcul classique fournit :

$$\Phi(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.42)$$

Un dipôle est uniquement caractérisé par son moment dipolaire électrique  $\vec{p}$ . Son potentiel décroît comme  $1/r^2$ , les termes en  $1/r$  s'annulant à cause de la neutralité électrique de l'ensemble.

#### Champ créé par un dipôle

Le champ créé par le dipôle est simplement la somme des champs créés par les deux charges aux extrémités du dipôle. Il est néanmoins évident que par raison de symétrie, le champ est contenu dans le plan  $NPM$ . Un calcul (tout aussi classique que celui du potentiel) fournit :

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{r^3} \quad (2.43)$$

En coordonnées sphériques, on obtient :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \quad E_\phi = 0 \quad (2.44)$$

**Remarque 1 :** On remarque également que les termes en  $1/r^2$  s'annulent à cause de la neutralité globale de l'ensemble et que le terme dominant est en  $1/r^3$ . Le champ décroît donc plus rapidement que pour une charge ponctuelle.

**Remarque 2 :** Du point de vue de l'homogénéité des formules, la présence de  $1/r^3$  dans (2.43) ou (2.44) n'est pas surprenante car le moment dipolaire  $p$  "contient" une longueur.

#### Equipotentiellles et lignes de champ du dipôle électrostatique

D'après (2.42), les équipotentiellles sont définies par :

$$r^2 = A \cos(\theta) \quad (2.45)$$

où  $A$  est une constante. L'équation différentielle des lignes de champ s'obtient quant à elle en écrivant que  $\vec{E} \times d\vec{r} = \vec{0}$ , c'est à dire que localement,  $\vec{E}$  est parallèle aux lignes de champ. On obtient :

$$r = B \times \sin^2(\theta) \quad (2.46)$$

où  $B$  est une constante positive. La figure 2.9 représente les lignes de champ et les équipotentielles. En chaque point différent de l'origine, ne passent qu'une surface équipotentielle et une ligne de champ.

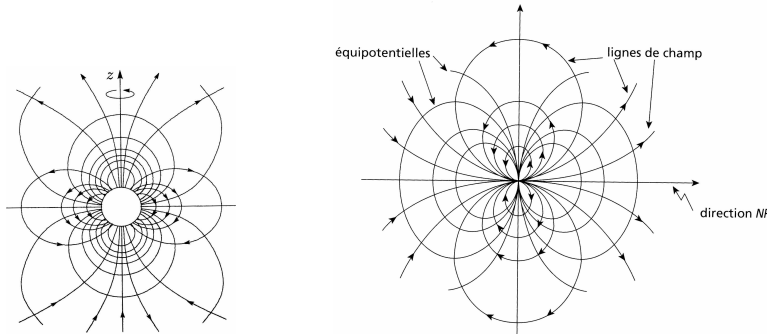


FIGURE 2.9 – Lignes de champ et équipotentielles du dipôle électrostatique. La zone centrale de la figure de gauche a été exclue car cette région ne respecte plus la condition  $d \ll r$  (figures extraites de [10, page 72] à gauche et [9, page 92] à droite).

**Remarque :** Les lignes de champ semblent revenir sur elles-mêmes au voisinage de l'origine  $O$ , ce qui peut sembler absurde car le champ étant dirigé vers les potentiels décroissants, une ligne de champ ne peut être fermée. L'incohérence est levée si l'on se souvient que près de l'origine, l'approximation  $r \gg d$  n'est plus valable. La zone centrale de la partie droite de la figure 2.9 est donc contestable.

## 2.4.2 Action mécanique d'un champ $\vec{E}$ sur un dipôle rigide

### Cas d'un champ uniforme

On considère le dipôle rigide précédent plongé dans un champ uniforme  $\vec{E}_a$ . On prend les notations de la figure 2.10.

Pour déterminer l'action mécanique du champ sur le dipôle (résultante  $\vec{F}$  et moment  $\vec{\Gamma}$ ), on ne doit tenir compte ni de l'action de  $N$  sur  $P$  ni de l'action de  $P$  sur  $N$ . On a :

$$\vec{F} = q \vec{E}_a - q \vec{E}_a = \vec{0} \quad (2.47)$$

et

$$\vec{\Gamma} = \vec{OP} \times q \vec{E}_a - \vec{ON} \times q \vec{E}_a = q \vec{NP} \times \vec{E}_a = \vec{p} \times \vec{E}_a \quad (2.48)$$

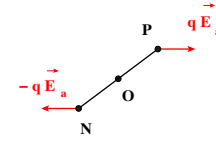


FIGURE 2.10 – Action d'un champ uniforme  $\vec{E}_a$  sur un dipôle rigide.

L'action mécanique d'un champ uniforme sur un dipôle rigide se réduit donc au couple  $\vec{\Gamma}$ . En prenant les notations de la figure 2.11, on obtient :

$$\vec{\Gamma} = p E_a \sin(\theta) \vec{k}$$

où  $\vec{k}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant  $\vec{p}$  et  $\vec{E}_a$ . L'équilibre est atteint pour  $\vec{\Gamma} = \vec{0}$  si le dipôle n'est pas soumis à d'autres contraintes. Il existe donc deux positions d'équilibre :  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  pour lesquelles  $\vec{p}$  et  $\vec{E}_a$  sont respectivement parallèles et anti-parallèles (figure 2.11). **Un champ uniforme tend donc à orienter un dipôle suivant les lignes de champ.**

**Remarque :** A l'échelle d'un dipôle, tout champ est quasiment uniforme. Au 1<sup>er</sup> ordre, l'effet principal d'un champ électrique quelconque sur un dipôle sera d'orienter ce dipôle dans le sens du champ.

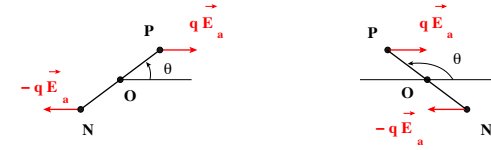


FIGURE 2.11 – Positions d'équilibre du dipôle électrostatique dans un champ constant  $\vec{E}_a$ .

### Cas général

Dans le cas général d'un champ électrostatique quelconque, on peut montrer (voir par exemple [9, page 94]) que la résultante  $\vec{F}$  s'écrit cette fois :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_a \quad (2.49)$$

où  $(\vec{p} \cdot \vec{\nabla})$  est un opérateur qui a pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Le calcul du moment montre qu'on a toujours au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \times \vec{E}_a \quad (2.50)$$

**Pour un champ inhomogène, il existe donc une force en plus du couple qui tend à orienter le dipôle suivant une ligne de champ.**

**Remarque 1 :** Dans le cas particulier où le dipôle est parallèle au champ, la force tend à attirer le dipôle vers les champs intenses (si  $\vec{p}$  et  $\vec{E}_a$  sont orientés dans le même sens) ou vers les champs faibles (si  $\vec{p}$  et  $\vec{E}_a$  sont orientés dans des sens opposés). Il faut bien remarquer que ceci n'est qu'un cas particulier et que dans le cas général, la force subie par le dipôle n'est pas parallèle au champ  $\vec{E}_a$ .

**Remarque 2 :** L'expression (2.49) est valable dans tous les cas, que le dipôle soit rigide ou non.

**Remarque 3 :** On peut exprimer l'opérateur  $(\vec{p} \cdot \vec{\nabla})$  dans tous les systèmes de coordonnées.

**Remarque 4 :** En conclusion, on peut remarquer qu'un dipôle est entièrement caractérisé par son moment dipolaire  $p$ , aussi bien du point de vue du champ qu'il crée que des actions mécaniques auxquelles il est soumis.

### 2.4.3 Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ

#### Expression de l'énergie

On considère l'interaction entre un dipôle rigide et un champ externe appliqué  $\vec{E}_a$ . D'après ce qui a été dit précédemment, l'énergie d'interaction du dipôle avec le champ extérieur est égale au travail nécessaire pour amener le dipôle depuis l'infini jusqu'à sa position finale. Les forces que les deux charges du dipôle exercent entre elles ne travaillent pas car la distance entre les deux charges reste fixe. On ne doit donc considérer que le travail des deux forces que le champ appliqué exerce sur les deux charges en  $N$  et  $P$ .

D'après l'étude faite précédemment pour des charges ponctuelles dans un champ externe (2.31), le travail de l'opérateur apportant les charges depuis l'infini est :

$$W = q\Phi_a(P) - q\Phi_a(N)$$

et est par définition l'énergie potentielle d'interaction  $U_I$  du dipôle rigide dans le champ externe appliqué  $\vec{E}_a$ . Comme les point  $N$  et  $P$  sont voisins par hypothèse, on aura :

$$\Phi_a(P) - \Phi_a(N) \approx (\vec{\nabla}(\Phi_a)) \cdot \vec{NP} = -\vec{E}_a \cdot \vec{NP}$$

d'où finalement en reprenant les notations de la figure 2.11 :

$$U_I = -\vec{p} \cdot \vec{E}_a = -p E_a \cos \theta \quad (2.51)$$

#### Application de l'interaction ion-dipôle : solvation ou hydratation d'un ion

Dans un solvant constitué de molécules polaires, les ions d'un électrolyte en solution ont une tendance naturelle à s'entourer de ces molécules à cause de l'interaction charge-dipôle. Ce phénomène est appelé *hydratation* de l'ion si le solvant est de l'eau ou *solvation* dans le cas général.

Par exemple, le sulfate de cuivre  $\text{CuSO}_4$  en solution dans l'eau est constitué d'ions  $\text{Cu}^{2+}$  qui attirent chacun quatre molécules d'eau et d'ions  $\text{SO}_4^{2-}$  qui en attirent chacun une (figure 2.12).

De même, l'ion  $\text{Zn}^{2+}$  est solvato par quatre molécules d'ammoniac  $\text{NH}_3$  (figure 2.12).

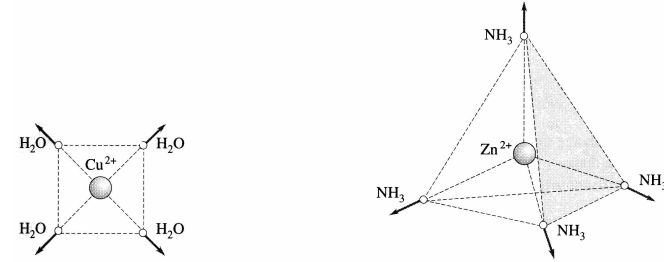


FIGURE 2.12 – L'ion  $\text{Cu}^{2+}$  est hydraté en solution aqueuse par quatre molécules d'eau et l'ion  $\text{Zn}^{2+}$  est solvato par quatre molécules d'ammoniac (figure extraite de [10, page 81]).

Physiquement, la solvation joue également un rôle primordial dans l'explication de la solubilité de  $\text{NaCl}$  dans l'eau<sup>6</sup>.

