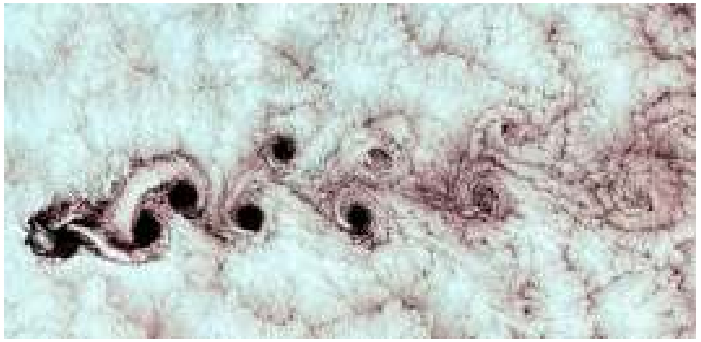
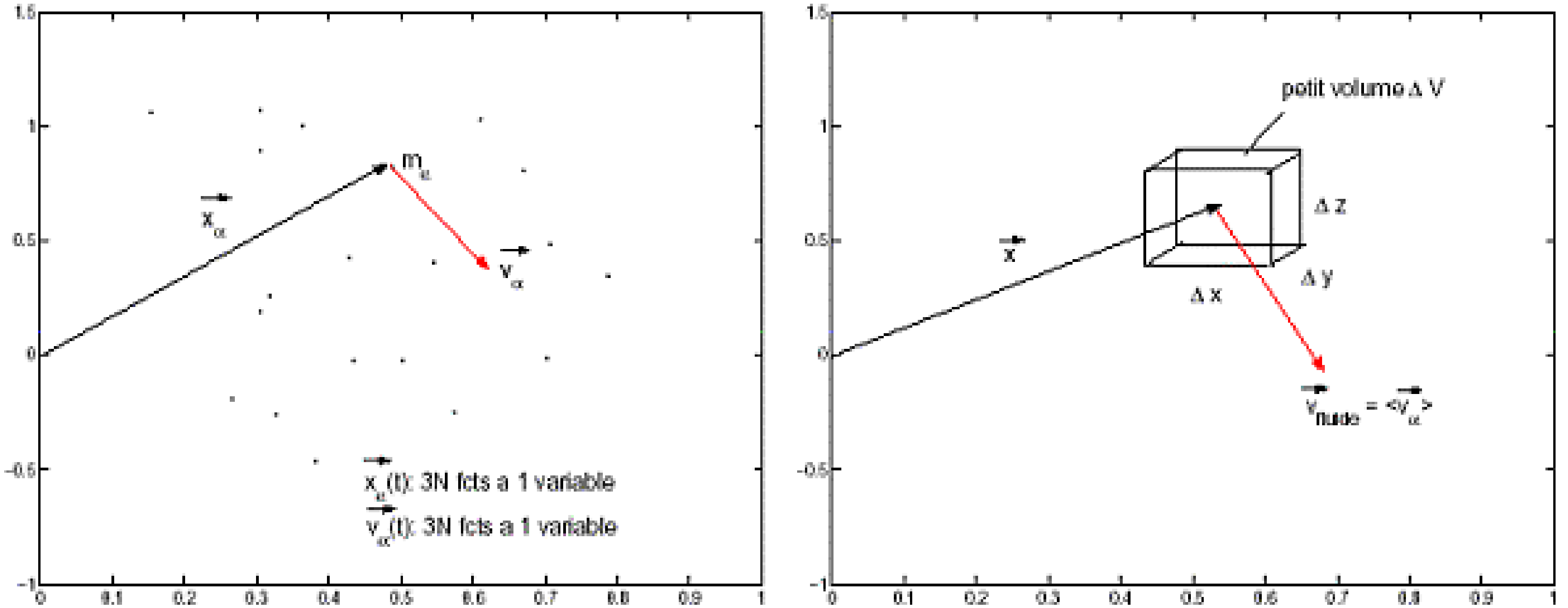
Mécanique des fluides (PC*)



I) Etude phénoménologique des fluides :

1 – Grandeur moyenne locale, particule fluide :

Une particule de fluide est un élément de volume de fluide de dimension mésoscopique (de l'ordre de 0,1 μm^3). Le vecteur vitesse de cette particule est la moyenne statistique des vecteurs vitesses des molécules qui la constituent. Le mouvement du fluide dans un référentiel (R) est alors décrit par l'ensemble des vecteurs vitesses de ses particules.



Du monde des particules (à gauche) au monde fluide (à droite)

2 – Contraintes dans les fluides :

On appelle fluide non visqueux, ou fluide parfait, un fluide dont l'écoulement se fait "sans frottements internes" d'aucune sorte.

Le modèle du fluide parfait permet de rendre compte assez convenablement de la structure de certaines régions d'écoulements réels ou de la modéliser, mais jamais de la structure complète de ceux-ci.

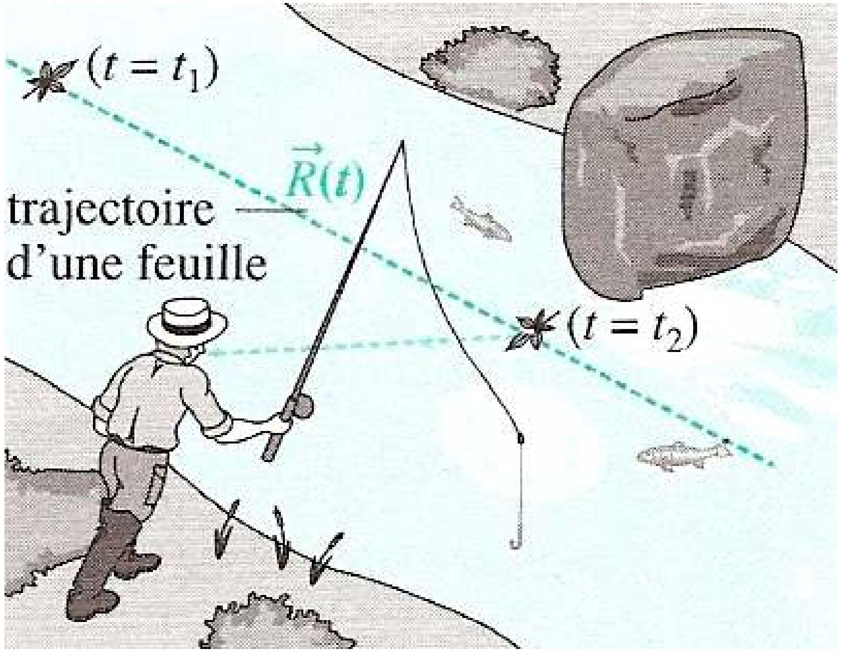
Une des caractéristiques principales de la mécanique des fluides apparaît ici : pour représenter des faits ou des observations, elle fait appel à des modèles, dont le degré de raffinement est variable.

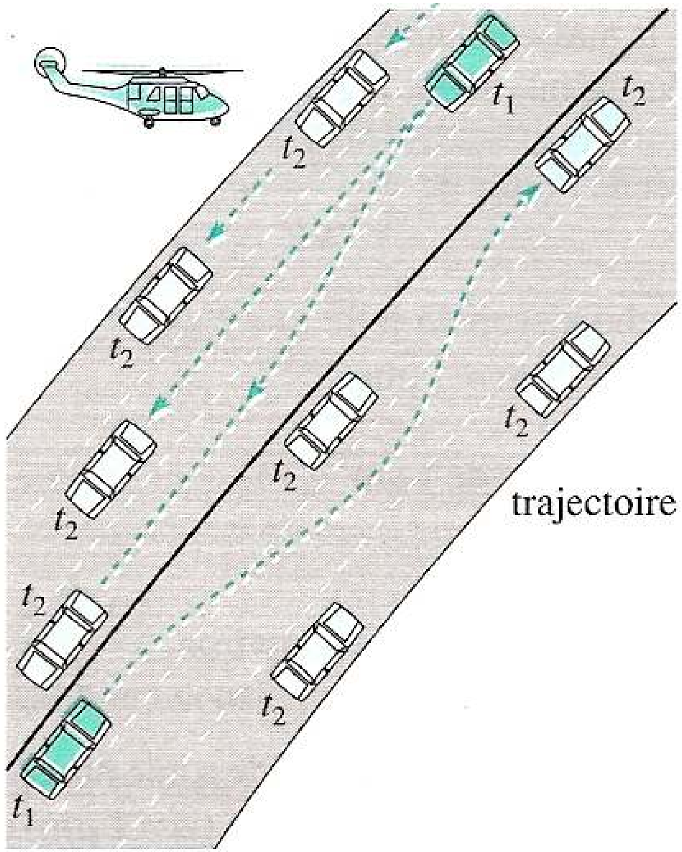
En raison de l'extrême complexité des phénomènes qu'elle tente de décrire, elle ne peut se passer de tests expérimentaux (réalisation de maquettes testées dans un bassin et qui serviront à la conception des navires ; essais en soufflerie pour la construction aéronautique, etc...).

II) Champ des vitesses dans un fluide :

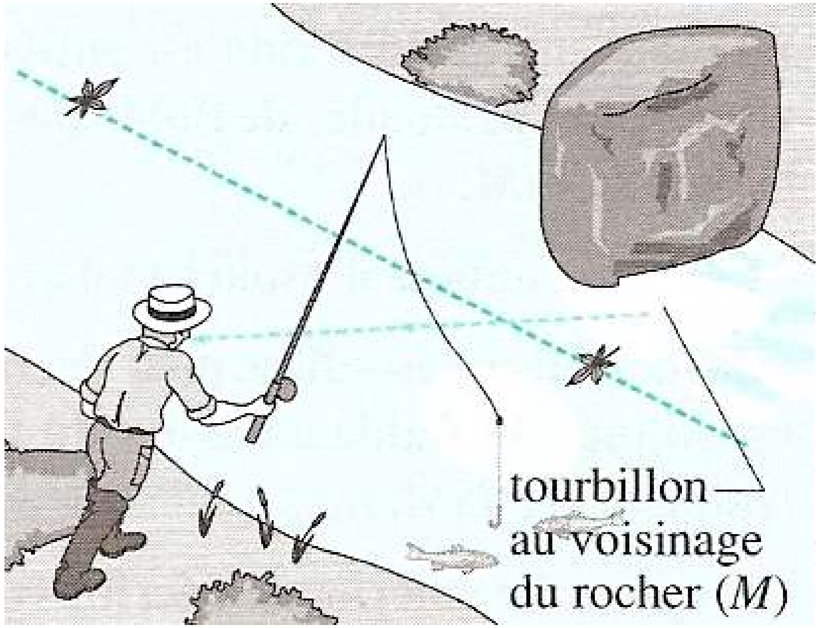
1 – Description lagrangienne, description eulérienne :

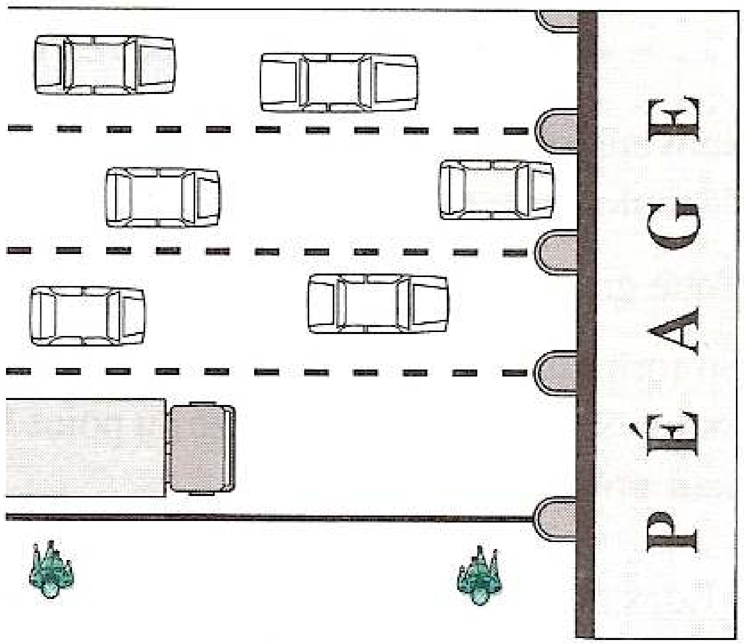
- Description lagrangienne :





• Description eulérienne :





2 – Champ de vitesse, lignes de courant et trajectoires :

La carte du champ des vitesses donne une représentation graphique d'un écoulement.

Cette carte est le tracé du vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ en tout point M à un instant donné t.

A titre d'exemple, on considère l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe, de rayon R, infini dans la direction (Oz) perpendiculaire au plan de la feuille, d'un fluide parfait (viscosité nulle) ayant une vitesse uniforme $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x$ loin du cylindre.

Le calcul du vecteur vitesse $\vec{v}(x,y) = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$ conduit à (voir paragraphe 7) :

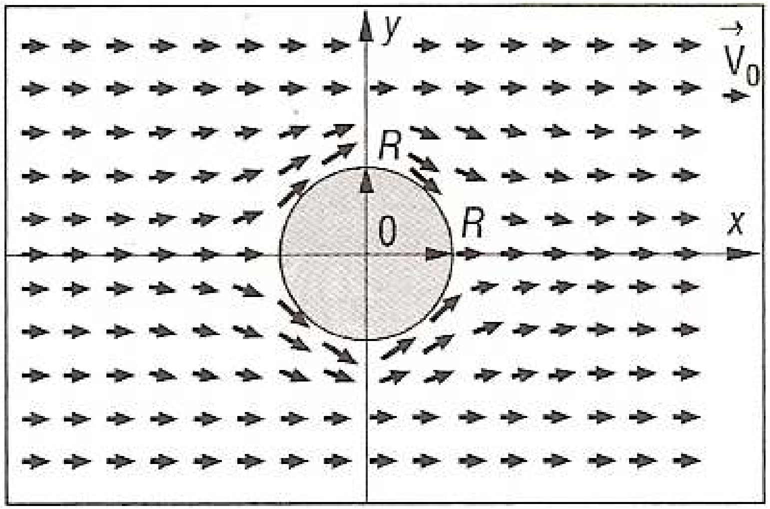
$$\boxed{v_x = \left[1 + \frac{(y^2 - x^2)\,R^2}{(x^2+y^2)^2}\right] v_0 \qquad ; \qquad v_y = -2\frac{xyR^2}{(x^2+y^2)^2}\,v_0}$$

Lignes de courants :

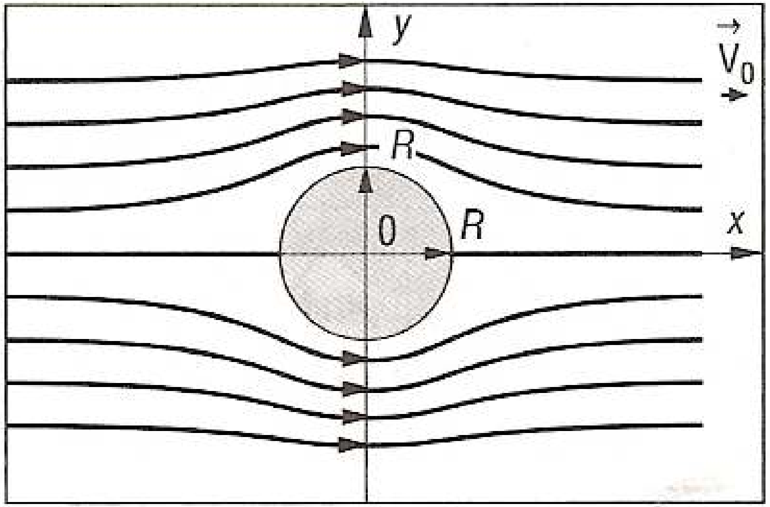
Ces lignes sont les courbes tangentes au vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ en chacun de leurs points M, à l'instant considéré.

L'équation d'une ligne de courant (comparable à une ligne de champ en électrostatique) s'obtient en écrivant que tout vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$ le long de la ligne est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$, soit

$$\boxed{\vec{v}(M,t) \wedge d\vec{r} = \vec{0}}.$$

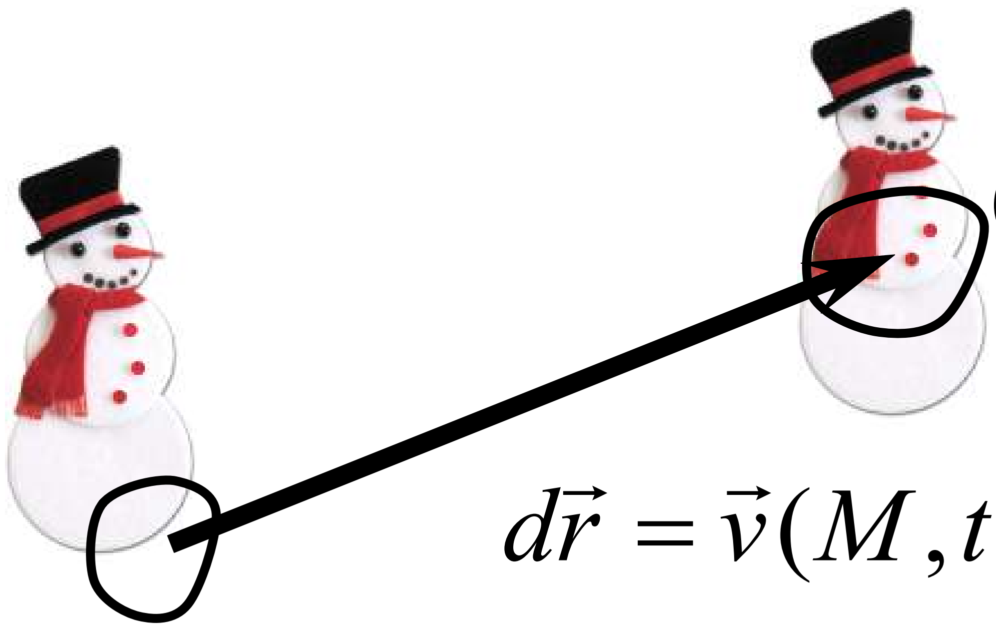


A



B

3 – Dérivée particulaire du champ des vitesses :



$$(M + dM, t + dt)$$

$$d\vec{r} = \vec{v}(M,t)dt$$

$$(M,t)$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}}$$

* En toute rigueur, $\vec{v}$ dans le membre de gauche désigne la vitesse de la particule fluide

* d/dt est appelée dérivée particulaire, encore notée D/Dt

* Dans les autres termes, $\vec{v}$ désigne le champ des vitesses dans tout le fluide.

* Enfin, le terme $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}$ permet de rendre compte que, même dans un écoulement stationnaire (dans le sens eulérien du terme), aux variations spatiales de la vitesse correspondent des accélérations pour les particules.

Généralisation :

« La dérivée particulaire » d'une grandeur vectorielle $\vec{G}$ est donnée par :

$$\boxed{\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{G}}$$

Cette dérivée particulaire se décompose en deux termes :

* $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{G}$: la dérivée convective, qui indique un caractère non uniforme de $\vec{G}$.

* $\frac{\partial\vec{G}}{\partial t}$: la dérivée locale, qui indique un caractère non permanent de $\vec{G}$

Remarque :

On peut montrer que (se placer en coordonnées cartésiennes) :

$$\boxed{(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}}$$

Exemple d'un solide en rotation :

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz).

Tout point M lié au solide possède un vecteur vitesse de la forme :

$$\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe (Oz) et r la distance du point M à l'axe de rotation.

