

ASSURANCE VIE

Master Actuariat-Finance
Master Actuariat-Prévoyance Sociale

Prof ABDELKADER SALMI

2012

Actuaire

- L'étymologie du mot "actuaire" est latine (comptable, rédacteur des livres de comptes –acta), ce terme n'apparaît qu'au XVIII^e siècle, repris de l'anglais "actuary".
- Le dictionnaire Larousse le définit ainsi :
Actuaire : "**spécialiste** qui fait des **calculs** statistiques pour les **assurances**".
- Les mots "actuariat" ("fonction d'actuaire. Corps des actuaire") et "actuariel" ("calcul effectué par des actuaire") se définissent par rapport à celui d'actuaire.
- De façon un peu plus large et moderne, les actuaire canadien proposent :
- "**Spécialiste de l'analyse et du traitement des impacts financiers du risque**".

Actuaire

- *Définition de L'AIA :*
- *« Les actuaires sont des penseurs stratégiques pluridimensionnels, formés à la théorie et à l'application des mathématiques, des statistiques, de l'économie, des probabilités et des finances. On les appelle des architectes financiers et des mathématiciens sociaux parce qu'ils utilisent leur combinaison particulière d'aptitudes analytiques et administratives pour relever une diversité croissante de défis d'ordre financier et social partout dans le monde. »*

Actuaire

- Sur le site www.beanactuary.org on trouve une définition de l'actuaire qui peut se traduire ainsi : « *Les actuaires sont des experts pour évaluer la probabilité d'événements futurs, concevoir de façon créative des mesures pour réduire la probabilité d'événements indésirables, et amenuiser l'impact des événements indésirables qui surviennent.... Les actuaires sont des professionnels de premier plan pour trouver des façons de gérer le risque.* »

Actuariat

L'actuariat comprend plusieurs métiers :

- **Conception/adaptation de produits.**
 - *définition de produits : analyser les risques-définir les garanties-élaborer les lois de mortalité ou de rachat-concevoir les tarifs- définir les méthodes de calcul et les procédures.*
 - *Adaptation de produits : concevoir les outils d'analyse-réaliser les études techniques -évaluer l'évolution des risques-proposer des adaptations en termes de tarification et/ou de garanties-évaluer l'évolution des résultats.*
 - **Marketing :** cibler les produits-segmenter la clientèle.

Actuariat

- **Gestion des contrats.**
 - **Contrats** : assurer le suivi et l'analyse technique-définir et assurer le suivi du portefeuille- exploiter les résultats techniques-définir les cahiers des charges techniques et informatiques-surveiller le portefeuille, déterminer les mesures de redressement.
 - **Portefeuille** : actualiser les barèmes de provisionnement-définir les besoins de réassurance-calculer le montant des réserves obligatoires-vérifier les équilibres techniques-élaborer des modèles de rentabilité -mettre en place des outils de suivi des résultats-contrôler les prévisions de résultats.

Actuariat

- **Gestion de bilan.**
 - **Comptes** : mettre aux normes les comptes-réaliser et suivre les comptes mensuels -provisionner les engagements.
 - **Contrôle de gestion** : élaboré des modèles de rentabilité - faire des études de rentabilité -analyser la rentabilité.
 - **Actif/passif** : suivre l'évolution des provisions mathématiques -évaluer les fonds propres -analyser/suivre des placements -évaluer les portefeuilles -concevoir des modèles de prévision -réaliser des scénarios de résultats -proposer des stratégies de gestion, analyser les risques.

