

Etude macroscopique des milieux diélectriques

Chapitre III:

III.1 Vecteur polarisation

III.2 Potentiel électrique créé par un diélectrique – charges de polarisation

III.3 Champ créé dans un milieu diélectrique soumis à un champ extérieur

III.4 L'électrostatique des milieux diélectriques

III.5 Milieux diélectriques linéaires et homogènes (milieux LHI)

III.6 Les équations de Maxwell dans la matière

III.7 Energie électrostatique dans un diélectrique

III.8 Forces agissant sur un diélectrique

III.1 Vecteur polarisation

Un volume élémentaire $d\tau$ macroscopique d'un matériau diélectrique renferme un très grand nombre de particules portant chacune un moment dipolaire \vec{d}_i

Le moment dipolaire total porté par ce volume élémentaire est: $\vec{d} = \sum_i \vec{d}_i$

➤ **Vecteur polarisation** du matériau est le moment dipolaire total contenu dans l'élément de volume (**vecteur densité volumique de moment dipolaire électrique**)

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{d}_i}{d\tau}$$

➤ **En régime variable**, les charges en mouvement dans le diélectrique

créent un **courant de polarisation de vecteur-densité**: $\vec{j}_p = \frac{1}{\tau} \sum_{i \in \tau} q_i \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

III.2.1 Potentiel électrique créé par un diélectrique

Un matériau diélectrique étant constitué d'une collection de dipôles électriques microscopiques, **chaque dipôle** va créer en tout point M de l'espace repéré par le \vec{r} vecteur un potentiel électrique: $V_d(M) = k \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Le potentiel électrique $V(M)$ créé en M par l'ensemble du système (diélectrique) est:

$$V(M) = V_s(M) + V_\tau(M) + V_d(M)$$

- $V_s(M)$: potentiel créé par les charges en surface
- $V_\tau(M)$: potentiel créé par les charges dans le volume
- $V_d(M)$: potentiel créé par la distribution de dipôles présents à l'échelle microscopique

III.2.1 Potentiel électrique créé par un diélectrique

➤ Potentiel de polarisation

$$Vd(M) = k \iiint_{\tau} \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{r^2} d\tau = k \iiint_{\tau} \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau$$

$$Vd(M) = k \left[\iiint_{\tau} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau + \iiint_{\tau} - \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{P})}{r} d\tau \right]$$

En utilisant le théorème de d'Ostrogradsky, on obtient:

$$V(M) = k \iint_S \frac{\sigma_l + (\vec{P} \cdot \vec{n})}{r} dS + k \iiint_{\tau} \frac{\rho_l - (\vec{\nabla} \cdot \vec{P})}{r} d\tau$$

III.2.1 Potentiel électrique créé par un diélectrique

➤ **Les effets électrostatiques de la polarisation** sont assimilés à ceux d'une distribution de charges électriques en surface et en volume caractérisées par les densités de charges:

$$\begin{cases} \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \\ \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \end{cases} \quad (\text{charges liées caractéristiques du diélectrique})$$

Potentiel de polarisation:

$$V_p = k \iint_S \frac{\sigma_p dS}{r} + k \iiint_V \frac{\rho_p d\tau}{r}$$

Ces expressions montrent qu'un problème diélectrique peut être ramené à un problème électrostatique tel que ceux rencontrés dans le cas du vide.