On calcule $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$ en utilisant un formulaire d'analyse vectorielle :

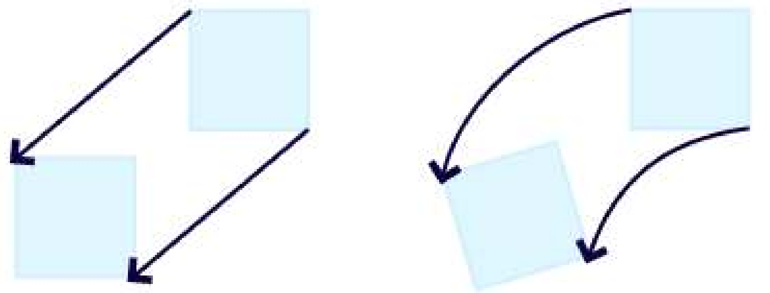
$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\omega r^2)\vec{u}_z = 2\omega\vec{u}_z = 2\vec{\omega}$$

On définit alors, pour un fluide, le vecteur tourbillon par :

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}(\vec{v})}$$

Ce vecteur représente le vecteur rotation (locale) d'une particule de fluide.

Localement, le champ des vitesses d'un fluide renseigne sur l'existence de tourbillons dans ce fluide par l'intermédiaire de son rotationnel.



Translation simple à gauche, rotation à droite menant à du tourbillon

Un écoulement est dit non tourbillonnaire (ou irrotationnel) si le vecteur tourbillon est nul en tout point. Dans le cas contraire, l'écoulement est dit tourbillonnaire.

Structure tourbillonnaire (exemple de la tornade) :

Cette structure correspond à une situation bidimensionnelle où le fluide tourne autour de l'axe des z avec une vitesse orthoradiale $\vec{v} = v(r,\theta)\vec{u}_\theta$.

On suppose le fluide incompressible.

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 \ \ pour \ 0 < r < a \\ 0 \quad pour \ r > a \end{cases}$$

On peut déterminer le vecteur vitesse à partir de :

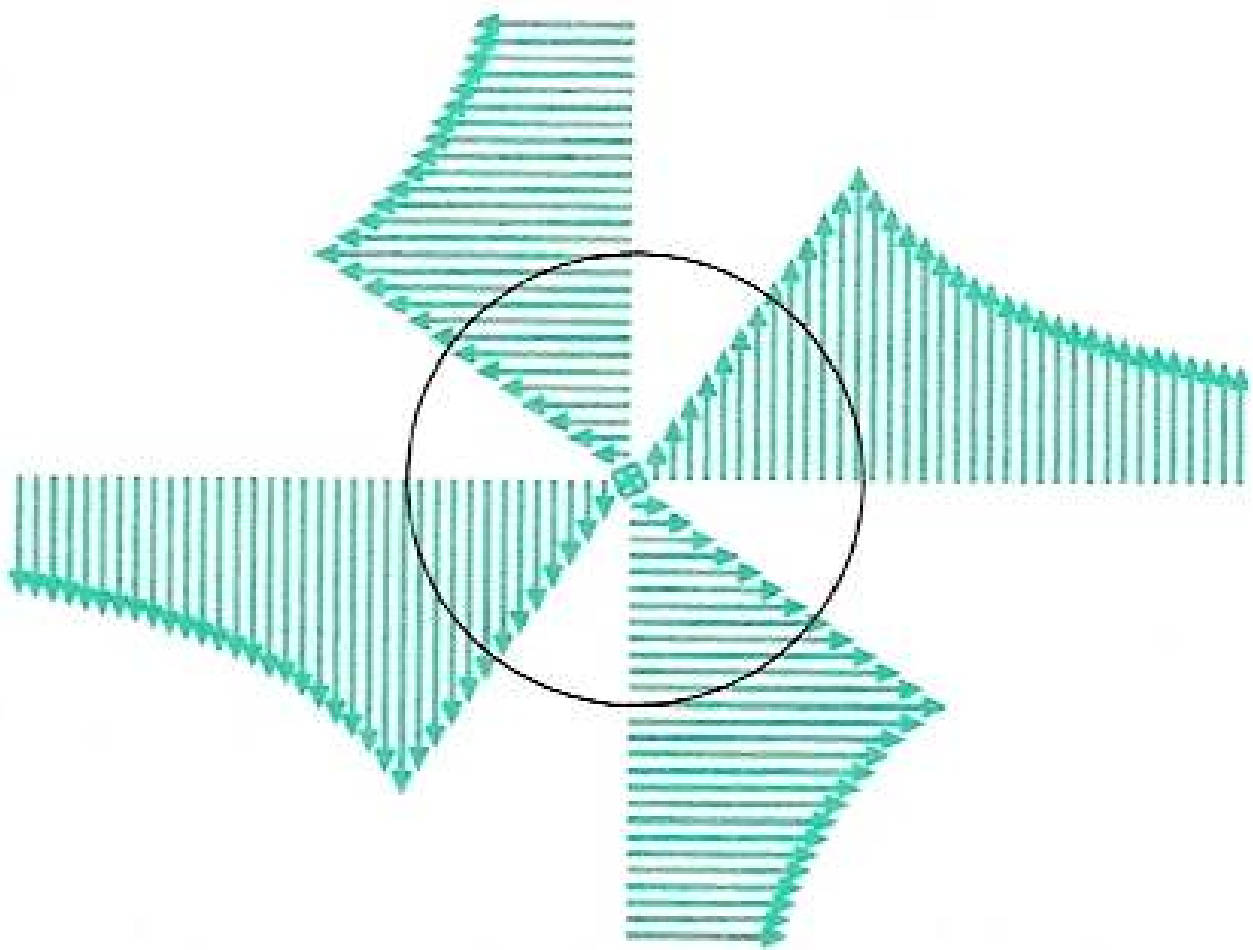
$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rv(r)\right]\vec{u}_z$$

* Pour r < a :

$$2\pi r v(r) = 2\omega_0 \pi r^2 \qquad soit \qquad \boxed{v(r) = \omega_0 r}$$

* Pour r > a :

$$2\pi r v(r) = 2\omega_0 \pi a^2 \qquad soit \qquad \boxed{v(r) = \frac{\omega_0 a^2}{r}}$$



Champ des vitesses d'une tornade.

4 – Equation locale de conservation de la masse et conséquences :

a) Débit volumique, débit massique :

On appelle débit volumique D_v à travers une surface (S) orientée, le volume de fluide qui traverse (S) par unité de temps, compté positivement dans le sens du vecteur normal à la surface et négativement dans le cas contraire.

Ce débit vaut :

$$\boxed{D_v = \iint_{(S)} \vec{v}.\vec{n}\, dS}$$

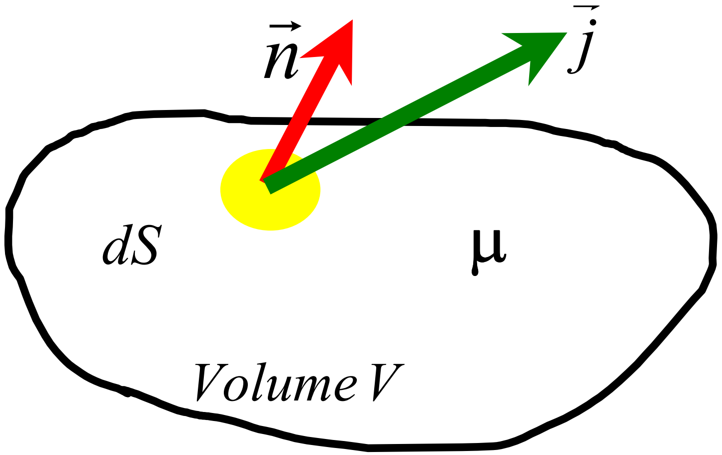
Le débit massique D_m correspond à la masse de fluide qui traverse (S) par unité de temps, compté positivement dans le sens du vecteur normal à la surface et négativement dans le cas contraire :

$$\boxed{D_m = \iint_{(S)} \mu\, \vec{v}.\vec{n}\, dS = \iint_{(S)} \vec{j}.\vec{n}\, dS}$$

avec $\vec{j} = \mu\, \vec{v}$ (vecteur densité de courant ou vecteur densité de flux de masse de l'écoulement).

b) Equation locale de conservation de la masse :

On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude).

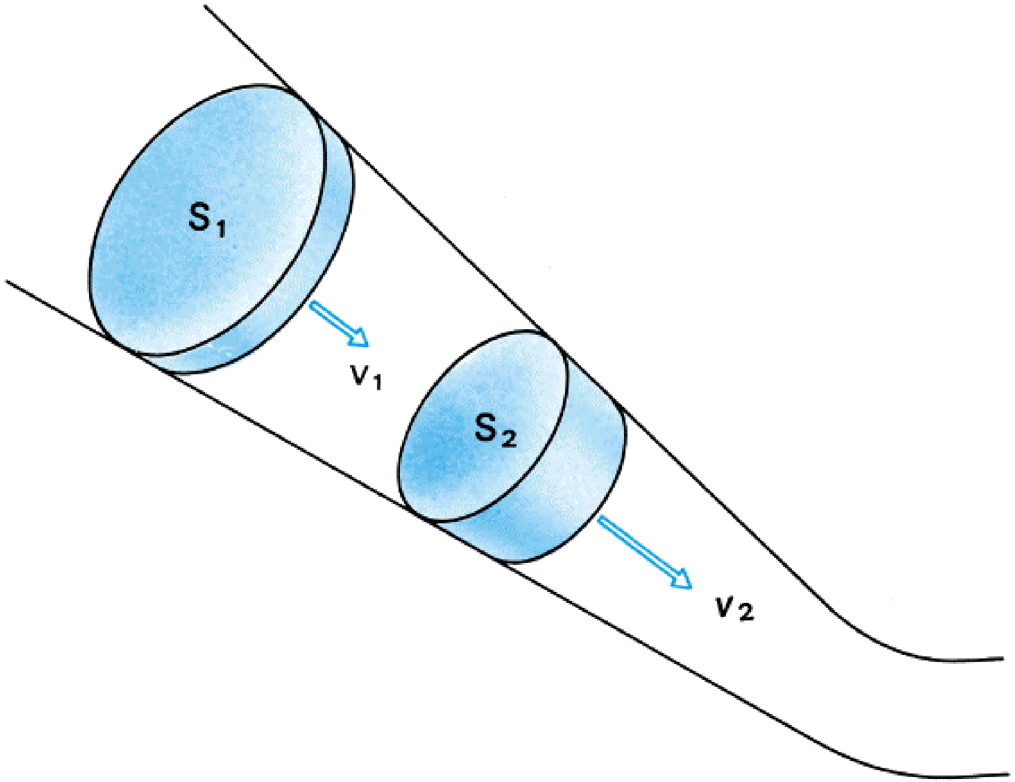


$$\boxed{\frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} + div\vec{j} = 0}$$

C'est l'équation locale de conservation de la masse.

Conséquences pour les écoulements stationnaires :

le flux de $\vec{j}$ est conservatif : $\boxed{div\vec{j} = 0}$



$$\boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2}$$

Ainsi, lorsque les lignes de champ d'un écoulement se resserrent, la norme du vecteur vitesse augmente.

5 – Ecoulements non tourbillonnaires, potentiel des vitesses :

Un écoulement non tourbillonnaire est tel qu'en tout point de l'espace :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$$

On peut alors définir (à une constante près) un potentiel des vitesses, noté Φ, par :

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{grad}\Phi}$$

Si l'écoulement est de plus incompressible :

$$div(\vec{v}) = 0 \qquad donc \qquad \boxed{div(\overrightarrow{grad}\Phi) = \Delta\Phi = 0}$$

Le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace.

III) Equations dynamiques locales des fluides parfaits :

1 – Forces volumiques, forces massiques :

Dans l'hypothèse du fluide parfait, on néglige les forces de viscosité.

Un élément de fluide de volume dτ et de masse dm est soumis à des forces de représentation massique ou volumique selon l'expression :

$$d\vec{f} = \vec{f}_m \, dm = \vec{f}_v \, d\tau \qquad (avec : \vec{f}_v = \mu \, \vec{f}_m)$$

Exemples :

- Forces de pesanteur :

$$\vec{f}_m = \vec{g} \qquad ; \qquad \vec{f}_v = \mu \, \vec{g}$$

- Forces de pression :

$$d\vec{f} = -\overrightarrow{grad}P \, d\tau \quad ; \quad \vec{f}_v = -\overrightarrow{grad}P \quad ; \quad \vec{f}_m = -\frac{1}{\mu}\overrightarrow{grad}P$$

2 – Equation d'Euler, applications :

Dans un référentiel galiléen (R), la relation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule de fluide de masse dm dont on suit le mouvement et soumise aux forces $d\vec{F}$ s'écrit :

$$dm\,\frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F}$$

Or :

- $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$

- $d\vec{F} = -\overrightarrow{grad}P\,d\tau + \vec{f}_v\,d\tau$

- $dm = \mu\,d\tau$

D'où l'équation d'Euler :

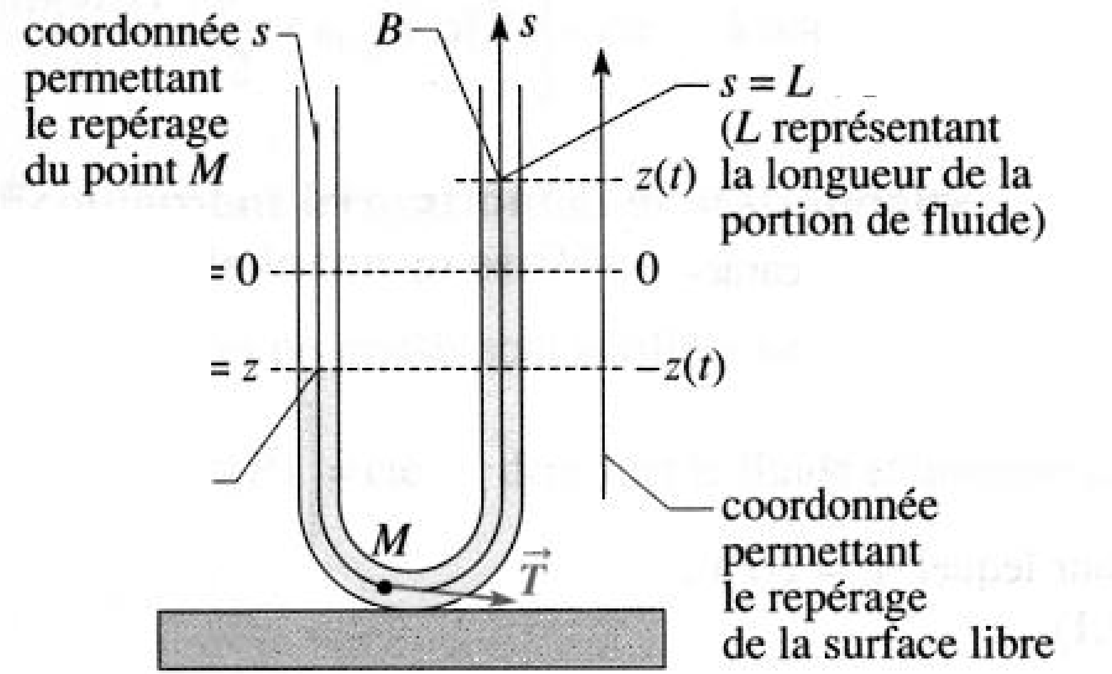
$$\boxed{\mu\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}=-\overrightarrow{grad}P+\vec{f}_v}$$

Ou encore :

$$\boxed{\mu\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\mu\,\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\mu\,\overrightarrow{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}=-\overrightarrow{grad}P+\vec{f}_v}$$

- ***Oscillations d’un fluide dans un tube en U :***

On souhaite étudier les oscillations d'un fluide incompressible dans un tube en U de faible section en intégrant l’équation d’Euler le long d’une ligne de courant. On suppose que les surfaces libres restent dans les parties rectilignes et verticales du tube.



À la date t, la vitesse d’un point M du fluide est donnée en formalisme d’EULER par l’expression suivante :

$$\vec{v}(M,t) = \dot{z}(t)\,\vec{T}\,.$$

3 – Relations de Bernoulli, applications :

On suppose dans la suite que la seule force volumique (autre que les forces de pression) est le poids.

- ***Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène :***

$$\boxed{\frac{1}{2}\mu\, v^2 + \mu\, gz + P = C}$$

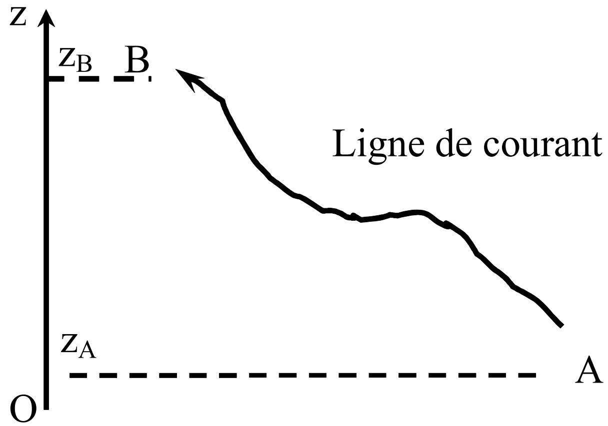
(Théorème de Bernoulli)

On remarque que $\frac{1}{2}\mu\, v^2$ et $\mu\, gz$ désignent les énergies volumiques cinétique et potentielle (de pesanteur), homogènes à une pression.

- ***Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène :***

On renonce à l'hypothèse « irrotationnel ». Alors :

$$\mu\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}\wedge\vec{v}) = -\overrightarrow{grad}\left(\mu\frac{v^2}{2}+\mu\,gz+P\right)$$



$$\boxed{\frac{1}{2}\mu\,v_A^2+\mu\,gz_A+P_A=\frac{1}{2}\mu\,v_B^2+\mu\,gz_B+P_B}$$

Ainsi, l'abandon de l'hypothèse « irrotationnel » restreint le théorème de Bernoulli aux points A et B d'une même ligne de courant.

- ***Interprétation énergétique du théorème de Bernoulli :***

On se place dans le cas d'un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène. Alors :

$$\frac{1}{2}\mu\, v^2 + \mu\, gz + P = C$$

En multipliant par le volume $d\tau$ d'une particule de fluide :

$$\boxed{\frac{1}{2}\mu\, d\tau\, v^2 + \mu\, d\tau\, gz + P\, d\tau = Cste}$$

On reconnaît :

- $\mu\, d\tau\, gz$: énergie potentielle de pesanteur de la particule de fluide.
- $\frac{1}{2}\mu\, d\tau\, v^2$: énergie cinétique de la particule de fluide.
- $P\, d\tau$: énergie potentielle associée aux forces de pression.

Applications :

- **Ecoulement permanent et lent d'un fluide compressible :**

Peut-on appliquer le théorème de Bernoulli sous sa forme la plus simple à un fluide compressible comme l'air ?

On rappelle la définition du coefficient de compressibilité

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} \quad (à\ T = cste)$$

Il peut encore s'écrire en fonction de la masse volumique : $\left(\mu = \frac{m}{V}\right)$

$$\chi_T = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dP}$$

On suppose qu'il est possible de négliger les variations de μ pour un écoulement permanent où la vitesse varie entre 0 et v_{max}.

D'après le théorème de Bernoulli (en l'absence de variation de la cote z), la pression varierait entre P_{min} et P_{max} avec :

$$P_{\max} = P_{\min} + \Delta P = P_{\min} + \mu \frac{v_{\max}^2}{2}$$

Une telle variation de pression est compatible avec l'hypothèse si la variation de μ qui lui est liée est faible en valeur relative, soit si :

$$\Delta\mu \approx \chi_T \mu \Delta P = \chi_T \mu^2 \frac{v_{\max}^2}{2} << \mu \qquad \textit{soit} \qquad v_{\max}^2 << \frac{2}{\chi_T \mu}$$

Or :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu\chi}}$$

correspond à l'ordre de grandeur de la vitesse du son dans le fluide.