Actuariat

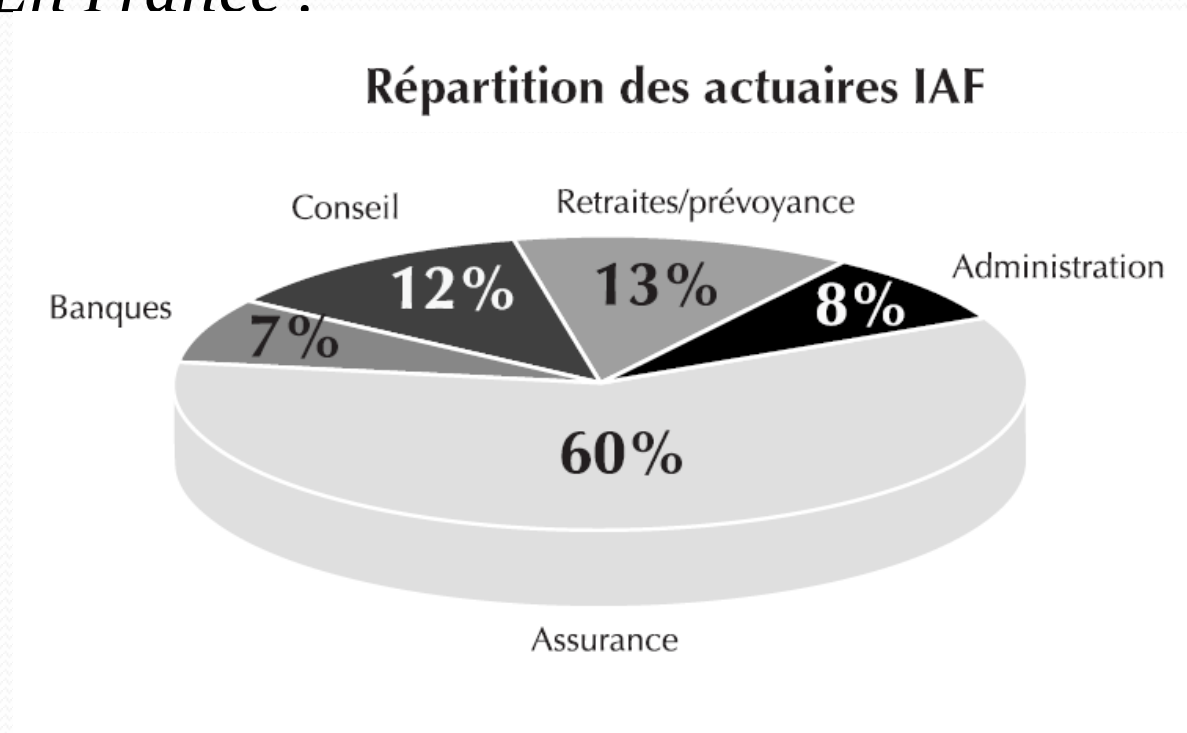
- ***Finances.***

- *Etudes : analyser les tendances des différents marchés-
évaluer les portefeuilles -concevoir des systèmes de
pilotage -élaborer les outils de suivi.*

Actuariat

- *La majorité des actuaires travaillent dans les assurances*

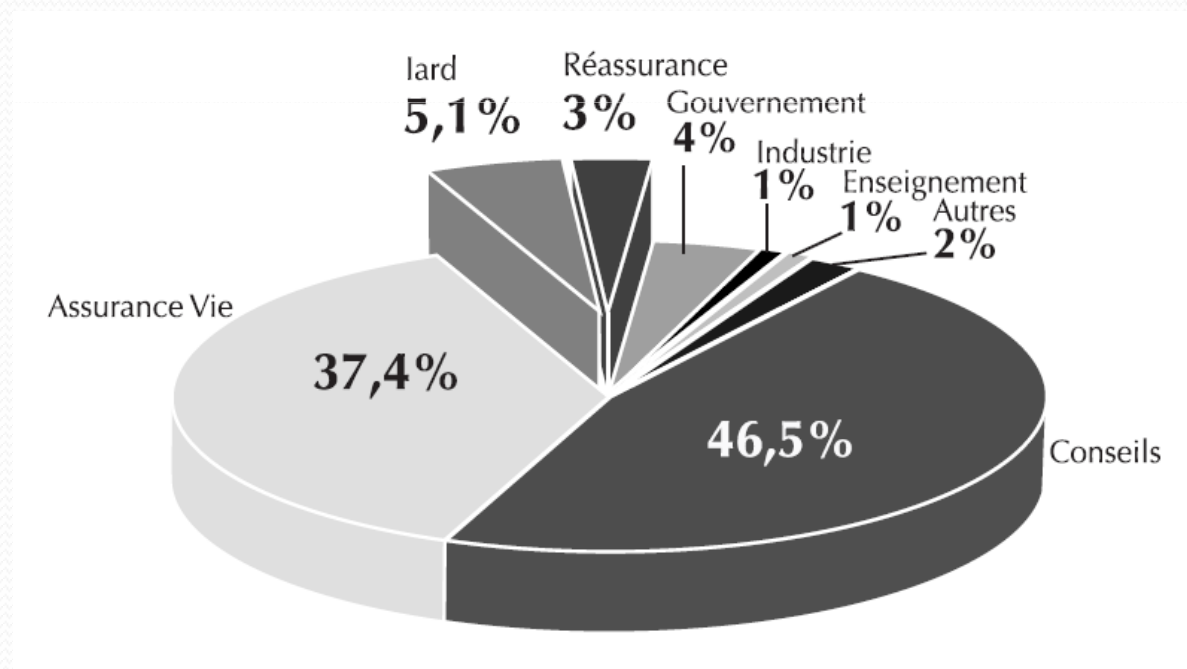
En France :



Actuariat

- *La majorité des actuaires travaillent dans les assurances*

Au Canada :





Définitions de l'assurance

- L'**assurance** est généralement définie comme l'opération par laquelle une personne, l'**assureur**, s'engage à **exécuter** une **prestation** au **profit** d'une autre personne, l'**assuré**, en cas de **réalisation** d'un événement aléatoire, le **risque** (ou sinistre), en **contrepartie** du paiement d'une somme, la **prime** ou cotisation.



Définitions de l'assurance

- La technique assurantielle réside dans la mutualisation des risques, c'est-à-dire une division du coût des conséquences de sa survenue entre plusieurs.
- A ce stade, les définitions évoquées ci-dessus sont suffisamment larges pour inclure dans le champ de l'assurance les régimes de sécurité sociale obligatoires qui ne seront pourtant pas traités dans le présent cours (cours de prévoyance sociale).



Bases de l'assurance

Besoin de sécurité

- La sécurité est un des besoins fondamentaux de l'être humain. La vie comporte toutefois des risques et des dangers qui peuvent menacer la santé, la vie et les biens que l'on possède.
- C'est la raison pour laquelle les êtres humains ont, depuis toujours, eu recours à l'assurance pour se protéger contre ce qui pouvait leur arriver. De nos jours, vivre sans assurances dans un pays industrialisé n'est pas concevable.

Bases de l'assurance

- En Suisse, par exemple, hommes et femmes, sont très soucieux de leur sécurité.
- Chaque habitant suisse consacre plus de 7 109 francs (environ 50 000 dhs) aux assurances privées (assurances sociales non comprises), ce qui représente le montant le plus élevé au niveau mondial.



Bases de l'assurance

Solidarité

- L'assurance repose sur le principe de la solidarité. Un grand nombre de personnes ou d'entreprises, exposées aux mêmes risques, versent leurs primes à une caisse commune qui doit, en cas de sinistre, fournir la prestation contractuellement convenue à l'assuré qui en est victime.