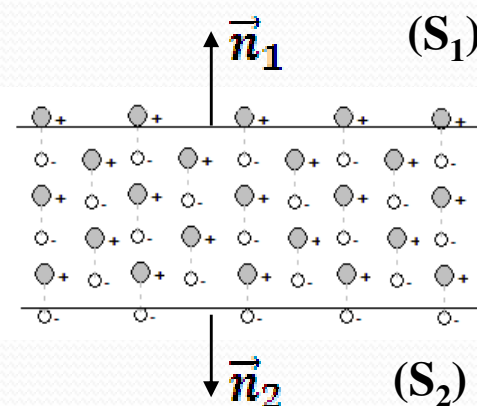
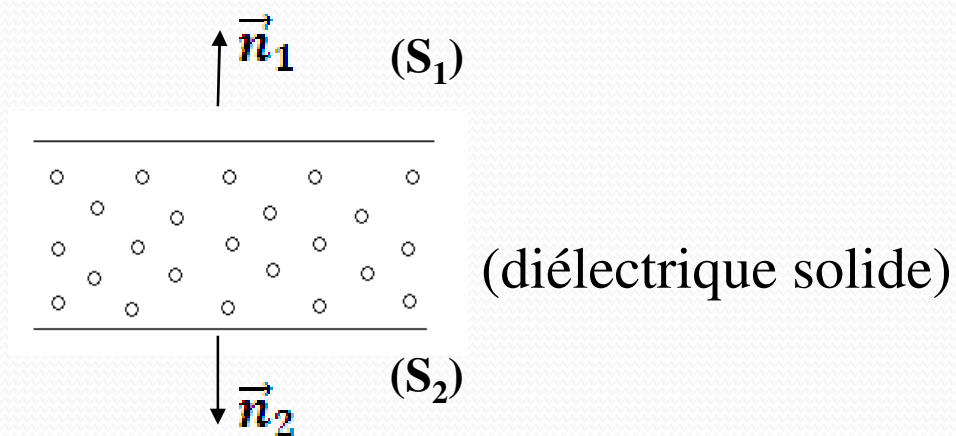
III.2.2 Charges de polarisation

• Charges surfaciques de polarisation

- absence de champ électrique extérieur: ➤ présence d'un champ électrique extérieur:

$$\vec{P} = \vec{0}$$

$$\vec{P} \neq \vec{0} \quad \text{Parallèle à } \vec{E} \text{ et uniforme dans tout le matériau}$$



Ce champ va donc exercer sur les charges positives et négatives des forces électriques qui vont les déplacer vers les surfaces du diélectrique des charges liées au diélectrique de densité:

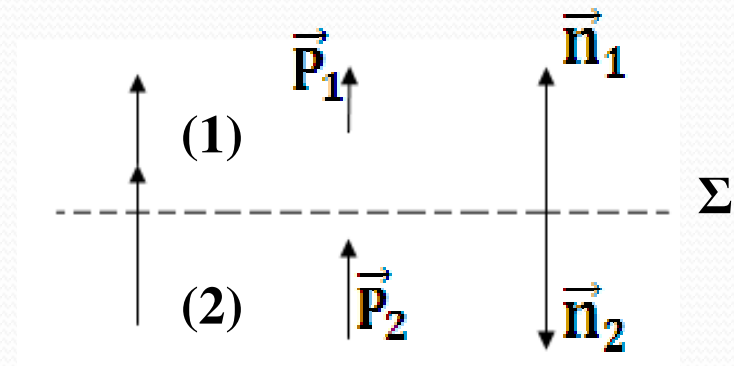
$$\begin{cases} \sigma_{p1} = \vec{P} \cdot \vec{n}_1 \\ \sigma_{p2} = \vec{P} \cdot \vec{n}_2 \end{cases}$$

III.2.2 Charges de polarisation

- **Charges volumiques de polarisation**

➤ Dans le volume, la polarisation est uniforme (empilement régulier de dipôles): $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ donc $\rho_p = 0$

➤ Si on considère deux diélectriques (1) et (2) polarisés uniformément de vecteur de polarisation \vec{P}_1 et \vec{P}_2 en contact l'un avec l'autre suivant une surface plane Σ



III.2.2 Charges de polarisation

- La densité surfacique de charges de polarisation est donnée par :

$$\sigma_p = \sigma_{p1} + \sigma_{p2} = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_2 = -P_1 + P_2$$

Si le diélectrique est constitué d'un empilement continu de couches

d'épaisseur très petites: $\Delta x = (x_{i-1} - x_i) = dx$

La charge de la surface S séparant les couches (i-1) et i: $dq = (\sigma_{i-1} + \sigma_i)S$

La densité volumique de charges est donnée par :

$$\rho_p = \frac{dq}{d\tau} = - \frac{(P_i - P_{i-1})}{dx} = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

En généralisant en trois dimensions:

$$\rho_p = - \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

III.3 Champ électrique créé par un diélectrique soumis à un champ extérieur

➤ Champ de polarisation

$$\sigma_{p+} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Polarisation est uniforme: $\longrightarrow \sigma_{p-} = -\vec{P} \cdot \vec{n}$