#### Application : action mécanique d'un champ $\vec{E}$ sur un dipôle rigide

On considère un solide rigide subissant un ensemble de forces de résultante  $\vec{R}$  et de moment résultant  $\vec{\Gamma}_O$  calculé en un point  $O$ . On montre en mécanique que le travail  $dW$  de ces forces, associé à un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  et à une rotation élémentaire  $d\theta$  autour d'un axe  $(\Delta)$  de vecteur unitaire  $\vec{u}$  se met sous la forme :

$$dW = \vec{R} \cdot d\vec{r} + \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta$$

et qu'un vecteur  $\vec{A}$  quelconque est modifié dans la rotation élémentaire de :

$$d\vec{A} = \vec{u} \times \vec{A} d\theta$$

Dans le cas présent, on considère un dipôle effectuant un déplacement élémentaire. D'après (2.25), le travail des actions mécaniques qui s'exercent sur le dipôle s'écrit :

$$dW = -dU_I \quad \text{soit encore} \quad d(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \vec{R} \cdot d\vec{r} + \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta \quad (2.52)$$

6. Qualitativement, on peut dire que l'interaction ion-dipôle joue principalement sur les ions des faces du cristal, qui subissent l'influence des molécules d'eau (dont le moment dipolaire est très élevé). La variation d'enthalpie lors de la dissolution du cristal s'écrit :

$$\Delta H = \Delta H_{ion} + \Delta H_{solv}$$

Dans le cas particulier de  $\text{NaCl}$ , on a même  $\Delta H_{solv} \gg \Delta H_{ion}$ .



Pour en déduire la résultante  $\vec{R}$  et le moment  $\vec{\Gamma}_O$  calculé par rapport au centre du dipôle, on procède en deux étapes. On imagine tout d'abord une translation du dipôle. On aura donc  $d\theta = 0$  tandis que  $\vec{p}$  reste constant. On déduit de (2.52) que :

$$\vec{R} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \text{Cste}$$

On pourrait montrer que cette relation est équivalente à (2.49).

On imagine ensuite dans une 2<sup>e</sup> étape une rotation élémentaire  $d\theta$   $\vec{u}$  du dipôle, le point moyen  $O$  restant fixe. D'après ce qu'on a vu précédemment, le moment dipolaire  $\vec{p}$  tourne de :

$$d\vec{p} = \vec{u} \times \vec{p} d\theta$$

Le bilan (2.52) s'écrit alors :

$$\vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta = (\vec{p} \times \vec{E}) \cdot \vec{u} d\theta$$

On en déduit que :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \times \vec{E}$$

On a donc retrouvé les expressions (2.49) et (2.50) traduisant l'action d'un champ sur un dipôle rigide.

#### 2.4.4 Action mécanique d'une charge sur un dipôle

On considère un dipôle de moment  $\vec{p}$  situé en un point  $M$  et une charge  $q$  située en  $O$  (figure 2.13). On peut montrer (voir par exemple [9, page 95]) que la force  $\vec{F}$  s'exerçant sur le dipôle s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qp}{r^3} [-2 \cos(\phi) \vec{u}_r + \sin(\phi) \vec{u}_\theta]$$

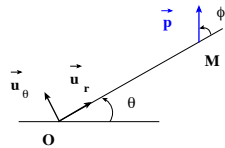


FIGURE 2.13 – Action d'une charge sur un dipôle électrostatique.

#### 2.4.5 Approximation dipolaire

##### Potentiel créé par une distribution de charge ponctuelles

On considère le potentiel créé par une distribution de charges ponctuelles. D'après (2.11) :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

En utilisant les notations de la figure 2.7, on peut écrire :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{d}{2r} \cos(\theta) + \dots + \left( \frac{d}{2r} \right)^n P_n(\cos(\theta)) + \dots \right]$$

où  $P_n(x)$  est le *polynôme de Legendre de 1<sup>ère</sup> espèce*<sup>7</sup> de degré  $n$ . Un calcul classique montre alors que  $\Phi(r)$  se met sous la forme d'une somme de plusieurs contributions :

$$\Phi(r) = \Phi_0(r) + \Phi_1(r) + \Phi_2(r) + \dots$$

où :

$$\begin{cases} \Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_i q_i & \text{est la contribution unipolaire} \\ \Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \vec{u}_r & \text{est la contribution dipolaire} \\ \Phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_i q_i \left[ \frac{3}{2} (\vec{r}_i \cdot \vec{u}_r)^2 - \frac{r_i^2}{2} \right] & \text{est la contribution quadrupolaire} \end{cases} \quad (2.53)$$

**Remarque :** Ce développement multipolaire est analogue à celui fait en mécanique dans l'étude du champ de gravitation : les charges sont remplacées par les masses  $m_i$  et  $1/(4\pi\epsilon_0)$  par l'opposé de la constante de gravitation  $G$ .

##### Distribution unipolaire

La distribution sera dite *unipolaire* lorsque la charge totale de la distribution  $Q = \sum_i q_i$  est non nulle. En plaçant l'origine au barycentre électrique des points  $P_i$  (affectés de leurs charges  $q_i$ ), on montre qu'au 3<sup>e</sup> ordre près, la distribution se comporte comme une charge ponctuelle puisqu'alors :

$$\Phi(r) \approx \Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

**Remarque :** En mécanique, le barycentre mécanique n'est jamais nul car  $\sum_i m_i \neq 0$ . Le terme unipolaire est alors toujours prépondérant.

7. Le polynôme de Legendre de 1<sup>ère</sup> espèce de degré  $n$  est donné par la série :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\text{Int}(n/2)} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

où le symbole Int signifie la partie entière. Les premiers polynômes de Legendre sont :

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} \quad P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$$

## Distribution dipolaire

Dans le cas où la charge totale est nulle (le barycentre des charges n'est alors plus défini !), le 1<sup>er</sup> terme du développement du potentiel permet d'écrire :

$$\Phi(r) \approx \Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \vec{u}_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{P}} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

où  $\vec{\mathcal{P}}$  (qui ne dépend pas du choix de l'origine) est le *moment dipolaire* de la distribution<sup>8</sup>. Si  $\vec{\mathcal{P}}$  est non nul, la distribution est dite *dipolaire*.

**Remarque :** La force exercée par une distribution dipolaire sur une charge éloignée n'est en général pas radiale.

## Distribution quadrupolaire

Si la charge totale  $Q$  et le moment dipolaire  $\mathcal{P}$  sont nuls ( $\mathcal{P}$  peut par exemple être nul dans le cas d'une symétrie sphérique), le terme suivant dans le développement limité est le terme *quadrupolaire* caractérisé dans une base orthonormée par neuf termes de la forme :

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i q_i x_{i\alpha} x_{i\beta}$$

où  $x_{i\alpha}$  et  $x_{i\beta}$  sont les composantes de  $\vec{r}_i$  suivant les vecteurs de base  $\vec{u}_\alpha$  et  $\vec{u}_\beta$ .

**Remarque :** Le terme unipolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 0 (la charge totale  $Q$ ), le terme dipolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 1 (le moment dipolaire  $\mathcal{P}$ ), le terme quadrupolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 2 (dont les composantes sont les  $D_{\alpha\beta}$ ), ...

### 2.4.6 Illustration : le moment dipolaire des molécules

On distingue deux types de molécules : les molécules, dites *polaires*, qui possèdent un moment dipolaire électrique permanent (par exemple HCl, H<sub>2</sub>O, NH<sub>3</sub>) et les molécules *apolaires* qui ne possèdent pas de moment dipolaire électrique permanent (par exemple H<sub>2</sub> ou les molécules des gaz rares comme Ar, Kr et Xe).

<sup>8</sup>. Pour des distributions de charge volumique, surfacique ou linéique, le moment dipolaire s'écrit avec des notations évidentes :

$$\mathcal{P} \equiv \iiint_{(V)} \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r} dV \quad \mathcal{P} \equiv \iint_{(S)} \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{r} dS \quad \mathcal{P} \equiv \int_{(C)} \lambda(\vec{r}) \cdot \vec{r} d\ell$$

### 2.4.7 Illustration : force à grande distance dans un gaz

On regroupe sous le terme de *forces de van der Waals* les forces intermoléculaires attractives qui s'exercent sur les molécules d'un gaz<sup>9</sup>. La loi régissant ces forces n'est évidemment pas la loi de Coulomb puisque la charge électrique totale d'une molécule est nulle. Ces forces sont de trois types différents et correspondent toutes à des interactions électrostatiques entre dipôles. Ces dipôles peuvent être *permanents* ou *induits*.

#### Effet d'orientation - Force de Keesom

Cet effet résulte de l'interaction entre dipôles permanents des molécules polaires telles que HCl, NH<sub>3</sub> et H<sub>2</sub>O. L'énergie d'interaction entre deux dipôles est fonction de leur orientation relative. A cause de l'agitation thermique, toutes les orientations sont possibles, mais elles ne sont pas équiprobables. **Keesom** a calculé en 1920 l'énergie moyenne d'interaction  $E_K$  à la température  $T$  dont on déduit la *force de Keesom*  $f_K$  :

$$f_K = C_K \frac{p^4}{T} \frac{1}{r^7} \quad (2.54)$$

où  $p$  est le moment dipolaire permanent des molécules,  $r$  la distance entre les molécules et  $C_K$  une constante.

#### Effet d'induction - Force de Debye

Cet effet, calculé par **Debye** en 1920, résulte de l'interaction entre des dipôles permanents et des dipôles induits. On considère une molécule  $A$  de moment dipolaire permanent  $\vec{p}_A$  et une molécule  $B$  placée dans le champ électrique  $\vec{E}$  créé par la molécule  $A$ . La molécule  $B$  acquiert le moment induit  $\vec{p}_B = \alpha \vec{E}$ , où  $\alpha$  représente la polarisabilité de la molécule  $B$ . L'interaction entre  $\vec{p}_A$  et  $\vec{p}_B$  se traduit par une énergie  $E_D$  dont on dérive la *force de Debye*  $f_D$  :

$$f_D = C_D \alpha p_A^2 \frac{1}{r^7} \quad (2.55)$$

où  $C_D$  est une constante caractéristique de l'interaction.

#### Effet de dispersion - Force de London

Cet effet (découvert par **London** en 1930) concerne toutes les molécules, polaires ou non. A un instant donné, toute molécule  $A$  peut avoir une répartition dissymétrique de son nuage électronique. Chaque molécule possède donc un *moment dipolaire instantané* qui va provoquer par influence la polarisation d'une molécule voisine  $A'$ . Le moment dipolaire de chaque

<sup>9</sup>. On peut représenter en première approximation le comportement d'un gaz réel par une équation empirique, l'équation de *van der Waals* :

$$\left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

On montre en thermodynamique que le terme en  $a/V^2$  traduit l'interaction moyenne à grande distance entre toutes les molécules.

molécule est proportionnel à la polarisabilité de la molécule, de sorte que l'énergie d'interaction  $E_L$  est proportionnelle au produit des polarisabilités<sup>10</sup>. On en déduit la *force de London* :

$$f_L = C_L \frac{\alpha \alpha'}{r^7} \quad (2.56)$$

où  $C_L$  est une constante caractéristique de l'interaction.