Bases de l'assurance

Loi des grands nombres

- De nos jours, les statistiques fondées sur les mathématiques sont les éléments les plus importants de l'assurance. La théorie des probabilités et le traitement statistique d'un grand nombre de cas particuliers d'assurance permettent d'établir certaines certitudes de régularité, soit la fréquence avec laquelle ils vont se produire.
- La loi des grands nombre (LGN) peut être expliquée en prenant le jeu de dés pour exemple : le résultat d'un seul coup de dés dépend du hasard. Mais, si les dés sont jetés un grand nombre de fois, une certaine régularité se manifeste.

Bases de l'assurance

Loi des grands nombres

- La LGN, ne dit pas qui sera victime d'un événement bien déterminé, mais seulement combien de membres d'une communauté le seront.
- Le hasard en tant que facteur provoquant des dommages assurés devient ainsi une valeur moyenne pouvant être chiffrée statistiquement.

Bases de l'assurance

Contrat d'assurance

- Un contrat d'assurance offre une couverture d'assurance. Cette dernière couvre les conséquences financières d'un événement dommageable. La caractéristique de l'événement dommageable est que l'on ne sait en général pas s'il surviendra et quand il se produira.
- Dans le contrat d'assurance, des choses et des personnes peuvent être assurées contre des événements dommageables (assurance de choses ou de personnes).

Bases de l'assurance

Surveillance des assurances

- La surveillance des assurances a pour objectif principal la protection des assurés.
- Les entreprises privées d'assurances sont placées sous le contrôle de l'autorité publique qui délivre l'autorisation d'opérer et exerce par ailleurs des contrôles permanents portant sur leurs activités d'assureurs. Ainsi, la protection d'assurance et la solvabilité des compagnies d'assurances seraient garanties à l'avenir.

Bases de l'assurance

Primes / prestations

Toutes les personnes qui font partie d'une communauté de risques s'acquittent de leur contribution afin de pouvoir venir en aide à ceux qui sont victimes d'un dommage.

Cette contribution est la prime qui comprend les éléments suivants :

- **Le risque** : cette partie de la prime est calculée sur des bases mathématiques, des statistiques d'assurance, ainsi que des valeurs empiriques. Cette partie de la prime doit suffire à régler tous les sinistres. Elle se fonde sur la moyenne d'une période de longue durée.

Bases de l'assurance

Primes / prestations

- **Les frais** : le conseil à la clientèle, la conclusion de l'assurance et le traitement des sinistres occasionnent des frais qui sont répartis entre la communauté des assurés.
- **L'épargne** : pour les assurances-vie de capitalisation, vient s'ajouter l'objectif de l'épargne. Une part de la prime vient financer la prestation en espèces convenue pour la fin du contrat. L'autre part donne lieu à des intérêts crédités par la compagnie d'assurances jouant ici un rôle particulièrement important dans le développement de l'investissement.

Bases de l'assurance

Lorsque le cas couvert par l'assurance survient, la compagnie d'assurance doit verser la prestation convenue, à savoir :

- **Prestations en espèces** : versements en capital, rentes, indemnités journalières, dédommagements de toute nature.
- **Prestations de services** : mesures de défense contre les prétentions injustifiées de tiers à l'encontre des assurés (en assurance responsabilité civile notamment), protection juridique, conseil, aide en cas de sinistre, assistance,...

Classification de l'assurance

- On distingue deux branches principales au sein du secteur de l'assurance :

Branche vie

- Assurances vie ou décès
- Assurance de personnes

Branche non-vie

- Assurance dommages
- IARD (Incendie Automobile et Risques Divers)
- Assurance des biens

Il suffit, en effet, d'ajouter l'assurance santé à l'assurance-vie pour aboutir à l'assurance de personnes.

Opérations viagères

Définition

Par **opération viagère**, on entend une opération dont les flux (montants et / ou échanges des capitaux) dépendent de la **survie** ou du **décès** d'une ou plusieurs personnes.

Opérations viagères

Exemples

- 1) en contrepartie d'une prime fixée, une compagnie d'assurance s'engage à payer au moment du décès d'une personne X une somme fixée à un bénéficiaire désigné Y.
- 2) en contrepartie d'un capital payé à Y, X acquière le droit d'entrer en possession au moment du décès de Y d'un immeuble appartenant à Y.

Opérations viagères

- Les opérations viagères dépendent donc de quantités aléatoires à savoir les durées de vie d'une ou de plusieurs personnes. Nous nous limiterons dans ce cours aux opérations pour lesquelles la durée de la vie humaine est le seul élément aléatoire.

Assurance-vie

Définition

On appelle **assurance sur la vie** (ou assurance-vie) une opération **viagère** pour laquelle les **risques** liés à la **durée aléatoire de la vie humaine** sont pris en charge par un **organisme spécialisé** (le plus souvent une compagnie d'assurance sur la vie) qui les **mutualise** dans un ensemble suffisamment étendu d'opérations similaires, de sorte qu'on puisse appliquer la **loi des grands nombres**. Le terme d'assurance sur la vie recouvre donc une gamme d'opérations plus restreinte que celui d'opération viagère.

Assurance-vie

Exemple

- L'opération décrite dans l'exemple 1) ci-dessus est une assurance-vie dans la mesure où l'un des contractants est une compagnie d'assurance mutualisant les risques viagers dans un portefeuille de nombreux contrats similaires.
- Par contre, l'opération décrite dans l'exemple 2) ci-dessus n'est pas une assurance sur la vie puisque, liant deux particuliers, elle n'est pas intégrée dans un portefeuille de nombreux contrats similaires au sein duquel les risques viagers seront mutualisés.