Par conséquent, en ordre de grandeur :

$$v_{\max} << c$$

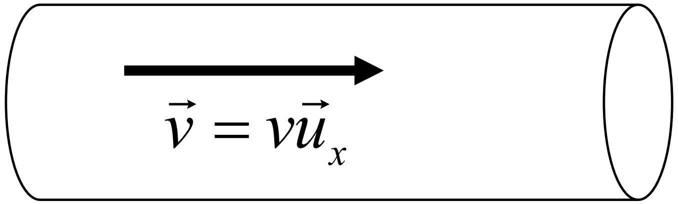
Il est donc possible d'appliquer la relation de Bernoulli la plus simple (écoulement parfait stationnaire, homogène et irrationnel) à un fluide compressible, dans la mesure où la vitesse d'écoulement reste très inférieure à la vitesse de propagation du son dans ce fluide.

• Jet homocinétique à l'air libre :

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible sous forme :

* d'un jet libre, c'est-à-dire sans aucun contact avec une surface rigide ou un autre fluide ;

* de vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ (Ce jet est dit homocinétique).



Jet homocinétique

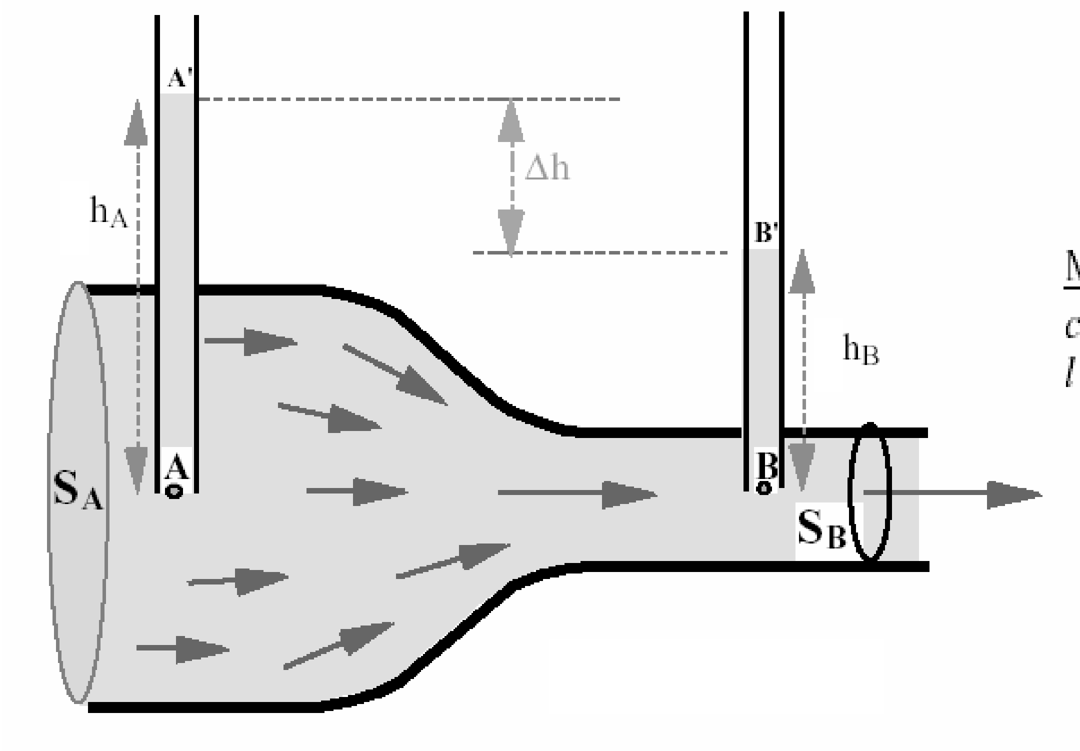
On suppose que les seules forces intervenant sont les forces de pression ; la relation de Bernoulli s'écrit, dans tout le jet :

$$\frac{1}{2}\mu v^2 + P = cste$$

La vitesse étant la même en tout point du jet, il en est de même de la pression. Aux bords du jet, au contact de l'atmosphère, la pression vaut P_0. C'est donc la pression en tout point du jet.

Dans un jet homocinétique à l'air libre, la pression est uniforme et égale à celle existant dans le milieu extérieur. On admettra ce résultat pour tout jet à l'air libre.

- **Le phénomène de Venturi :**

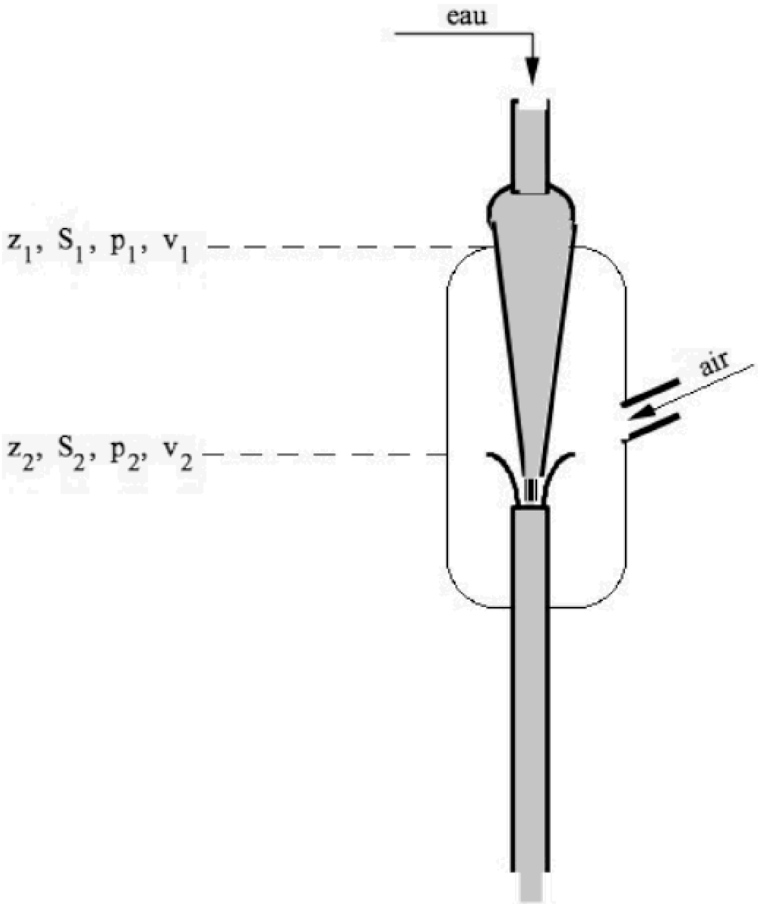


<u>Mnémotechnique:</u> file d'attente au restaurant universitaire. Etudiants *compressés* dans la partie large à *écoulement faible* puis étudiants *"à l'aise"* dans la partie étroite à *écoulement plus rapide*.

Et le débit volumique D_v vaut :

$$\boxed{D_v = S_A v_A = S_A \sqrt{\frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} 2g(h_A - h_B)}}$$

Principe de la trompe à eau :



Au niveau de l'étranglement de la canalisation, l'eau s'écoule avec une plus grande vitesse qu'en 1 selon la conservation du débit.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

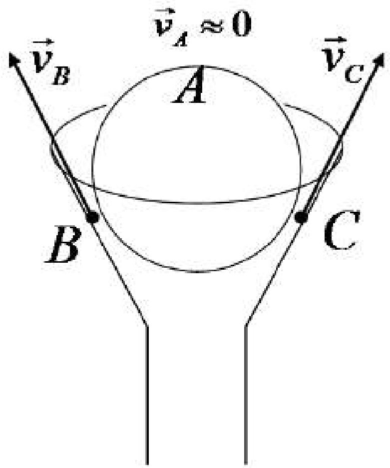
Il en résulte une diminution importante de la pression statique. En effet, selon Bernouilli :

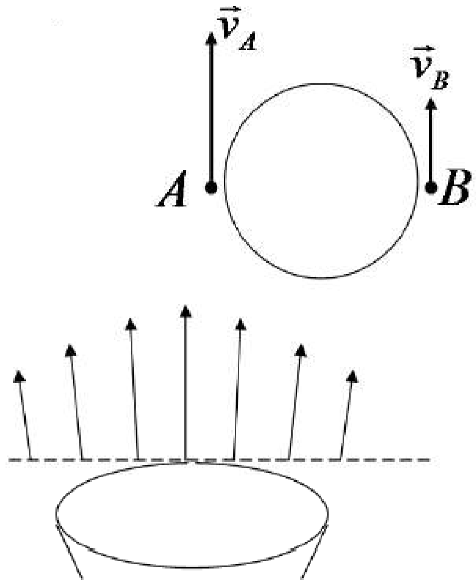
$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

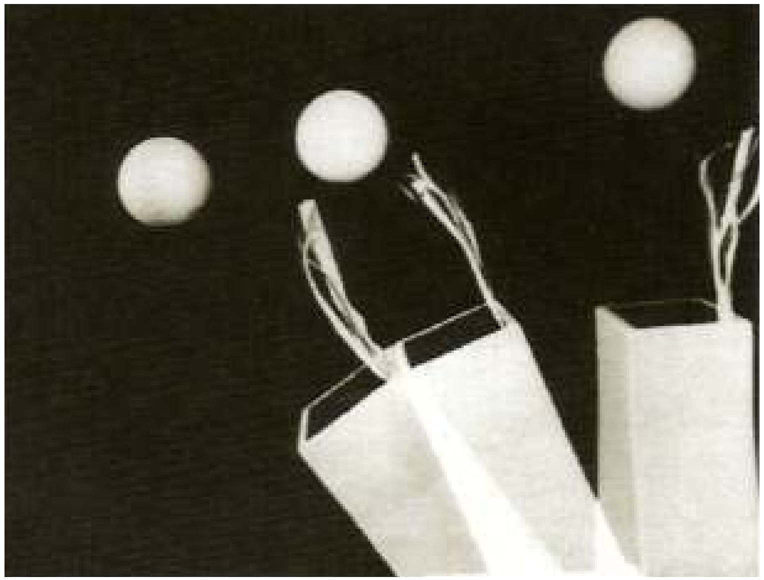
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1)$$

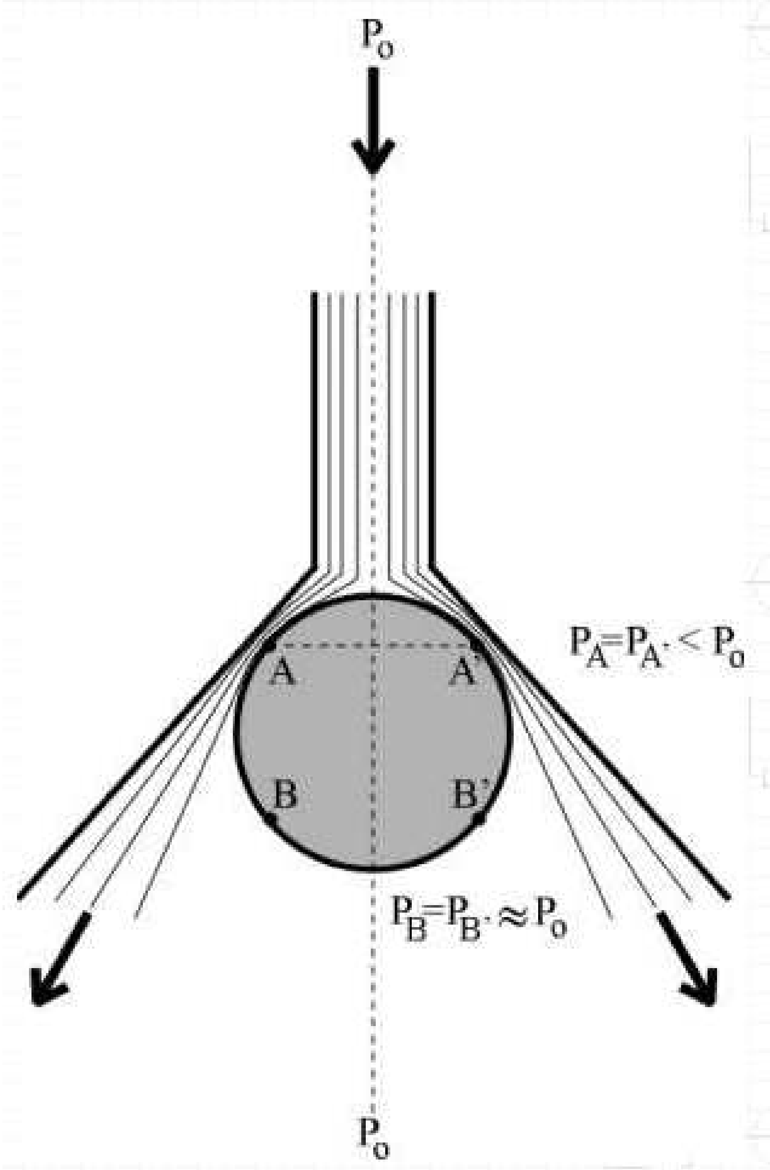
négligeable

d'où $\boxed{p_2 << p_1}$


$\vec{v}_A \approx 0$
$\vec{v}_B$
$\vec{v}_C$
A
B
C

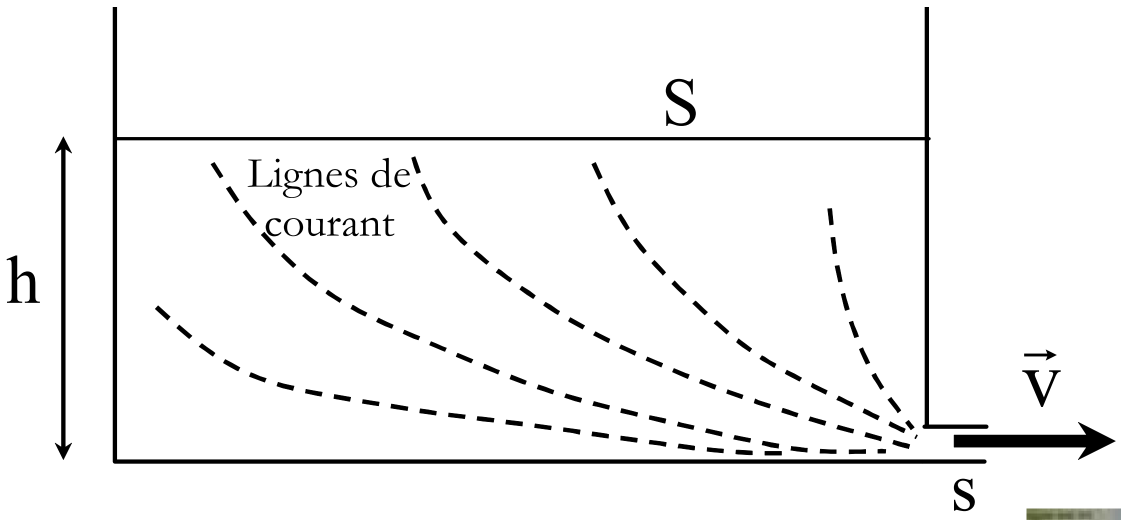

$\vec{v}_A$
$\vec{v}_B$
A
B





P_o
A
A'
$P_A = P_{A'} < P_o$
B
B'
$P_B = P_{B'} \approx P_o$
P_o

Vidange d'un réservoir ; formule de Torricelli :



$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Pourquoi se placer en régime quasi – stationnaire ?

On compare l'accélération locale et l'accélération convective :

$$\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\| \approx \frac{v}{\tau} \qquad \text{et} \qquad \left\|(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right\| \approx \frac{v^2}{h}$$

où v est un ordre de grandeur du champ des vitesses et τ la durée caractéristique de variation temporelle de ce champ.

La conservation du débit volumique entre la surface libre et le trou donne :

$$-S\frac{dh}{dt} = sv \qquad \text{soit} \qquad S\frac{h}{\tau} \approx sv$$

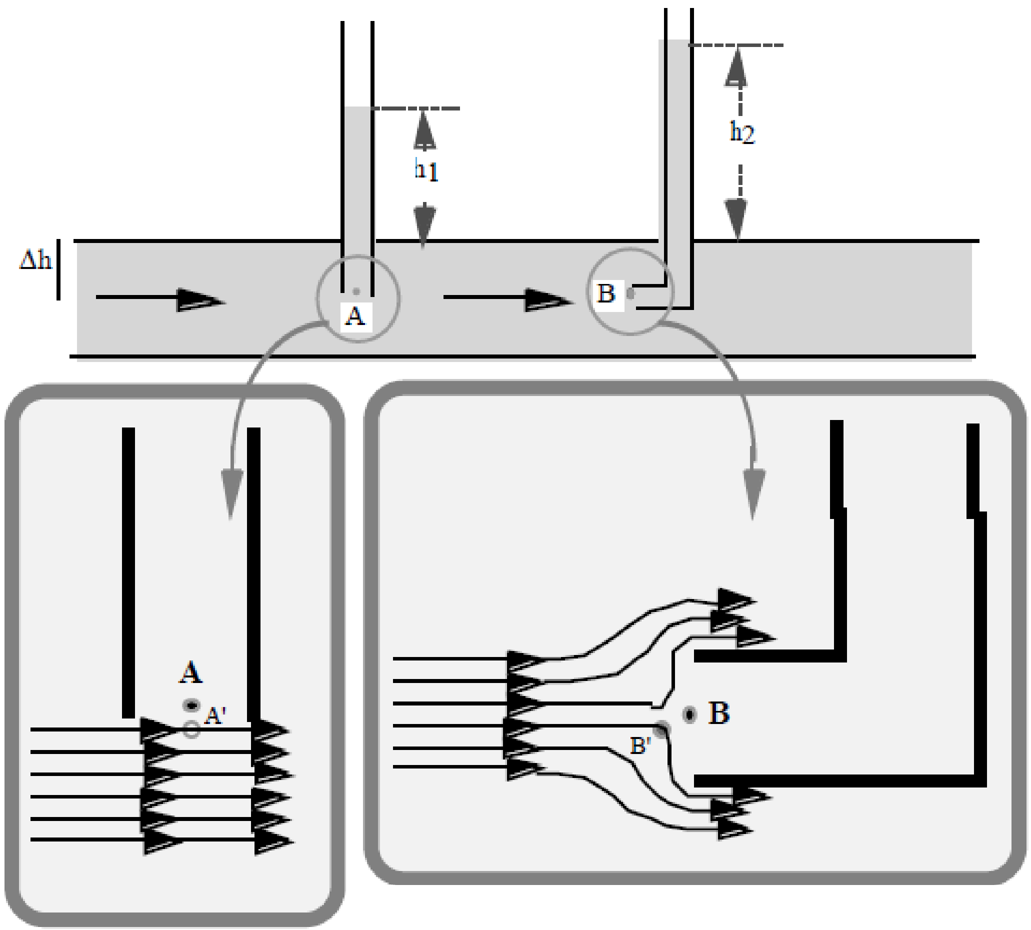
D'où :

$$\frac{\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|}{\left\|(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right\|} \approx \frac{\frac{v}{\tau}}{\frac{v^2}{h}} = \frac{h}{\tau v} = \frac{h}{v}\left(\frac{v}{h}\frac{s}{S}\right) = \frac{s}{S} << 1 \qquad \text{(hypothèse validée)}$$

- **Le tube de Pitot (Ingénieur français, XVIIIème siècle) :**

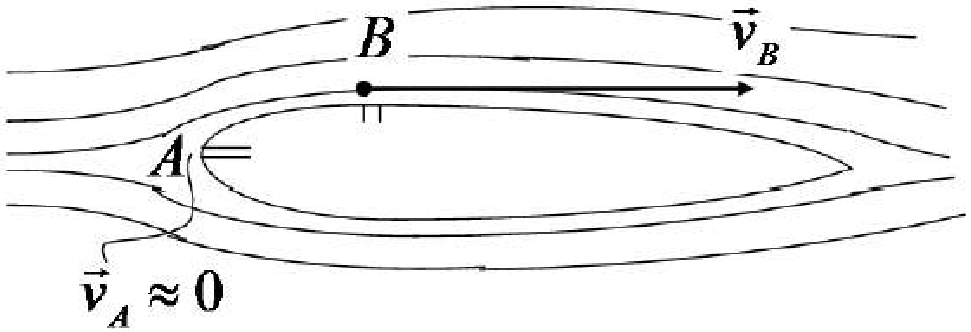
Remarque ; influence de l'orientation de l'ouverture d'un tube :

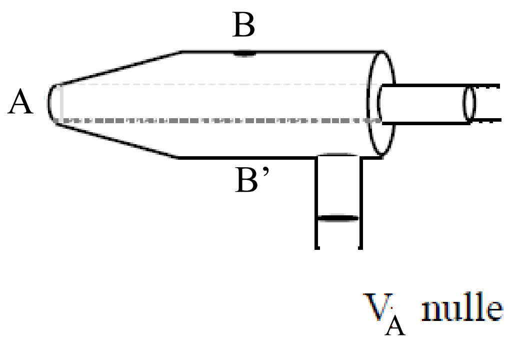
On place deux tubes dans un écoulement liquide, comme précisé sur la figure.