### Effet global - Force de van der Waals

L'effet global de ces trois forces (dont la dépendance avec la distance intermoléculaire est identique) est la force de van der Waals dont on peut dire qu'elle dérive d'un potentiel en  $-1/r^6$ . Ceci explique pourquoi la force de van der Waals est à très courte portée et qu'elle est négligeable dans les milieux dilués. L'énergie de van der Waals est simplement la somme des énergies de Keesom, Debye et London. La table 2.2 donne quelques valeurs numériques typiques d'énergies d'interaction. On y observe, et ceci peut être généralisé, que l'effet de la force de Debye est toujours négligeable et que l'effet de la force de London est prépondérant dans le cas des molécules non polaires ou faiblement polaires.

	$E_K$	$E_D$	$E_L$	$E_{vdw}$
Ar	0	0	0,486	0,486
CO	$\approx 0$	$\approx 0$	0,5	0,5
HCl	0,189	0,057	0,962	1,208
NH <sub>3</sub>	0,761	0,089	0,842	1,691
H <sub>2</sub> O	2,079	0,110	0,514	2,703

TABLE 2.2 – Énergies de Keesom, Debye, London et van der Waals pour quelques molécules en J/mol (valeurs extraites de G. Dévoré, *Cours de Chimie*, Vuibert, Paris, 1984)

### Exercice 2.4 : Forces de Keesom

Calculer l'énergie d'interaction  $\mathcal{E}_K$  entre deux dipôles rigides de moments dipolaires  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , modélisant l'interaction à grande distance entre deux molécules polaires de même type. En déduire l'expression de la force de Keesom.

10. On peut noter qu'intrinsèquement, cette notion d'influence instantanée est incorrecte. Il faudrait faire apparaître une influence retardée, prenant en compte la distance entre les molécules. Voir à ce sujet pour (beaucoup) plus de détails le problème de physique de l'Agrégation de 2005.

## 2.5 Le problème du "zéro" des potentiels

On assimile la Terre à une sphère conductrice de rayon  $R = 6400$  km. On intercale une source de tension  $e$  entre la Terre et un conducteur sphérique de rayon  $a$  situé à une hauteur  $h \gg a$ . On suppose la neutralité du système, c'est à dire que la Terre porte la charge  $-Q$  et la sphère la charge  $+Q$  (figure 2.14).

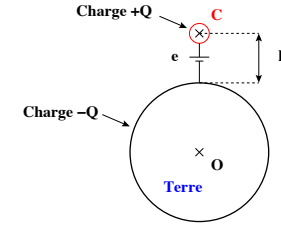


FIGURE 2.14 – Modélisation d'un conducteur au voisinage de la Terre.

En prenant la convention  $\Phi(\infty) = 0$ , le potentiel de la Terre, calculé au centre  $O$ , vaut, en supposant que la charge  $+Q$  est située en  $C$  :

$$\Phi(O) \approx \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+h)} \approx \frac{-Qh}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Le potentiel de la sphère (calculé en  $C$ ) vaut quant à lui :

$$\Phi(C) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Terre} \frac{dq}{r} \quad \text{avec} \quad \iiint_{Terre} dq = -Q$$

Or on peut écrire :

$$\left| \iiint_{Terre} \frac{dq}{r} \right| < \frac{1}{h} \left| \iiint_{Terre} dq \right| = \frac{Q}{h}$$

D'où simplement :

$$\Phi(C) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

En écrivant que  $e = \Phi(C) - \Phi(O)$ , on obtient :

$$\Phi(O) \approx \frac{-e}{1 + \frac{a}{R^2}} \quad \text{et} \quad \Phi(C) \approx \frac{e}{1 + \frac{a}{R^2}} \quad (2.57)$$

Il est donc équivalent de prendre le potentiel nul sur la Terre ou à l'infini tant que  $ah \ll R^2$ .

# Chapitre 3

## Milieux diélectriques

### Sommaire

3.1	Sources microscopiques de la polarisation en régime statique .	64
3.2	Etude macroscopique de la polarisation en régime statique . .	68
3.3	Susceptibilité électrique . . . . .	76
3.4	Polarisation en régime variable . . . . .	78
3.5	Aspects énergétiques des milieux diélectriques . . . . .	87

### Introduction

On n'a considéré jusqu'à présent que le vide et des conducteurs. On va maintenant considérer des isolants, dans lesquels un courant macroscopique de charges ne peut exister. On verra que le champ électrique dans de tels milieux n'est pas obligatoirement nul. L'expérience fondatrice de l'étude des diélectriques est attribuée à Faraday qui a observé que l'introduction d'un isolant entre les armatures d'un condensateur modifiait sa capacité (figure ci-dessous), c'est à dire que pour maintenir le potentiel  $\Phi$  constant, il faut fournir une charge  $Q' > Q$ .



FIGURE 3.1 – La capacité d'un condensateur est modifiée par l'introduction d'un isolant entre ses armatures.

Dans un milieu à structure moléculaire, chaque molécule peut être assimilée, à grande distance, à un doublet de charges. D'un point de vue macroscopique, on caractérisera le milieu par sa *polarisation*  $\vec{P}$ , ou *densité volumique de moments dipolaires* :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \quad (3.1)$$

### 3.1 Sources microscopiques de la polarisation en régime statique

La polarisation peut être *spontanée* ou *induite*. La polarisation spontanée est très rare et sera abordée aux § 3.3.4 et 3.3.5. On étudie dans ce paragraphe les mécanismes de polarisation induits par un champ électrique extérieur, en commençant par décrire le moment dipolaire des atomes et des molécules.

#### 3.1.1 Moments dipolaires des atomes et des molécules

On ne présentera ici les choses que de manière qualitative car à l'échelle atomique, l'étude de la structure de la matière doit se faire à l'aide de la mécanique quantique.

##### Atomes

Un atome isolé dans l'état fondamental a un moment dipolaire nul. Un champ électrique va distordre la distribution électronique dont le barycentre ne coïncide plus avec celui des charges positives : on conçoit donc intuitivement que l'application d'un champ électrique induise un moment dipolaire électrique sur un atome.

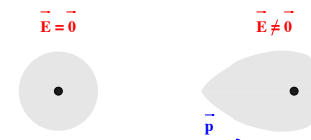


FIGURE 3.2 – Un champ  $\vec{E}$  va provoquer l'apparition d'un moment dipolaire électrique  $\vec{p}$  sur un atome.

En notant  $\vec{E}_\ell$  le champ électrique effectivement subit par l'atome, le moment dipolaire  $\vec{p}$  va s'écrire :

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_e \vec{E}_\ell \quad (3.2)$$

où  $\alpha_e$  est la *polarisabilité électronique*. Noter que les moments dipolaires s'expriment en SI en Cm et usuellement en Debye<sup>1</sup>.

##### Le modèle de Mossotti

On assimile un atome à un noyau de charge  $Ze$  et à une distribution de charge électronique uniforme de rayon  $a$ . L'application d'un champ extérieur déplace le nuage électronique en

1. Par définition, 1 D correspond à  $10^{-18}$  unité CGS de moment dipolaire (ie  $10^{-30}$  C·m), soit finalement :

$$1 \text{ D} = 0,33356 \cdot 10^{-29} \text{ Cm} \approx \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ Cm}$$

bloc (figure 3.3). On peut montrer que dans le cadre de ce modèle, la polarisabilité  $\alpha$  s'écrit :

$$\alpha = 4\pi a^3 \quad (3.3)$$

Cette relation montre que la polarisabilité a les dimensions d'un volume<sup>2</sup>.

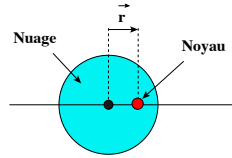


FIGURE 3.3 – Dans le modèle de Mossotti de la polarisation électronique, on considère que le noyau s'écarte de  $\vec{r}$  du centre du nuage électronique sous l'action d'un champ électrique.

### Molécules polaires

Les molécules ne possédant pas de moment dipolaire électrique permanent sont dites *apolaires*. C'est le cas des molécules possédant un centre de symétrie, c'est à dire des molécules diatomiques ( $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ), des molécules à symétrie tétragonale ( $CH_4$ ,  $CCl_4$ ), ou même benzénique ( $C_6H_6$ ), ou des molécules linéaires ( $CO_2$ ).

Un champ électrique  $\vec{E}_\ell$  au niveau de la molécule provoque une polarisation qui, moyennée à l'échelle macroscopique, donne un moment dipolaire moyen par molécule de la forme :

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell \quad (3.4)$$

### Molécules polaires

Les molécules possédant un moment dipolaire électrique permanent sont dites *polaires*. C'est par exemple le cas des molécules diatomiques constituées de deux atomes différents (par exemple  $HCl$ ) ou des molécules qui ne sont pas linéaires ( $H_2O$ ).



FIGURE 3.4 – Moment dipolaire de molécules polaires ( $HCl$  et  $H_2O$ ).

Un champ électrique  $\vec{E}_\ell$  au niveau de la molécule provoque une polarisation supplémentaire  $\delta\vec{p}$  qui, moyennée à l'échelle macroscopique, donne un moment dipolaire supplémentaire moyen par molécule de la forme :

$$\delta\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell \quad (3.5)$$

<sup>2</sup>. Attention, les chimistes utilisent généralement une susceptibilité  $\alpha_{chimie}$  exprimée dans le système CGS. On a alors  $\alpha_{physique} = 4\pi \alpha_{chimie}$ .

### 3.1.2 Polarisation électronique

La *polarisation électronique* concerne tous les milieux et résulte du déplacement des nuages électroniques autour des atomes sous l'action d'un champ électrique extérieur.

Pour une molécule apolaire, on observe expérimentalement que le moment électrique induit  $\vec{p}$  est colinéaire et de même sens que le champ agissant sur la molécule  $\vec{E}_\ell$ . On définit la *polarisabilité*  $\alpha$  d'une molécule par :

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (3.6)$$

où  $\alpha$  est une grandeur scalaire positive caractéristique du milieu.

Sous l'action d'un champ électrique local  $\vec{E}_\ell$ , un milieu contenant  $n$  molécules par unité de volume de polarisabilité  $\alpha$  acquiera la polarisation  $\vec{P}$  telle que :

$$\vec{P} = n \vec{p} = n \alpha \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (3.7)$$

### 3.1.3 Polarisation ionique

Un cristal ionique ne possédant pas de polarisation spontanée verra sa structure modifiée sous l'action d'un champ électrique appliqué : les ions positifs et négatifs seront déplacés dans des directions opposées, faisant apparaître une polarisation  $\vec{P}$ .