Assurance-vie

- Cette théorie a des applications directes en assurance et a des liens étroits avec d'autres théories et modèles actuariels et financiers.
- Le cours présente l'essentiel de la théorie et des techniques actuarielles relatives à l'évaluation des **contrats d'assurance-vie** et des **rentes viagères**. Ces techniques se trouvent sous une forme ou une autre dans un grand nombre de règles, méthodes et lois que les actuaires appliquent tous les jours.

Assurance-vie

- « **Contrat d'assurance sur la vie** : contrat par lequel, en contrepartie de versements uniques ou périodiques, l'assureur garantit des prestations dont l'exécution dépend de la survie ou du décès de l'assuré».

Dahir n° 1-02-238 du 25 rejeb 1423 (3 octobre 2002) portant promulgation de la loi n° 17-99 portant code des assurances.

Assurance-vie

- Il existe différents types d'assurance-vie tels que :
l'**assurance en cas de décès**, l'**assurance en cas de vie**, l'assurance « **mixte** » (ce type de contrat combine les deux types précédents)...
- Sur le plan pratique, pour appréhender la survenance et l'importance d'un risque futur, les sciences actuarielles font usage des mathématiques, de la statistique et du calcul des probabilités.

Assurance-vie

En assurance-vie à travers le calcul de réserves ou de primes d'assurances, les actuaires font appel :

- A la **démographie** (risque de mortalité)
- Aux **mathématiques financières** élémentaires (taux composé, actualisation, capitalisation)
- A la **finance** (ALM, Asset Liability Management ou DFA, Dynamic Financial Analysis ou encore en français, Gestion Actif-Passif)

LA MORTALITE

- 1. Tables de mortalité brutes
- 2. Probabilités de survie et de décès
- 3. Espérance de vie
- 4. Taux instantané de mortalité
- 5. Tables de Gompertz et de Makeham
- 6. Probabilités sur 2 têtes
- 7. Tables règlementaires
- 8. Ajustement de tables
- 9. ... vers des tables prospectives...

1. Tables de mortalité brutes

Principe : à partir d'une cohorte initiale à la naissance
on suit année après année le nombre de survivants

$$l_x = \text{nombre de survivants à l'âge } x$$

$$l_0 = 1.000.000 \quad (\text{par convention !!})$$

Age ultime : premier âge où plus de survivants

$$l_{\omega} = 0$$

(par exemple 110 ans en France)

1. Tables de mortalité brutes

EXEMPLE:

Age (x)	Table (lx)
0	1.000.000
1	999.415
10	994.002
40	965.973
70	767.741
71	750.022

1. Tables de mortalité brutes

La fonction l est positive et décroissante.

La table donne les valeurs de l pour des âges entiers .

On distingue :

- *les tables de mortalité brutes* : résultant de l'observation (recensement à un moment)
(par exemple RGPH 2004)
- *les tables de mortalité ajustées* : table ajustée analytiquement
- *les tables d'expérience* : tables tenant compte de l'expérience d'un assureur



1. Tables de mortalité brutes

On distingue aussi :

- *les tables de mortalité périodiques* : suppose que la mortalité va rester stable dans le futur
- *les tables de mortalité prospectives* : intègre une évolution future attendue de la mortalité

Dans la suite on travaillera avec des tables périodiques.

1. Tables de mortalité brutes

Nombre de décès à l'âge x :

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

EXEMPLE:

$$l_{70} = 767.741$$

$$l_{71} = 750.022$$

↓

$$d_{70} = 17.719$$

2. Probabilités de survie et décès

- Probabilité annuelle de décès - quotient de mortalité

Probabilité étant en vie à l'âge x de décéder dans l'année

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

EXEMPLE : *probabilité à 70 ans de décéder dans l'année*

$$q_{70} = \frac{17.719}{767.741} = 0,023$$



2. Probabilités de survie et décès

Les principaux facteurs explicatifs des quotients de mortalité sont :

- l'âge
- le sexe
- l'époque
- le lieu

(problématique de la segmentation versus la discrimination)

2. Probabilités de survie et décès

Influence de l'âge, du sexe et de l'époque

Hommes (Belgique)					
Âge (x)	1880-1890	1928-1932	1968-1972	2001-2003	q_x 2001-2003/ q_x 1880-1890
0	0,17262	0,10075	0,023911	0,004067	2,4%
30	0,00759	0,00444	0,001486	0,000928	12,2%
50	0,01817	0,01165	0,007900	0,005125	28,2%
80	0,15003	0,14408	0,121685	0,075884	50,6%

Femmes (Belgique)					
Âge (x)	1880-1890	1928-1932	1968-1972	2001-2003	q_x 2001-2003/ q_x 1880-1890
0	0,14554	0,07855	0,017632	0,003189	2,2%
30	0,00716	0,00415	0,000728	0,000394	5,5%
50	0,01216	0,00914	0,00452	0,002602	21,4%
80	0,13649	0,1267	0,091933	0,044578	32,7%

2. Probabilités de survie et décès

Influence du lieu

Les enquêtes statistiques ont toujours donné des probabilités de décès qui différent d'un pays à un autre.

La différence est à attribuer certainement aux influences climatiques et au développement des systèmes de santé.