Créant un champ de polarisation : $\vec{E}_p = -\vec{\nabla} V_p = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\tau}{r^2} \right) \right)$

$$\vec{E}_p = -\lambda \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \lambda = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\tau}{r^2} \right) : \text{une constante sans dimension qui dépend de la géométrie du diélectrique}$$

\vec{E}_p : linéaire et opposé à \vec{P} est aussi appelé **champ dépolarisant**

➤ le **champ moyen** dans le diélectrique: $\vec{E} = \vec{E}_{exc} + \vec{E}_p$

III.3 Champ électrique créé par un diélectrique soumis à un champ extérieur

- Circulation du champ électrique dans un diélectrique

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Equation de Laplace dans les milieux diélectriques

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{(\rho_l + \rho_p)}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = \vec{E}_{exc} + \vec{E}_p, \text{ avec } \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V_{exc}) + \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V_p)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta(V_{exc} + V_p) = -\Delta V \quad \rightarrow$$

Equation de Poisson

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho_l + \rho_p)$$

Si le milieu est **uniformément polarisé**, la polarisation est constante: $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$

Ainsi, le **potentiel de polarisation** obéit à l'équation de Laplace: $\Delta V_p = 0$

III.4 L'électrostatique des milieux diélectriques

➤ Théorème de Gauss

Soit un échantillon matériel au repos occupant un volume τ et limité par une surface S . La distribution de charge volumique $\rho = \rho_l + \rho_p$

• **Forme locale du théorème de Gauss:** $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0}$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_l - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$: champ macroscopique appelé vecteur **excitation électrique**
ou **déplacement électrique** ou **induction électrique**

On obtient ainsi la **forme locale du théorème de Gauss** en présence d'un milieu diélectrique appelée **équation de Maxwell-Gauss**: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l$

III.4 L'électrostatique des milieux diélectriques

•Forme intégrale du Théorème de Gauss

On intègre dans le volume τ et limité par une surface S

$$\iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} d\tau = \iiint_{\tau} \rho_l d\tau = Q_l$$

Q_l : la charge extérieure au matériau et située à l'intérieure de la surface fermée S.

et en appliquant la formule d'Ostrogradsky, on obtient:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau} \rho_l(M) d\tau$$

:forme intégrale du théorème de Gauss

III.4 L'électrostatique des milieux diélectriques

➤ Discontinuité du vecteur excitation électrique à travers une surface chargée

A la traversée d'une surface chargée avec une densité de charges surfacique, séparant deux milieux diélectriques (1) et (2):

$$E_{t1} = E_{t2} \quad E_{n2} = E_{n1} + \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

➤ Pour le vecteur excitation électrique, on utilise la forme intégrale du théorème de Gauss, $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_l = \sigma_l dS \longrightarrow D_{n2} = D_{n1} + \sigma_l$

La composante normale du vecteur excitation \vec{D} électrique est discontinue

➤ Si les deux milieux (1) et (2) ne contiennent que des charges de polarisation en volume $D_{n2} = D_{n1}$ la composante normale de \vec{D} se conserve

III.5 Milieux diélectriques linéaires et homogènes

➤ Susceptibilité diélectrique

- ✓ Lorsqu'on applique un **champ électrique fort** à un diélectrique, les **moments dipolaires préexistants** sont tous orientés dans la **direction du champ**

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E} + \dots)$$

- ✓ Si le **champ appliqué est faible**, on s'arrête au premier ordre et la polarisation s'écrit sous la forme : $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ et χ_e : **susceptibilité diélectrique du matériau** (relation linéaire), on parle alors de matériau « **linéaire** »
- si ses propriétés sont identiques en chacun de ses points: « **homogène** »
- si ses propriétés physiques sont les mêmes dans toutes les directions « **isotrope** »

Ainsi le diélectrique est appelé diélectrique **linéaire, homogène et isotrope** noté **diélectrique LIH** (échelle macroscopique) ou **diélectrique parfait**

III.5 Milieux diélectriques linéaires et homogènes

➤ Permittivité diélectrique relative

Dans tout diélectrique parfait c'est à dire linéaire, homogène et isotrope on a: $\vec{P} = \epsilon_o \chi_e \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} \longrightarrow \vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \chi_e \epsilon_o \vec{E} = \epsilon_o (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$\epsilon_r = (1 + \chi_e)$$