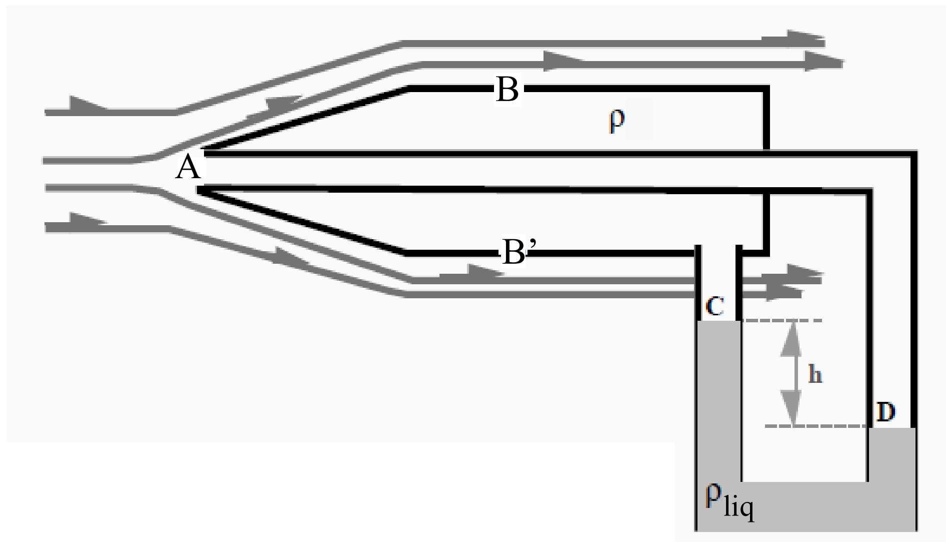


Sonde Pitot :

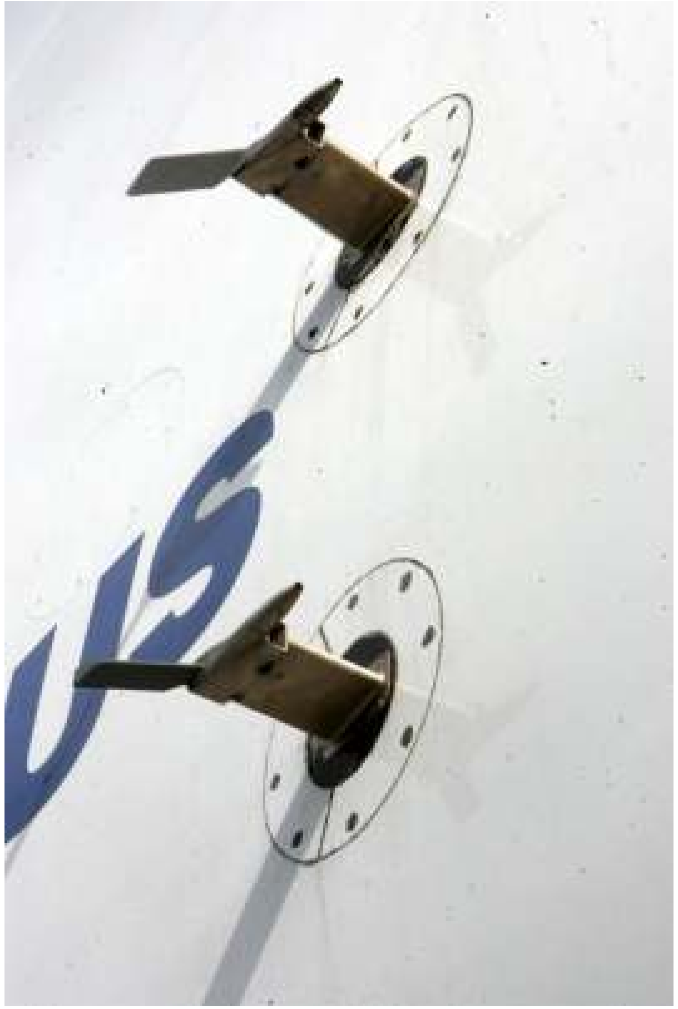
On place un obstacle dans un écoulement d'air (voir figure).

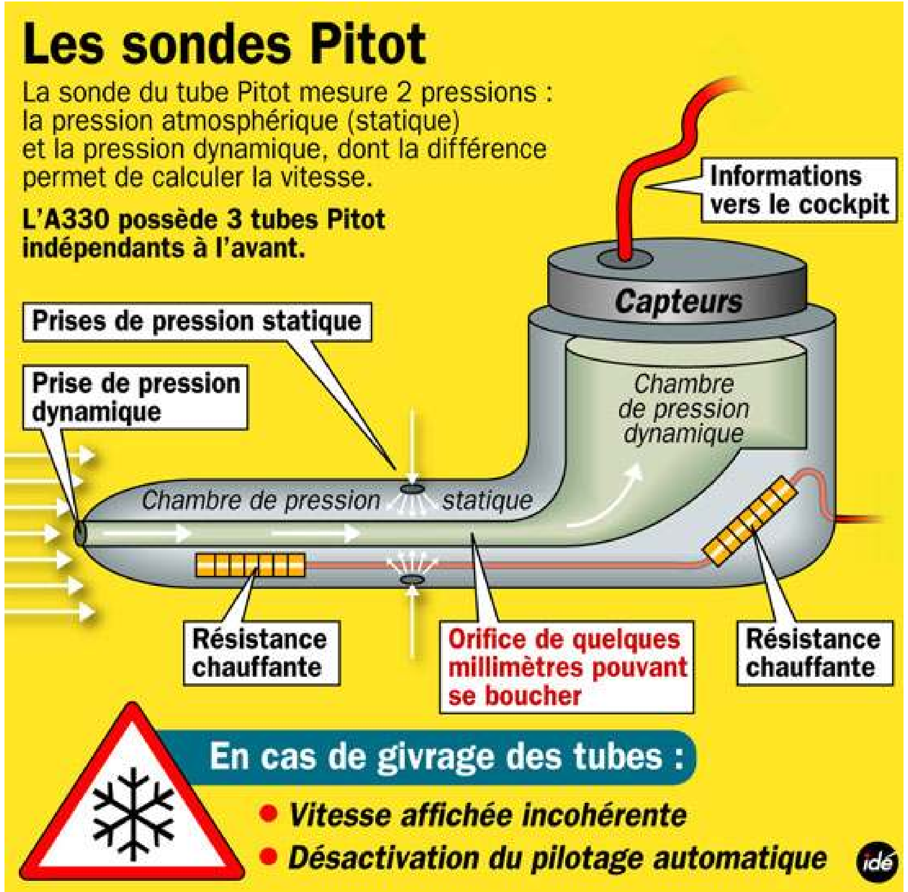






$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh\frac{\rho_{lid}}{\rho}}}$$

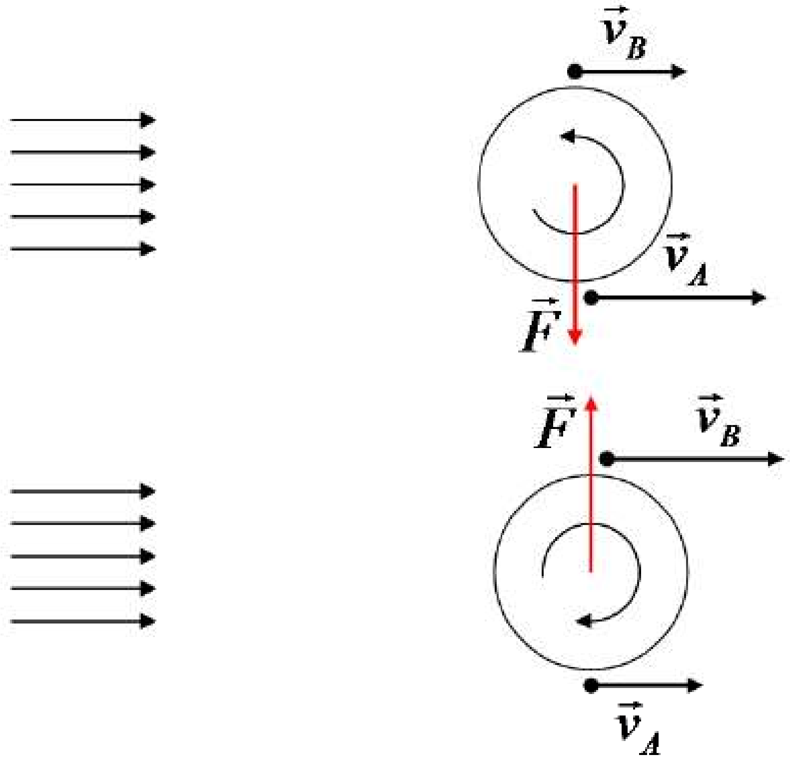




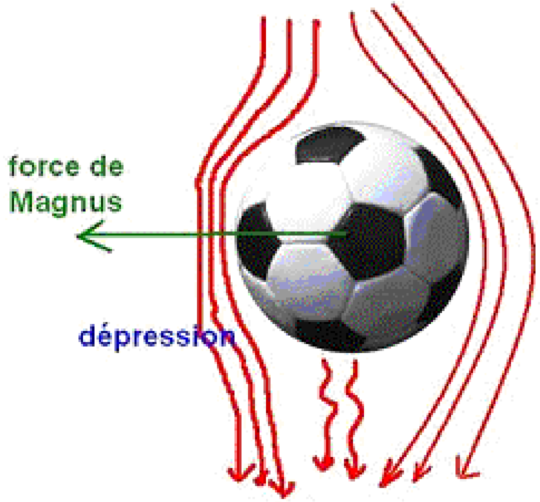
Les sondes Pitot
La sonde du tube Pitot mesure 2 pressions : la pression atmosphérique (statique) et la pression dynamique, dont la différence permet de calculer la vitesse.
L'A330 possède 3 tubes Pitot indépendants à l'avant.
Informations vers le cockpit
Capteurs
Prises de pression statique
Prise de pression dynamique
Chambre de pression dynamique
Chambre de pression statique
Résistance chauffante
Orifice de quelques millimètres pouvant se boucher
Résistance chauffante
En cas de givrage des tubes :
Vitesse affichée incohérente
Désactivation du pilotage automatique

- **Effet Magnus et application aux effets dans les balles de tennis et les ballons de foot :**

On se place dans le référentiel barycentrique du ballon : le ballon tourne donc autour d'un axe passant par le barycentre de la balle et le fluide se déplace par rapport à ce référentiel.



Dessin du haut : lift – Dessin du bas : slice
(Attention, les figures sont tracées dans le référentiel barycentrique de la balle).


force de
Magnus
dépression


Étape
laminaire
Trajectoire droite
apparente
Étape
turbulente

[Voir vidéos]

Exercice sur l'effet Magnus :

L'écoulement incompressible et permanent d'un fluide parfait autour d'un cylindre de rayon R en rotation de vitesse angulaire ω autour de son axe Oz est donné par le le potentiel des vitesses en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\varphi(r,\theta) = V\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) r\cos\theta + \frac{C}{2\pi}\theta} \text{ dans la convention } \vec{v} = +\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$$

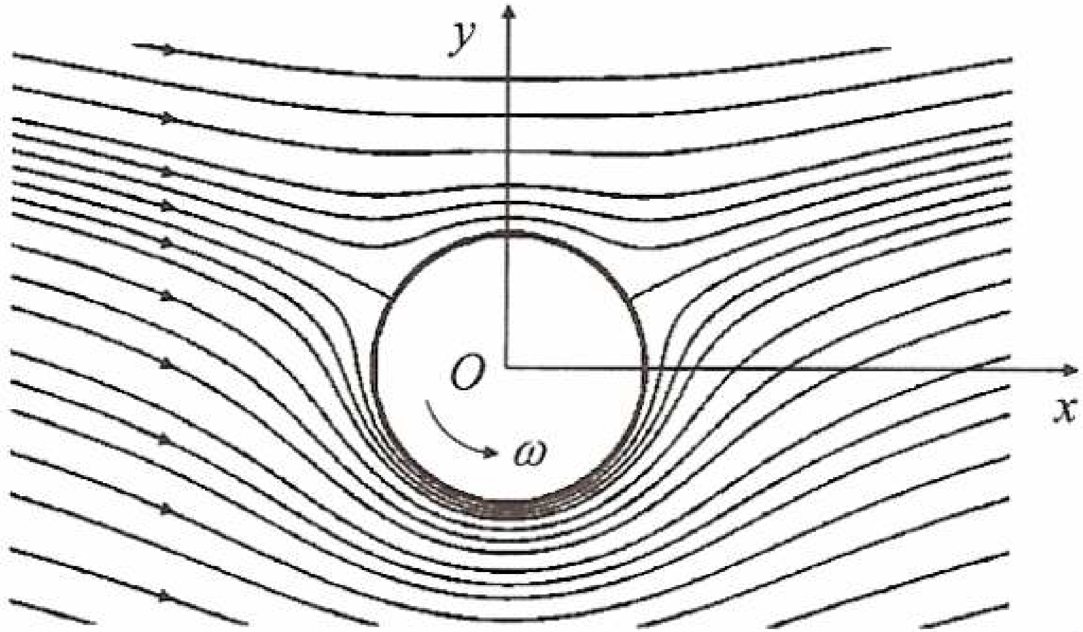
où $\vec{V} = V\vec{u}_x$ est la vitesse uniforme du fluide loin du cylindre et $C = 2\pi R^2\omega$ la circulation du vortex suite à la rotation du cylindre ; ce potentiel satisfait toutes les conditions aux limites.

a) Sachant qu'au loin $P = P_0$, donner le champ de pression $P(\theta)$ sur le cylindre.

b) À l'aide d'un dessin, prévoir d'abord qualitativement le sens de la force par unité de longueur qu'exerce le fluide en écoulement autour du cylindre, puis établir son expression $\dfrac{d\vec{F}}{dz} = -\rho C V \vec{u}_y$; comment peut-elle s'écrire à l'aide d'un produit vectoriel ? À quel paradoxe aboutit-on lorsque le cylindre ne tourne pas ?

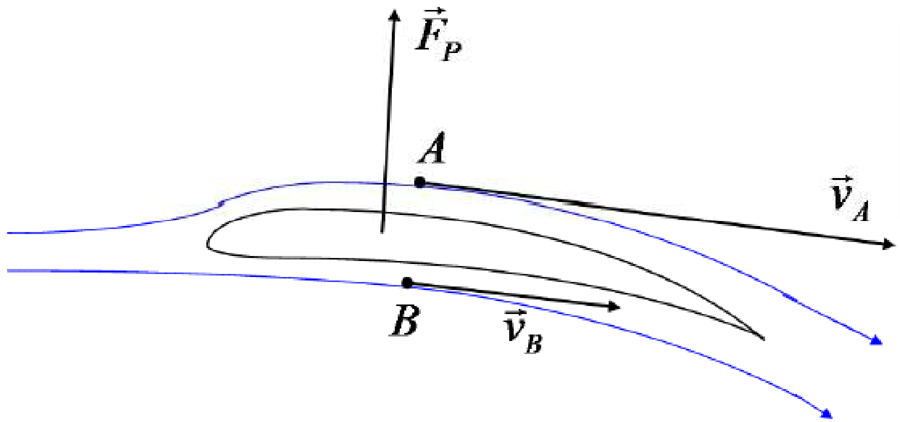
$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P_0 = \frac{1}{2}\rho\left(-2V\sin\theta + \frac{C}{2\pi R}\right)^2 + P(\theta)$$

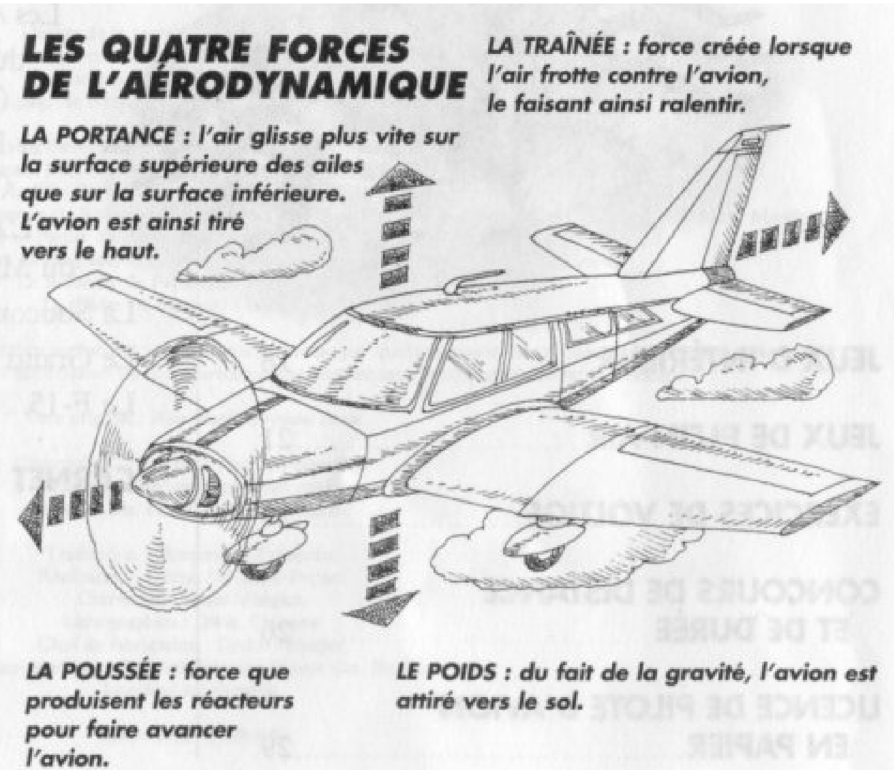
$$\boxed{P(\theta) = P_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 - \rho\frac{C^2}{8\pi^2 R^2} + \rho\frac{VC}{2\pi R}\sin\theta - 2\rho V^2\sin^2\theta}$$

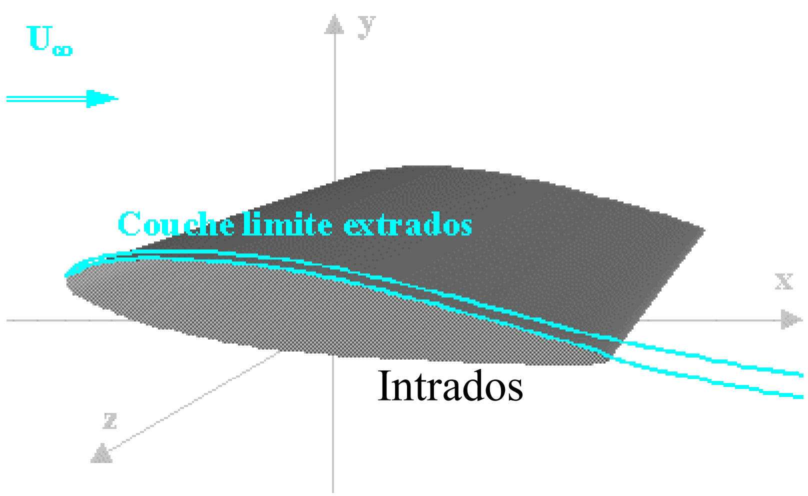


$$\boxed{\vec{F}/h = 2\pi\,\rho R^2 \vec{V} \wedge \vec{\omega}}$$

• **Portance des avions :**



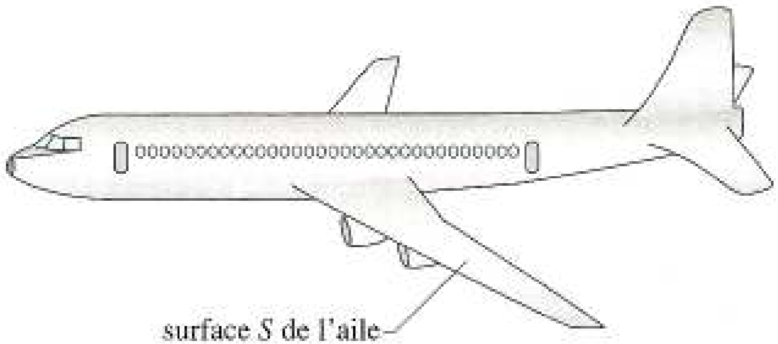




Portance de l'aile d'un Boeing :

Le but est d'évaluer la portance d'une aile en fonction de sa surface S, de la masse volumique ρ du fluide et de la vitesse V de l'avion.