Comparaison entre la Suisse (1958/63) et la France (1960/64)

1000qx

Âge (x)	Hommes		Femmes	
	Suisse	France	Suisse	France
0	24,48	24,28	18,6	18,49
11	0,48	0,39	0,29	0,25
20	1,67	1,35	0,51	0,62
40	2,65	3,58	1,62	1,98
60	19,35	22,3	10,12	9,84
65	30,19	32,96	16,97	15,85
70	46,25	48,57	29,29	26,94

2. Probabilités de survie et décès

Remarque

- Ces taux diffèrent mais restent proches.
- En revanche, la différence est très significative lorsque la comparaison concerne les taux de pays industrialisés et ceux des pays en développement.
- L'assureur doit adapter le choix de la table de mortalité aux conditions du pays où il fait ses affaires.
- Dans certains pays des tables de mortalités sont élaborées par régions. Mais dans les calculs de l'assurance sur la vie, il n'est pas usuel de tenir compte des variations régionales de la mortalité. Une même table de mortalité est appliquée pour tout un pays.

2. Probabilités de survie et décès

Influence de l'état civil

Les études ont montré que les taux de mortalité varient selon l'état civil des personnes mises en observation.

En classant les états civils par ordre croissant des probabilités de décès, on trouve : marié, veuf, célibataire, divorcé.

Les assureurs ne tiennent pas compte en général de l'état civil de l'assuré.

En cas de survie on applique des fois des tables spécifiques aux veuves pour le calcul des pensions.

1000q _x					
Âge (x)	Marié	veuf	célibataire	Divorcé	Ensemble
30	2,16	4,88	4,24	4,89	2,89
40	3,56	7,93	7,26	7,64	4,32
50	8,85	12,9	14,14	18,98	9,81
60	21,48	28,86	28,89	35,86	23,43
70	51,79	62,27	66,47	82,06	56,81

2. Probabilités de survie et décès

Influence de la profession

Il est évident que certaines professions présentent plus de risques que d'autres.

Face à cette surmortalité liée à l'exercice d'une profession dangereuse, les assureurs peuvent adopter des positions plus ou moins prudentes selon la politique d'acceptation des risques :

- refuser d'assurer (cas extrême);
- assurer avec certaines restrictions;
- assurer à des conditions plus onéreuses;
- assurer sans tenir compte du risque.

2. Probabilités de survie et décès

Influence spécifique à l'assurance

Sélection médicale :

Pour contracter une assurance décès, l'assureur procède en général soit à un examen médical de la personne à assurer, soit pour le moins lui faire remplir un questionnaire de santé.

Le candidat est :

- soit accepté si son état physique est jugé bon;
- soit refusé si son état physique est jugé compromettant;
- soit assuré tout en procédant à des restrictions;
- soit accepté mais à des conditions plus onéreuses.

Les personnes choisies après contrôle médical présentent des probabilités de décès beaucoup plus faibles par rapport à la population générale : on parle alors de *sélection médicale*.

2. Probabilités de survie et décès

Influence spécifique à l'assurance

Anti-sélection :

Il y a des contrats qui prévoient le paiement de prestations en cas de survie.

De tels contrats sont plutôt conclus par des personnes de bonne santé. Il y a alors une sélection non plus de la part de l'assureur mais de la part de l'assuré lui-même : on parle alors d'*anti-sélection*.

2. Probabilités de survie et décès

Influence spécifique à l'assurance

Invalidité :

Certains contrats d'assurance sur la vie ne concernent que des personnes qui sont classées soit actifs soit invalides. L'assureur doit utiliser la table de mortalité spécifique à chaque population. La différence de mortalité est très nette comme le montre l'exemple suivant :

Table de mortalité de la caisse Fédérale d'Assurance EVK 1970 (Suisse)

1000qx

Âge (x)	Hommes		Femmes	
	actifs	invalides	actifs	invalides
20	0,75	30,00	0,60	15,00
30	0,85	39,50	0,98	15,00
40	1,50	46,00	1,61	14,00
50	3,95	49,50	3,05	8,50
60	10,45	50,24	6,90	7,00

2. Probabilités de survie et décès

Probabilité annuelle de survie

Probabilité étant en vie à l'âge x d'être encore en vie à l'âge $x+1$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x$$

EXEMPLE: *probabilité à 70 ans d'atteindre 71 ans*

$$p_{70} = \frac{750.022}{767.741} = 0,977$$

2. Probabilités de survie et décès

Probabilité de survie dans n années :

Probabilité étant en vie à l'âge x d'être encore en vie à l'âge $x+n$ (ou de décéder après l'âge $x+n$)

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+n-1}$$

EXEMPLE: *probabilité à 40 ans d'atteindre 70 ans*

$${}_{30}p_{40} = \frac{767.741}{965.973} = 0,795$$

2. Probabilités de survie et décès

Probabilité de décès dans les n années

Probabilité étant en vie à l'âge x de décéder avant l'âge $x+n$

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x$$

EXEMPLE : *probabilité à 40 ans de décéder avant 70 ans*

$${}_{30}q_{40} = \frac{965.973 - 767.741}{965.973} = 0,205$$

2. Probabilités de survie et décès

Probabilité de décès dans n années

Probabilité étant en vie à l'âge x de décéder dans n années entre les âges $(x+n)$ et $(x+n+1)$

$${}_nq_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} = {}_np_x q_{x+n}$$

EXEMPLE : *probabilité à 40 ans de décéder entre 70 et 71 ans*

$${}_{30}q_{40} = \frac{767.741 - 750.022}{965.973} = 0,018$$

3. Espérance de vie

Définition de l'espérance de vie à l'âge x :

Moyenne à l'âge x du nombre d'années restant à vivre

Espérance de vie abrégée : (décès en début d'année):