: permittivité diélectrique relative du matériau
ou **constante diélectrique** (grandeur macroscopique)

$$\vec{D} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

ϵ : permittivité diélectrique du matériau

ϵ_o : permittivité diélectrique du vide

III.6 Equations de Maxwell dans la matière

➤ Champ électromagnétique dans les milieux diélectriques

$\vec{E}(\vec{M}, t)$: créé par une distribution de charges (la densité volumique de charges $\rho(t)$)

$\vec{B}(\vec{M}, t)$: créé par une distribution de courants (densité de charges de courant $\vec{J}(t)$)

➤ Equations de Maxwell

- On doit prendre en compte les charges et courants de polarisation par rapport au vide

✓ Equation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Courant de} \\ \text{Conduction}}}{\vec{J}_{tot}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{courant de} \\ \text{déplacement}}}{\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \right)$$

$$\vec{J}_{tot} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{courant de} \\ \text{polarisation}}}{\vec{J}_p} + \underset{\substack{\searrow \\ \text{autres courant} \\ \text{circulant (système)}}}{\vec{J}'}$$

III.6 Equations de Maxwell dans la matière

✓ Equation de Maxwell-Ampère

$$\rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

➤ Système d'équations de Maxwell dans la matière

{	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l$	Maxwell-Gauss (théorème de Gauss)
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Maxwell flux magnétique
	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Maxwell-Faraday
	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$	Maxwell-Ampère (théorème d'Ampère)
	$\vec{D} = (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) = \epsilon \vec{E}$	Relation de liaison

III.6 Equations de Maxwell dans la matière

➤ Equation de Maxwell dans le diélectrique

Dans le diélectrique, il n'existe pas de charges libres: $\rho_{\text{libre}} = 0$

et il ne peut y apparaître un courant macroscopique: $\vec{J}_{\text{libre}} = \vec{0}$

dans la matière

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \\ \vec{D} = (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) = \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

dans le diélectrique

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\text{libre}} = 0 \text{ et } \vec{J}_{\text{libre}} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} = (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) = \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

III.7 Energie électrostatique dans un diélectrique

On considère un système de charges excitatrices confinées à l'intérieur d'une sphère (S) de rayon R, de surface S et occupant un volume fini de l'espace, en présence d'un diélectrique. Un tel système possède alors une énergie:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho_l V d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} (V \bar{\nabla} \cdot \bar{D}) d\tau$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} [\bar{\nabla}(V \bar{D})] d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\tau} [\bar{D} \cdot \bar{E}] d\tau$$

d'après le théorème de **Green-Ostrogradsky** en faisant tendre R vers l'infini, on obtient:

$$U = \int_{\text{espace}} \left(\frac{\bar{D} \cdot \bar{E}}{2} \right) d\tau$$

$$\text{et } u = \frac{1}{2} (\bar{D} \cdot \bar{E}) = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

densité d'énergie
électrostatique

III.8 Forces agissant sur un diélectrique

➤ La force subit par un **dipôle** de la part d'un champ électrique \vec{E}_o extérieur **non uniforme** (Chapitre II): $\vec{F} = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$

➤ Dans le cas d'un **diélectrique** (distribution de dipôles), un volume élémentaire $d\tau$ va subir une force élémentaire $d\vec{F}$ de la part du champ électrique \vec{E}

$$d\vec{F} = (\vec{P} d\tau \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

➤ Ainsi on peut définir pour le diélectrique une **densité volumique de force** donnée par:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

III.8 Forces agissant sur un diélectrique

La force \vec{F} peut être exprimée en fonction des densités de charges surfacique et volumique de polarisation. La composante suivant Ox est :

$$d\vec{F} = \vec{P} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = \vec{\nabla} \cdot (\vec{P} \cdot \vec{E}) d\tau - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau$$

$$\longrightarrow \vec{F} = \int_S (\sigma_p \vec{E}) ds + \int_\tau (\rho_p \vec{E}) d\tau \quad \text{avec: } \vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$$

d'après la neutralité globale de charges de polarisation: $q_p + q_s = 0$

$$\longrightarrow \vec{F} = \iint_S (\sigma_p \vec{E}_o) ds + \iiint_\tau (\rho_p \vec{E}_o) d\tau$$



III. Fin

Remarques: