

Introduction aux générateurs de scénarios économiques

Application aux courbes des taux

Janvier 2015, version 1.0

Aymric Kamega, Actuaire
aymric.kamega@univ-brest.fr

1. GSE : présentation de risques financiers et de modèles
2. GSE : mise en œuvre en probabilités historique
3. GSE : probabilités historiques et risque-neutre
4. GSE et actualisation des flux : principes
5. GSE et actualisation des flux : construction d'une STTI

1. GSE : risques financiers et modèles

1.1. Risques financiers : actions

Le cours d'une société cotée est sensé refléter sa « valeur fondamentale » (somme de ses revenus futurs actualisés), telle qu'elle peut ressortir d'une analyse économique de l'activité de l'entreprise et de ses perspectives.

Dans ce cas, on a (en faisant tendre n vers l'infini) :
$$P_{t,n} = \sum_{h=1}^n \frac{E(D_{t+h})}{(1+r)^h}$$

Les écarts entre la valeur fondamentale et la capitalisation boursière d'une société sont en général interprétés comme la conséquence de comportements spéculatifs qui auraient pour conséquence de créer un décalage entre l'« économie réelle » et le monde de la finance.

Cette dichotomie entre d'une part une analyse économique objective et d'autre part un comportement largement irrationnel des marchés boursiers peut toutefois être dépassée au prix d'une réflexion sur la nature de l'aléa sous-jacent à la détermination de la valeur.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.1. Risques financiers : actions

Les modèles classiques de valorisation financière d'actifs de type « actions » se sont développés avec l'hypothèse sous-jacente de rendements gaussiens (le modèle de Black et Scholes en est devenu l'archétype).

De nombreuses études empiriques montrent que les prix observés sur les marchés ont des comportements très éloignés de l'hypothèse de rendements gaussiens (cf. Mandelbrot [2005]).

Le défaut majeur de l'hypothèse gaussienne est de sous-estimer très sensiblement les variations de grande amplitude du rendement.

Un modèle prétendant à un certain réalisme ne saurait donc faire l'économie d'une prise en compte du caractère non gaussien des rendements de l'actif.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.1. Risques financiers : actions

On considère ainsi les modèles suivants :

- Black et Scholes [1973] : $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t)$
- Merton [1976] : $\frac{dS(t)}{S(t)} = (\mu - \lambda k) dt + \sigma dB(t) + dP$ avec P processus de Poisson.
- Heston [1993] : $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sqrt{V(t)} dB_1(t)$ avec $dV(t) = a(\theta - V(t)) dt + b\sqrt{V(t)} dB_2(t)$
- Hardy [2001] : $\frac{dS(t)}{S(t)} | \rho_t = \mu_{\rho_t} dt + \sigma_{\rho_t} dB(t)$ avec $p_{ij} = \Pr[\rho_{t+1} = j | \rho_t = i]$, $i = 1, 2, j = 1, 2$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.2. Risques financiers : taux

Contrairement aux actions, pour les produits de taux ce sont des variables d'état déterminant la structure des taux qui sont modélisées.

Le prix d'une obligation est obtenu comme combinaison linéaire des prix des zéro-coupons, déduit de la modélisation des taux d'intérêt. Ainsi, on a (où $P(t, T)$ est le prix en t du zéro-coupon de maturité T) :

$$O(T) = N \times \left(\gamma \sum_{i=1}^T P(0, i) + P(0, T) \right)$$

avec

$$P(0, t) = E \left[\exp \left(- \int_0^t r(u) du \right) \right]$$

Les modèles d'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêt sont nombreux mais peuvent toutefois être classés en deux catégories :

- modèles d'équilibre partiel ou d'équilibre général,
- modèles fondés sur l'absence d'arbitrage.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.2. Risques financiers : taux (modèles d'équilibre)

Les modèles d'équilibre s'appuient sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques pour en déduire le comportement du taux court.

En pratique, le taux d'intérêt semble poussé, au cours du temps, à revenir vers une moyenne de long terme lorsqu'il s'en éloigne : quand $r(t)$ est élevé, la tendance est à la baisse, et vice versa. Le modèle classique dans ce domaine est celui de Vasicek :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW_t$$

Dans le modèle de Vasicek, le taux court peut devenir négatif. À partir d'un modèle d'équilibre général, Cox, Ingersoll et Ross obtiennent une dynamique tel que le taux court n'est jamais négatif. Ce modèle s'écrit :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r} dW_t$$

Ici, l'écart-type instantané est proportionnel à la racine carré du taux court : lorsque le taux court diminue, l'écart-type fait de même. En outre, lorsque ce taux est nul, il reste une tendance positive égale à $abdt$, sans terme stochastique.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.2. Risques financiers : taux (modèles d'équilibre)

Les modèles présentés ci-dessus sont des modèles à un facteur, ie qu'un seul facteur est à l'origine de l'évolution de l'ensemble de la courbe des taux.

Leur principale limite est qu'ils impliquent que les taux évoluent de façon parfaitement corrélée pour toutes les maturités (toute la courbe des taux étant déterminée par le seul taux court r), ce qui n'est pas le cas en pratique.

Parmi les modèles multifactoriels, on trouve le modèle de Hull et White à deux facteurs, basé sur une spécification de la dynamique du taux court (noté r_t) et du taux long (noté l_t), qui reprend l'approche de retour à la moyenne du modèle classique de Vasicek :

$$dr_t = \kappa_r (l_t - r_t) dt + \sigma_r dB_{r,t}$$

$$dl_t = \kappa_l (\mu_l - l_t) dt + \sigma_l dB_{l,t}$$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.2. Risques financiers : taux (modèles fondés sur l'AOA)

L'inconvénient des modèles ci-avant est que la courbe initiale des taux est un output qui ne s'ajuste pas automatiquement à celle observée en date courante.

Un modèle fondé sur l'AOA est construit de façon à être cohérent avec la structure par termes observée aujourd'hui (la courbe initiale est alors un input).

Hull et White ont ainsi généralisé le modèle de Vasicek afin de le rendre compatible avec la courbe des taux actuelle :

$$dr = (k(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t$$

Le modèle de Black et Karasinski, qui ne permet pas aux taux d'intérêt de devenir négatifs, est également fondé sur l'AOA :

$$d \ln(r) = (k(t) - a \ln(r_t))dt + \sigma dW_t$$

Enfin, il existe également en AOA le modèle de Ho et Lee :

$$dr = k(t)dt + \sigma dW_t$$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.2. Risques financiers : taux (modèles fondés sur l'AOA)

Outre les modèles cités précédemment, on trouve parmi les modèles d'absence d'arbitrage la classe de modèles HJM qui modélisent la dynamique des taux *forward* instantanés dans un cadre très général. HJM suppose que le taux *forward* instantané suit le processus d'Ito suivant :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

soit :

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(s, T)ds + \int_0^t \sigma(s, T)dW_s$$

Le résultat fondamental de HJM est que sous la probabilité risque neutre (RN), la tendance de la dynamique du taux forward est donnée par :

$$\mu(t, T)dt = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds$$

HJM ne propose donc pas une structure dynamique spécifique, mais plutôt un cadre de travail. Les applications les plus connues sont celles avec le modèle de Ho et Lee et avec le modèle de Hull et White / Vasicek généralisé.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.2. Risques financiers : taux (modèles fondés sur l'AOA)

Dans le cas du modèle de Ho et Lee, on a :

$$\sigma(t, T) = \sigma$$

d'où

$$\mu(t, T) = \sigma^2(T - t)$$

puis

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right) + \sigma W_t$$

Au final, on a ainsi pour le taux court :

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W_t$$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.2. Risques financiers : taux (modèles fondés sur l'AOA)

Dans le cas du modèle de Vasicek généralisé, on a :

$$\sigma(t, T) = \sigma e^{-a(T-t)}$$

d'où

$$\mu(t, T) = \frac{\sigma^2}{a} \left(e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} \right)$$

puis

$$f(t, T) = f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-aT} \right)^2 + \sigma \int_0^t e^{-a(T-s)} dW_s$$

Au final, on a ainsi pour le taux court :

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-at} \right)^2 + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.3. Risques financiers : défaut, signature et liquidité

Alors que pour l'appréciation du risque couru par un investisseur l'utilisation de probabilités réelles ou historiques est pertinente, les méthodes d'évaluation recourent plutôt aux probabilités risque neutre (RN), qui peuvent être déduites des prix, des taux ou des *spreads* de taux observés.

Le *spread* de taux, égal à la différence entre le taux promis et le taux sans risque, traduit entre autres :

- un risque de défaut, correspondant au risque de défaut de la contrepartie ;
- un risque de signature, correspondant au risque de dégradation de la note ;
- un risque de liquidité, correspondant au risque de ne pas trouver de contrepartie pour céder le titre.

Le *spread* est ainsi composé de l'espérance de baisse du taux dû à la prise en compte du défaut, d'une prime de risque reflétant l'aversion au risque dans le monde réel et d'une prime de liquidité.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.3. Risques financiers : défaut, signature et liquidité

Considérons un titre zéro-coupon de durée T quelconque, qui vaut 1 en date 0 et qui promet un flux $X_{\max} = \exp(r_T^{\max} T)$ en date T , avec r^{\max} le taux nominal. L'espérance du flux aléatoire réellement payé par le titre en T s'écrit alors :

$$E^*(X) = (1 - f_T^*) \exp(r_T^{\max} T) + f_T^* \alpha \exp(r_T^{\max} T)$$

avec :

- f_T^* : la probabilité RN cumulée de défaut de paiement en date T ;
- α : le taux de recouvrement en cas de défaut de paiement en date T .

Par ailleurs, avec les probabilités RN, la prime de risque est nulle, et en négligeant la prime de liquidité, on a (avec r le taux sans risque) :

$$E^*(X) = \exp(rT)$$

Il ressort que le *spread* est égal à : $s = r_T^{\max} - r = -\frac{1}{T} \ln(1 - f_T^* (1 - \alpha)) \approx \frac{1}{T} f_T^* (1 - \alpha)$

d'où (en cas de faible risque de défaut) : $f_T^* \approx \frac{sT}{1 - \alpha}$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.3. Risques financiers : défaut, signature et liquidité

Le prix d'une obligation présentant un risque de défaut $P_D(0,T)$ est alors obtenu à partir du prix sans risque de défaut $P(0,T)$ via la formule :

$$P_D(0,T) = \left(1 - f_T^*\right) P(0,T) + f_T^* \alpha P(0,T)$$

Pour modéliser le *spread*, une méthode simplifiée est parfois utilisée par les assureurs. Cette méthode consiste à utiliser, pour les obligations risquées, le modèle d'évaluation des obligations sans risque de *spread* en abattant le nominal de manière à faire coïncider le prix théorique issu du modèle avec le prix observé sur le marché des obligations présentant un risque de défaut :

$$P_D(0,T) = \beta \times P(0,T)$$

L'abattement β dépend de la maturité et de la note des obligations risquées.