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} t \cdot {}_tq_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} t \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

Espérance de vie complète : (décès en milieu d'année):

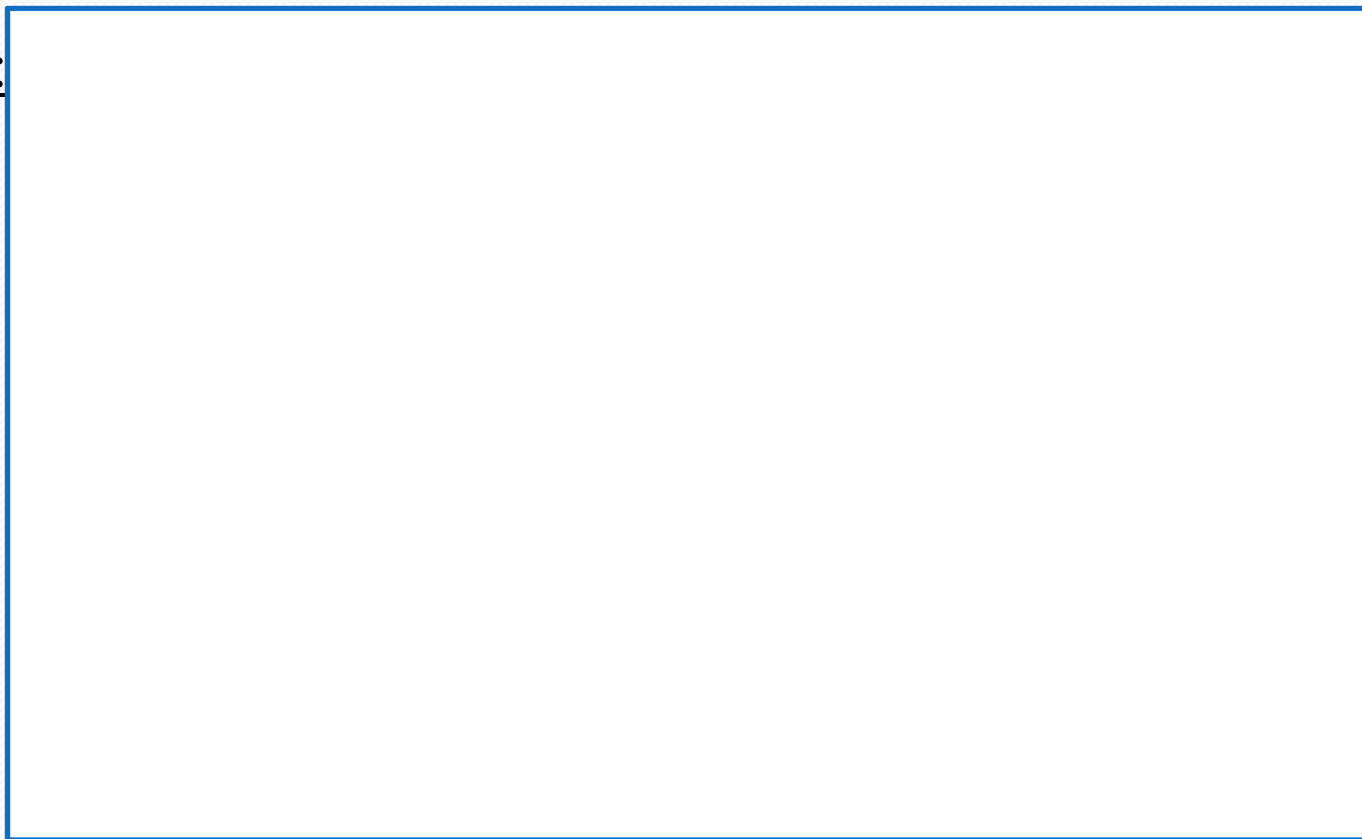
$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}$$

3. Espérance de vie

Autre forme de l'espérance de vie :

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t p_x$$

Dém. :



3. Espérance de vie

Autre forme de l'espérance de vie :

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t p_x$$

Dém. :

$$\begin{aligned} e_x &= \sum_t t \frac{d_{x+t}}{l_x} = \sum_t t \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \\ &= \frac{1}{l_x} (l_{x+1} - l_{x+2} + 2l_{x+2} - 2l_{x+3} + 3l_{x+3} \dots) \\ &= \frac{1}{l_x} (l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots) \\ &= p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \dots \end{aligned}$$

3. Espérance de vie

Exemples d'espérance de vie : (*INS – Belgique*) _

Table	À 0 ans	À 25 ans	À 65 ans
H1880	43,4	37,3	10,6
H2000	75,1	51,2	15,9
F1880	46,6	39,9	11,6
F2000	81,4	57,2	20,1

3. Espérance de vie

Expression en fonction de la variable aléatoire « *durée de vie future* »

$T(x)$ = variable aléatoire = durée de vie future d'un individu d'âge x

$x + T(x)$ = âge au décès

L'espérance de vie est l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

3. Espérance de vie

Relations d'équivalence :

$$e_x = E([T(x)])$$

$${}_0e_x = E(T(x)) \approx e_x + \frac{1}{2}$$

$${}_kp_x = P(T(x) > k)$$

4. Taux instantané de mortalité

La mortalité est un phénomène continu dans le temps

————→ Passer à une écriture en temps continu : $x \in [0, \omega] \subset \mathbb{R}$

La fonction l_x est supposée continue et dérivable
(à valeurs entières!)