1) En utilisant l'analyse dimensionnelle, déterminer le type de dépendance de la portance par unité de surface de l'aile d'un avion en fonction des grandeurs suivantes : V la vitesse de l'avion, et ρ la masse volumique du fluide dans lequel l'avion se déplace.

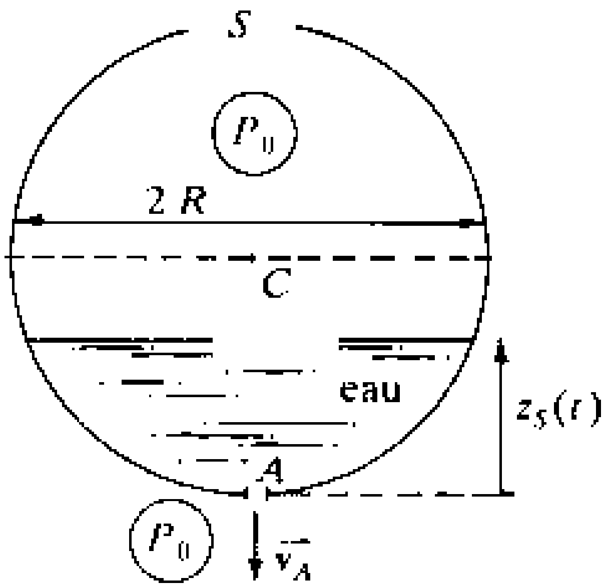


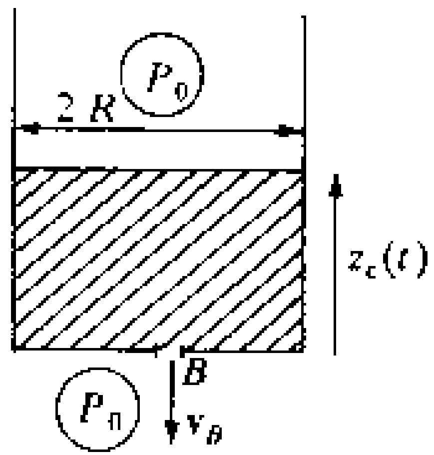
2) Un Boeing dont la masse est voisine de $1{,}5.10^5$ kg, et la surface des ailes d'environ $2{,}8.10^2\ \mathrm{m}^2$, vole à une altitude de 11 km (où la densité de l'air est voisine de $0{,}37\ \mathrm{kg.m^{-3}}$) avec une vitesse de croisière de l'ordre de $2{,}5.10^2\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Préciser la réponse de la question **1)**.

* Durée de vidange d'un réservoir sphérique et clepsydre :

Un réservoir de forme sphérique, de rayon R = 40 cm, est initialement rempli à moitié d'eau de masse volumique $\mu = 10^{3}\ \mathrm{kg.m}^{-3}$; la pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de la surface libre de l'eau grâce à une ouverture pratiquée au sommet S du réservoir.





On ouvre à t = 0 un orifice A circulaire de faible section $s = 1\ \mathrm{cm}^2$ au fond du réservoir.

a) Etablir l'équation différentielle en z(t), si z(t) est la hauteur d'eau dans le réservoir comptée à partir de A, à l'instant t.

b) Exprimer littéralement, puis calculer, la durée T_S de vidange de ce réservoir.

c) Exprimer, en fonction de T_S, le temps nécessaire t_s pour vider la moitié du réservoir.

d) Clepsydre :

Soit un récipient (R_0) à symétrie de révolution autour de l'axe Oz, de méridienne d'équation $r = az^n$, où r est les rayon du réservoir aux points de cote z comptée à partir de l'orifice C, de faible section s = 1 cm^2 percé au fond du réservoir.

Déterminer les coefficients constants n et a, donc la forme de (R_0), pour que le cote du niveau d'eau placée dans (R_0) baisse régulièrement de 6 cm par minute au cours de la vidange.

IV) Ecoulements d'un fluide réel ; viscosité d'un fluide et nombre de Reynolds :

Préliminaires : forces de viscosité : (cas des fluides newtoniens)

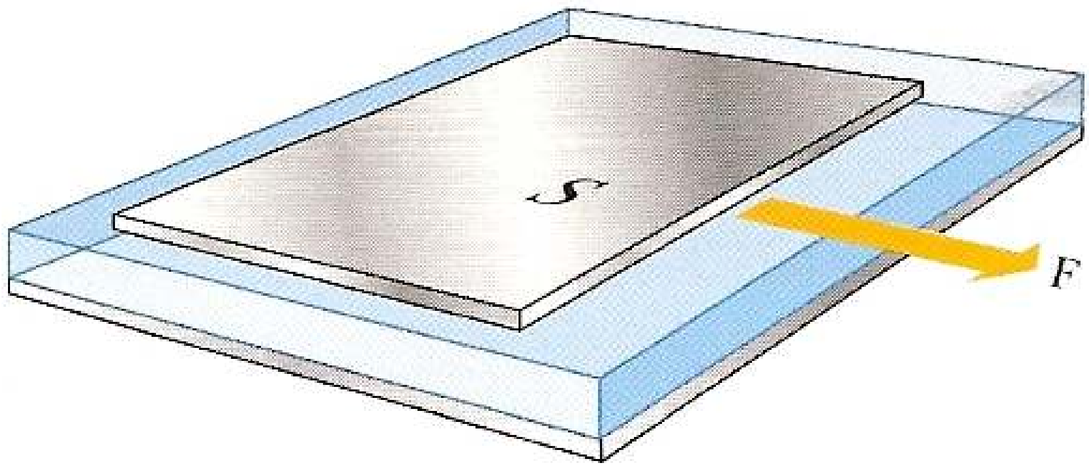
On étudie un cas simple où les plans parallèles à (Oxz) glissent les uns sur les autres (voir figures).

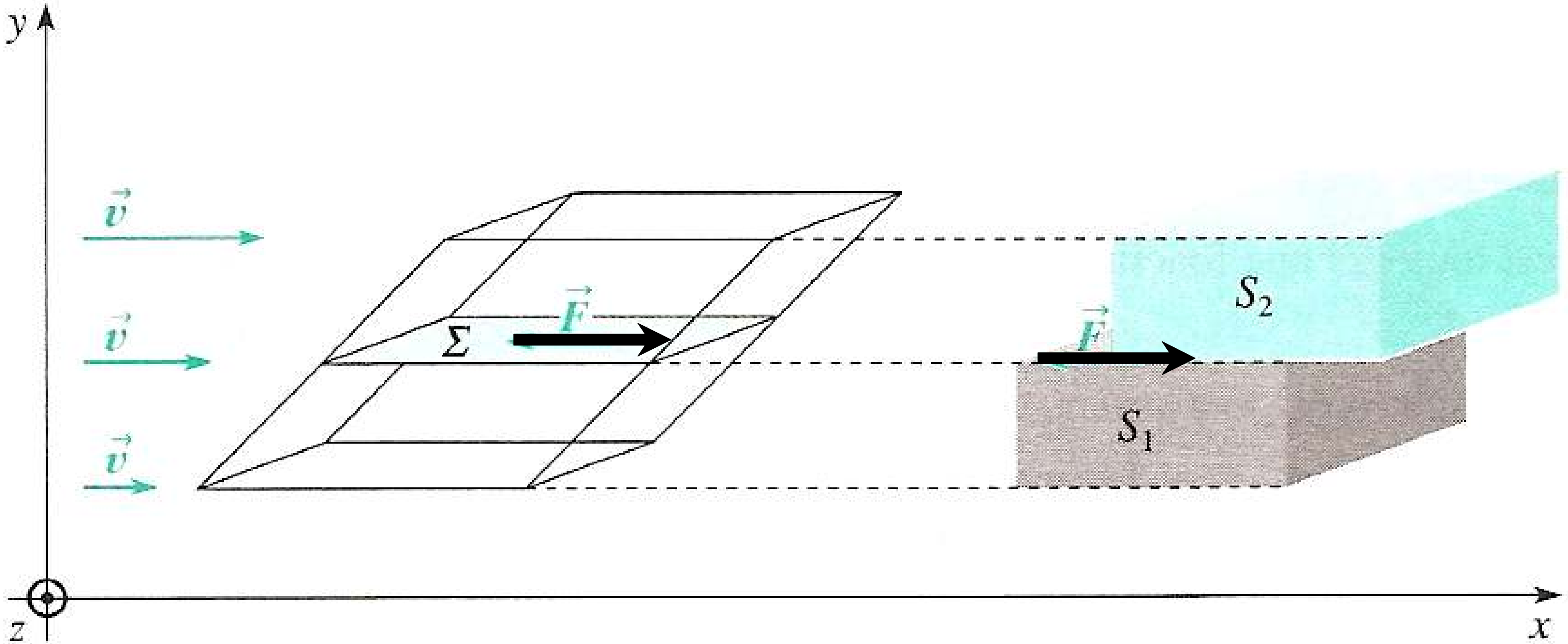
Ce cas est une bonne approximation de la réalité lorsque les dimensions de l'écoulement selon (Ox) et (Oz) sont grandes vis-à-vis de l'épaisseur de la couche de fluide.

On suppose que le vecteur vitesse peut s'écrire sous la forme (voir figure) :

$$\boxed{\vec{v} = v(y,t)\vec{u}_x}$$

(y représente la profondeur)





La vitesse est ici une fonction croissante de y. La force de cisaillement $\vec{F}$ exercée par S_2 sur S_1
s'oppose à la déformation du système constitué par S_1 et S_2.

Pour un écoulement unidirectionnel, tel que $\vec{v} = v(y,t)\vec{u}_x$, la force de surface tangentielle $\vec{F}$, appelée force de cisaillement ou de viscosité, qui s'exerce à travers une surface d'aire S normale à $\vec{u}_y$ vaut (il s'agit de la force exercée par la « veine » supérieure sur la veine inférieure) :

$$\boxed{\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} S\, \vec{u}_x}$$

La viscosité a pour effet, dans un écoulement unidirectionnel, d'accélérer les éléments lents et de freiner les éléments rapides.

Il s'agit donc d'un transfert interne de quantité de mouvement, qui présente les caractéristiques d'une diffusion de quantité de mouvement.

Le coefficient η, appelé coefficient de viscosité dynamique du fluide, peut être, avec une bonne approximation être considéré comme une constante caractéristique du fluide à une température donnée.

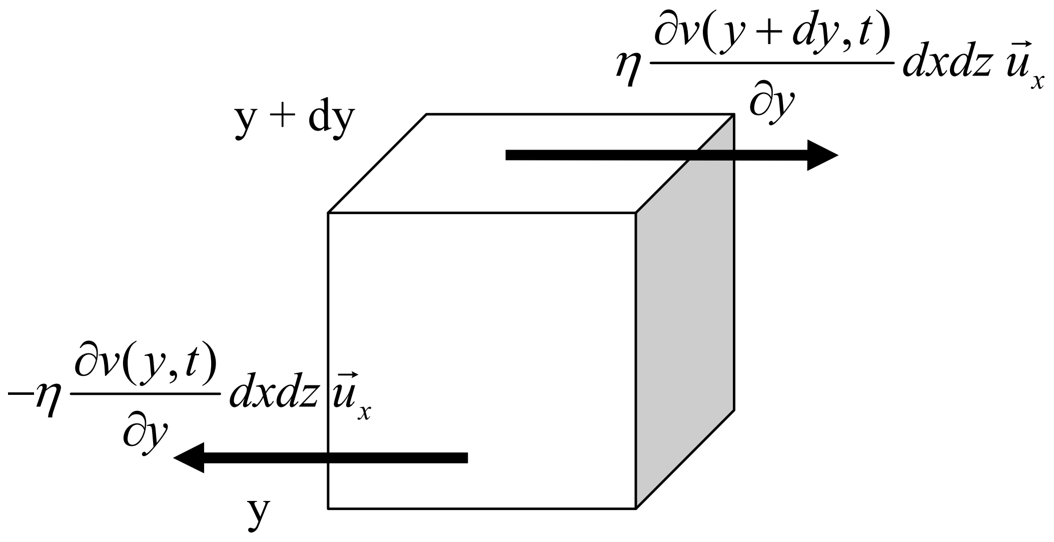
L'unité pour le coefficient de viscosité dynamique est le poiseuille (symbole Pl, égal à 1 Pa.s).

Quelques exemples (dans les conditions normales) :

Corps pur	Eau	Air	Glycérine
Viscosité	$1{,}0.10^{-3}$ Pl	$1{,}0.10^{-5}$ Pl	1,4 Pl

Equivalent volumique des forces de viscosité :

On considère un « pavé » de fluide de volume dx.dy.dz.



On suppose que le champ des vitesses peut encore s'écrire sous la forme :

$$\vec{v} = v(y,t)\, \vec{u}_x$$

Pour un champ des vitesses quelconque, nous admettrons que ce résultat se généralise sous la forme :

$$\boxed{\vec{f}_{vis} = \frac{d\vec{F}_{vis}}{d\tau} = \eta\, \Delta\vec{v}}$$

1 – Constatations expérimentales :

La démarche consiste à partir de constatations expérimentales.

1 – Il existe une force de résistance au cisaillement du fluide.

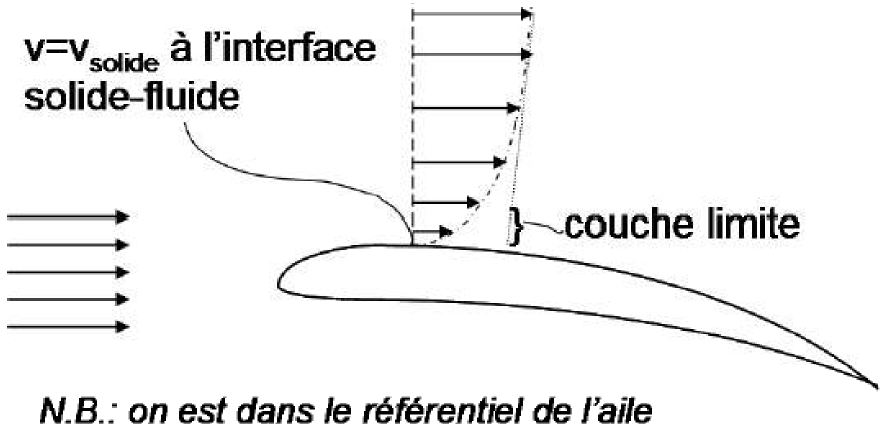
2 – A l'interface fluide – solide, $\vec{v}_{fluide} - \vec{v}_{solide} = \vec{0}$

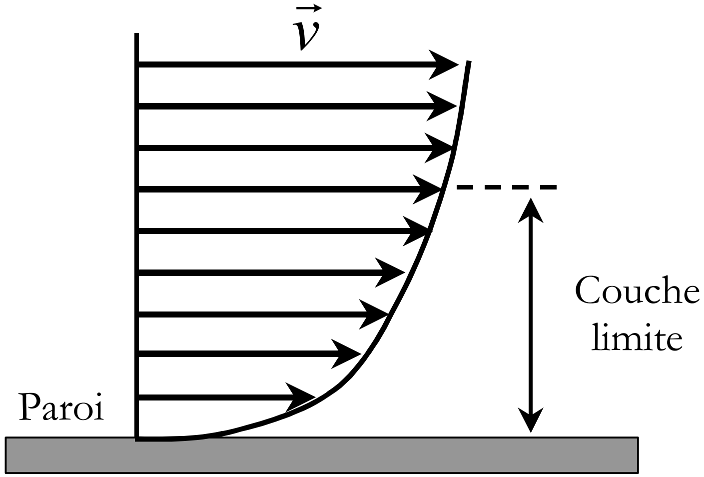
Dans le cas d'un fluide parfait, il n'y a pas de condition aux limites particulière pour la vitesse tangentielle d'une particule de fluide sur une paroi solide : elle peut, en particulier, être différente de 0 (la composante normale sera toujours nulle).

Pour un fluide visqueux, il faudra par contre écrire la nullité de la composante tangentielle à la surface de l'obstacle :

$$\boxed{\vec{v}_{\tan}(fluide / paroi) = \vec{0}} \qquad \text{(Vitesse tangentielle)}$$

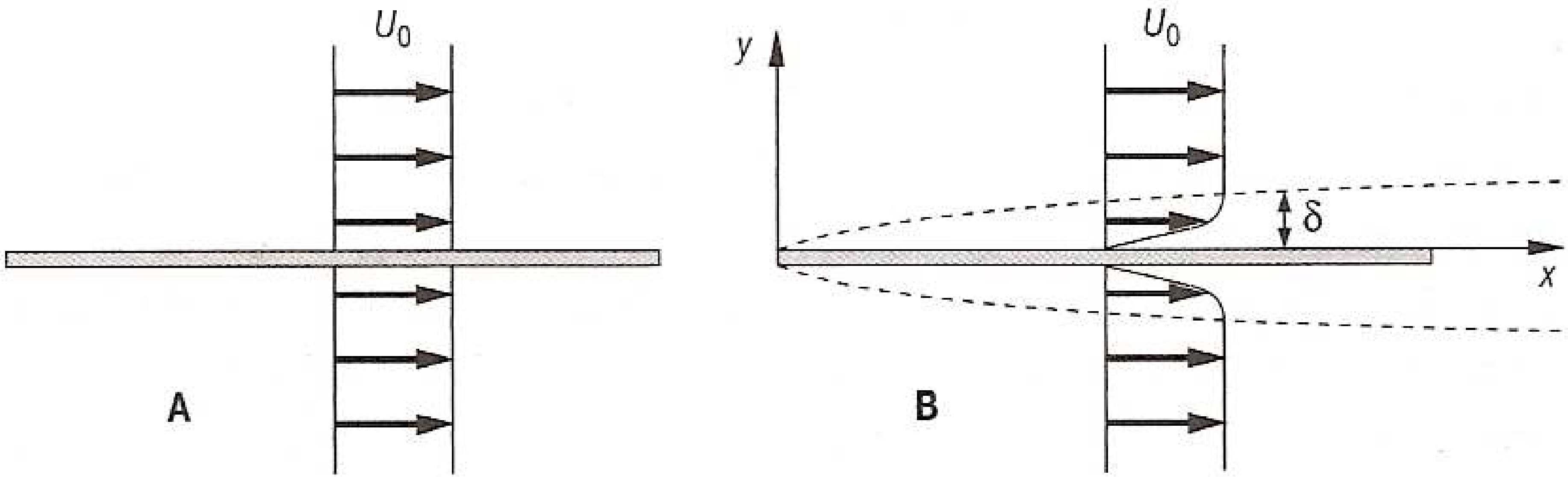
Il apparaît une couche limite au voisinage de l'interface solide – fluide dans laquelle la vitesse tangentielle va progressivement s'annuler.