Une limite importante de cette approche par abattement est qu'elle fige l'effet du risque de *spread* à la date de calcul. Aussi, cette approche a l'inconvénient de se limiter à un impact sur la valeur, et non sur le risque encouru par les investisseurs.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.4. Risques financiers : immobilier

L'immobilier apparaît générer plus de rendement que les actions, alors que sa volatilité est plus faible. D'autres éléments doivent donc être pris en compte, comme par exemple la liquidité ou la fiscalité.

Concernant la liquidité, on peut retenir que la vitesse de rotation des actifs est d'environ 2,5 % par an pour l'immobilier, contre plus de 75 % pour les actions cotées à la Bourse de Paris. Cet écart met en évidence le fait que les transactions sur les marchés actions sont essentiellement des transactions d'arbitrage alors que pour l'immobilier ce sont des transactions finales (les coûts de transaction de l'immobilier sont d'ailleurs élevés).

En termes de modélisation, il est souvent retenu un modèle de Black et Scholes :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Ahlgrim et al. proposent de leur côté une modélisation des rendements réels de l'immobilier sur la base d'un modèle de Vasicek :

$$dm_t = \kappa_m (\mu_m - m_t) dt + \sigma_m dB_{m,t}$$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.5. Risques financiers et modèles intégrés : présentation générale

Dans le cadre du pilotage de son activité, un organisme assureur se doit de développer une réflexion sur la projection de son actif. Il s'avère alors indispensable de s'appuyer sur une modélisation des principales classes d'actifs disponibles de manière cohérente, et prenant compte des fluctuations de court terme et des équilibres macro-économiques de long terme.

En effet, à long terme, il est généralement considéré que (cf. relation de Fisher) :

$$\text{Taux d'intérêt nominal} = E_t(\text{Taux d'inflation}) + \text{Taux d'intérêt réel}$$

Cette contrainte doit donc être prise en compte. Ainsi, l'objectif de cette partie est de présenter une brève synthèse de la littérature pour identifier les modèles sur ce registre.

On considérera classiquement que le modèle d'actifs intègre les supports d'investissement suivants : les obligations, les actions, l'immobilier et le monétaire.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.6. Risques financiers et modèles intégrés : Brennan et Xia

Le modèle de Brennan et Xia présente des modèles stochastiques des taux d'intérêt réels, de l'inflation et des actions en vue d'en déduire un indice des prix à la consommation stochastique et un facteur d'actualisation stochastique réel.

L'une des caractéristiques de ce modèle, développé en 2000, est qu'il considère que l'inflation réalisée (obtenue à partir de l'indice des prix à la consommation, IPC) n'est pas parfaitement corrélée à l'inflation attendue.

Le modèle de Brennan et Xia est d'un périmètre plus restreint que le modèle de Wilkie puisqu'il n'intègre que les taux d'intérêt réels, l'inflation et les actions.

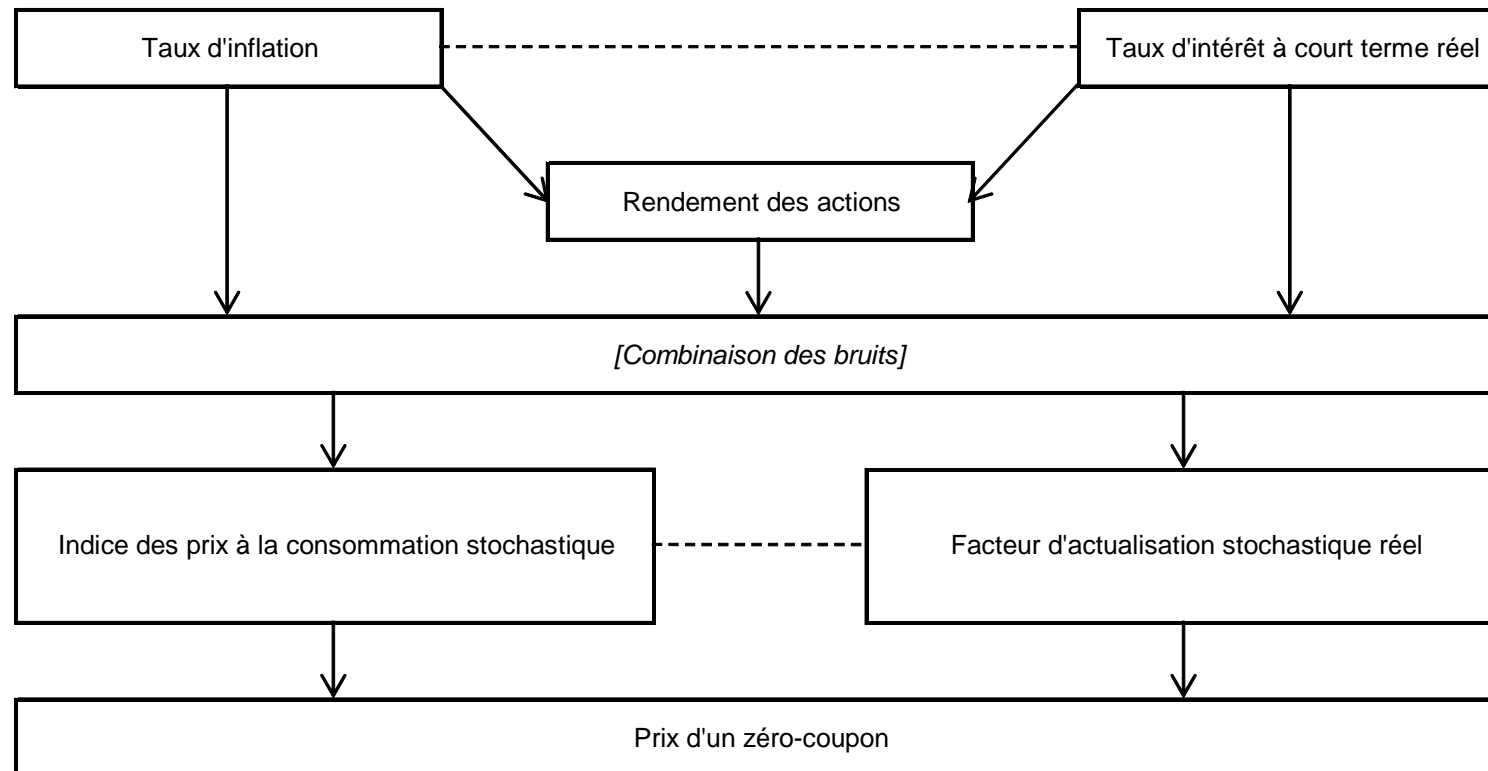
Il présente toutefois un intérêt significatif pour la modélisation d'éventuelles obligations indexées sur l'inflation.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.6. Risques financiers et modèles intégrés : Brennan et Xia

Le modèle de Brennan et Xia peut être représenté par les relations suivantes :

Structure du modèle de Brennan et Xia



1. GSE : risques financiers et modèles

1.6. Risques financiers et modèles intégrés : Brennan et Xia

Le taux d'inflation (attendue) suit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck suivant :

$$dI = \alpha(\bar{I} - I)dt + \sigma_I dB_I$$

Les taux d'intérêt réels à court terme suivent également un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et on revient ainsi au modèle de Vasicek à un facteur :

$$dr = \kappa(\bar{r} - r)dt + \sigma_r dB_r$$

Le prix des actions suit la dynamique brownienne géométrique suivante :

$$\frac{dS}{S} = (R_f + \sigma_S \lambda_S)dt + \sigma_S dB_S$$

avec :

- R_f le taux d'intérêt nominal ;
- $\sigma_S \lambda_S$ la prime de risque (λ_S représentant la prime de risque unitaire associée à la volatilité σ_S des actions).

En posant $\mu_S = (R_f + \sigma_S \lambda_S)$ on retrouve le MBG du modèle de Black et Scholes.

1. GSE : risques financiers et modèles

1.6. Risques financiers et modèles intégrés : Brennan et Xia

Brennan et Xia considèrent qu'en général, le taux d'inflation réalisé dépend du bruit propre au modèle sur l'inflation réalisée d'une part, et des bruits des modèles sur les actions, les taux d'intérêt et l'inflation attendue d'autre part.

La dynamique brownienne de l'IPC peut alors être décrite par la relation suivante :

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = I dt + \sigma_{\Pi} dB_{\Pi} = I dt + \xi' dB + \xi_u dB_u$$

avec $\xi_i (i = S, r, I)$ les paramètres de l'influence des bruits $dB_i (i = S, r, I)$ des modèles sur les actions, les taux d'intérêt et l'inflation attendue.

L'orthogonalité entre les browniens dB_u et dB permet alors d'écrire la variation relative de l'IPC entre deux dates t et s ($s > t$) sous la forme du produit de deux intégrales stochastiques indépendantes :

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_s}{\Pi_t} &= \exp \left\{ \int_t^s \left(I(u) - \frac{1}{2} \xi' \rho \xi \right) du + \int_t^s \xi' dB \right\} \exp \left\{ \int_t^s \left(-\frac{1}{2} \xi_u^2 \right) du + \int_t^s \xi_u dB_u \right\} \\ &= \eta_1(t, s) \eta_2(t, s) \end{aligned}$$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.6. Risques financiers et modèles intégrés : Brennan et Xia

À l'image de l'IPC stochastique, la dynamique brownienne du facteur d'actualisation stochastique réel dépend des actions, des taux d'intérêt réels et de l'inflation attendue :

$$\frac{dM}{M} = -rdt + \varphi' dB + \varphi_u dB_u$$

L'évolution relative du facteur d'actualisation (FA) réel peut être représentée par le produit de deux intégrales stochastiques indépendantes :

$$\begin{aligned} \frac{M_s}{M_t} &= \exp \left\{ \int_t^s \left(-r(u) - \frac{1}{2} \varphi' \rho \varphi \right) du + \int_t^s \varphi' dB \right\} \exp \left\{ \int_t^s \left(-\frac{1}{2} \varphi_u^2 \right) du + \int_t^s \varphi_u dB_u \right\} \\ &= \zeta_1(t, s) \zeta_2(t, s) \end{aligned}$$

où $\zeta_1(t, s)$ et $\zeta_2(t, s)$ sont orthogonaux.