Quotients de mortalités sur un intervalle : $(0 < h < 1)$

$${}_h q_x = \frac{l_x - l_{x+h}}{l_x} \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0$$

4. Taux instantané de mortalité

Si la fonction l est dérivable :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} {}_h q_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{l_x} \frac{l_x - l_{x+h}}{h}$$

$$= - \frac{1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x = - \frac{d}{dx} \ln l_x$$

$$= \mu_x$$

= taux instantané de mortalité

4. Taux instantané de mortalité

Relation entre probabilité de survie et taux instantané de mortalité :

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln l_{x+t}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^n \mu_{x+t} dt &= -[\ln l_{x+t}]_0^n = -(\ln l_{x+n} - \ln l_x) \\ &= -\ln \frac{l_{x+n}}{l_x} = -\ln {}_n p_x \end{aligned}$$

4. Taux instantané de mortalité

Donc:

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t} dt\right)$$

On a aussi :

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right)$$

5. Tables de Gompertz et Makeham

Ajustement analytique de tables brutes de mortalité suivant un modèle explicatif des causes de mortalité .

2 causes principales de mortalité :

ACCIDENT



Hyp.: indépendant
de l'âge

MALADIE



Hyp.: croît exponentiellement
avec l'âge

5. Tables de Gompertz et Makeham

3 modèles classiques:

- modèle *accident*:
 - taux instantané constant
- modèle *maladie* – **GOMPERTZ (1825)**
 - taux instantané exponentiel
- modèle *accident-maladie* – **MAKEHAM (1860)**
 - taux instantané constant+ exponentiel

5. Tables de Gompertz et Makeham

Modèle accident :

$$\mu_x = A$$

$$\frac{d}{dx} \ln l_x = -A$$

$$l_x = k e^{-Ax}$$

Population décroissant exponentiellement

5. Tables de Gompertz et Makeham

Modèle maladie de GOMPERTZ :

$$\mu_x = B c^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln l_x = -B c^x$$

$$l_x = k e^{-\frac{B c^x}{\ln c}}$$

Population décroissant doublement exponentiellement

5. Tables de Gompertz et Makeham

Modèle de MAKEHAM :

$$\mu_x = A + B c^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln l_x = -(A + B c^x)$$

$$l_x = k e^{-Ax} e^{-\frac{Bc^x}{\ln c}}$$

Population décroissant sous deux effets

5. Tables de Gompertz et Makeham

Modèle de MAKEHAM (2) :

Ecriture canonique :

$$l_x = k s^x g^{c^x}$$

Avec:

$$s = e^{-A} < 1$$

$$c > 1$$

$$g = e^{-\frac{B}{\ln c}} < 1$$

$$k \text{ tel que } l_0 = 1.000.000$$

$$k = \frac{1.000.000}{g} > 1.000.000$$

5. Tables de Gompertz et Makeham

EXEMPLE de TABLE Makeham :

Table MR Belge
(tables hommes rentes)

$k = 1.000.266,63$

$s = 0,999441704$

$g = 0,999733441$

$c = 1,101077536$

5. Tables de Gompertz et Makeham

Avantages et inconvénients de la table de MAKEHAM :

- + : logique explicative
- + : dépend de 4 paramètres
- + : facilité d'utilisation (cf. 2 têtes – voir plus loin)

- : ne capture pas des phénomènes tels que :
 - mortalité infantile
 - bosse des accidents à 20 ans
 - comportement aux grands âges

Reste un standard en Belgique .

5. Tables de Gompertz et Makeham

Alternative : *double table de Makeham* :

prendre en compte la longévité des rentiers

$$\mu_x = A + B c^x \quad (0 \leq x \leq x_0)$$

$$\mu_x = D + E f^x \quad (x_0 \leq x < \omega)$$

(par exemple prendre $f < c$)

5. Tables de Gompertz et Makeham

Modèle de HELIGMAN- POLLARD :

Objectif : prendre en compte la mortalité infantile et la bosse des accidents .

Modélisation directe du q_x (à valeurs dans (0,1) !!):

$$q_x / (1 - q_x) = A^{(x+B)^C} + D e^{-E(\ln x - \ln F)^2} + G H^x$$

Mortalité
en bas âge

Bosses des
accidents

Mortalité
normale

6. Probabilités sur 2 têtes

Probabilités relatives à un couple de personnes d'âge x et y :

Hypothèse (discutable...) : indépendance des durées de vie

a) Probabilité pour que les 2 têtes soient encore en vie dans n années:

$${}_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y$$

6. Probabilités sur 2 têtes

b) Probabilité pour qu'au moins une des 2 têtes soit encore en vie dans n années :

$${}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy}$$

c) Probabilité pour que les 2 têtes soient décédées dans n année :

$${}_n q_{\overline{xy}} = 1 - {}_n p_{\overline{xy}}$$

6. Probabilités sur 2 têtes

Notion d'âge moyen :

Substituer à un couple d'âges x et y un couple de même âge et ayant la même probabilité de survie

(Objectif : remplacer une table à double entrée par une table à une entrée).

$${}_n p_{mm} = {}_n p_{xy}$$

En général , m dépend non seulement de x et de y mais aussi de n .

6. Probabilités sur 2 têtes

Cas particulier: Table de MAKEHAM

Montrons que dans ce cas l'âge moyen ne dépend que des deux âges de départ .

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{k s^{x+n} g^{c^{x+n}}}{k s^x g^{c^x}} = s^n g^{c^x(c^n-1)}$$

m est alors solution de l'équation :

$$(s^n g^{c^m(c^n-1)})^2 = s^n g^{c^x(c^n-1)} s^n g^{c^y(c^n-1)}$$

6. Probabilités sur 2 têtes

C'est à dire :

$$c^m = \frac{c^x + c^y}{2}$$

$$m = \ln\left(\frac{c^x + c^y}{2}\right) / \ln c$$

On a aussi dans Makeham :

$$\mu_m = \frac{\mu_x + \mu_y}{2}$$

7. Tables réglementaires (belges)

- Tables de Makeham utilisées en assurance avec distinction :

- Hommes / Femmes

- Phénomène d'antisélection : tables différentes tenant compte du comportement de l'assuré à la souscription d'un contrat d'assurance

Opérations
de genre vie

Opérations
de genre décès

7. Tables réglementaires belges

	VIE	DECES
H	MR MR-5	MK
F	FR FR-5	FK FK'

(1992)

7. Tables réglementaires belges

Tables hommes :

MK

k= 1.000.450,59
s= 0,999106875782
g= 0,999549614043
c= 1,103798111448

MR

k= 1.000.266,63
s= 0,999441703848
g= 0,999733441115
c= 1,101077536030

MR-5 :

rajeunissement de 5 ans sur MR

7. Tables réglementaires belges

Tables femmes :

FK

k= 1.000.097,39
s= 0,999257048061
g= 0,999902624311
c= 1,118239062025

FK'

c= 1,122000000000

FR

k= 1.000.048,56
s= 0,999669730996
g= 0,999951440172
c= 1,116792453830

FR-5 :

rajeunissement de 5 ans sur FR

8 . Ajustement de tables

Passage d'une table de mortalité brute (observations brutes issue d'un recensement) à une table ajustée (par exemple un ajustement de Makeham) .

Différentes techniques existent :

- Méthode de King et Hardy et variantes
- Méthode des moindres carrés

Objectif : obtenir des estimateurs des constantes de Makeham (k, s, g, c) à partir des observations des l_x .

8 . Ajustement de tables

Méthode des moindres carrés :

$$\hat{l}_x \text{ brut} \rightarrow l_x = k s^x g^{c^x} \quad ???$$

Dans une table de Makeham, on a :

$$\frac{1}{p_x} = \frac{l_x}{l_{x+1}} = \frac{1}{s} g^{c^x - c^{x+1}}$$

$$\alpha_x = \ln\left(\frac{1}{p_x}\right) = -\ln s + c^x (c-1) \ln\left(\frac{1}{g}\right)$$

8 . Ajustement de tables

En posant : $a = (c - 1) \ln(1 / g)$

$$b = \ln s$$

On a : $\alpha_x = -b + a c^x$

En passant une seconde fois au logarithme :

$$\ln(\alpha_x + b) = \ln a c^x = \ln a + x \ln c$$

8 . Ajustement de tables

Méthode des moindres carrés sur les observations :

$$S = \sum_{x=x_0}^{x_N} (\ln(\hat{\alpha}_x + b) - \ln a - x \ln c)^2$$

- Pour chaque valeur de b (c'est à dire de s) , la procédure moindres carrés donne une estimation des paramètres de régression $\ln a$ et $\ln c$ ainsi qu'un coefficient de corrélation.
- On choisit la valeur de b donnant le meilleur coefficient de corrélation



9.... vers des tables prospectives

Les tables de mortalité classiques supposent implicitement que la mortalité future sera identique à celle observée aujourd'hui .

Par exemple pour quelqu'un ayant aujourd'hui 20 ans en 2012 et qui aura 60 ans en 2052, si on doit calculer sa probabilité de mourir entre 60 et 61 ans , on utilise les probabilités correspondantes de quelqu'un ayant aujourd'hui 60 ans que l'on projette à l'identique.

9.... vers des tables prospectives

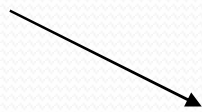
Evolution du qx à 60 ans (H) (tables brutes INS) :

1880-1890	0,033620
1928-1932	0,024120
1959-1963	0,023040
1968-1972	0,022108
1988-1990	0,014979
1994-1996	0,011875
2001-2003	0,011266

9.... vers des tables prospectives

Tables prospectives : tables introduisant une amélioration progressive de la mortalité.

Les **taux de mortalité** ne dépendent plus seulement de l'âge mais aussi de la date de naissance .



Deviennent des fonctions de 2 variables (x,t)

$\mu_x(t)$ = *taux instantané de mortalité de quelqu'un ayant l'âge x au temps t*

9.... vers des tables prospectives

$\mu_x(0) =$ Taux de mortalité observé à l'instant initial



$\hat{\mu}_x(t)$ Projection pour estimer les taux futurs de mortalité.

Par exemple , amélioration exponentielle de la mortalité identique à chaque âge et partant d'une table de Makeham :

$$\mu_x(t) = (A + Bc^x) e^{-\beta t}$$

9.... vers des tables prospectives

Pour un individu d'âge initial x en t , la probabilité de survie après n années (en $t+n$) est alors donnée par :

$$\begin{aligned} {}_n p_x(t) &= \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+s}(t+s) ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^n (A + B c^{x+s}) e^{-\beta(t+s)} ds\right) \\ &= \exp\left(-e^{-\beta t} \int_0^n (A e^{-\beta s} + B c^{x+s} e^{-\beta s}) ds\right) \end{aligned}$$

9.... vers des tables prospectives

Alternative : convergence vers une table limite :

$$\mu_x(t) = (A + Bc^x) e^{-\beta t} + (1 - e^{-\beta t})(C + Df^x)$$

Table
initiale

Table
asymptotique