Finalement, la différence essentielle entre fluide parfait et fluide visqueux apparaît dans l'existence de « couches limites » (plus ou moins épaisses) au contact des parois solides.

A l'intérieur de ces couches, la vitesse tangentielle d'un fluide visqueux passe progressivement d'une valeur nulle (sur la paroi) à une valeur prédite de manière acceptable par le modèle du fluide parfait.



On considère une plaque carrée de côtés L, en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{v} = -U_0\vec{u}_x$.

Dans la couche limite, les frottements dominent et le terme de diffusion de quantité de mouvement est prépondérant. En dehors, c'est au contraire le terme de convection qui l'emporte.

A la surface de la couche limite, ces deux termes seront du même ordre de grandeur, soit :

$$\left\| \rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}) \right\| \approx \left\| \eta\Delta\vec{v} \right\|$$

Calculs d'ordre de grandeur : (classiques en mécanique des fluides)

$$\vec{v} \approx v(x,y,t)\,\vec{u}_x$$

$$\left\| \rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \right\| \approx \left| \rho(v\frac{\partial}{\partial x})v \right| \approx \rho \frac{U_0^2}{L} \qquad \left\| \eta \Delta \vec{v} \right\| \approx \eta \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| \approx \eta \frac{U_0}{\delta^2}$$

D'où :

$$\rho \frac{U_0^2}{L} \approx \eta \frac{U_0}{\delta^2} \qquad soit \qquad \delta \approx \sqrt{\frac{\eta L}{\rho U_0}} \approx \sqrt{\frac{\nu L}{U_0}}$$

Le nombre de Reynolds vaut :

$$R_e = \frac{\rho L U_0}{\eta} = \frac{L U_0}{\nu} \qquad \left(\nu = \frac{\eta}{\rho}, \text{ viscosité cinématique} \right)$$

D'où l'épaisseur de la couche limite :

$$\boxed{\delta \approx \frac{L}{\sqrt{R_e}}}$$

Par exemple, pour une aile d'avion :

$$L = 5\ m \quad ; \quad U_0 = 50\ m.s^{-1} \quad ; \quad \nu = 1,5.10^{-5}\ m^2.s^{-1}$$

Alors :

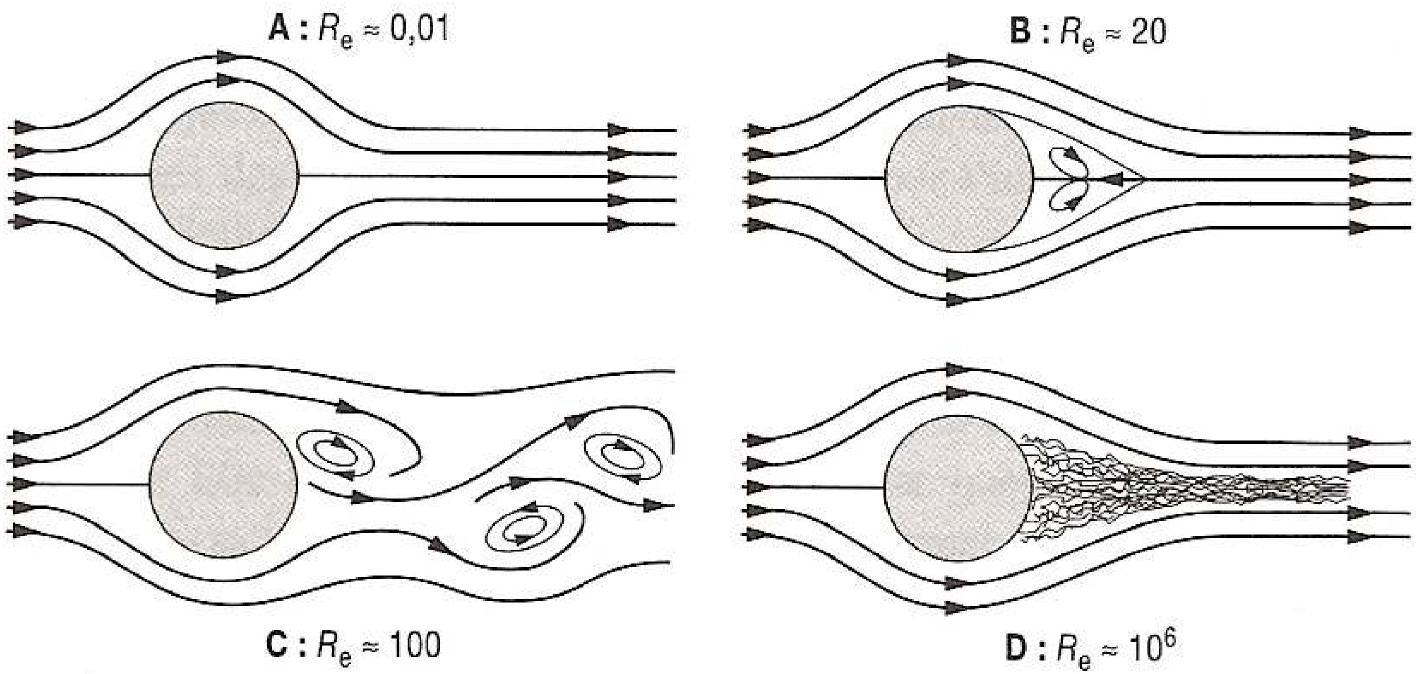
$$R_e = 1,7.10^7 \qquad \text{et} \qquad \delta = 1,2\ \text{mm}$$

L'épaisseur est très faible et on peut dire que le modèle de l'écoulement parfait est valable dans tout l'espace.

Par contre, si le nombre de Reynolds est faible (< 1 par exemple), alors δ > L : dans ce cas, la viscosité est primordiale (écoulement par exemple de miel sur une cuillère).

Ecoulement laminaire et écoulement turbulent :

Lorsque le vecteur vitesse d'un écoulement $\vec{v}(r,t)$ varie erratiquement (d'un point à l'autre à t fixé, ou en un point donné en fonction du temps), on dit que l'écoulement est turbulent. La vitesse de l'écoulement est généralement « élevée ».



Dans le cas contraire, l'écoulement est qualifié de laminaire : il peut être décrit comme un ensemble de lames ou de couches glissant les unes sur les autres. La vitesse de l'écoulement est alors « faible ».

2 – Equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible (équation de Navier-Stokes) :

Le principe fondamental de la mécanique appliqué à une particule de fluide et en tenant compte de la force de viscosité conduit à l'équation de Navier – Stokes :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}(P)+\rho\vec{g}+\eta\Delta\vec{v}}$$

C'est l'équation de Navier – Stokes pour les fluides incompressibles :

On a également :

$$\boxed{\text{div}(\vec{v})=0}$$

$$\boxed{\rho=\text{cste}}$$

La condition aux limites (interface fluide – solide) :

$$\boxed{\vec{v}-\vec{v}_{\text{solide}}=\vec{0}}$$

Analyse en ordre de grandeur de l'équation de Navier – Stockes :

$$\boxed{\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v} = -\overrightarrow{grad}P + \mu\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}}$$

(2^{nde} Newton's law applied to a small fluid particle, with a mass μdτ)

Un liquide s'écoule entre deux plaques planes parallèles carrées de côté a (two stationary squared plates, of side a) confondues avec les plans d'équation $z = \pm e/2$ (avec e << a).

The flow is incompressible and stationary. Gravity is negligible.

We assume :

$$\boxed{P(x,y,z) \;\; et \;\; \vec{v} = v_x(x,y,z)\vec{u}_x + v_y(x,y,z)\vec{u}_y}$$

L'ordre de grandeur (the order of magnitude) de la vitesse est V.

L'échelle caractéristique de ses variations selon (Ox) et (Oy) est a.

L'échelle caractéristique de ses variations selon (Oz) est e.

Simplification de l'équation de Navier – Stockes : $\boxed{\eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = \overrightarrow{grad} P}$

$$\mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v} = \mu\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(v_x(x,y,z)\vec{u}_x + v_y(x,y,z)\vec{u}_y\right)$$

$$\left\|\mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}\right\| \approx 4\mu \frac{V^2}{a}$$

$$\eta\Delta\vec{v} = \left(\eta\Delta v_x\right)\vec{u}_x + \left(\eta\Delta v_y\right)\vec{u}_y$$

$$\left\|\eta\Delta\vec{v}\right\| \approx 2\eta\left(2\frac{V}{a^2} + \frac{V}{e^2}\right) \approx 2\eta\frac{V}{e^2} \qquad (e << a)$$

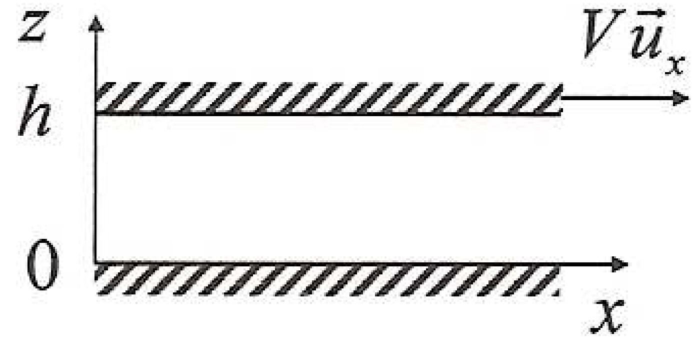
$$\frac{\left\|\mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}\right\|}{\left\|\eta\Delta\vec{v}\right\|} \approx \frac{4\mu\frac{V^2}{a}}{2\eta\frac{V}{e^2}} = 2\frac{\mu V}{\eta}\frac{e^2}{a} << 1 \qquad \left(R_e = \frac{\mu V}{\eta}\frac{e^2}{a}, \text{nombre de Reynolds}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad \eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = \overrightarrow{grad} P}$$ (the viscosity term is relevant)

3 – Exemples de résolution de l'équation de Navier-Stokes :

a) Ecoulement de Couette plan :

Un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η, immobile entre deux plans horizontaux, est mis en mouvement par le seul déplacement du plan supérieur en $z = h$ à vitesse constante $V\vec{u}_x$.



a) Proposer un champ de vitesse raisonnable, en déduire l'équation qu'il vérifie, et estimer la durée τ du régime transitoire. AN pour l'eau et $h = 1$ cm.

b) Déterminer le profil de vitesse du fluide en régime stationnaire et en déduire la force surfacique qu'un opérateur doit exercer sur le plan supérieur pour le déplacer.

a) On cherche un champ des vitesses de la forme :

$$\vec{v} = v(z,t)\vec{u}_x$$

(v(z,t) : ne dépend pas de x car l'écoulement est incompressible et ne dépend pas de y par invariance par translation)

En supposant que la pression ne dépend que de z :

$$\boxed{\nu \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = \frac{\partial v}{\partial t}} \qquad \text{(Equation de diffusion)}$$

Durée du régime transitoire :

$$\boxed{\tau = \frac{h^2}{\nu} = 100\ s}$$

b) En régime stationnaire :

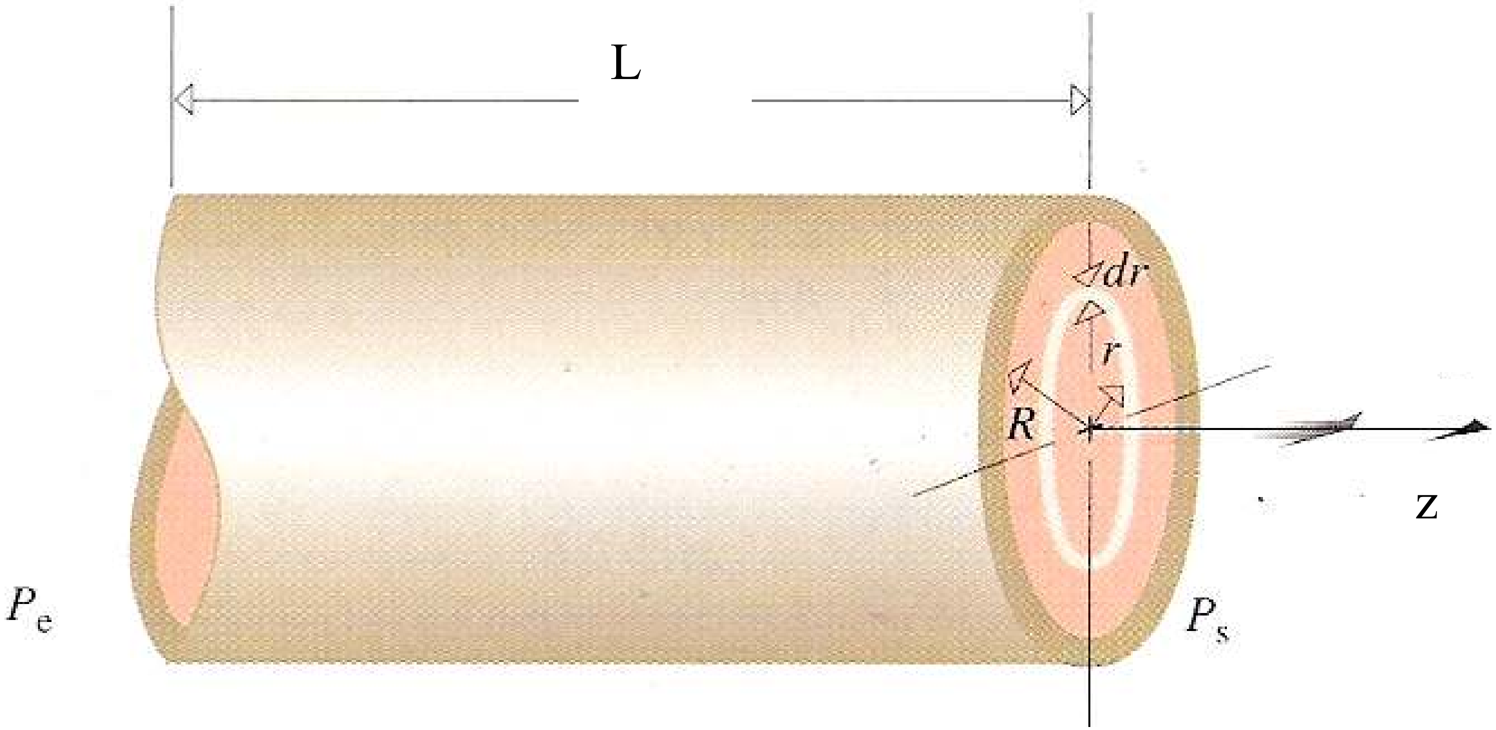
$$\boxed{v(z) = \frac{z}{h} V}$$

Force surfacique exercée par l'opérateur :

$$\boxed{\vec{F}_{opé} = \eta \frac{S}{h} \vec{V}}$$

b) Ecoulement de Poiseuille :

Un fluide visqueux incompressible de densité ρ s'écoule dans un tube cylindrique de longueur L et de rayon R. La pression à l'entrée du tube (z = 0) est P_E. La pression à la sortie du tube est P_S.



On va calculer les champs des vitesses et de pression à l'intérieur du tube :

Champ des vitesses :

$$\vec{v} = v_z(r)\vec{u}_z$$

Equation de Navier – Stokes :

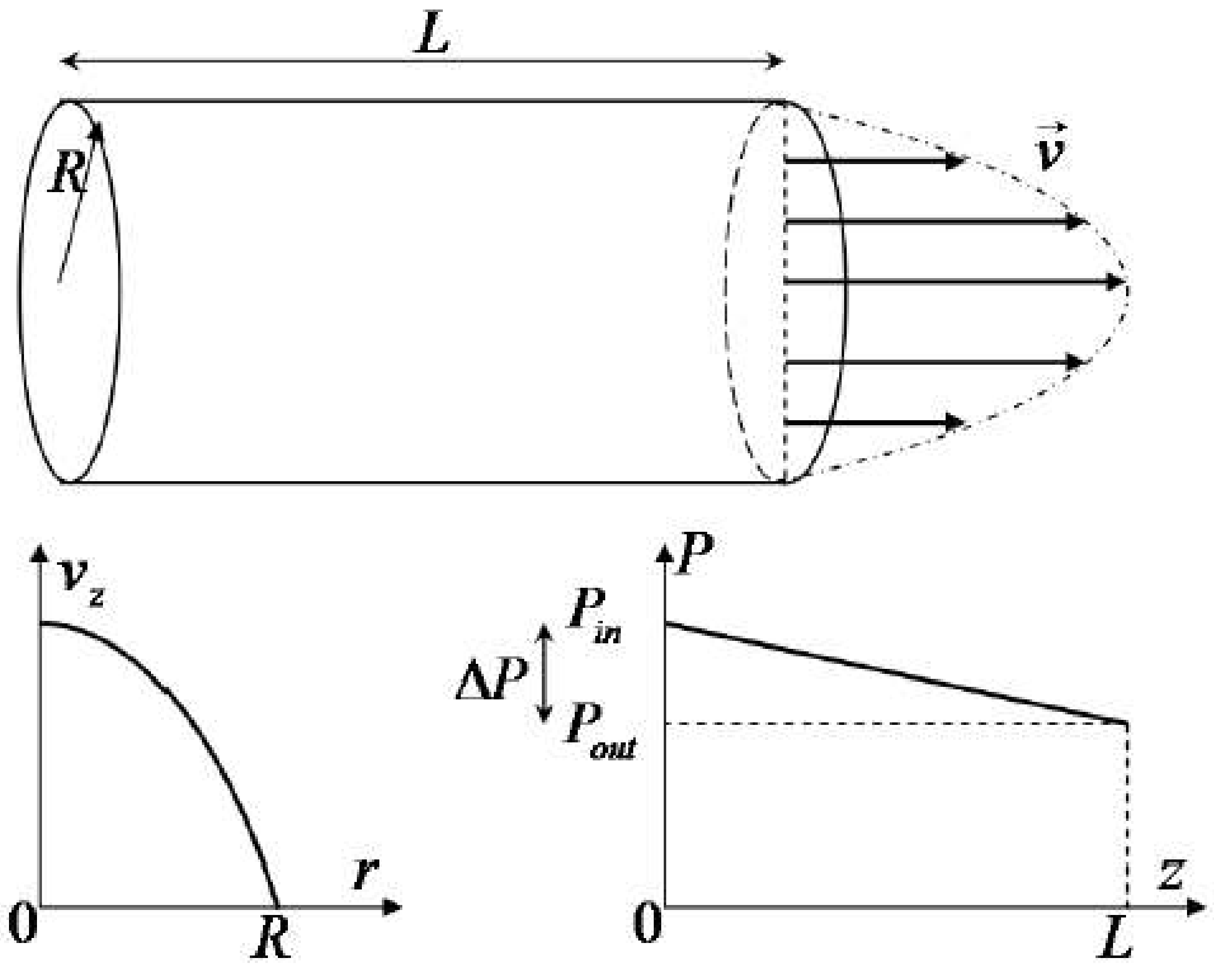
$$-\overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v} = \vec{0}$$

En projection :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \eta \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{\partial r}\right) \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{v_z(r) = \frac{P_E - P_S}{4\eta L}(R^2 - r^2)} \qquad \boxed{\Delta P = \frac{8\eta LD}{\pi R^4}}$$



Ecoulement de Poiseuille : solution stationnaire de l'équation de Navier - Stokes pour un écoulement dans un cylindre.

4 – Autre définition du nombre de Reynolds et interprétation :

La complexité de l'équation de Navier-Stokes :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)+\rho\vec{g}+\eta\Delta\vec{v}}$$

est due essentiellement à deux termes :

- Le terme de convection de quantité de mouvement $\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$, qui rend l'équation non linéaire.

- Le terme de diffusion visqueuse $\eta\Delta\vec{v}$ dû au transfert de quantité de mouvement, qui introduit des dérivées du second ordre.

On considère un écoulement dont les paramètres sont v_∞ (vitesse du fluide loin de l'obstacle) et D une échelle caractéristique des variations spatiales communes aux trois directions (Ox), (Oy) et (Oz) (le diamètre de l'obstacle, par exemple).

L'ordre de grandeur du rapport du terme convectif sur le terme de diffusion vaut :

$$\frac{\left\|\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right\|}{\left\|\eta\Delta\vec{v}\right\|} \approx \frac{\rho\dfrac{v_\infty^2}{D}}{\eta\dfrac{v_\infty}{D^2}} = \frac{\rho D v_\infty}{\eta}$$

Avec $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ (viscosité cinématique du fluide) :

$$\boxed{\frac{\left\|\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right\|}{\left\|\eta\Delta\vec{v}\right\|} \approx \frac{D v_\infty}{\nu} = R_e}$$

R_e est le nombre de Reynolds

L'expérience montre que si $R_e < 2\,000$, l'écoulement est laminaire alors que si $R_e > 4\,000$, il devient facilement turbulent.

$R_e < 2\,000$: écoulement laminaire

$R_e > 4\,000$: écoulement turbulent

$2\,000 < R_e < 4\,000$: écoulement instable, entre le régime laminaire et le régime turbulent

Pour un nombre de Reynolds élevé, les transferts de quantité de mouvement par convection sont plus importants que ceux par diffusion ; cela signifie que le temps caractéristique associé à ces transferts par convection est plus court que celui par diffusion.

Tout se passe comme si la viscosité du fluide était nulle.

Le fluide a un comportement de fluide parfait et son mouvement est régi par l'équation d'Euler :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v} = -\overrightarrow{grad}P + \vec{f}_v$$

Pour un nombre de Reynolds faible, les transferts de quantité de mouvement par diffusion sont plus importants que ceux par convection.

Le temps caractéristique associé à ces transferts par diffusion est plus court que par convection. L'équation de Navier-Stokes devient alors :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} P + \vec{f}_v + \eta \Delta \vec{v}$$

Les écoulements dominés par la viscosité sont toujours des écoulements très lents avec une longueur caractéristique très courte (sève dans les pores des arbres) ou impliquant des fluides très visqueux (écoulements de lave).

Le terme convectif est non linéaire : l'apparition de turbulences a lieu pour des nombres de Reynolds élevés, donc lorsque le terme non linéaire l'emporte nettement sur le terme linéaire (dû à l'aspect diffusif de l'écoulement, c'est-à-dire à la viscosité). C'est donc bien l'aspect non linéaire de l'écoulement qui favorise les turbulences.

5 - Ecoulement autour d'une sphère :

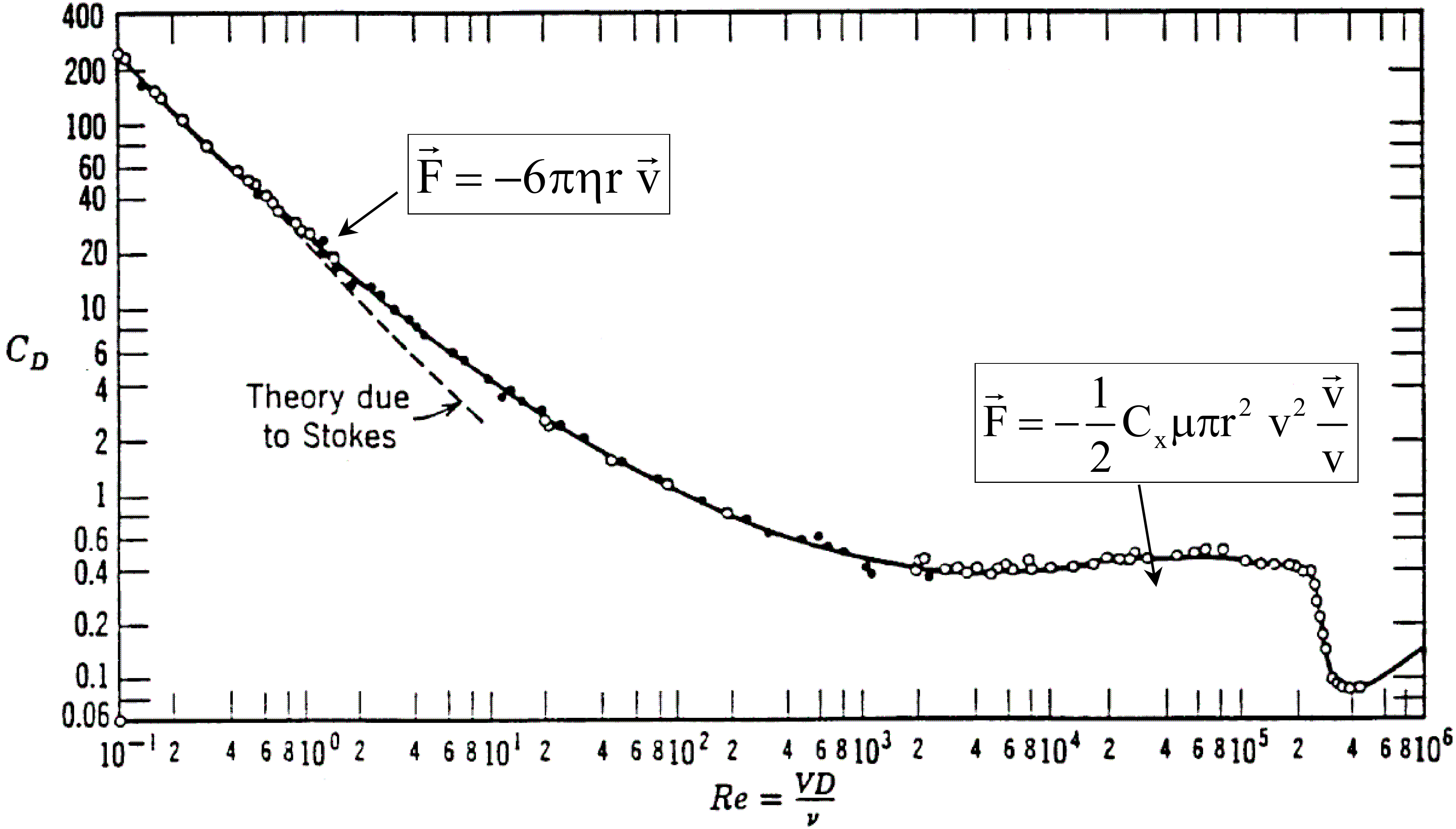
Un fluide exerce sur une sphère en mouvement une force opposée à sa vitesse, appelée « traînée » et notée $\vec{F}$. On note μ la masse volumique du fluide, η sa viscosité dynamique, r le rayon de la sphère et $\vec{v}$ sa vitesse.

Si S (appelé maître – couple) désigne l'aire de la surface obtenue en projetant le solide sur un plan perpendiculaire à l'écoulement, soit ici $S = \pi r^2$:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2} C_x S \mu v_\infty^2}$$

C_x, le coefficient de traînée, est sans dimension et dépend du nombre de Reynolds.

Le graphe suivant donne, en coordonnées logarithmiques, les variations de ce coefficient en fonction du nombre de Reynolds R_E.


$\vec{F} = -6\pi\eta r\,\vec{v}$
Theory due to Stokes
$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x \mu \pi r^2\, v^2 \frac{\vec{v}}{v}$
C_D
$Re = \frac{VD}{\nu}$
400
200
100
60
40
20
10
6
4
2
1
0.6
0.4
0.2
0.1
0.06
10^{-1} 2 4 6 8 10^0 2 4 6 8 10^1 2 4 6 8 10^2 2 4 6 8 10^3 2 4 6 8 10^4 2 4 6 8 10^5 2 4 6 8 10^6

* Si $R_e < 1$: la force de traînée est donnée par la formule de Stokes :

$$\boxed{\vec{F} = -6\pi\eta r\,\vec{v}}$$

C'est la force traditionnelle de frottement fluide, proportionnelle à la vitesse et de sens opposé à celle – ci.

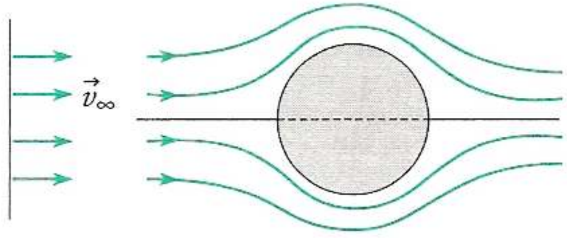
* Si $10^3 < R_e < 10^6$: la force de traînée est donnée par :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x \mu \pi r^2\ v\vec{v}}$$

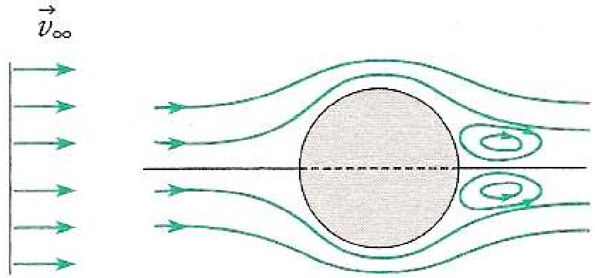
où C_x est le coefficient de traînée (sans dimension), qui dépend de la texture de la sphère.

On retrouve une force de frottement de type quadratique (proportionnelle au carré de la vitesse).

Description qualitative de l’écoulement autour d’une sphère :



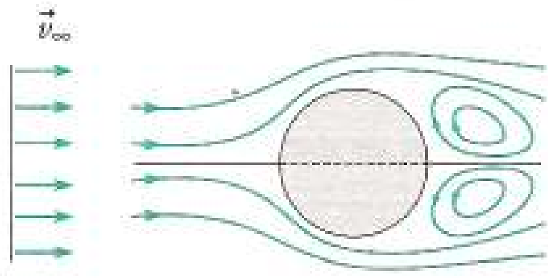
Re < 0,5



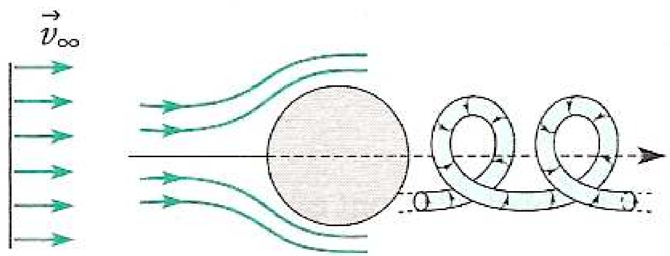
Re ≃ 20

A gauche : pour un nombre de Reynolds faible, l’écoulement est laminaire et quasi-linéaire.

A droite : le tourbillon apparaissant derrière la sphère est torique

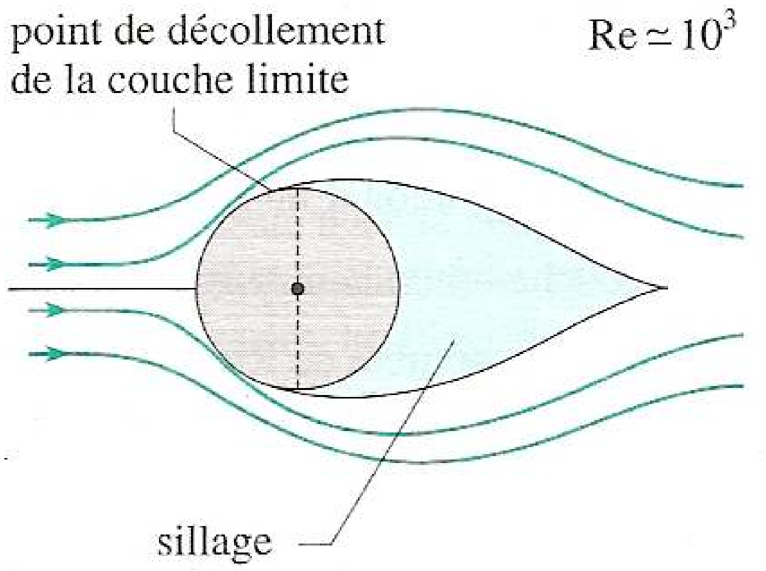


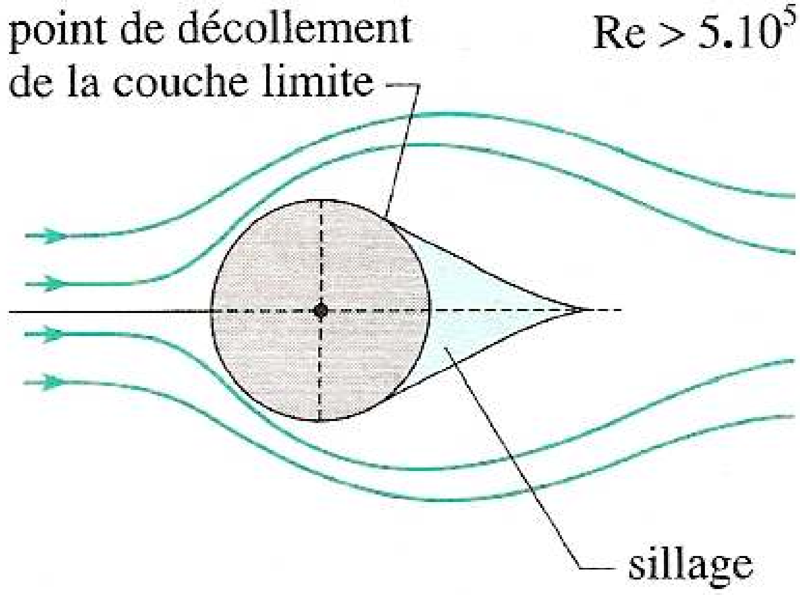
Re ≃ 300



A gauche : quand R_e augmente, le tourbillon finit par occuper la partie aval de la sphère.

A droite : le tourbillon torique précédent se détache en prenant une forme hélicoïdale.





A gauche : l'écoulement n'est plus régulier. La couche limite est laminaire, mais une zone turbulente se développe derrière la sphère. Le point de décrochement de la couche limite est situé « en avant ».

A droite : la couche limite laminaire précédente est devenue turbulente ; elle se décroche à « l'arrière » de la sphère. Le sillage est réduit et la résistance moindre.

Exercice : écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné

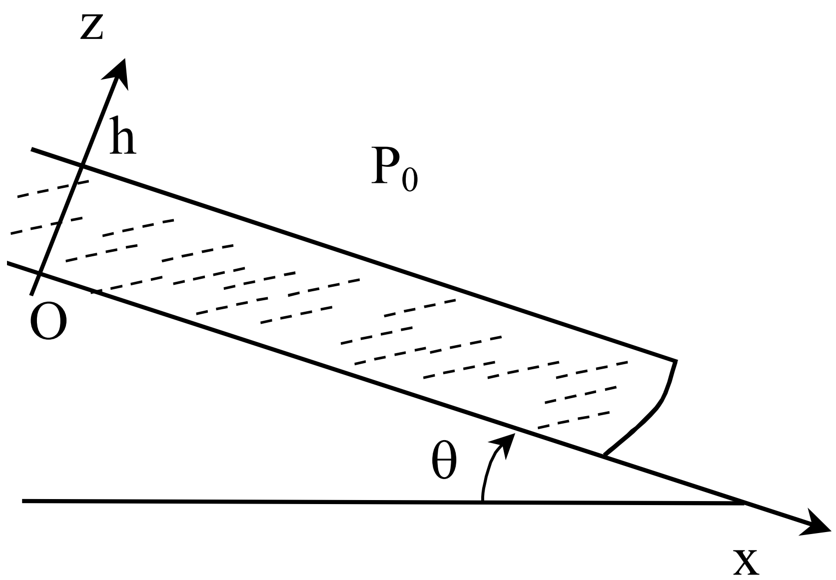
On considère l'écoulement permanent d'une couche de fluide incompressible et visqueux, de hauteur h, sur un plan incliné.

On suppose l'écoulement unidimensionnel : le champ des vitesses sera parallèle à l'axe Ox et ne dépendra que de la variable z.

A la surface libre, la pression est uniforme et vaut P_0.

La masse volumique du fluide, supposé newtonien, est ρ et sa viscosité η.

On admettra qu'à cause de la faible viscosité de l'air au-dessus du fluide, il n'y a pas de contrainte tangentielle en z = h.



a) Simplifier et projeter l'équation de Navier-Stokes.

b) Déterminer le champ des vitesses $\vec{v} = v(z)\,\vec{e}_x$, en tenant compte des conditions aux limites.

c) On s'intéresse à un écoulement de largeur L selon l'axe Oy, avec L >> h, pour pouvoir négliger les effets de bord. Calculer le débit volumique D_V et en déduire la vitesse moyenne du fluide.

d) On considère une rivière de profondeur 5 m, s'écoulant entre deux points distants de 100 km, avec une différence d'altitude de 10 m. On donne :

$$g = 10\ m.s^{-2}\ ;\ \rho_{eau} = 1\,000\ kg.m^{-3}\ ;\ \eta_{eau} = 10^{-3}\ Pa.s$$

Calculer la vitesse moyenne et commenter le résultat en utilisant le nombre de Reynolds.

e) On s'intéresse maintenant à une couche de glycérine, $\rho = 900\ kg.m^{-3}\ ;\ \eta_{gly} = 0{,}85\ Pa.s$, de 1 mm d'épaisseur, pour un angle θ = 10°.

Reprendre la question précédente.

$$P(x,z) = \rho g \cos\theta (h - z) + P_0$$

$$v(z) = \frac{\rho g \sin\theta}{2\eta}(2h - z)z$$

$$D_v = \iint_{section} v(z) L dz = L \int_0^h \frac{\rho g \sin\theta}{2\eta}(2h - z) z dz = \frac{\rho g L h^3 \sin\theta}{3\eta}$$

$$v_{moy} = \frac{D_v}{Lh} = \frac{\rho g h^2 \sin\theta}{3\eta} \quad ; \quad R_e = \frac{\rho h v_{moy}}{\eta}$$

e) Pour la glycérine :

$$v_{moy} = 0,61\, mm.s^{-1} \quad ; \quad R_e = 6,5.10^{-4} << 1$$

Les forces de viscosité sont bien suffisantes pour imposer un champ des vitesses laminaire.

Freinage d'une plaque en mouvement sinusoïdal : (« Effet de peau »)

Une plaque confondue avec le plan d'équation z = 0 est en translation avec une vitesse $U_M \cos(\omega t)$ dans un fluide incompressible de masse volumique μ, de viscosité η et de viscosité cinématique $\nu = \eta / \mu = 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$, remplissant tout l'espace.

On considèrera la plaque comme infinie.

On note alors p (M, t) le champ de pression et :

$$\vec{v}(M, t) = v(M, t)\,\vec{u_x}$$

le champ des vitesses en M, dans le fluide.

On rappelle l'expression :

$$d\vec{f} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \vec{u}_x$$

de la force de viscosité exercée sur un élément de surface dS, de cote z par le fluide situé à une cote supérieure à z.

1- De quoi dépendent p (M, t) et $\vec{v}(M, t)$. On montrera avec soin que :

$$\vec{v}(M, t) = v(z, t)\,\vec{u_x}$$

2- Établir l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$$

3- En déduire sans calculs l'ordre de grandeur de l'épaisseur δ de la couche limite, domaine hors duquel le fluide reste quasiment au repos.

Application numérique pour f = 100 Hz.

4- On cherche en régime sinusoïdal forcé un champ des vitesses de la forme:

$$v(z, t) = \mathrm{Re}\,(U_M \exp(j\,\omega\,t - j\,k\,z))$$

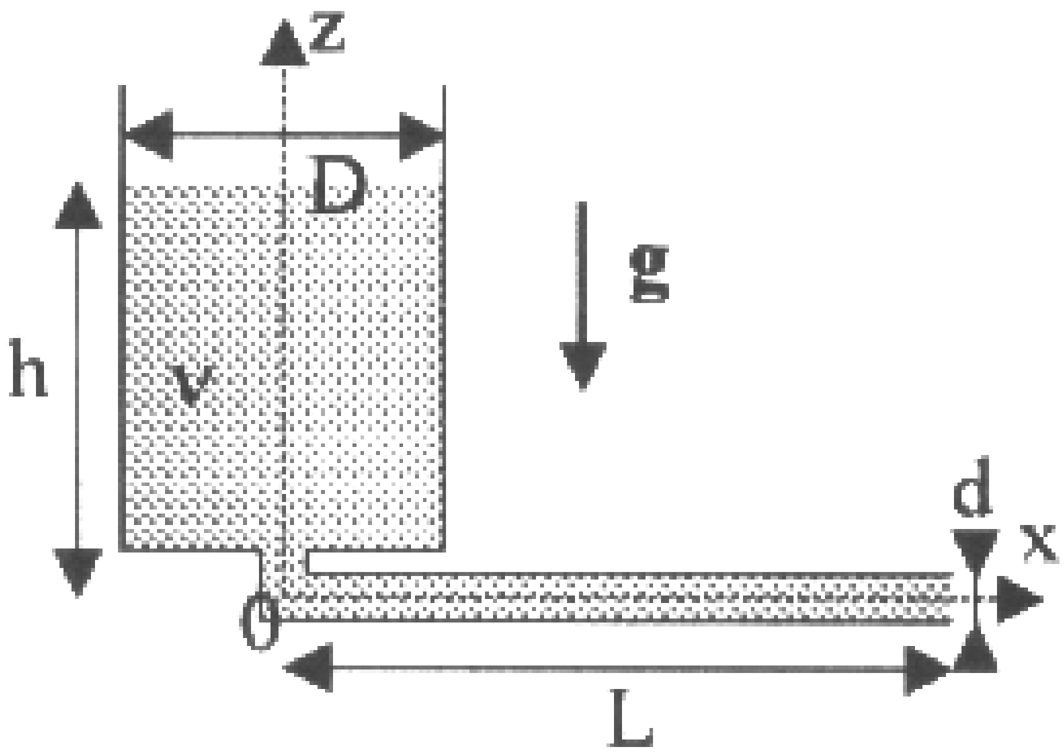
Déterminer k et en déduire les expressions de v (z > 0, t) et v (z < 0, t).

5- En déduire l'expression de la force subie par l'unité de surface de la plaque et la puissance moyenne de cette force; commenter.

Viscosimètre à écoulement :

Un liquide visqueux, incompressible, s'écoule lentement d'un récipient cylindrique de diamètre D dans un tube capillaire horizontal de diamètre d et de longueur L.

On négligera les effets dus aux extrémités du tube.



1) Peut-on considérer l'écoulement comme quasi-permanent ? Justifier. En déduire l'expression du débit volumique q_V en fonction de h.

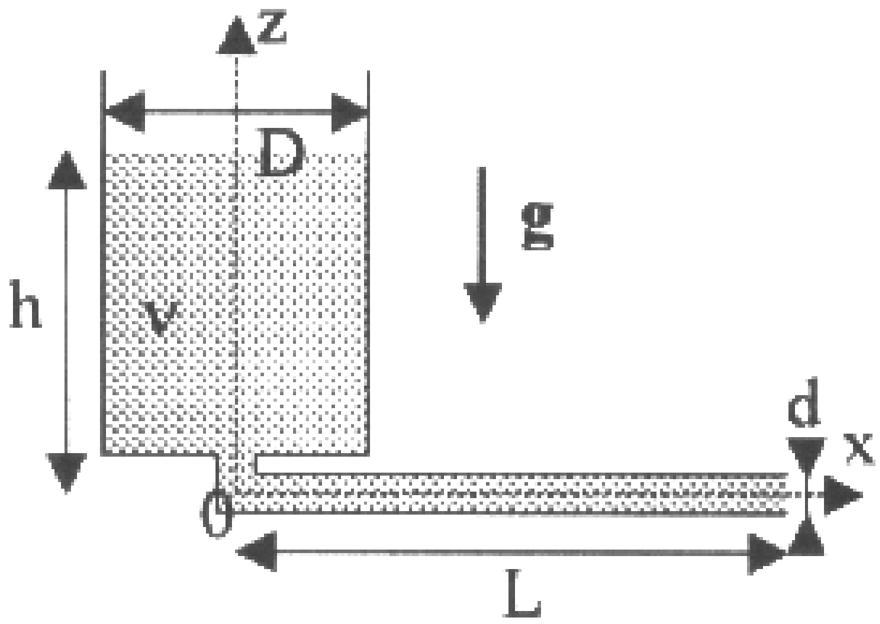
2) A partir de l'équation de continuité, établir une équation différentielle satisfaite par h(t).

La résoudre pour la condition initiale $h(0) = h_0$.

3) Il a fallu une durée $\tau = 75$ min pour que le niveau du liquide passe de la hauteur $h_0 = 5$ cm à la hauteur $h_1 = 2,5$ cm.

Déterminer la viscosité cinématique du liquide.

On donne D = 5 cm , L = 40 cm , d = 1 mm et g = 9,8 $m.s^{-2}$.



1) On se place dans l'ARQS. On a un écoulement de Poiseuille cylindrique :

$$q_v = \frac{\pi d^4}{128\eta}\frac{P_e - P_s}{L}$$

Le liquide est pratiquement au repos dans le récipient. On peut écrire la relation de la statique des fluides :

$$P_s = P_0 \qquad ; \qquad P_e = P_0 + \mu g h$$

Par conséquent :

$$q_v = \frac{\pi d^4}{128\nu}\frac{gh}{L} \qquad (\nu = \frac{\eta}{\mu})$$

2) L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique :

$$-S\frac{dh}{dt} = q_v \qquad soit \qquad -\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi d^4}{128\nu}\frac{gh}{L}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{gd^4}{32\nu LD^2}h = 0 \quad ; \quad h(t) = h_0 e^{-t/\tau} \quad (\tau = \frac{32\nu LD^2}{gd^4})}$$

3) AN :

$$\nu = 2.10^{-6}\, m^2.s^{-1}$$

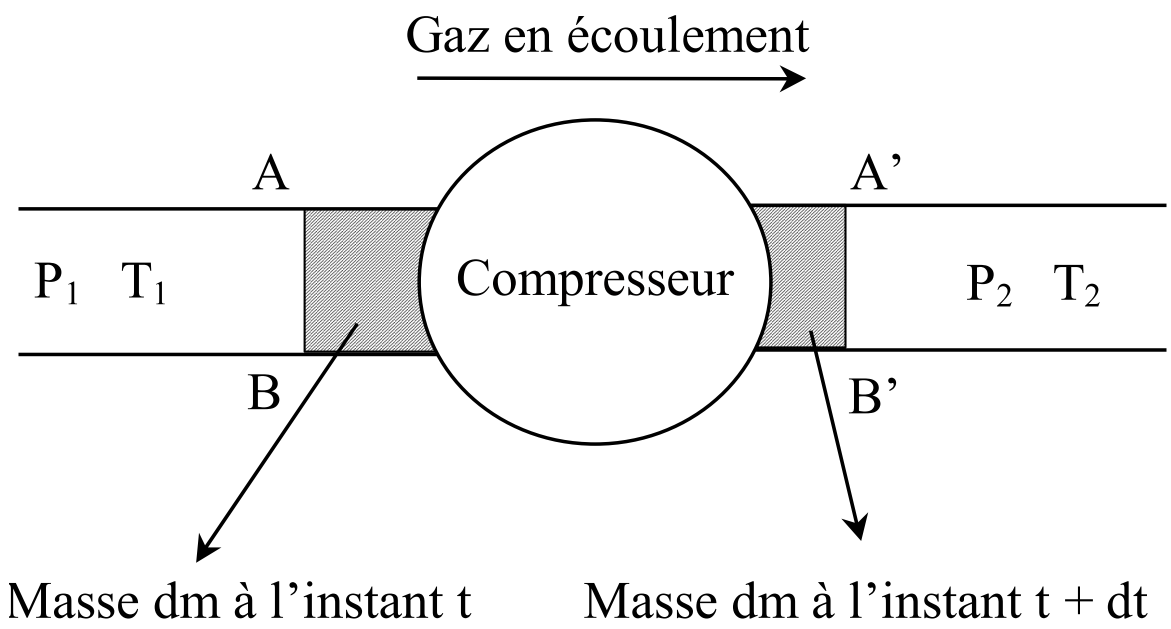
V) Bilans dynamiques et thermodynamiques :

1 – Système fermé, système ouvert :

- Système fermé : il est constitué d'une quantité de matière déterminée que l'on suit dans son mouvement ; la surface (S) qui le délimite peut se déformer et se déplacer dans le référentiel d'étude.

- Système ouvert : on raisonne sur des « surfaces de contrôle » (S), délimitant des volumes de contrôles (V), fixes dans le référentiel choisi ; il peut alors y avoir un flux de matière à travers la frontière du système entre l'intérieur et l'extérieur. Ces systèmes sont bien adaptés à la méthode eulérienne.

2 – Bilans d'énergie interne et d'enthalpie (exemple du moteur à réaction) :

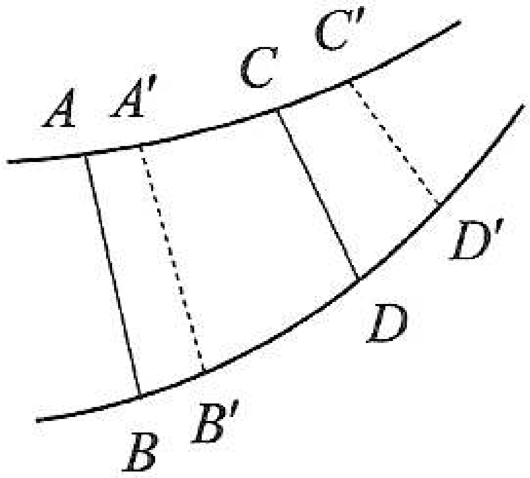


$$\boxed{\Delta h_m + \Delta e_{c,macro} + \Delta e_{p,ext} = w_m + q_{th}}$$

3 – Bilans de quantité de mouvement :

a) Le théorème d'Euler :

On considère à un instant t une surface fermée S limitant un volume V ($ABCD$ sur la figure). Exprimer la variation de quantité de mouvement $\frac{d\vec{p}}{dt}$ subie par le fluide intérieur à S pendant dt sachant que l'écoulement est permanent, en fonction du débit massique D_m (à noter que l'hypothèse « écoulement incompressible » n'est pas utile ici) et des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ supposées uniformes respectivement sur les surfaces AB et CD.

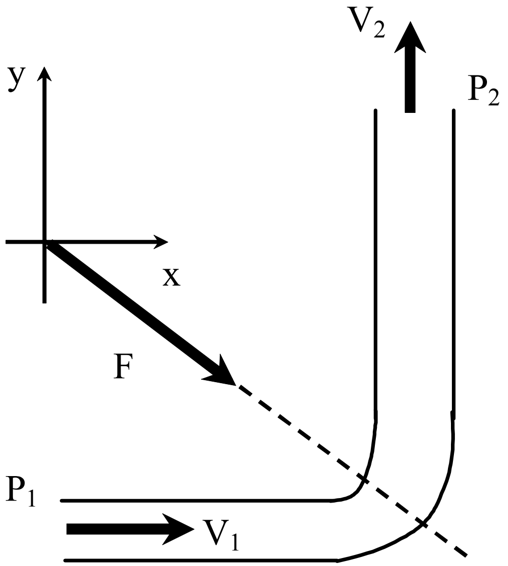


$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = D_m\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)}$$

b) Force subie par un coude de canalisation :

De l'eau de masse volumique µ coule en régime stationnaire avec un débit massique D_m dans une canalisation horizontale de section constante S faisant un coude d'angle droit.

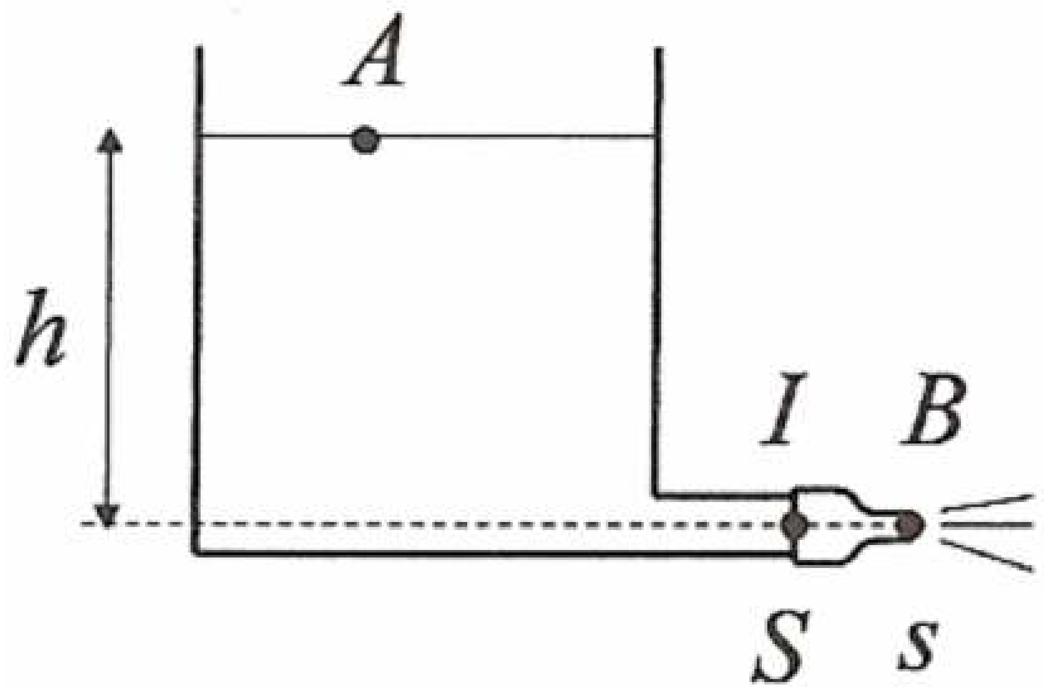
On néglige la pesanteur et l'écoulement est supposé parfait.



$$\boxed{\vec{F} = (P_0 S + \mu S v^2)(\vec{u}_x - \vec{u}_y)}$$

Loin du coude en amont, la pression est uniforme et vaut P_1 et l'écoulement est unidimensionnel de vitesse $v_1\vec{u}_x$. Loin du coude en aval, la pression uniforme vaut P_2 et la vitesse $v_2\vec{u}_y$.

Exercice d'application, force sur un embout :

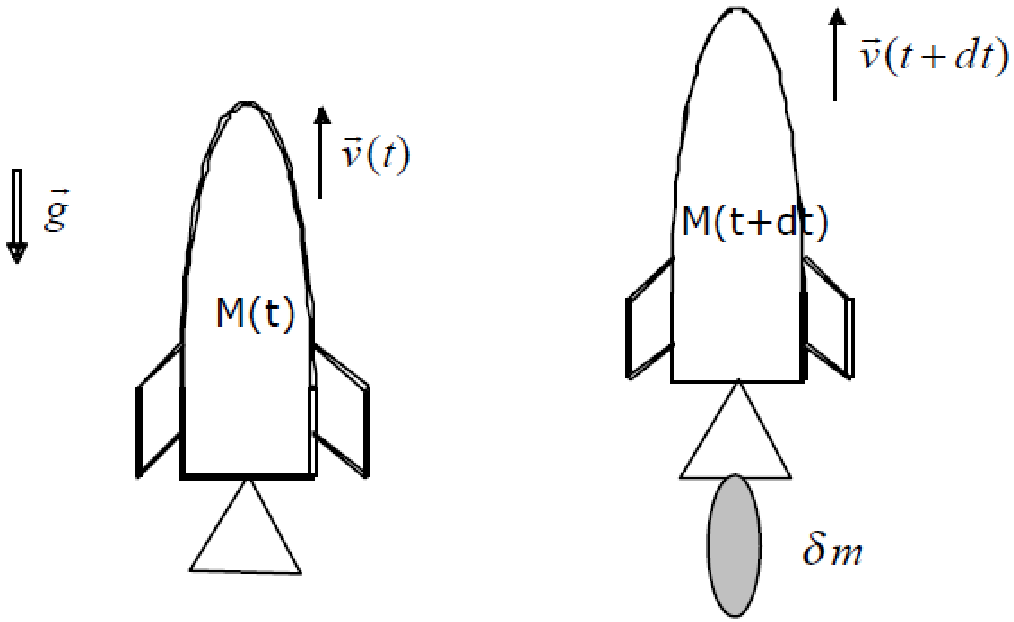


$$\boxed{F = P_0(S - s) + \rho g h \frac{(S - s)^2}{S}}$$

Cette force est positive, dans le sens du mouvement du fluide.

Elle est nulle si s = S.

c) Poussée d'une fusée et chariot qui perd son chargement :



On considère une fusée, dont la masse à un instant t quelconque est notée M(t).
Elle éjecte des gaz avec un débit massique D constant; la vitesse d'éjection des gaz, par rapport à la fusée, a pour module u.
La masse initiale de la fusée est notée M_0
La fusée constitue donc un système **ouvert**.

$$\boxed{M(t)\frac{dv(t)}{dt} = Du - M(t)g}$$

$$\boxed{v(t) = u \times Ln\left(\frac{M_0}{M_0 - Dt}\right) - gt}$$

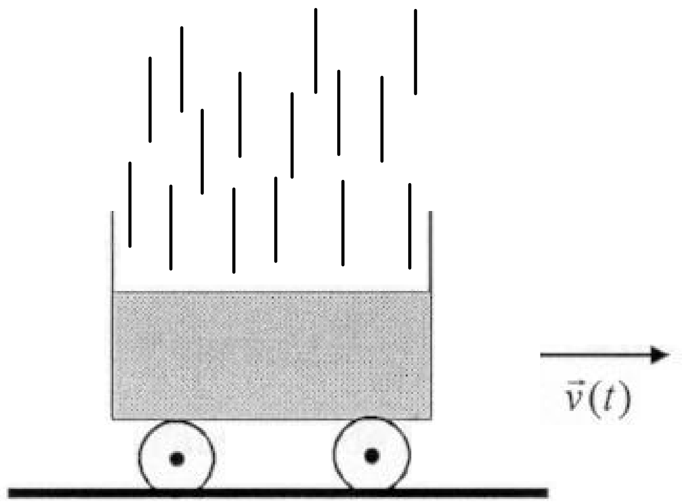
Exercice d'applications :

Il pleut sur un chariot :

Un chariot, rempli de sable, avance sans frottements sur des rails horizontaux avec une vitesse $\vec{v}_0$.

Sa masse totale est alors M_0. La section du chariot perpendiculaire à la verticale est notée S.

a) Soudain, la pluie se met à tomber, verticalement, et il rentre, par seconde, D kilogrammes d'eau dans le chariot. Donner la loi d'évolution de la vitesse v(t) du chariot.



b) La pluie tombe maintenant avec une vitesse u constante et un angle $\theta = 45°$ par rapport à la verticale, dans le sens contraire du mouvement du chariot.

On appelle M_1 la masse du chariot et de son contenu à l'instant où la pluie se met à tomber de manière oblique et v_1 sa vitesse au même instant.

Exprimer l'instant t_0 où le chariot s'arrête en fonction de M_1, v_1, D, u et θ.

AN : $M_1 = 200\ kg$; $v_1 = 10\ m.s^{-1}$; $u = 20\ m.s^{-1}$; $S = 2\ m^2$.

Par ailleurs, la météo annonce qu'il est tombé 2 mm de pluie en une minute. Calculer t_0.