Ces expressions sur l'IPC et le FA permettent de calculer le prix d'une obligation zéro-coupon à l'instant t qui paie 1 en termes nominal à la date T par la relation suivante :

$$P(t, T) = E_t \left[\frac{M_T / M_t}{\Pi_T / \Pi_t} \right] = E_t \left[\frac{\zeta_1(t, T)}{\eta_1(t, T)} \right] E_t \left[\frac{\zeta_2(t, T)}{\eta_2(t, T)} \right]$$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.6. Risques financiers et modèles intégrés : Brennan et Xia

Le prix d'une obligation ZC qui paie 1 en termes nominal peut également être noté :

avec :

$$P(t, T) = \exp \left\{ A(t, T) - B_1(t, T) r_t - B_2(t, T) I_t \right\}$$

$$B_1(t, T) = \kappa^{-1} \left(1 - e^{\kappa(t-T)} \right)$$

$$B_2(t, T) = \alpha^{-1} \left(1 - e^{\alpha(t-T)} \right)$$

$$A(t, T) = \left[B_1(t, T) - (T - t) \right] \left(\bar{r} - \lambda_r \frac{\sigma_r}{\kappa} \right) + \left[B_2(t, T) - (T - t) \right] \left(\bar{I} - \lambda_I \frac{\sigma_I}{\alpha} \right)$$

$$- \frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3} \left[2\kappa \left(B_1(t, T) - (T - t) \right) + \kappa^2 B_1^2(t, T) \right]$$

$$- \frac{\sigma_I^2}{4\alpha^3} \left[2\alpha \left(B_2(t, T) - (T - t) \right) + \alpha^2 B_2^2(t, T) \right]$$

$$+ \frac{\sigma_r \sigma_I \rho_{rI}}{\kappa \alpha} \left[(T - t) - B_2(t, T) - B_1(t, T) + \frac{1 - e^{(\alpha + \kappa)(t-T)}}{\alpha + \kappa} \right]$$

$$+ \left(\xi_S \lambda_S + \xi_r \lambda_r + \xi_I \lambda_I + \xi_u \lambda_u \right) (T - t)$$

1. GSE : risques financiers et modèles

1.6. Risques financiers et modèles intégrés : Brennan et Xia

Après quelques calculs, on arrive à l'expression suivante :

$$\frac{dP}{P} = \left[r + I - \xi_S \lambda_S - \xi_r \lambda_r - \xi_I \lambda_I - \xi_u \lambda_u - B_1 \sigma_r \lambda_r - B_2 \sigma_I \lambda_I \right] dt - B_1 \sigma_r dB_r - B_2 \sigma_I dB_I$$

on en déduit le taux d'intérêt nominal sans risque instantané en faisant tendre t vers T :

$$R_f = r + I - \xi_S \lambda_S - \xi_r \lambda_r - \xi_I \lambda_I - \xi_u \lambda_u$$

Brennan et Xia notent alors que l'expression $-\xi_S \lambda_S - \xi_r \lambda_r - \xi_I \lambda_I - \xi_u \lambda_u$ représente une sorte de « prime de risque » du taux d'intérêt nominal « sans risque ».

Au final, on a :

$$\frac{dP}{P} = \left[R_f - B_1 \sigma_r \lambda_r - B_2 \sigma_I \lambda_I \right] dt - B_1 \sigma_r dB_r - B_2 \sigma_I dB_I$$

À partir d'une approche comparable on trouve que le prix à la date t d'une obligation qui paie 1 en termes réel à la date T par la relation suivante :

$$P^*(t, T) = E_t \left[M_T / M_t \right] = E_t \left[\zeta_1(t, T) \zeta_2(t, T) \right] = \exp \left\{ A^*(t, T) - B_1(t, T) r_t \right\}$$

où $A^*(t, T) = \left[B_1(t, T) - (T - t) \right] \left(\bar{r} + \frac{\sigma_r}{\kappa} (\varphi_S \rho_{Sr} + \varphi_r + \varphi_I \rho_{rI}) \right) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3} \left[2\kappa (B_1(t, T) - (T - t)) + \kappa^2 B_1^2(t, T) \right]$

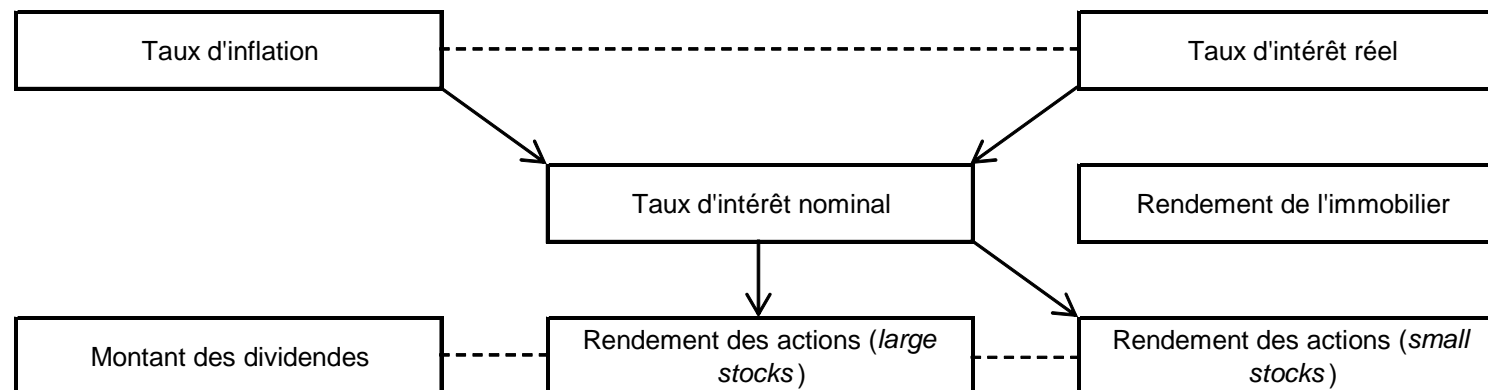
1. GSE : risques financiers et modèles

1.7. Risques financiers et modèles intégrés : Ahlgrim

Afin d'accentuer la sensibilisation des actuaires à la gestion des risques financiers, la *Casualty Actuarial Society* (CAS) et la *Society Of Actuaries* (SOA) se sont associées pour solliciter des recherches sur le développement de modèles intégrés.

Le modèle d'Ahlgrim, qui couvre entre autres, les taux d'intérêt, les rendements des actions, les taux de dividende, les taux d'inflation et les revenus de l'immobilier, s'inscrit dans ce cadre et ambitionne de répondre aux limites des principaux modèles intégrés et des principaux modèles composites, tout en mettant l'accent sur l'accessibilité de l'approche au plus grand nombre.

Structure du modèle d'Ahlgrim



1. GSE : risques financiers et modèles

1.7. Risques financiers et modèles intégrés : Ahlgrim

La mesure de l'inflation à la date t est supposée suivre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (modèle de Vasicek) :

$$dq_t = \kappa_q (\mu_q - q_t) dt + \sigma_q dB_{q,t}$$

Une fois l'inflation décrite, les taux d'intérêt réels sont modélisés. Le taux à court terme et le taux à long terme reprennent l'approche de retour à la moyenne du modèle multifactoriel de Hull et White :

$$dr_t = \kappa_r (l_t - r_t) dt + \sigma_r dB_{r,t}$$

$$dl_t = \kappa_l (\mu_l - l_t) dt + \sigma_l dB_{l,t}$$

Le rendement des actions hors dividende est ensuite décrit par le taux d'intérêt nominal de court terme majoré d'une prime de risque :

$$s_t = q_t + r_t + x_t$$

Ahlgrim et al. utilisent un modèle à changement de régime (modèle de Hardy), qu'ils appliquent à l'excès de rendement des actions .

1. GSE : risques financiers et modèles

1.7. Risques financiers et modèles intégrés : Ahlgrim

Une modélisation spécifique du taux de dividende est proposée :

$$d(\ln y_t) = \kappa_y (\mu_y - \ln y_t) dt + \sigma_y dB_{y,t}$$

Le modèle sur le taux de dividende est comparable à celui relatif à l'inflation. Toutefois, une des principales difficultés ici est la disponibilité des données.

Enfin, en suivant la même logique, une description des rendements de l'immobilier est proposée :

$$dm_t = \kappa_m (\mu_m - m_t) dt + \sigma_m dB_{m,t}$$

Le modèle a été calibré par Ahlgrim à partir d'un indice incluant une variété de produits immobiliers : habitation, industrie, bureaux et commerces.

1. GSE : présentation de risques financiers et de modèles
2. GSE : mise en œuvre en probabilités historique
3. GSE : probabilités historiques et risque-neutre
4. GSE et actualisation des flux : principes
5. GSE et actualisation des flux : construction d'une STTI

2.1. Préparation du calibrage en probabilités historiques

Dans la suite, les travaux sont réalisés dans l'univers des probabilités réelles pour le modèle d'Ahlgrim.

En pratique, le modèle retenu doit être alimenté par un certain nombre de paramètres ; ces paramètres sont déterminés par l'utilisation conjointe de deux logiques :

- à partir de données représentant l'historique ;
- à partir d'avis d'expert ou de contraintes exogènes jugées raisonnables.

Le recours à des avis d'experts permet en outre d'utiliser des logiques de scénarios (pour tester le comportement du modèle et des projections).

Ainsi par exemple, pour l'inflation il est important de tenir compte de l'objectif de stabilité des prix fixé par la BCE, et qui correspond en pratique au maintien des taux d'inflation à un niveau inférieur à 2 % à moyen terme.

2.1. Préparation du calibrage en probabilités historiques

Le pas de temps (quotidien, hebdomadaire, mensuel, annuel, etc.) doit être retenu en fonction de l'utilisation qui sera faite du générateur.

Il convient entre autres de s'assurer que la fréquence des données est cohérente avec l'horizon de projection. Par exemple dans le cadre de projections de long terme, les données pourront être de fréquence annuelle, afin de limiter l'impact des fluctuations conjoncturelles et de ne conserver que la tendance de moyen ou long terme des séries.

Le choix de la période d'observation influe beaucoup sur le calibrage et, de fait, sur les scénarios produits.

Il convient ainsi de s'assurer que la période utilisée est compatible avec les risques économiques ou financiers que l'on cherche à modéliser. En pratique, il existe des risques liés à l'utilisation d'un historique trop court (risque que certains risques ne se soient pas réalisés sur la période) ou trop long (risque que l'environnement économique ait considérablement évolué).

2.1. Préparation du calibrage en probabilités historiques

Dans le cas des modèles de type autorégressif $AR(1)$, l'estimation des paramètres peut être réalisée à partir de la méthode classique des moindres carrés.

En particulier, il conviendra de retenir une estimation par les moindres carrés simples pour les modèles de type Vasicek à un facteur et par les doubles moindres carrés pour les modèles de type Vasicek à deux facteurs (Hull et White).