Pour un cristal cubique tel que  $NaCl$ , on constate l'apparition d'une polarisation proportionnelle au champ local qui est donnée par :

$$\vec{P} = n \alpha \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (3.8)$$

où  $n$  représente la densité volumique des ions. L'analogie avec (3.7) fait que cette polarisation est appelée *polarisation ionique*.

On peut noter que le champ électrique a également pour effet de déplacer les nuages électroniques des ions, ce qui fait en plus apparaître une polarisation électronique<sup>3</sup>.

### 3.1.4 Polarisation dipolaire

La *polarisation dipolaire* (ou *polarisation d'orientation*) résulte de la tendance qu'ont les molécules polaires à s'orienter dans le sens d'un champ électrique appliqué. En effet, l'agitation thermique oriente les moments dans toutes les directions en l'absence de champ appliqué, ce qui conduit à une polarisation nulle. En présence d'un champ électrique, chaque molécule aura tendance à s'orienter dans le sens du champ (figure 3.5).

### Modèle de Langevin

On peut faire en physique statistique un calcul de la polarisation, en remarquant que le nombre  $dn$  de dipôles orientés dans un angle solide  $d\Omega$  doit être indépendant de  $\Omega$ . En

<sup>3</sup>. On regroupe parfois les polarisations électronique et ionique sous la même appellation de *polarisation par déformation*, puisqu'elles résultent d'une déformation locale due au champ électrique appliqué.

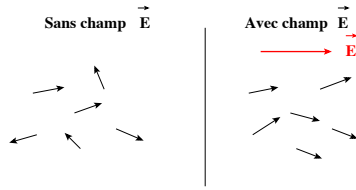


FIGURE 3.5 – La polarisation dipolaire résulte de l'orientation des molécules polaires dans un champ  $\vec{E}$ .

présence d'un champ  $\vec{E}_\ell$  appliqué,  $dn$  est régit par la distribution de Boltzmann :

$$dn = \text{Const} \times \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) d\Omega \quad (3.9)$$

où  $U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}_\ell$  est l'énergie d'interaction du dipôle rigide  $\vec{p}_0$  dans le champ. En notant  $x = p_0 E_\ell / k_B T$ , on montre que la polarisation se met sous la forme :

$$P = n p_0 \mathcal{L}(x) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)} - \frac{1}{x} = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (3.10)$$

La fonction  $\mathcal{L}(x)$  est la *fonction de Langevin* (figure 3.6).

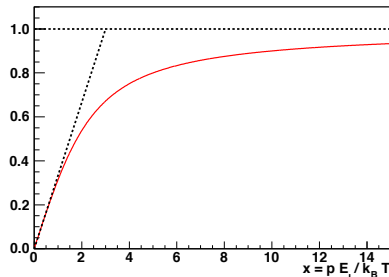


FIGURE 3.6 – La fonction de Langevin a pour asymptotes  $y = x/3$  aux basses valeurs de  $x$  et  $y = 1$  pour les valeurs élevées.

Au voisinage de la température ambiante, on aura toujours  $x \ll 1$ . En effet, à  $T = 300$  K et pour  $p = 10^{-29}$  Cm, le paramètre  $x$  n'atteint que  $2.5 \cdot 10^{-2}$  pour un champ de  $10^7$  V/m. Un développement limité permet alors d'écrire  $\mathcal{L}(x \ll 1) \approx x/3$  dont on déduit que la polarisation dipolaire est alors proportionnelle au champ appliqué. On obtient alors une polarisabilité  $\alpha_{or}$  dite *polarisabilité d'orientation* telle que :

$$\alpha_{or} \approx \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} \quad (3.11)$$

Au contraire, à très basse température et pour un champ très intense,  $x \gg 1$ . On a alors  $\mathcal{L}(x \gg 1) \approx 1$  : les dipôles sont alignés dans le sens du champ.

On retiendra que la polarisation dipolaire varie fortement avec la température, contrairement à la polarisation électronique qui ne dépend que de la nature des molécules et à la polarisation ionique qui ne dépend que de la structure du cristal.

## 3.2 Etude macroscopique de la polarisation en régime statique

Comme on l'a déjà vu (figure 3.1), Faraday a observé que la capacité augmentait lorsqu'on introduisait un diélectrique entre les armatures d'un condensateur. Comme  $Q = C \Phi$ , cela signifie que le champ  $\vec{E}$  doit diminuer et donc que des charges opposées aux charges des armatures doivent apparaître en regard, dans le diélectrique.

Qualitativement, un champ  $\vec{E}$  appliqué distord la distribution de charges du milieu et modifie donc ses moments multipolaires. A cause de la dépendance du champ avec la distance qui décroît avec l'ordre multipolaire (2.53), on considérera que le milieu est uniquement constitué de moments dipolaires. On n'abordera le cas des moments d'ordre supérieur qu'au § 3.2.9.

### 3.2.1 Approche intuitive des charges de polarisation

On considère tout d'abord une plaque diélectrique de polarisation uniforme normale à ses faces (figure 3.7). On peut remplacer par la pensée la plaque par un empilement de dipôles dans tout le volume. On voit sur ce modèle simpliste que la charge volumique correspondant aux charges des dipôles sera nulle partout, sauf sur les bords où on observera une accumulation locale de charges de même polarité. On appellera *charges de polarisation* les excédents locaux de charges engendrés par la polarisation.



FIGURE 3.7 – Une polarisation uniforme engendre en surface des charges de polarisation (à gauche), tandis qu'une polarisation dépendant de la position peut également engendrer des charges en volume (à droite).

Si on considère désormais une polarisation dont la valeur augmente d'une face à l'autre, on aura par exemple  $\partial P / \partial z > 0$ . On imagine alors que la charge négative du "bas" du dipôle ne compensera que partiellement la charge positive du "haut", et qu'il va apparaître un excédent de charges de polarisation dans le volume du diélectrique.

### 3.2.2 Densités de charges équivalentes

On considère un diélectrique initialement neutre de volume (V) et on appelle (S) la surface de séparation entre le diélectrique et le monde extérieur (figure 3.8).

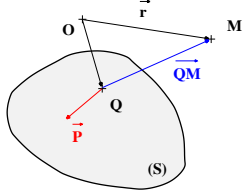


FIGURE 3.8 – Calcul du potentiel  $\Phi$  créé par un diélectrique à l'extérieur de celui-ci.

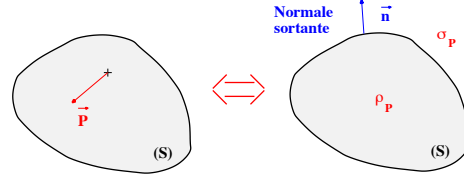


FIGURE 3.9 – Le potentiel créé par le diélectrique est équivalent au potentiel qui serait créé par la densité volumique  $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  et par la densité surfacique  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$ .

Le potentiel électrostatique créé par un dipôle  $\vec{p}$  placé à l'origine s'écrit en un point repéré par  $\vec{r}$  :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

On en déduit le potentiel  $\Phi(M)$  créé en  $M$  par le diélectrique :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \frac{\vec{P} \cdot \vec{QM}}{QM^3} dV \quad (3.12)$$

Comme  $\vec{QM}/QM^3 = \vec{\nabla}_Q(1/QM)$ , (A.8) permet d'écrire que (avec  $\phi \equiv 1/r$  et  $\vec{A} \equiv \vec{P}$ ) :

$$\vec{\nabla}_Q \cdot \left( \frac{\vec{P}}{QM} \right) = \frac{\vec{\nabla}_Q \cdot \vec{P}}{QM} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla}_Q \left( \frac{1}{QM} \right) = \frac{\vec{\nabla}_Q \cdot \vec{P}}{QM} + \vec{P} \cdot \frac{\vec{QM}}{QM^3}$$

A l'aide de cette relation (3.12) devient :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \left[ \vec{\nabla}_Q \cdot \left( \frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla}_Q \cdot \vec{P}}{QM} \right] dV \quad (3.13)$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky (A.19), on a finalement :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{QM} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \frac{-\vec{\nabla}_Q \cdot \vec{P}}{QM} dV \quad (3.14)$$

Le potentiel créé par la distribution volumique de dipôles à l'origine de la polarisation est équivalent au potentiel qui serait créé par une densité macroscopique de charges caractérisée par une densité surfacique  $\sigma_P$  et une densité volumique  $\rho_P$  et telles que :

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (3.15)$$

D'un point de vue macroscopique, la polarisation du diélectrique est équivalente pour le potentiel électrostatique  $\Phi$  (et donc pour le champ  $\vec{E}$ ) à une distribution macroscopique de charges de polarisation (figure 3.9).

### Charge totale portée par le diélectrique

La présence des charges liées ne modifie pas la charge totale. En effet, la charge de polarisation totale  $Q_P$  portée par le diélectrique est :

$$\begin{aligned} Q_P &= \iiint_{(V)} \rho_P d\tau + \iint_{(S)} \sigma_P dS = - \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{p} d\tau + \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS \\ &= - \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS + \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.2.3 Vecteur $\vec{D}$

#### Définition

Dans un corps diélectrique, (MG) s'écrit, en distinguant les charges libres des charges liées :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{libre}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (3.17)$$

On introduit naturellement le vecteur  $\vec{D}$  défini par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.18)$$

Cette définition permet de réécrire (MG) en fonction des seules charges libres :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \quad (3.19)$$

Sous sa forme intégrale, il est évident que cette relation donne le théorème de Gauss dans un milieu diélectrique :

$$\iint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \quad (3.20)$$

où  $Q_{\text{libre}}$  représente la charge libre totale présente dans le diélectrique.

### Cas particulier des milieux lhi

Dans le cas d'un milieu lhi, on écrira :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (3.21)$$

en appelant  $\epsilon_r = (1 + \chi)$  la permittivité relative du milieu (nombre réel sans dimension) et  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  la permittivité absolue.

Les relations de Maxwell-Gauss locale (3.19) et intégrale (3.20) deviennent pour un milieu lhi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\ell}}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{libre}}}{\epsilon} \quad (3.22)$$

### 3.2.4 Relations constitutives

Un milieu sera *linéaire* si les composantes de sa polarisation  $\vec{P}$  sont des fonctions linéaires des composantes du champ  $\vec{E}$ , c'est à dire si  $\vec{P}$  se met sous la forme :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E} \quad (3.23)$$

Dans cette relation,  $[\chi_e]$  est le *tenseur des susceptibilités diélectriques* dont on peut montrer qu'il existe une base sur laquelle il se met sous la forme :

$$[\chi_e] = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où les éléments diagonaux  $\chi_i$  sont les *susceptibilités diélectriques principales*.

Un milieu sera *homogène* si  $[\chi_e]$  est indépendant du point de l'espace considéré. Enfin, un milieu sera *isotrope* si aucune direction n'est privilégiée, ce qui entraîne que  $\vec{P}$  est dans la même direction que  $\vec{E}$  :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e (M, \vec{E}) \vec{E} \quad (3.25)$$

En combinant ce qui vient d'être dit, un milieu sera *linéaire, homogène et isotrope* (lhi) si les valeurs propres de  $[\chi_e]$  sont égales et indépendantes de l'espace et du champ. On aura alors :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (3.26)$$

où  $\chi_e$  est un nombre réel positif sans dimension, la *susceptibilité* ou *susceptibilité diélectrique*.

Pour un milieu lhi, on aura :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad \text{avec} \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (3.27)$$

où  $\epsilon$  et  $\epsilon_r$  sont respectivement les *permittivité absolue* et *permittivité relative* du diélectrique. La table 3.1 donne les permittivités relatives de quelques corps.

Gaz (20 °C, 1 atm)		Liquide (20 °C)		Solide	
Air	1,00059	Eau	≈ 80	Polyéthylène	2,3
Hélium	1,00006	Benzène	2,3	Verre	≈ 4 - 7
Argon	1,00052	Glycérol	≈ 43	Titanate de Baryum	≈ 1700

TABLE 3.1 – Permittivités diélectriques relatives statiques de divers matériaux

### 3.2.5 Milieu lhi plongé dans un champ constant

On sait que le champ électrostatique  $\vec{E}_0$  d'un système de conducteurs dans le vide vérifie les deux équations suivantes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \vec{0} \quad (MF) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \quad (MG) \quad (3.28)$$

où la densité  $\rho_{libre}$  est portée par les conducteurs. Par la pensée, on peut remplacer tout l'espace entre les conducteurs par un diélectrique lhi. Le champ  $\vec{E}$  vérifie alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (MF) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = \rho_{libre} \quad (MG)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\vec{\nabla} \times (\epsilon_r \vec{E}) = \vec{0} \quad (MF) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \quad (MG) \quad (3.29)$$

En comparant (3.28) et (3.29), on voit immédiatement que le champ  $\vec{E}$  dans le diélectrique vérifie :

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad (3.30)$$

qui montre que le champ dans le diélectrique est toujours plus faible que dans le vide (puisque  $\epsilon_r > 1$ ).

### 3.2.6 Exemple du condensateur à lame diélectrique - Notion de champ dépolarisant

On considère une plaque de diélectrique lhi plongée dans un champ électrique créé par les charges libres des armatures d'un condensateur (figure 3.10).

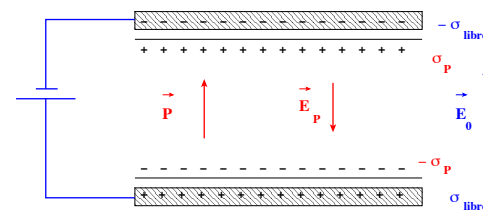


FIGURE 3.10 – Les charges liées d'un diélectrique créent un champ électrique au sein du diélectrique.

Les charges libres portées par les armatures créent un champ  $\vec{E}_0 = \sigma_{libre}/\epsilon_0 \vec{u}_z$ . Ce champ induit dans le diélectrique une polarisation  $\vec{P}$  de même sens que  $\vec{E}_0$ . Il apparaît donc sur les faces du diélectrique des charges de polarisation de densité  $\sigma_P = \pm P$ . La présence de ces charges fait que le diélectrique est alors le siège d'un nouveau champ :

$$\vec{E}_P = -\frac{|\sigma_P|}{\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (3.31)$$



Le champ  $\vec{E}_P$  est de sens opposé au champ  $\vec{E}_0$  qui lui a donné naissance.

Le champ électrique total dans la plaque est donc simplement :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (3.32)$$

On peut montrer que champ créé dans un diélectrique par la polarisation est toujours de sens opposé au champ qui a donné naissance à la polarisation. C'est pourquoi on l'appelle *champ dépolarisant*, même s'il n'est pas associé à un quelconque mécanisme de dépolarisation.

### 3.2.7 Séparation de deux milieux lhi

Dans le cas d'une polarisation statique, les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} & \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{(MA)} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(MF)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(MΦ)} \end{cases} \quad (3.33)$$

Dans un modèle surfacique, on en déduit les relations de passage entre les valeurs des champs dans les régions (1) et (2) séparées par une surface (S). Par analogie avec le § 1.6, on obtient immédiatement :

- la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$
  - la continuité de la composante normale de  $\vec{B}$
  - la discontinuité de la composante normale de  $\vec{D}$
  - la discontinuité de la composante tangentielle de  $\vec{B}$  en présence de courants superficiels
- On peut résumer ceci sous la forme :

$$\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2} \quad \vec{B}_{N1} = \vec{B}_{N2} \quad \vec{D}_{N2} - \vec{D}_{N1} = \sigma_{libre} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = \mu_0 i_{libre} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

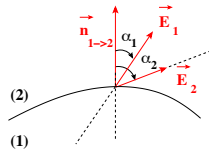


FIGURE 3.11 – Le champ électrique se réfracte à la traversée entre deux diélectriques lhi.

Si de plus la surface de séparation entre les deux milieux ne comporte pas de charges libres ( $\sigma_{libre} = 0$ ), les deux conditions sur  $E_T$  et  $D_N$  peuvent s'écrire, avec les notations de la figure 3.11 :

$$E_1 \sin(\alpha_1) = E_2 \sin(\alpha_2) \quad \text{et} \quad \epsilon_1 E_1 \cos(\alpha_1) = \epsilon_2 E_2 \cos(\alpha_2)$$

dont on déduit :

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\epsilon_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\epsilon_2} \quad (3.34)$$

Cette relation caractérise la réfraction des lignes du champ  $\vec{E}$  à la traversée de la surface (S).

### 3.2.8 Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique

#### Somme des forces

Un dipôle électrostatique  $\vec{p}$  placé dans un champ statique inhomogène  $\vec{E}$  est soumis à une force  $\vec{F}$  donnée par :

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

La détermination d'une expression équivalente qui prendrait en compte les forces internes au diélectrique serait très compliquée. En se limitant à la force externe au diélectrique, on montre que celui-ci subit une force de densité :

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_0 = \vec{\nabla} (\vec{P} \cdot \vec{E}_0) \quad (3.35)$$

où  $\vec{E}_0$  représente le champ auquel est soumis chaque dipôle du diélectrique (ce champ est à variations spatiales lentes à l'échelle atomique).

#### Moment des forces

Le moment des forces électromagnétiques en un point  $O$  s'écrit :

$$\Gamma_O(\vec{r}) = \iiint \vec{r} \times \frac{d\vec{F}}{dV} dV$$

où la densité volumique de force est donnée par (3.35). On montre que dans le cas d'un champ uniforme, on a :

$$\Gamma_O = \mathcal{P} \times \vec{E}_0 \quad (3.36)$$

où  $\mathcal{P}$  est le moment dipolaire du système dont on suppose qu'il se comporte comme un dipôle rigide.

### 3.2.9 Complément sur les densités de charges équivalentes

Un diélectrique peut être décomposé à l'échelle microscopique en groupes de particules dont la charge totale est nulle. On note  $\vec{r}_N$  la position du centre de masse du groupe  $N$  et  $\vec{r}_{Nk}$  les positions relatives par rapport au centre de masse des  $k$  charges  $q_{Nk}$  qui composent le groupe.

En utilisant (1.2) à la fois pour les charges libres et les charges liées, la densité volumique de charges nivellée du milieu s'écrit :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_N \sum_k q_{Nk} f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk})$$

puisque la charge  $q_k$  est située en  $\vec{r} + \vec{r}_{Nk}$ . Comme la fonction  $f$  a par construction des variations faibles à l'échelle atomique, on peut effectuer un développement au 1<sup>er</sup> ordre par rapport à  $\vec{r}_{Nk}$  :

$$f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk}) \approx f(\vec{r} - \vec{r}_N) - \vec{r}_{Nk} \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

d'où :

$$\rho(\vec{r}) \approx \sum_N \left( \sum_k q_{Nk} \right) f(\vec{r} - \vec{r}_N) - \sum_N \left( \sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk} \right) \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

Le 1<sup>er</sup> terme est nul puisque la charge totale de chaque groupe est nulle. Dans le 2<sup>e</sup>, on voit apparaître le moment dipolaire électrique  $\vec{p}_N = \sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk}$  du groupe  $N$ . Finalement :

$$\rho(\vec{r}) \approx - \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)] \quad (3.37)$$

De la même manière que pour  $\rho$ , on peut utiliser la fonction de nivellement  $f$  pour écrire la polarisation nivellée  $\vec{P}$  à partir des moments  $\vec{p}_N$  (situés en  $\vec{r}_N$ ) :

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_N \vec{p}_N f(\vec{r} - \vec{r}_N) \quad (3.38)$$

En utilisant (A.8) et en écrivant  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$  puisque seule  $f$  dépend de  $\vec{r}$  et en comparant avec (3.37), on obtient finalement :

$$\rho(\vec{r}) \approx - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \quad (3.39)$$

On retiendra que (3.39) ne conserve que l'aspect dipolaire des distributions de charges.

### Exercice 3.1 : Champ électrique d'une sphère uniformément polarisée

On considère une sphère uniformément polarisée. Montrer que les lignes du champ  $\vec{E}$  qu'elle crée dans tout l'espace sont telles que sur la figure 3.12 si la sphère est seule dans l'espace ou qu'elles sont représentées par la figure 3.13 si la sphère est plongée dans un champ uniforme  $\vec{E}_0$ .

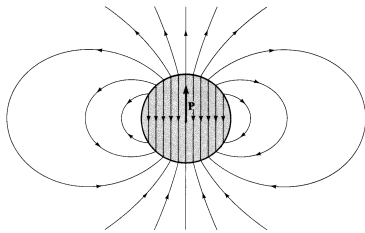


FIGURE 3.12 – Lignes du champ  $\vec{E}$  créé dans tout l'espace par une sphère uniformément polarisée.

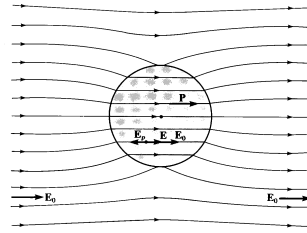


FIGURE 3.13 – Lignes du champ  $\vec{E}$  créé dans tout l'espace par une sphère uniformément polarisée placée dans un champ externe  $\vec{E}_0$ .

## 3.3 Susceptibilité électrique

### 3.3.1 Champ local $\vec{E}_\ell$

On considère une plaque de diélectrique soumise à un champ uniforme  $\vec{E}_0$  créé par les charges libres des armatures d'un condensateur (figure 3.14). Le champ macroscopique dans la plaque est  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$  où  $\vec{E}_P = - \vec{P} / \epsilon_0$  est le champ dépolarisant associé à la plaque.

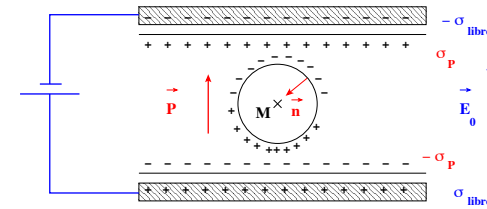


FIGURE 3.14 – Le champ que subit la molécule en  $M$  n'est pas le champ macroscopique  $\vec{E}$  dans la plaque mais le champ local  $\vec{E}_\ell$ .

On considère une molécule de diélectrique située en  $M$ . Le champ que voit la molécule est le champ créé en  $M$  par toutes les molécules autres que la molécule située en  $M$ . Ce champ est différent du champ  $\vec{E}$  et est appelé le *champ local*  $\vec{E}_\ell$ .

Si les distances entre molécules sont telles que le champ créé en  $M$  par les molécules les plus proches puisse encore être assimilé à celui d'un dipôle, on montre que le champ local se met sous la forme :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.40)$$

Cette *expression de Lorentz du champ local* est valable pour un milieu assimilable à une répartition aléatoire de dipôles (un gaz par exemple) ou pour un cristal cubique. Elle n'est généralement pas valable pour les milieux denses (liquides et solides) et est complètement fautive pour les cristaux non cubiques.

### 3.3.2 Formule de Clausius-Mossotti

On a vu au § 3.1 qu'on pouvait parfois relier la polarisation et le champ local par  $\vec{P} = n \alpha \epsilon_0 \vec{E}_\ell$ . Si de plus les conditions d'application de (3.40) sont remplies, on obtient une susceptibilité  $\chi$  de la forme :

$$\chi = \frac{n \alpha}{1 - n \alpha / 3} \quad (3.41)$$

En introduisant la masse volumique  $\mu$  et la masse molaire  $M$ , on obtient finalement la *formule de Clausius-Mossotti* :

$$\frac{M}{\mu} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{\mathcal{N}_A \alpha}{3} \quad (3.42)$$

où  $\mathcal{N}_A$  représente le nombre d'Avogadro. L'intérêt de cette formule est de permettre une mesure du paramètre microscopique  $\alpha$  à l'aide de données purement macroscopiques.

Pour un milieu peu dense,  $\chi_e \ll 1$ . On peut donc remplacer (3.41) et (3.42) par :

$$\chi_e \approx n\alpha \quad \text{et} \quad \frac{M}{\mu}(\epsilon_r - 1) \approx \mathcal{N}_A \alpha \quad (3.43)$$

### 3.3.3 Variations de la susceptibilité

La figure 3.15 représente la variation de  $M/\mu \times (\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 2)$  pour  $\text{CH}_4$  (molécule non polaire) et pour deux gaz polaires (HCl et HI).

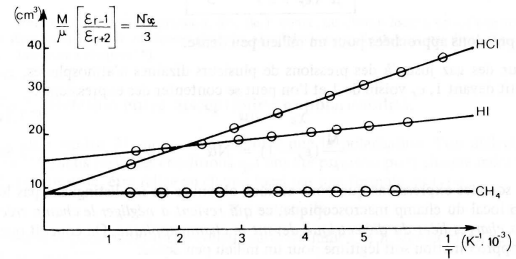


FIGURE 3.15 – Validité de la formule de Clausius-Mossotti pour trois gaz.

### 3.3.4 Pyroélectricité

La pyroélectricité et la ferroélectricité qui sera vue au § suivant sont les seuls cas connus de polarisation spontanée.

### 3.3.5 Ferroélectricité

D'après (3.41), on a  $\chi_e \rightarrow 0$  quand  $n\alpha/3 \rightarrow 1$ . En fait, la densité  $n$  est alors trop importante pour que (3.41) puisse s'appliquer. Mais qualitativement, on observe la *catastrophe de polarisation* pour les matériaux ferroélectriques, comme par exemple le titanate de baryum  $\text{BaTiO}_3$  (figure 3.16) qui peut voir dans certaines conditions sa susceptibilité  $\chi_e$  atteindre plusieurs milliers dans l'état *ferroélectrique*. On observe alors une polarisation spontanée en l'absence de champ appliqué.

On peut également montrer que la susceptibilité d'un corps ferroélectrique suit, au dessus d'une température  $T_C$  dite *température de Curie*, une loi du type :

$$\chi_e = \frac{C_{ste}}{T - T_C}$$

On peut noter que la polarisation d'un corps ferroélectrique dépend de l'histoire du cristal. En faisant varier lentement  $\vec{E}$  entre deux valeurs opposées (figure 3.17), on obtient une courbe caractéristique, dite *d'hystérésis*.

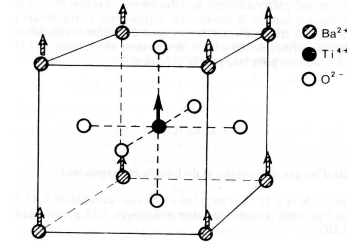


FIGURE 3.16 – Maille du titanate de baryum  $\text{BaTiO}_3$ .

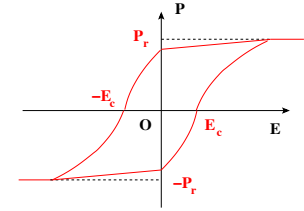


FIGURE 3.17 – Courbe d'hystérésis décrite par  $(\vec{E}, \vec{P})$  pour un corps ferroélectrique -  $E_c$  représente le *champ coercitif* et  $P_r$  la *polarisation rémanente*.

### 3.3.6 Piézoélectricité

Dans certains cristaux dépourvus de centre de symétrie (par exemple le quartz), une contrainte mécanique peut engendrer un déplacement relatif de certains ions, et donc engendrer une polarisation. Le cristal est alors dit *piézoélectrique*.

La réciproque est également vraie : un cristal piézoélectrique se déforme sous l'action d'un champ  $\vec{E}$ .

## 3.4 Polarisation en régime variable

La description d'un diélectrique en termes de charges de polarisation faite précédemment n'est pas limitée aux régimes statiques mais convient également aux régimes variables dans le temps, à condition de considérer des volumes mésoscopiques<sup>4</sup> pour définir la polarisation  $\vec{P}(t)$ .

4. Pour que tout ceci ait un sens (et que le modèle soit applicable), il faut que toute dépendance temporelle ait un temps caractéristique plus court que le temps de parcours d'une onde électromagnétique sur le volume. En prenant des volumes mésoscopiques de  $5 \text{ nm}^3$ , la fréquence limite acceptable est de  $10^{16} \text{ Hz}$ , ce qui se situe dans l'ultraviolet. On pourra donc utiliser une description continue et moyennée de la matière pour des fréquences allant jusqu'à  $10^{15} \cdot 10^{16} \text{ Hz}$  (ce qui correspond à des longueurs d'onde de  $100 \text{ nm}$ , largement supérieures aux dimensions inter-atomiques).

Par contre, pour des rayons X, la structure discontinue de la matière devient apparente. Ceci explique la diffusion des rayons X sur un réseau cristallin, mais dépasse le cadre de ce cours qui ne s'intéresse qu'aux milieux continus.

### 3.4.1 Analyse intuitive

#### Cas d'une excitation sinusoïdale

On place un diélectrique lhi maintenu à température constante dans un champ  $\vec{E}$  de la forme  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$  et on s'intéresse au régime permanent.

Il est intuitif que si les variations de  $\vec{E}$  sont rapides, la polarisation induite ne suivra ces variations qu'avec un certain retard, puisque la polarisation nécessite un déplacement d'atomes à l'échelle microscopique. La polarisation  $\vec{P}(t)$  aura donc un déphasage  $\phi(\omega)$  avec le champ électrique  $\vec{E}(t)$  et dépendra de la fréquence, soit :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0 \cos(\omega t - \phi)$$

En développant le cosinus, on voit qu'il doit exister deux coefficients  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$  tels que :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 [\chi'(\omega) \cos(\omega t) + \chi''(\omega) \sin(\omega t)] \vec{E}_0 \quad (3.44)$$

La polarisation comporte donc un terme en phase avec  $\vec{E}$  (proportionnel à  $\chi'(\omega)$ ) et un terme en quadrature avec  $\vec{E}$  (proportionnel à  $\chi''(\omega)$ ). En poursuivant le raisonnement, on montre qu'il existe également des coefficients  $\epsilon'(\omega)$  et  $\epsilon''(\omega)$  pour décrire  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  selon :

$$\vec{D}(t) = [\epsilon'(\omega) \cos(\omega t) + \epsilon''(\omega) \sin(\omega t)] \vec{E}_0$$

avec  $\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 [1 + \chi(\omega)]$  et  $\epsilon''(\omega) = \epsilon_0 \chi''(\omega)$ . Le déphasage  $\delta(\omega)$  entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  vérifie :

$$\tan[\delta(\omega)] = \frac{\epsilon''(\omega)}{\epsilon'(\omega)} \quad (3.45)$$

On peut donc décrire la réponse de la matière à un champ variable à l'aide des deux fonctions  $\epsilon'(\omega)$  et  $\epsilon''(\omega)$ .

On sait que tout système linéaire excité à l'aide d'une fréquence sinusoïdale peut être représenté en notation complexe. On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)) & \text{avec} & \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) \\ \vec{P}(t) = \text{Re}(\vec{\mathcal{P}}_\omega(t)) & \text{avec} & \vec{\mathcal{P}}_\omega(t) = \vec{\mathcal{P}}_0 \exp(-i\omega t) \end{cases} \quad (3.46)$$

Les indices à  $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)$  et  $\vec{\mathcal{P}}_\omega(t)$  rappellent que  $\chi(\omega)$  ne peut s'utiliser qu'avec une excitation sinusoïdale. Ceci n'est pas restrictif car on peut exprimer tout signal  $\vec{\mathcal{E}}(t)$  sous forme d'une combinaison linéaire des  $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)$  à l'aide d'une transformation de Fourier. Avec ces notations, on a bien une relation de la forme :

$$\vec{\mathcal{P}}_\omega(t) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) \quad (3.47)$$

en posant :

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \quad (3.48)$$

Il suffit de prendre la partie réelle de (3.47) pour retrouver (3.44). On introduit donc naturellement la *susceptibilité diélectrique complexe*  $\chi(\omega)$ .

### Cas général

On peut généraliser ce qui précède à des champs variables mais non sinusoïdaux. En supposant que le lien entre la polarisation et le champ reste linéaire, un retard de la polarisation  $\vec{P}$  par rapport au champ  $\vec{E}$  s'écrira :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \int_0^\infty F(\theta) \vec{E}(t - \theta) d\theta \quad (3.49)$$

Cette relation exprime le fait que la contribution à  $\vec{P}$  à l'instant  $t$  du champ  $\vec{E}$  à l'instant  $t - \theta$  est pondérée par la *fonction de retard*  $F(\theta)$ . La forme de  $F(\theta)$  est une fonction du milieu. Avec l'aide de (3.46) et en reportant  $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t - \theta) = \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) \exp(i\omega\theta)$  dans (3.49), on retrouve (3.47) avec :

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \exp(i\omega\theta) d\theta \quad (3.50)$$

soit :

$$\chi'(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \cos(\omega\theta) d\theta \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \sin(\omega\theta) d\theta \quad (3.51)$$

Ces deux relations nous permettent d'envisager un lien en  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$ .

### 3.4.2 Modèle de Drüde-Lorentz

L'interaction d'un porteur de charge de masse  $m$  avec un milieu matériel est très bien décrite à l'aide du *modèle de Drüde-Lorentz* qui introduit, en plus de la force de Lorentz :

- une force d'amortissement visqueux  $\vec{f}_v = -m \vec{v} / \tau$  où  $\tau$  est un temps caractéristique
- une force de rappel  $\vec{f}_r = -m \omega_0^2 \vec{r}$  où  $\omega_0$  est la pulsation de l'oscillateur que forme la charge en mouvement autour de sa position d'équilibre et  $\vec{r}$  le vecteur position par rapport à la position d'équilibre

A l'aide de cette description, on peut à la fois modéliser les charges libres ( $\omega_0 = 0$ ) et les charges liées ( $\omega_0 \neq 0$ ).

En notant  $q$  la charge de la particule, on montre que l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'électron est :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E}_\ell - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - m \omega_0^2 \vec{r} \quad (3.52)$$

où  $\vec{E}_\ell$  représente le champ local effectivement appliqué au porteur de charge étudié.

### 3.4.3 Susceptibilités et permittivités complexes

En adoptant une représentation complexe en  $\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(-i\omega t)$ , le régime forcé du mouvement de l'électron s'écrit :

$$\vec{r}_0 = \frac{q}{m} \frac{\vec{E}_\ell}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \quad (3.53)$$

Ce déplacement entraîne l'apparition d'un moment dipolaire électrique complexe  $\vec{p}_0 = q \vec{r}_0$ . En supposant que  $\vec{E} \approx \vec{E}_e$ , on en déduit l'expression d'une *susceptibilité électrique complexe*  $\chi(\omega)$  :

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{n q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2} \quad (3.54)$$

où  $\chi(0)$  représente la *susceptibilité statique*. On peut noter qu'il est équivalent pour un milieu lhi de parler de susceptibilité complexe  $\chi(\omega)$  ou de *polarisabilité complexe*  $\alpha(\omega)$  puisque, comme pour (3.43) :

$$\chi(\omega) = n \alpha(\omega) \quad (3.55)$$

Pour un milieu dense pour lequel on peut utiliser l'expression de Lorentz du champ local (3.40), on montre qu'on obtient les mêmes expressions à condition de remplacer  $\omega_0$  par  $\omega'_0$  telle que :

$$\omega'_0 = \omega_0 - \frac{n q^2}{3 m \epsilon_0} \quad (3.56)$$

### Déphasage

Le caractère complexe de  $\chi(\omega)$  dans (3.54) traduit le déphasage entre le champ et la polarisation, c'est-à-dire entre la cause et sa conséquence. On peut distinguer trois domaines particuliers :

1. Les basses fréquences ( $\omega \ll \omega_0$ ), pour lesquelles  $\chi(\omega) \approx \chi(0)$  : on retrouve le cas des régimes stationnaires pour lesquels  $\chi$  est une constante réelle positive (§ 3.2.4)
2. Les fréquences intermédiaires ( $\omega \approx \omega_0$ ), pour lesquelles  $\chi(\omega) \approx \chi(0) \omega_0 \tau \exp(i\pi/2)$  :  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont en quadrature
3. Les hautes fréquences ( $\omega \gg \omega_0$ ), pour lesquelles  $\chi(\omega) \approx -\chi(0) \times \omega_0^2/\omega^2$  :  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont en opposition de phase, et  $\chi(\omega)$  tend vers zéro à très haute fréquence

En séparant les parties imaginaires de  $\chi(\omega)$  selon  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ , on obtient :

$$\chi'(\omega) = \chi(0) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad (3.57)$$

### Etude de $\chi'(\omega)$

La partie réelle  $\chi'(\omega)$  s'annule pour  $\omega = \omega_0$  et sa dérivée vaut :

$$\frac{d\chi'(\omega)}{d\omega} = -2\omega\omega_0\chi(0) \frac{-(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2/\tau^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2)^2} \quad (3.58)$$

Cette dérivée s'annule pour  $\omega_1$  et  $\omega_2$  telles que :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2\tau} \quad \text{et} \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2\tau} \quad (3.59)$$

Dans le cas d'un amortissement faible ( $1/\tau \ll \omega_0$ ), la largeur caractéristique  $\Delta\omega$  de l'intervalle sur lequel  $\chi'(\omega)$  change de signe est (figure 3.18) :

$$\Delta\omega \approx \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{\tau} \quad (3.60)$$

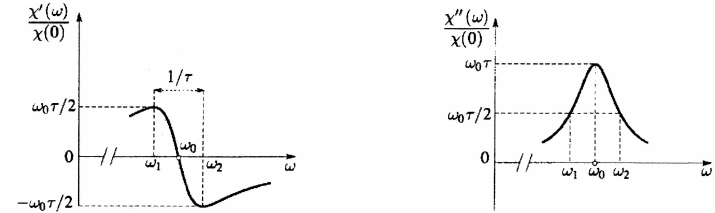


FIGURE 3.18 – Variations des parties réelles et imaginaires de la susceptibilité complexe au voisinage de  $\omega_0$  dans le cas d'un amortissement faible ( $1/\tau \ll \omega_0$ ).

### Etude de $\chi''(\omega)$

Au contraire, la partie imaginaire  $\chi''(\omega)$  est maximale pour  $\omega = \omega_0$  avec  $\chi''(\omega_0) = \omega_0 \tau \chi(0)$  et décroît rapidement dès qu'on s'écarte de  $\omega_0$ . Au voisinage du maximum, on peut écrire :

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \quad (3.61)$$

ce qui permet de mettre  $\chi''(\omega)$  sous la forme :

$$\chi''(\omega) \approx \chi''(0) \frac{1}{1 + 4\tau^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (3.62)$$

Cette courbe a la forme caractéristique d'une *lorentzienne*.

### 3.4.4 Qu'est-ce qu'une résonance optique ?

On peut montrer qu'un faisceau de lumière interagit avec une vapeur de sodium (figure 3.19) de la manière suivante : la puissance est intégralement transmise, sauf autour d'une fréquence particulière  $\omega_0$  pour laquelle le rayonnement est réémis dans toutes les directions avec les caractéristiques du rayonnement émis par un dipôle oscillant<sup>5</sup>.

On interprète ceci en disant que le dipôle atomique se met à vibrer intensément pour  $\omega \approx \omega_0$  et qu'il y a une *résonance optique*.

Il est important de noter que le spectre de rayonnement est très vaste (figures 3.20 et 3.21) et qu'il recouvre des domaines de fréquence très différents.

### 3.4.5 Polarisation électronique

Les électrons ayant une très faible masse, tout effet d'inertie les concernant ne se manifestera qu'à haute fréquence ( $\omega_{0,e} \approx 10^{16}$  rad/s). La condition  $\omega_{0,e} \tau \gg 1$  sera toujours vérifiée.

En appliquant les résultats du § 3.4.3, on voit qu'il existe deux zones intéressantes :

5. La théorie du dipôle oscillant sera vue au § 8.1.

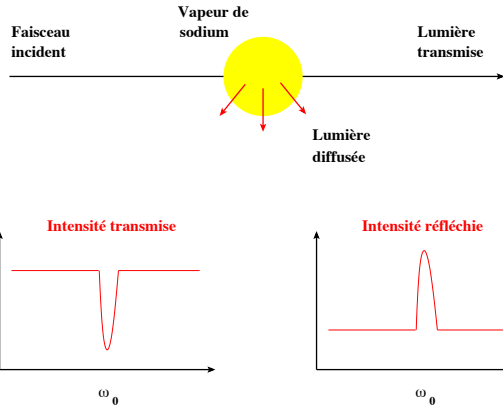


FIGURE 3.19 – Dans une *résonance optique*, les dipôles atomiques se mettent à vibrer pour  $\omega \approx \omega_0$ .

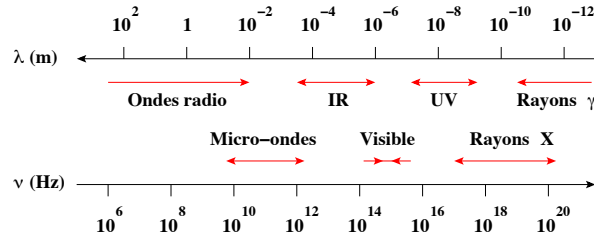


FIGURE 3.20 – Spectre du rayonnement.

1. Dans le visible ( $\omega \ll \omega_{0,e}$ ), la susceptibilité est réelle et positive :

$$\chi_e(\omega) \approx \chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega_{0,e}^2 - \omega^2} \quad (3.63)$$

2. Dans le cas où au contraire  $\omega \gg \omega_{0,e}$ , la susceptibilité est également réelle mais négative :

$$\chi_e(\omega) \approx -\chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega^2} \quad (3.64)$$

La réponse d'un milieu présentant une ou deux fréquences de résonance électronique est représentée sur les figures 3.22 et 3.23.

### 3.4.6 Polarisation ionique

On a cette fois  $\omega_{0,i} \approx 10^{12}$  rad/s, c'est-à-dire que les pulsations propres se situent dans l'infrarouge lointain, tout en conservant la condition  $\omega_{0,i} \tau \gg 1$ . Tout comme précédemment,

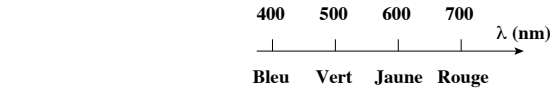


FIGURE 3.21 – Partie visible du spectre du rayonnement.

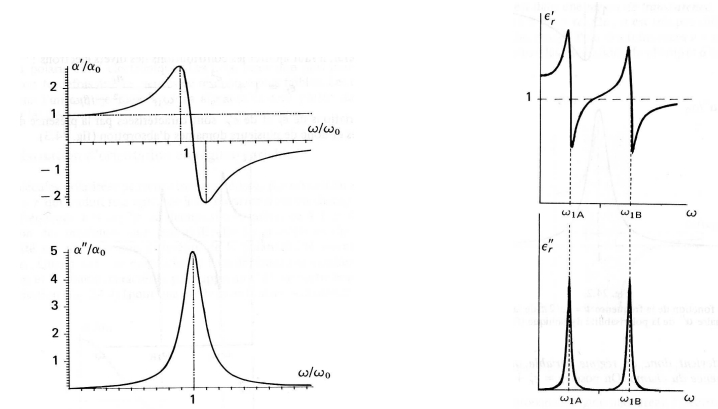


FIGURE 3.22 – Variation de  $\epsilon'_r$  et  $\epsilon''_r$  en fonction de la pulsation (pour  $m\omega_0/\tau = 0,2$ ).

FIGURE 3.23 – Variation de  $\epsilon'_r$  et  $\epsilon''_r$  pour un diélectrique présentant deux bandes d'absorption à  $\omega_{1A}$  et  $\omega_{1B}$ .

il existe deux zones notables :

1. Dans le domaine des micro-ondes et en deçà ( $\omega \ll \omega_{0,i}$ ), la susceptibilité est réelle et vaut :

$$\chi_i(\omega) \approx -\chi_e(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2} \quad (3.65)$$

2. Au contraire, pour  $\omega_{0,i} \gg \omega$  (domaine visible et au delà), la susceptibilité reste réelle mais très faible :

$$\chi_i(\omega) \approx -\chi_e(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega^2} \approx 0 \quad (3.66)$$

Schématiquement, la réponse d'un milieu est la même que pour la polarisation électronique.

### 3.4.7 Polarisation dipolaire

La situation est différente pour la polarisation dipolaire puisqu'elle ne peut pas être instantanée car elle implique une rotation des molécules qui est de fait perturbée par les chocs intermoléculaires. Debye a montré que la plupart du temps, il convient de prendre un retard

exponentiel :

$$F(\theta) = \frac{\chi_{or}(0)}{\tau} \exp(-\theta/\tau) \quad (3.67)$$

où  $\tau$  est un temps caractéristique du milieu et  $\chi_{or}(0)$  la susceptibilité statique. De manière équivalente, la polarisation suit l'équation de Debye :

$$\tau \frac{d\vec{P}(t)}{dt} + \vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_{or}(0) \vec{E}(t) \quad (3.68)$$

En utilisant (3.50) ou la méthode traditionnelle consistant à écrire le lien entre le champ et la polarisation, on obtient :

$$\chi_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 - i\omega\tau_D} \quad \text{avec} \quad \tau_D = \frac{1}{\omega_0^2 \tau} \quad (3.69)$$

Les parties réelles et imaginaires de  $\chi_{or}(\omega)$  forment les équations de Debye :

$$\chi'_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega \tau_D}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \quad (3.70)$$

Ici aussi, on peut distinguer deux domaines (figure 3.24) :

1. Si  $\omega\tau_D \ll 1$ , on obtient :

$$\chi'_{or}(\omega) \approx \chi_{or}(0) \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) \approx 0 \quad (3.71)$$

2. Si  $\omega\tau_D \gg 1$ , on obtient :

$$\chi'_{or}(\omega) \approx 0 \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) \approx 0 \quad (3.72)$$

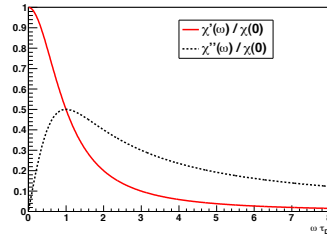


FIGURE 3.24 – Variations des parties réelles et imaginaires de la susceptibilité d'orientation dans le modèle de Debye.

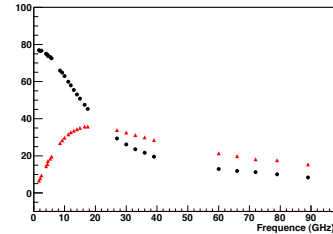


FIGURE 3.25 – Variation de la partie réelle (cercles) et de la partie imaginaire (triangles) de la permittivité diélectrique de l'eau à 25 °C en fonction de la pulsation.

Par exemple, l'eau suit le modèle ci-dessus (figure 3.25<sup>6</sup>) avec  $1/\tau_D = 10^{11}$  rad/s.

6. D'après J. Barthel et al., *A Computer-controlled System of Transmission Lines for the Determination of the Complex Permittivity of Lossy Liquids between 8.5 and 90 GHz*, Ber. Bunsenges. Phys. Chem., 1991. 95(8), 853 - 859

### 3.4.8 Polarisation totale

On peut résumer les résultats précédents sur la figure 3.26 qui représente l'allure de  $\alpha'$  et  $\alpha''$  pour un système dilué de molécules polaires n'ayant qu'une seule fréquence propre de vibration et une seule fréquence propre électronique.

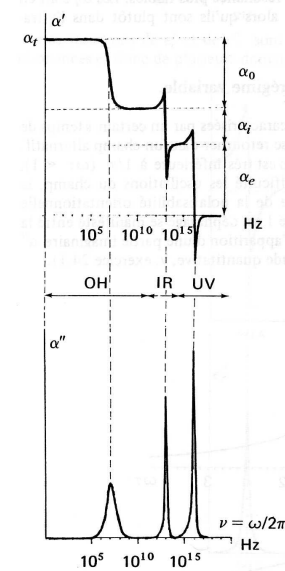


FIGURE 3.26 – Les variations de  $\alpha'$  et  $\alpha''$  en fonction de la fréquence permettent de distinguer les divers types de polarisation.

### 3.4.9 Courant de polarisation - Equations de Maxwell dans un diélectrique

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ  $\vec{E}$  variable, les dipôles qui le constituent peuvent se mettre à vibrer et engendrent donc un courant. On montre que ce courant se met sous la forme :

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (3.73)$$

La densité volumique qu'il faut prendre en compte pour les équations de Maxwell est alors la somme des densités associées aux courants libres et aux courants liés, soit :

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \vec{J}_P \quad (3.74)$$

Les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique s'écrivent finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad (\text{MG}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_{tot} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (\text{MA}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{M}\Phi) \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Vu la modélisation utilisée, il est logique de constater que la conservation de la charge s'applique aux charges de polarisation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (- \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = 0 \quad (3.76)$$

## 3.5 Aspects énergétiques des milieux diélectriques

### 3.5.1 Energie dissipée dans un diélectrique

La puissance fournie par le champ EM à un diélectrique est donnée par  $d\mathcal{P}/dV = \vec{J} \cdot \vec{E}$ . Si on suppose que le seul courant volumique à considérer est le courant de polarisation  $\vec{J}_P$ , on montre que la puissance volumique reçue par le diélectrique a pour valeur moyenne :

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{dV} \right\rangle = \epsilon_r'' \omega \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \quad (3.77)$$

où  $E_0$  est l'amplitude du champ électrique.

### 3.5.2 Energie électrostatique dans un milieu diélectrique

#### Expression générale

On considère une densité volumique de charges  $\rho$  contenue à l'intérieur d'un volume  $V$  de surface  $\Sigma$ . L'énergie  $\delta W$  associée à une variation  $\delta\rho$  de la densité volumique de charge est :

$$\delta W = \iiint \delta\rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV = \iiint \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}) \Phi(\vec{r}) dV \quad (3.78)$$

puisque  $\delta\rho = \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{D}$  pour une densité de charges libres. Comme  $\vec{\nabla} \cdot (\Phi \delta\vec{D}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}) + \delta\vec{D} \cdot \vec{\nabla}(\Phi)$ , on a finalement en utilisant le théorème d'Ostrogradsky :

$$\delta W = \iint \Phi \delta\vec{D} \cdot d\vec{S} - \iiint \delta\vec{D} \cdot \vec{\nabla} \Phi dV \quad (3.79)$$

La contribution de la 1<sup>re</sup> intégrale peut être annulée en repoussant la surface  $\Sigma$  à l'infini puisque sur cette surface  $\vec{D}$  et  $\Phi$  varient respectivement au moins en  $1/r^2$  et  $1/r$  alors que la surface ne croît que comme  $r^2$ . Il reste alors, en utilisant la relation entre  $\vec{E}$  et  $\Phi$  :

$$\delta W = \iiint_{Espace} \vec{E} \cdot \delta\vec{D} dV \quad (3.80)$$

### Insertion d'un diélectrique dans un champ

On considère un diélectrique linéaire (en particulier, les ferroélectriques du § 3.3.5 sont exclus) qu'on introduit dans un champ  $\vec{E}$  dont les sources sont maintenues constantes.

Pour un milieu linéaire de permittivité relative  $\epsilon_r$ , on aura :

$$\vec{E} \cdot \delta\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \delta\vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \delta\vec{E}^2 = \frac{1}{2} \delta\{\vec{E} \cdot \vec{D}\} \quad (3.81)$$

On en déduit que l'énergie initiale de la configuration, avant l'introduction du diélectrique, est :

$$U_1 = \frac{1}{2} \iiint \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_1 dV \quad \text{avec} \quad \vec{D}_1 = \epsilon \vec{E}_1$$

en notant  $\vec{E}_1$  le champ créé par la distribution de charges et  $\epsilon$  la permittivité du milieu.

En introduisant le diélectrique de permittivité  $\epsilon'$ , le champ passe à une nouvelle valeur  $\vec{E}_2$ . L'énergie de la nouvelle configuration est :

$$U_2 = \frac{1}{2} \iiint \vec{E}_2 \cdot \vec{D}_2 dV$$

dont on déduit la variation d'énergie entre les deux configurations :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \iiint (\vec{E}_2 \cdot \vec{D}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_1) dV \quad (3.82)$$

ou encore :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \iiint (\vec{E}_2 \cdot \vec{D}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_2) dV + \frac{1}{2} \iiint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) dV \quad (3.83)$$

Comme  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  sont des champs électrostatiques, on a  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 + \vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = \vec{\nabla} \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \vec{0}$ . On peut donc poser l'existence d'une fonction  $\Omega$  vérifiant :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = - \vec{\nabla} \Omega$$

Le 2<sup>e</sup> terme de (3.83) devient :

$$- \frac{1}{2} \iiint \vec{\nabla} \Omega \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) dV$$

On utilise le fait que  $\vec{\nabla} \Omega \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\Omega \vec{A}) - \Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  avec  $\vec{A} = \vec{D}_2 - \vec{D}_1$ . On se débarrasse de l'intégrale de surface issue du terme en  $\vec{\nabla} \cdot (\Omega \vec{A})$  de la même manière que précédemment en repoussant la surface d'intégration à l'infini. Le 2<sup>e</sup> terme de (3.83) peut finalement s'écrire :

$$\frac{1}{2} \iiint \Omega \vec{\nabla} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) dV$$

Mais comme on n'a pas modifié la densité volumique de charges libres en introduisant le diélectrique, on a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_2$ . Cette dernière intégrale est donc nulle. Finalement, il reste :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \iiint (\vec{E}_2 \cdot \vec{D}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_2) dV \quad (3.84)$$



---

### **Exercice 3.2 : Etude d'un milieu à polarisation dipolaire en régime sinusoïdal forcé**

On considère un milieu diélectrique lhi pour lequel le mécanisme prépondérant est la polarisation d'orientation. En régime sinusoïdal, on suppose que la polarisation suit la loi de Debye.

1. Déterminer l'expression de la susceptibilité complexe  $\chi(\omega)$ . Pour résoudre l'équation différentielle, on ne tiendra compte que de sa solution stationnaire (pourquoi?).
  2. En déduire la permittivité relative complexe  $\epsilon_r(\omega)$ .
  3. Tracer les graphes représentant les parties réelles et imaginaires de  $\epsilon_r(\omega)$ . Commenter.
-