La pertinence du modèle est appréciée à partir de sa qualité d'ajustement et de sa significativité globale. La qualité d'ajustement est évaluée à partir du coefficient de détermination ajusté et la significativité globale est mesurée à partir d'un test de Fisher. En complément, il convient d'évaluer la significativité individuelle des coefficients à partir du test de Student.

Dans les résultats présentés ci-après, une probabilité est associée aux tests de Fisher et de Student, il s'agit de la probabilité de rejeter à tort H_0 (H_0 étant l'hypothèse de nullité des coefficients) : lorsque cette probabilité est inférieure à 5 %, on rejettera H_0 .

2.1. Préparation du calibrage en probabilités historiques

Une attention particulière doit être accordée à l'analyse des résidus.

Dans ce contexte la 1^{ère} étape est de s'assurer que les résidus sont de moyenne nulle. À cet effet, par application du théorème central limite, on peut déterminer un intervalle de confiance, au seuil standard de 95 %, sur la moyenne des résidus.

Dans une 2^{ème} étape, il convient de détecter une éventuelle autocorrélation des erreurs, classique dans les modèles de séries temporelles (pour mémoire, il y a autocorrélation des erreurs lorsque les erreurs sont liés par un processus de reproduction – ie processus à mémoire –).

À cet effet, au-delà de l'examen visuel des résidus, on peut utiliser le test de Breusch-Godfrey pour les autocorrélations d'ordre $p \geq 1$, plus robuste que le test de Durbin-Watson. Le principe consiste à régresser les résidus estimés sur les variables explicatives et sur la série des résidus retardés, puis à tester l'hypothèse H_0 de nullité simultanée des p coefficients des résidus retardés.

2.1. Préparation du calibrage en probabilités historiques

Pour la 3^{ème} étape, on cherche à détecter une éventuelle hétéroscédasticité, fréquente dans les modèles de séries financières (il y a hétéroscédasticité lorsque les variances des erreurs ne sont plus constantes mais sont liées aux valeurs de la variable explicative).

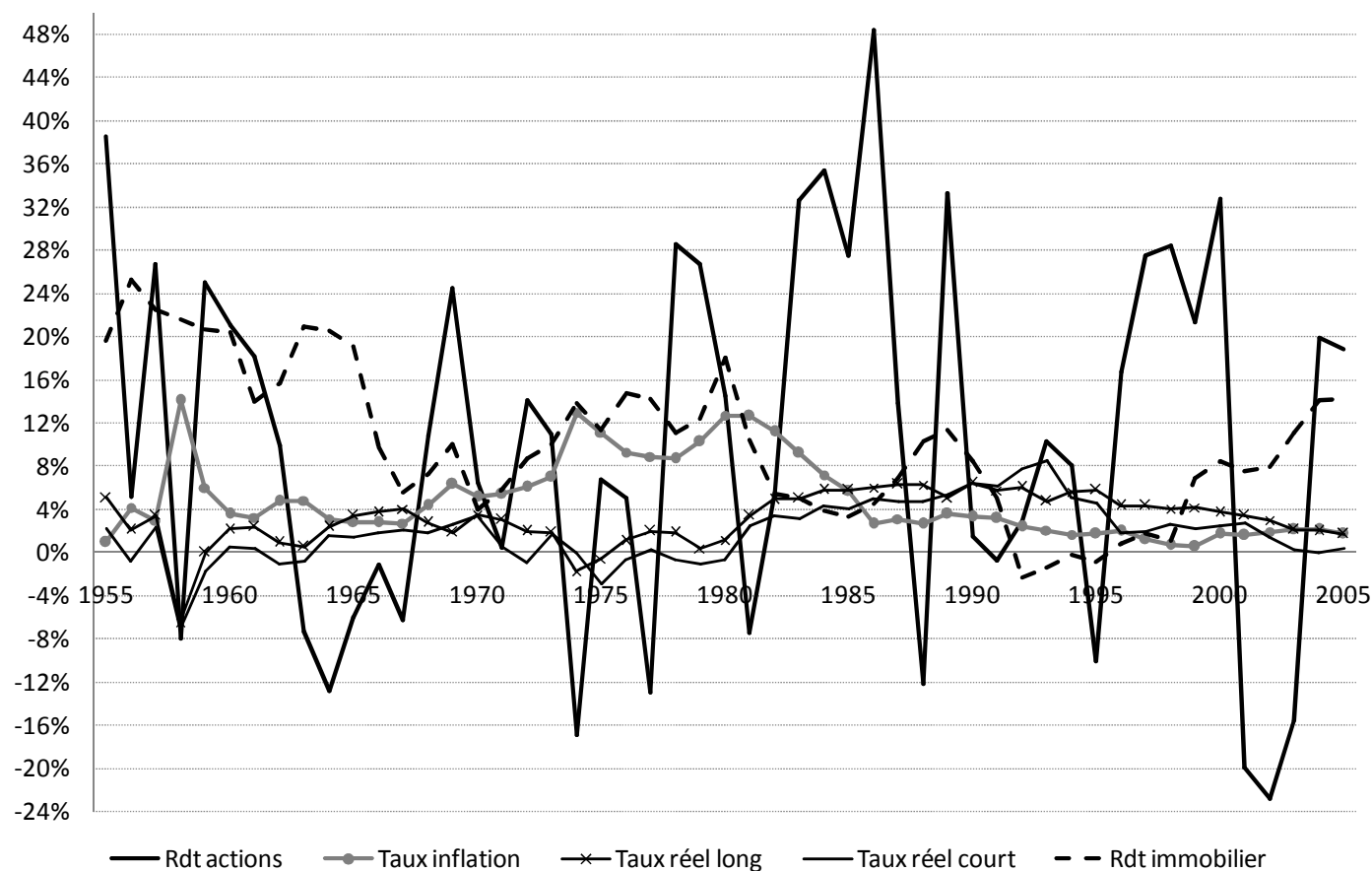
Les modèles ARCH(q) permettent de modéliser des séries dont la volatilité dépend du passé d'ordre q , notamment celles présentant de fortes périodes de volatilité suivies de périodes d'accalmies (comme dans les séries financières). À cet effet, le test approprié est le test qui vérifie si le processus est justifiable d'un processus ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity). Ce test consiste en une régression autorégressive des résidus (au carré) sur q retards. Ici, l'hypothèse nulle H_0 correspond à l'absence d'effet ARCH.

Pour la 4^{ème} étape, on réalise un test de normalité des erreurs. On retient le test de Jarque-Bera, fondé sur la notion d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis). Ici, l'hypothèse nulle H_0 est celle de la normalité des résidus : lorsque la probabilité associée est supérieure à 5 %, on accepte l'hypothèse H_0 de normalité des résidus.

2.1. Préparation du calibrage en probabilités historiques

Les données utilisées pour le calibrage ont l'allure suivante.

Illustration des données de Friggit (1955-2005, France)



2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (inflation)

Le modèle retenu par Ahlgrim pour l'inflation est : $dq_t = \kappa_q (\mu_q - q_t) dt + \sigma_q dB_{q,t}$

soit après discrétisation exacte :

$$q_{t+1} = q_t \times \exp(-\kappa_q) + \mu_q (1 - \exp(-\kappa_q)) + \varepsilon_{q,t} \times \sigma_q \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_q)}{2\kappa_q}}$$

L'estimation des paramètres est effectuée via une régression linéaire simple :

$$q_{t+1} = \alpha_q + \beta_q \times q_t + \tilde{\varepsilon}_{q,t}$$

Pour revenir au modèle initial d'Ahlgrim, les coefficients estimés $\hat{\alpha}_q$ et $\hat{\beta}_q$ sont transformés.

La vitesse de retour à la moyenne $\hat{\kappa}_q$ est ainsi calculée comme suit :

$$\begin{aligned}\beta_q &= \exp(-\kappa_q) \\ \kappa_q &= -\ln(\beta_q).\end{aligned}$$

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (inflation)

Le taux d'inflation moyen est déterminé par :

$$\alpha_q = \mu_q \left(1 - \exp(-\kappa_q) \right) = \mu_q \left(1 - \exp(\ln(\beta_q)) \right)$$

$$\mu_q = \frac{\alpha_q}{(1 - \beta_q)}.$$

L'écart type $\hat{\sigma}_q$ est égal à l'écart type de l'erreur du modèle estimé divisé par : $\sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_q)}{2\kappa_q}}$

Au final, on arrive aux résultats suivants, sachant que le calibrage d'Ahlgrim est réalisé avec des données annuelles US (1946-2001).

Ahlgrim : ajustement de l'inflation

Paramètre	Intitulé	Ahlgrim (annuel)	Friggit (annuel)
κ_q	Vitesse retour à la moyenne	0,47	0,261
μ_q	Taux d'inflation moyen	0,048	0,051
σ_q	Écart type de l'erreur	0,03	0,026

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (inflation)

Ahlgrim : ajustement de l'inflation (tests)

Test	Résultat	Interprétation
R ² ajusté	0,59	Le pouvoir explicatif du modèle est de 59 %
Fisher	$P = 4,5 \cdot 10^{-11}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,04$	La constante est significative
Student (variable)	$P = 4,5 \cdot 10^{-11}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$-2,6 \cdot 10^{-19}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,37$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,11$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (taux d'intérêt réels)

Pour mémoire, le modèle retenu pour les taux d'intérêt réels est le suivant (avec r_t pour les taux à court terme, et l_t pour les taux à long terme) :

$$\text{Étape 1 : } l_{t+1} = \beta_1 + \beta_2 \times l_t + \tilde{\varepsilon}_{l,t}$$

$$\text{Étape 2 : } r_{t+1} = \alpha_1 \times \hat{l}_t + \alpha_2 \times r_t + \tilde{\varepsilon}_{r,t}$$

soit après discrétisation exacte :

$$r_{t+1} = r_t \times \exp(-\kappa_r) + l_t (1 - \exp(-\kappa_r)) + \varepsilon_{r,t} \times \sigma_r \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_r)}{2\kappa_r}}$$

$$l_{t+1} = l_t \times \exp(-\kappa_l) + \mu_l (1 - \exp(-\kappa_l)) + \varepsilon_{l,t} \times \sigma_l \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_l)}{2\kappa_l}}$$

Pour estimer ce modèle à équations simultanées, Ahlgrim et al. retiennent une procédure d'estimation des Doubles Moindres Carrés (DMC). La procédure DMC consiste à appliquer en deux étapes les MCO :

$$\text{Étape 1 : } l_{t+1} = \beta_1 + \beta_2 \times l_t + \tilde{\varepsilon}_{l,t}$$

$$\text{Étape 2 : } r_{t+1} = \alpha_1 \times \hat{l}_t + \alpha_2 \times r_t + \tilde{\varepsilon}_{r,t}$$

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (taux d'intérêt réels)

Concernant la première étape, les coefficients estimés $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ sont transformés : on déduit la vitesse de retour à la moyenne des taux réels à long terme : $\kappa_l = -\ln(\beta_2)$

Le taux d'intérêt réel moyen à long terme est alors : $\mu_l = \frac{\beta_1}{(1-\beta_2)}$

L'écart type de l'erreur du modèle initial de taux à long terme, est égal à l'écart type du modèle estimé divisé par :

$$\sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_l)}{2\kappa_l}}$$

À la différence du modèle de l'étape 1 des DMC, le modèle de l'étape 2 sur les taux à court terme compte deux variables endogènes :

$$r_{t+1} = \alpha_1 \times \hat{l}_t + \alpha_2 \times r_t + \tilde{\varepsilon}_{r,t}$$

où les coefficients sont $\alpha_2 = \exp(-\kappa_r)$ et $\alpha_1 = (1 - \exp(-\kappa_r))$, soit $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.

Le modèle pour les paramètres relatifs aux taux courts est alors : $\Delta r_{t+1} = \alpha_1 (\hat{l}_t - r_t) + \tilde{\varepsilon}_{r,t}$

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (taux d'intérêt réels)

On en déduit alors la vitesse de « retour à la moyenne » des taux réels à court terme, noté $\kappa_r = -\ln(1 - \alpha_1)$, et l'écart type de l'erreur du modèle initial de taux à court terme, égal à l'écart type du modèle estimé divisé par :

$$\sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_r)}{2\kappa_r}}$$

Les résultats du calibrage sont les suivants (calibrage d'Ahlgrim réalisé à partir de données US mensuelles, et annualisées (1982-2001) et jugé insatisfaisant par Ahlgrim) :

Ahlgrim : ajustement des taux d'intérêt réels

Paramètre	Intitulé	<i>Ahlgrim</i> (annualisé)	Friggit (annuel)
κ_r	Vitesse retour à la moyenne (CT)	6,1	0,397
σ_r	Écart type de l'erreur (CT)	0,1	0,024
κ_l	Vitesse retour à la moyenne (LT)	5,1	0,451
μ_l	Taux d'intérêt réel moyen (LT)	0,028	0,029
σ_l	Écart type de l'erreur (LT)	0,1	0,023

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (taux d'intérêt réels)

Le tableau suivant reprend les principaux résultats sur les tests d'adéquation réalisés pour la 1^{ère} étape des DMC (modèle sur les taux d'intérêt réels à long terme).

Ahlgrim : ajustement des taux d'intérêt réels (tests)

Test	Résultat	Interprétation
R ² ajusté	0,40	Le pouvoir explicatif du modèle est de 40 %
Fisher	$P = 6,0 \cdot 10^{-7}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,02$	La constante est significative
Student (variable)	$P = 6,0 \cdot 10^{-7}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$-2,8 \cdot 10^{-19}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,30$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,72$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (taux d'intérêt réels)

Ce tableau reprend les principaux résultats sur les tests d'adéquation réalisés pour la 2^{ème} étape des DMC (modèle sur les taux d'intérêt réels à court terme).

Ahlgrim : ajustement des taux d'intérêt réels (tests complémentaires)

Test	Résultat	Interprétation
R ² ajusté	0,13	Le pouvoir explicatif du modèle est de 13 %
Fisher	$P = 6,1.10^{-3}$	Le modèle global est significatif
Student (variable)	$P = 6,1.10^{-3}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$-3,6.10^{-3}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,41$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,96$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P < 2,2.10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (taux d'intérêt nom.)

Les taux d'intérêt nominaux sont déduits des relations suivantes :

$$i_r = (1 + q) \times (1 + r) - 1$$

$$i_l = (1 + q) \times (1 + l) - 1$$

Ahlgrim et al. s'aperçoivent que les paramètres estimés pour le modèle de taux d'intérêt réel conduisent à une estimation des taux d'intérêt nominaux insatisfaisante. Aussi, Ahlgrim et al. fixent la valeur des paramètres sur la vitesse de retour à la moyenne et sur la volatilité des modèles de taux d'intérêt réel.

Ahlgrim : ajustement des taux d'intérêt réels (Version 2)

Paramètre	Intitulé	Ahlgrim V2 (annualisé)	Friggit (annuel)
κ_r	Vitesse retour à la moyenne (CT)	1,0	0,397
σ_r	Écart type de l'erreur (CT)	0,01	0,024
κ_l	Vitesse retour à la moyenne (LT)	0,1	0,451
μ_l	Taux d'intérêt réel moyen (LT)	0,028	0,029
σ_l	Écart type de l'erreur (LT)	0,0165	0,023

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (immobilier)

Le modèle retenu pour l'immobilier est le suivant :

$$d(re)_t = \kappa_{re} (\mu_{re} - (re)_t) dt + \sigma_{re} dB_{re,t}$$

soit après discrétisation exacte :

$$(re)_{t+1} = (re)_t \exp(-\kappa_{re}) + \mu_{re} (1 - \exp(-\kappa_{re})) + \varepsilon_{re,t} \sigma_{re} \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_{re})}{2\kappa_{re}}}$$

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant (le calibrage d'Ahlgrim est réalisé avec des données trimestrielles US (1978-2001)).

Ahlgrim : ajustement de l'immobilier

Paramètre	Intitulé	<i>Ahlgrim</i> (trimestriel)	Friggit (annuel)
κ_{re}	Vitesse retour à la moyenne	1,2	0,152
μ_{re}	Taux de rendement réel moyen	0,023	0,094
σ_{re}	Écart type de l'erreur	0,013	0,037

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (immobilier)

Ahlgrim : ajustement de l'immobilier (tests)

Test	Résultat	Interprétation
R ² ajusté	0,76	Le pouvoir explicatif du modèle est de 76 %
Fisher	$P < 2,2.10^{-16}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,13$	La constante n'est pas significative
Student (variable)	$P < 2,2.10^{-16}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$1,5.10^{-18}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,29$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,93$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P = 0,51$	Hypothèse de normalité des résidus vérifiée

2.2. Résultat du calibrage du modèle d'Ahlgrim (actions)

Ahlgrim et al. modélisent l'excès de rendement et les taux de dividendes des actions, approche qui présente toutefois des difficultés en termes de données. Aussi, une alternative a été retenue : modélisation de l'excès de rendement avec dividendes réinvestis (données disponibles avec Friggitt).

En outre, dans notre exemple le modèle de Black et Scholes a été privilégiée au modèle à changement de régime de Hardy (RSLN2) retenu par Ahlgrim.

Ahlgrim : ajustement des actions

Paramètre	Intitulé	<i>Ahlgrim</i>	Friggitt (annuel)
μ_s	Excès de rendement moyen	<i>s.o.</i>	0,033
σ_s	Écart type de l'excès des actions	<i>s.o.</i>	0,175

2.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

Toutes les projections présentées sont une moyenne des valeurs obtenues à partir de $N=10\,000$ simulations et sont réalisées jusqu'à la date $t=T=30$ ans.

Pour l'ensemble des projections, on suppose qu'à l'origine (valeurs observées sur les données de Friggit pour la période 1997-2005) :

- le taux d'inflation est égal à 1,5 % ;
- le taux d'intérêt réel à court terme est égal à 1,5 % ;
- le taux d'intérêt réel à long terme est égal à 3,1 % ;
- le taux de rendement dans l'immobilier est égal à 8,1 %.

2.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

Lors des projections, il convient de tenir compte de la corrélation observée entre les résidus des modèles calibrés et à cet effet, les erreurs de spécification des modèles projetés sont simulées *ex ante* (pour toutes les simulations et sur l'ensemble de la durée de projection).

En pratique, pour chaque modèle projeté les erreurs de spécification doivent s'écrire comme une combinaison linéaire (qui dépend directement de la structure de la matrice de corrélation des résidus) des erreurs des autres modèles.

Les coefficients de cette combinaison linéaire sont déterminés en utilisant la méthode de factorisation de Cholesky (qui permet d'obtenir une matrice triangulaire inférieure L , telle que $K = L.L'$, K étant la matrice de corrélation des résidus) et les valeurs des variables aléatoires représentant les erreurs utilisées dans ces combinaisons linéaires sont générées selon une loi normale centrée réduite.

2.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

On dispose alors d'une matrice contenant les erreurs des modèles projetés, pour chaque simulation et sur l'ensemble de la durée de projection, proche de la matrice des corrélations historiques.

Cela permet de s'assurer de la cohérence entre la corrélation des résidus historiques et la corrélation des erreurs projetées.

Ahlgrim (Friggit) : corrélations de l'historique des résidus

Friggit	Inflation	Immo.	Taux LT	Taux CT	Excès act.
Inflation	1	0,202	-0,858	-0,651	-0,324
Immo.	0,202	1	-0,321	-0,269	0,103
Taux LT	-0,858	-0,321	1	0,802	0,176
Taux CT	-0,651	-0,269	0,802	1	0,112
Excès act.	-0,324	0,103	0,176	0,112	1

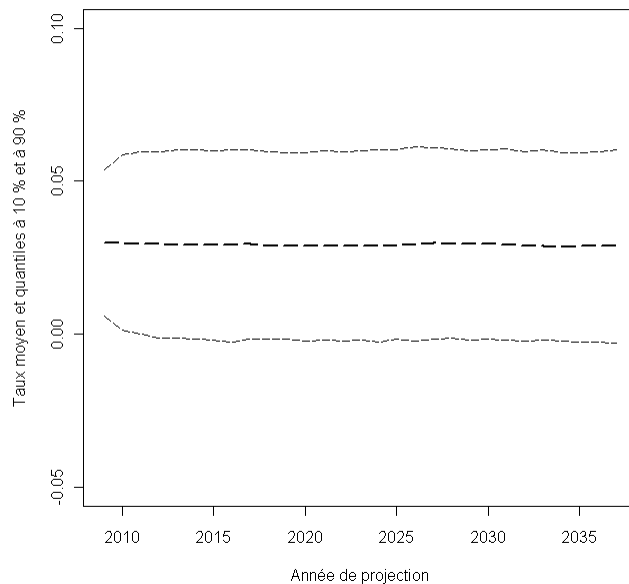
Ahlgrim (Friggit) : corrélations des erreurs projetées

Friggit	Inflation	Immo.	Taux LT	Taux CT	Excès act.
Inflation	1	0,197	-0,853	-0,643	-0,320
Immo.	0,197	1	-0,316	-0,262	0,102
Taux LT	-0,853	-0,316	1	0,796	0,173
Taux CT	-0,643	-0,262	0,796	1	0,109
Excès act.	-0,320	0,102	0,173	0,109	1

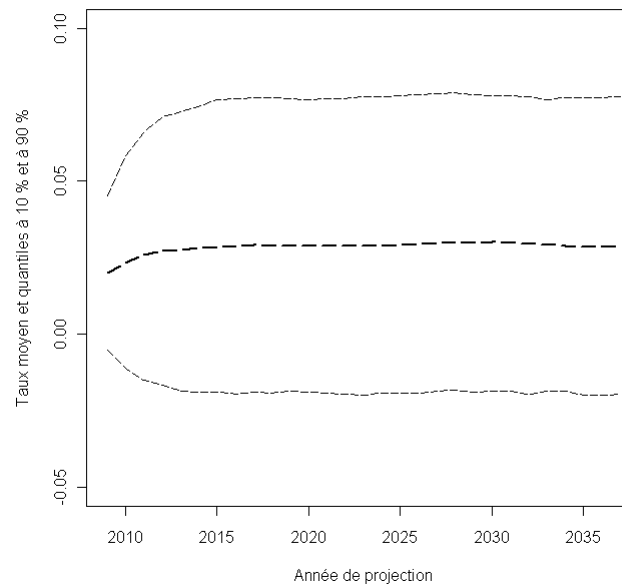
2.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

On a les résultats suivants pour les taux d'intérêt en réel et l'inflation.

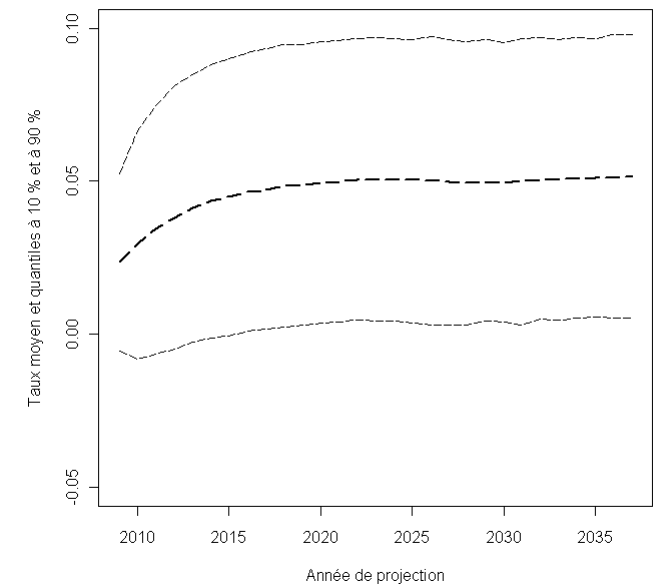
Taux réel long (Ahlgrim / Friggitt)



Taux réel court (Ahlgrim / Friggitt)



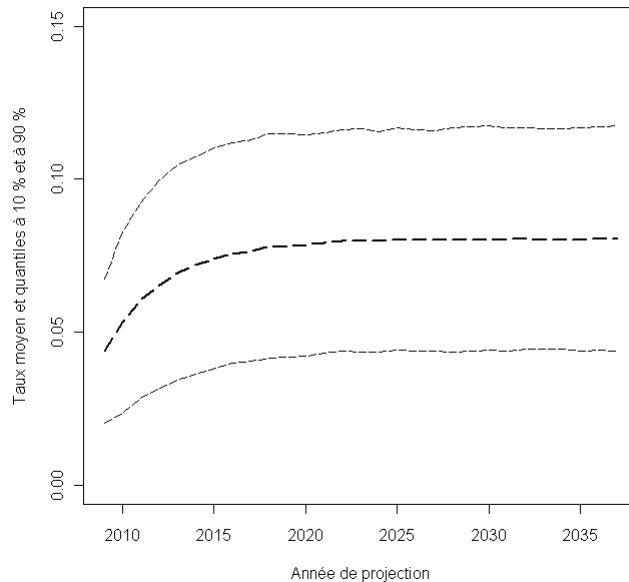
Inflation (Ahlgrim / Friggitt)



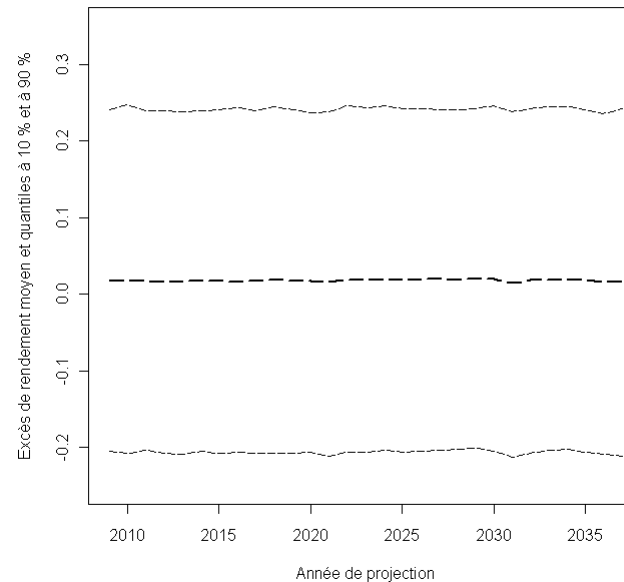
2.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

Pour le modèle d'Ahlgrim et al., nous considérons que le taux de rendement des actions est : $s_t = i_{r,t} + x_t$

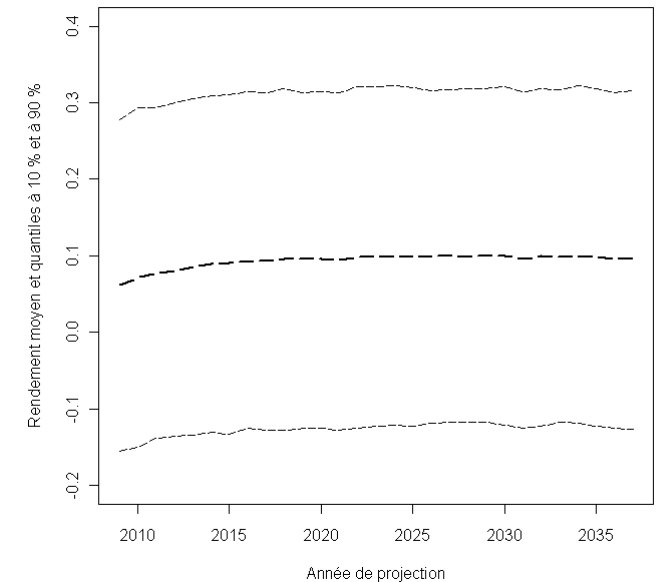
Taux nominal court (Ahlgrim / Friggitt)



Excès de rendement des actions (Ahlgrim / Friggitt)

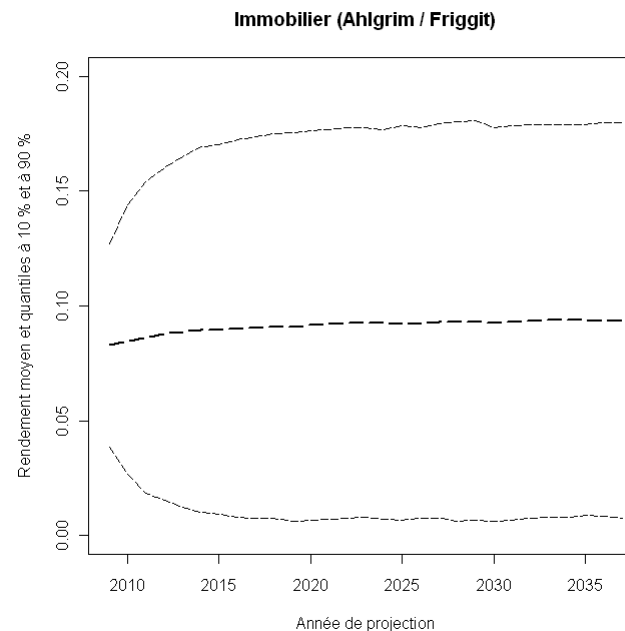


Action (Ahlgrim / Friggitt)



2.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

Les résultats des projections de l'immobilier sont présentés dans le graphique suivant.



2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (préambule)

Pour déterminer les paramètres nécessaires au calcul des prix des zéro-coupon en réel et en nominal, la première étape consiste à calibrer les modèles sur l'inflation attendue, les taux d'intérêt réels, les actions et l'indice des prix (IPC).

Les paramètres des modèles sur l'inflation attendue et sur les taux d'intérêt réels sont calibrés à partir des méthodes de discrétisation exacte.

Pour le modèle sur les actions, la rentabilité moyenne et la volatilité sont directement estimées à partir des données.

Enfin, pour la dynamique du modèle sur l'IPC (inflation réalisée), qui suit un mouvement brownien géométrique comparable à celui des actions, la volatilité peut également directement être estimée à partir des données sur l'IPC.

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (préambule)

La deuxième étape vise à extraire les erreurs de spécification de chacun de ces quatre modèles, et à en déterminer empiriquement la matrice de corrélation afférente.

Pour la troisième étape, dont l'objectif est de déterminer les ξ_i ($i = S, r, I, u$) du modèle de l'IPC stochastique, deux exemples de méthodes de calibrage sont présentés. À cet effet, on note que d'après la relation de la dynamique d'inflation, on a :

$$\sigma_{\Pi} dB_{\Pi} = \xi_S dB_S + \xi_r dB_r + \xi_I dB_I + \xi_u dB_u$$

Dans la première méthode, les $\sigma_{\Pi} \times \varepsilon_{\Pi,t}$ sont régressés sur les $\varepsilon_{S,t}$, $\varepsilon_{r,t}$ et $\varepsilon_{I,t}$. Les coefficients obtenus correspondent alors respectivement à une estimation des ξ_S , ξ_r et ξ_I , et l'écart type des résidus de ce modèle correspond à ξ_u .

La seconde méthode repose sur la factorisation de Cholesky. Cette méthode permet de déterminer une matrice triangulaire inférieure L telle que $K=L.L'$, où K correspond à la matrice de corrélation des bruits des modèles sur l'inflation attendue, les taux d'intérêt réels, les actions et l'IPC. On déduit alors de cette matrice L les ξ_S , ξ_r , ξ_I et ξ_u .

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (préambule)

Dans la quatrième et dernière étape, on déduit alors des éléments calibrés selon la description ci-dessus l'ensemble des autres paramètres nécessaires au calcul du prix d'un zéro-coupon, en réel ou en nominal, conformément aux formules présentées ci-avant.

Sauf précisions contraire, le résultat du calibrage de Brennan et Xia présenté ici est obtenu à partir de données mensuelles (annualisées) américaines sur la période janvier 1970-décembre 1995.

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (inflation)

Pour mémoire, le modèle retenu par Brennan et Xia pour l'inflation attendue est le suivant :

$$dI = \alpha (\bar{I} - I) dt + \sigma_I dB_I$$

Brennan et Xia : ajustement de l'inflation attendue

Paramètre	Intitulé	<i>B. et X.</i> (<i>annualisé</i>)	Friggit (annuel)
α	Vitesse retour à la moyenne	0,027	0,261
\bar{I}	Taux d'inflation moyen	0,054	0,051
σ_I	Écart type de l'erreur	0,014	0,026

Brennan et Xia fixent le taux d'inflation moyen de manière exogène.

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (taux d'intérêt)

Le modèle retenu par Brennan et Xia pour le taux d'intérêt attendue est :

$$dr = \kappa(\bar{r} - r)dt + \sigma_r dB_r$$

soit après discrétisation exacte :

$$r_{t+1} = r_t \times \exp(-\kappa) + \bar{r}(1 - \exp(-\kappa)) + \varepsilon_{r,t} \times \sigma_r \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa)}{2\kappa}}$$

Brennan et Xia : ajustement des taux d'intérêt réels

Paramètre	Intitulé	<i>B. et X.</i> (annualisé)	Friggit (annualisé)
κ	Vitesse retour à la moyenne	0,631	0,346
\bar{r}	Taux d'intérêt réel moyen	0,012	0,018
σ_r	Écart type de l'erreur	0,026	0,024

Brennan et Xia fixent le taux d'intérêt moyen de manière exogène.

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (taux d'intérêt)

Brennan et Xia : ajustement des taux d'intérêt réels (tests)

Test	Résultat	Interprétation
R ² ajusté	0,49	Le pouvoir explicatif du modèle est de 49 %
Fisher	$P = 1,0 \cdot 10^{-8}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,14$	La constante n'est pas significative
Student (variable)	$P = 1,0 \cdot 10^{-8}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$-2,0 \cdot 10^{-19}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,10$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,52$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (actions)

Le prix des actions suit la dynamique brownienne géométrique : $\frac{dS}{S} = (R_f + \sigma_S \lambda_S) dt + \sigma_S dB_S$

En posant $\mu_S = (R_f + \sigma_S \lambda_S)$, on a après discrétisation : $\ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) + \sigma_S \times \varepsilon_{S,t}$

Brennan et Xia : ajustement des actions

Paramètre	Intitulé	B. et X. (annualisé)	Friggit (annuel)
μ_S	Rendement moyen	0,120	0,101
σ_S	Écart type des actions	0,158	0,171

Le rendement moyen de Brennan et Xia présenté est obtenu par combinaison de plusieurs paramètres et selon certaines hypothèses.

En effet, soit $\mu_S = (R_f + \sigma_S \lambda_S)$, avec $R_f = r + I - \xi_S \lambda_S - \xi_r \lambda_r - \xi_I \lambda_I - \xi_u \lambda_u$.

Brennan et Xia considèrent que $\xi_S = \xi_r = \xi_I = 0$ (et donc que $\xi_u = \sigma_\Pi$) et que $\xi_u = \lambda_u$, et retiennent les valeurs moyennes des taux d'intérêt réels \bar{r} et des taux d'inflation \bar{I} .

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (infl. réalisée)

À l'image des actions, Brennan et Xia modélisent l'IPC par un MBG :

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = I dt + \sigma_{\Pi} dB_{\Pi}$$

où I représente l'inflation attendue.

Brennan et Xia : ajustement de l'inflation réalisée

Paramètre	Intitulé	<i>B. et X.</i> (<i>annualisé</i>)	Friggit (annuel)
σ_{Π}	Écart type de l'inflation réalisée	0,013	0,037

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (matr. corrél.)

Le premier jeu de paramètres complémentaires à estimer est la matrice de corrélation des mouvements browniens, assimilée à la matrice de corrélation des résidus des modèles estimés.

Estimation de la matrice de corrélations

Friggit (B. et X.)	S (actions)	r (taux réels)	I (inflation a.)	II (IPC)
S (actions)	1	0,215 (-0,129)	-0,273 (-0,024)	-0,073 (n.r.)
r (taux réels)	0,215 (-0,129)	1	-0,689 (-0,061)	-0,327 (n.r.)
I (inflation a.)	-0,273 (-0,024)	-0,689 (-0,061)	1	0,634 (n.r.)
II (IPC)	-0,073 (n.r.)	-0,327 (n.r.)	0,634 (n.r.)	1

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (influence IPC)

Le deuxième jeu de paramètres complémentaires à estimer est les ξ_i ($i = S, r, I, u$)

Conformément à l'approche proposée par Brennan et Xia, ces paramètres sont estimés par le modèle suivant : $\sigma_{\Pi} e_{\Pi} = \xi_S e_S + \xi_r e_r + \xi_I e_I + \xi_u \varepsilon_u$

Brennan et Xia : ajustement de l'IPC stochastique

Paramètre	Intitulé	<i>B. et X.</i> (annualisé)	Friggit (annuel)
ξ_S	Influence des actions sur l'IPC	0 (n.s.)	0,0039 (n.s.)
ξ_r	Influence des taux d'intérêt sur l'IPC	0 (n.s.)	0,0075 (n.s.)
ξ_I	Influence de l'inflation sur l'IPC	0 (n.s.)	0,0296
ξ_u	Écart type de l'erreur	0,013 ($=\sigma_{\Pi}$)	0,0281

Brennan et Xia constatent que les résultats des tests statistiques du modèle rejettent la significativité des coefficients du modèle. Ils admettent ainsi que $\xi_u = \sigma_{\Pi}$ et que $\varepsilon_{\Pi} = \varepsilon_u$.

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (influence IPC)

Brennan et Xia : ajustement de l'IPC stochastique (tests)

Test	Résultat	Interprétation
R^2 ajusté	0,40	Le pouvoir explicatif du modèle est de 40 %
Fisher	$P = 5,9.10^{-6}$	Le modèle global est significatif
Student (ξ_S actions)	$P = 0,37$	L'influence des actions n'est pas significative
Student (ξ_r taux)	$P = 0,19$	L'influence des taux n'est pas significative
Student (ξ_I inflat.)	$P = 4,2.10^{-6}$	L'influence de l'inflation att. est significative
Moyenne résidus	$-1,3.10^{-3}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 2,3.10^{-7}$	Autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,13$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P = 7,0.10^{-3}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (p. de r. unitaire)

Un autre jeu de paramètres nécessaire au calcul du prix des zéro-coupon est celui relatif aux primes de risque unitaires $\lambda_r, \lambda_I, \lambda_u$ et λ_S .

Les primes de risque unitaires λ_r et λ_I , relatives respectivement aux taux d'intérêt réels et à l'inflation anticipée, sont supposées égales à celles retenues par Brennan et Xia. Ces deux valeurs sont reprises dans le tableau ci-dessous.

Brennan et Xia : estimation des primes de risque

Paramètre	Prime de risque unitaire	B. et X. (annualisé)
λ_r	Des taux d'intérêt réels	-0,209
λ_I	De l'inflation attendue	-0,105

La prime de risque unitaire est négative, comme souvent dans ce cas car le risque d'une obligation est proportionnel à la sensibilité du prix de l'obligation aux variations de taux nominaux et que la dérivé du prix par rapport aux taux d'intérêt nominaux est négative (cf. Caja et Planchet [2010]).

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (p. de r. unitaire)

En outre, Brennan et Xia considèrent que λ_u est égal à ξ_u . Cette hypothèse est conservée.

Brennan et Xia : estimation des primes de risque (2)

Paramètre	Prime de risque unitaire	B. et X. (annualisé)	Friggit (annuel)
λ_u	De l'inflation non attendue ($= \xi_u$)	0,013 ($=\sigma_\pi$)	0,028

Pour déterminer enfin la prime de risque unitaire relative aux actions, on considère $\mu_S = (\overline{R_f} + \sigma_S \lambda_S)$, avec $\overline{R_f} = \bar{r} + \bar{I} - \xi_S \lambda_S - \xi_r \lambda_r - \xi_I \lambda_I - \xi_u \lambda_u$.

On obtient alors la relation suivante :
$$\lambda_S = \frac{\mu_S - \bar{r} - \bar{I} + \xi_r \lambda_r + \xi_I \lambda_I + \xi_u \lambda_u}{(\sigma_S - \xi_S)}$$

Avec les données de Friggit, on a le résultat suivant, conforme à la théorie financière selon laquelle la prime de risque unitaire des actions est comprise entre 15 % et 30 % (cf. Caja et al. [2009]).

Brennan et Xia : estimation des primes de risque (3)

Paramètre	Prime de risque unitaire	B. et X. (annualisé)	Friggit (annuel)
λ_S	Des actions	0,343	0,168

2.4. Résultats du calibrage du modèle de Brennan et Xia (ch. aléas éco.)

Le dernier jeu de paramètres complémentaires en vue du calcul du prix des ZC est celui relatif aux $\varphi_i (i = S, r, I)$, représentant les charges constantes des aléas de l'économie.

Brennan et Xia considèrent que :

$$\lambda_S \equiv (\xi_S + \xi_r \rho_{Sr} + \xi_I \rho_{SI}) - (\varphi_S + \varphi_r \rho_{Sr} + \varphi_I \rho_{SI})$$

$$\lambda_r \equiv (\xi_S \rho_{Sr} + \xi_r + \xi_I \rho_{rI}) - (\varphi_S \rho_{Sr} + \varphi_r + \varphi_I \rho_{rI})$$

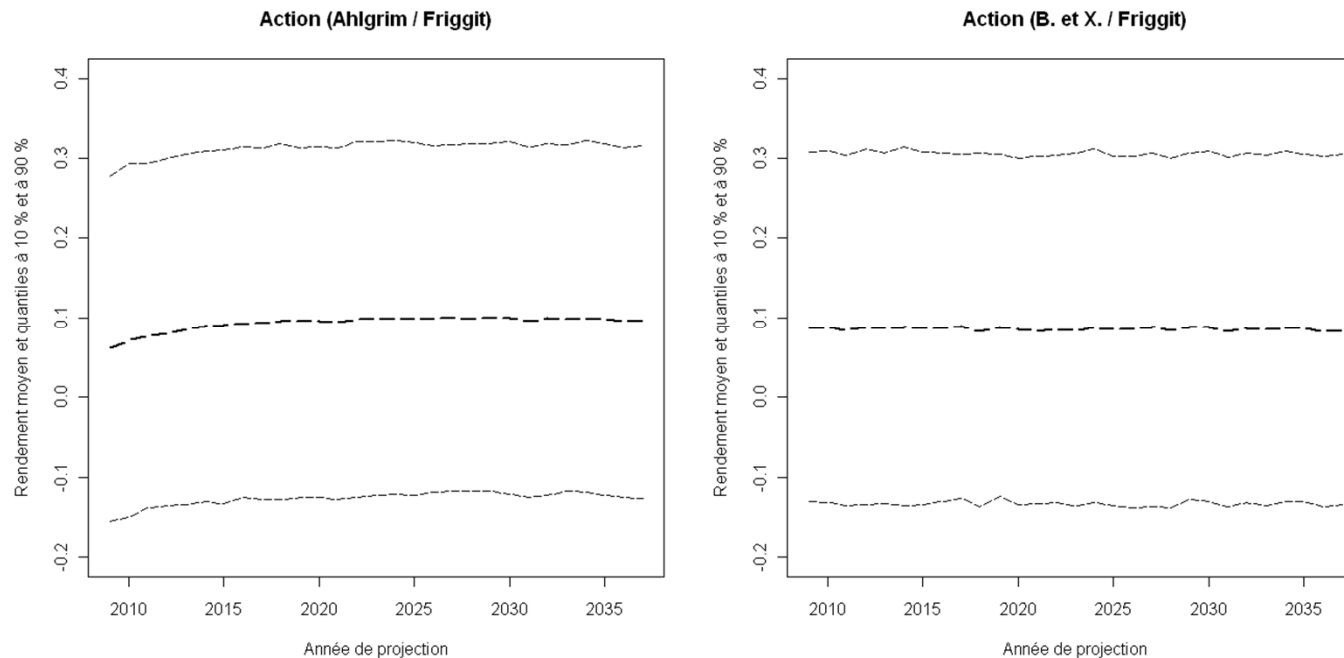
$$\lambda_I \equiv (\xi_S \rho_{SI} + \xi_r \rho_{rI} + \xi_I) - (\varphi_S \rho_{SI} + \varphi_r \rho_{rI} + \varphi_I)$$

Notons $\lambda = [\lambda_S, \lambda_r, \lambda_I]'$, $\xi = [\xi_S, \xi_r, \xi_I]'$, $\varphi = [\varphi_S, \varphi_r, \varphi_I]'$ et ρ la matrice de corrélation. On a alors : $\lambda = (\xi - \varphi) \times \rho$, soit : $\varphi = \xi - \lambda \times \rho^{-1}$. Nous obtenons alors :

Brennan et Xia : estimation des charges des aléas

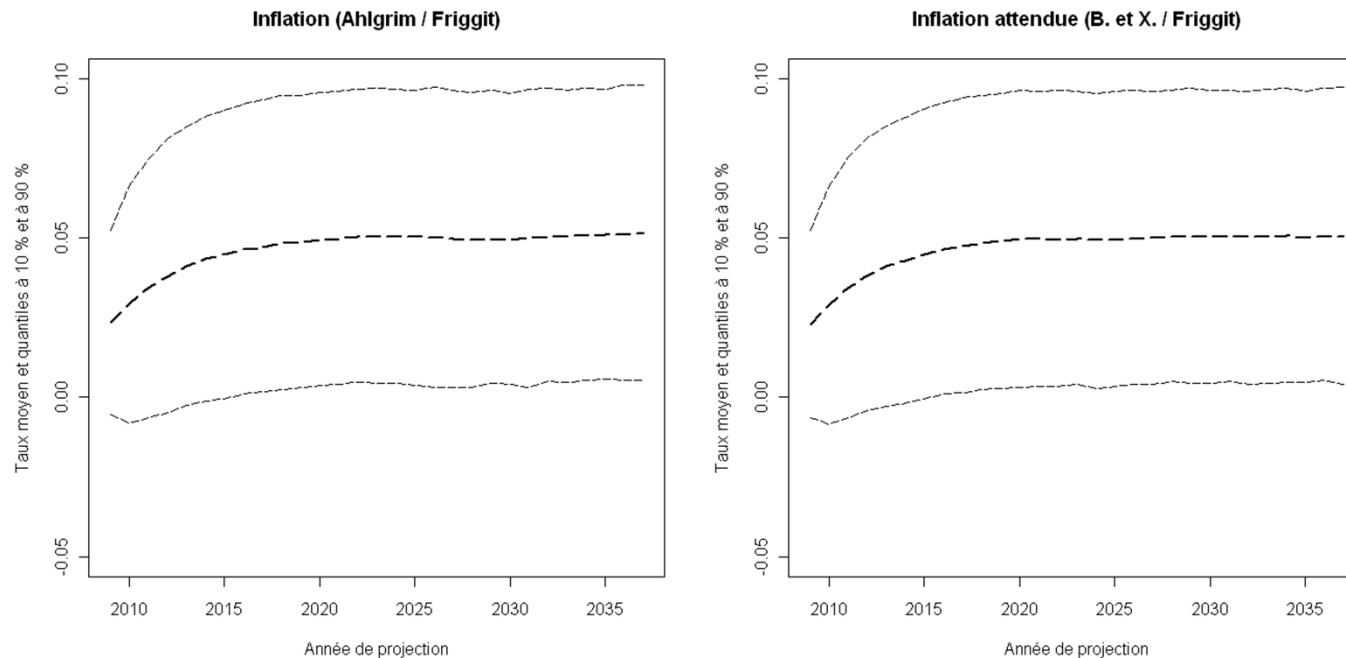
Paramètre	Charge des aléas de l'économie	Friggit (annuel)
φ_S	Pour les actions	-0,162
φ_r	Pour les taux d'intérêt réels	0,552
φ_I	Pour l'inflation attendue	0,464

2.5. Projection et comparaison Brennan et Xia / Ahlgrim (actions)



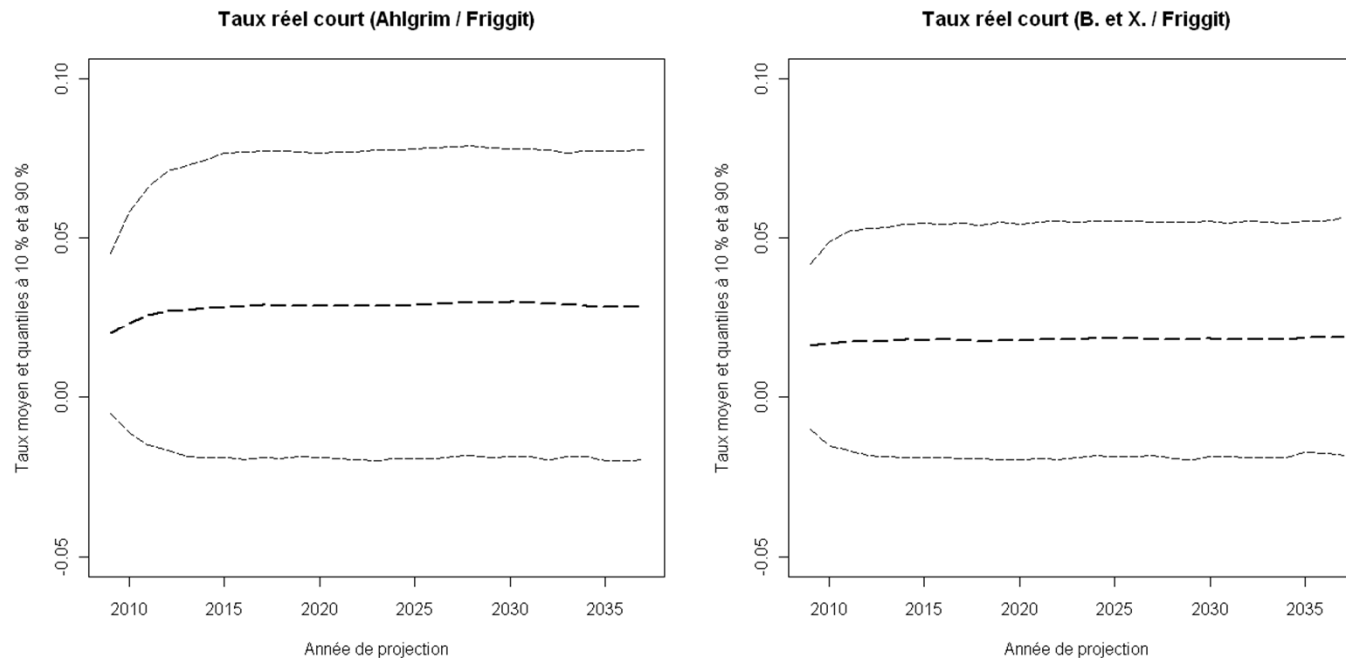
Les allures générales des projections issues de ces deux modèles sont comparables. Les différences d'approches se traduisent toutefois par des différences sur les premières années de projection.

2.5. Projection et comparaison Brennan et Xia / Ahlgrim (inflation)



Les projections ont la même allure. On notera toutefois ces deux projections ne sont pas strictement identiques en raison de la différence des bruits de ces modèles.

2.5. Projection et comparaison Brennan et Xia / Ahlgrim (taux d'intérêt)



Le taux d'intérêt réel à court terme est modélisé par des approches différentes dans les deux modèles. Cette différence s'illustre sur les allures des graphiques.

1. GSE : présentation de risques financiers et de modèles
2. GSE : mise en œuvre en probabilités historique
3. GSE : probabilités historiques et risque-neutre
4. GSE et actualisation des flux : principes
5. GSE et actualisation des flux : construction d'une STTI

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.1. Probabilités historiques et risque-neutre en discret

Considérons les deux marchés de base :

- celui de l'actif risqué (appelé action) : la valeur en date 0 de l'action est égale à S ; en date 1, l'action peut prendre deux valeurs, que l'on note respectivement uS et dS , avec $u > d$;
- celui du prêt-emprunt (sans risque) : on considère les opérations prêt-emprunt, sous la forme d'achat ou de vente d'un actif sans risque, qui pour 1 euro placé en date 0 donne $1+r$ euros en date 1.

L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) impose que : $d < 1 + r < u$.

Considérons par ailleurs une option sur l'action, par exemple un call de prix d'exercice K et de maturité 1 :

- en cas de hausse de l'action, le payoff de l'option est égal à : $C_1^u = \max(uS - K, 0)$
- en cas de baisse de l'action, le payoff de l'option est égal à : $C_1^d = \max(dS - K, 0)$

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.1. Probabilités historiques et risque-neutre en discret

Pour dupliquer le payoff de l'option en date 1, on considère en date 0 un investissement dans les deux actifs de base, avec α la quantité d'actions achetées ($\alpha > 0$) ou vendues ($\alpha < 0$) en date 0, et β le montant placé dans l'actif sans risque (β positif indique un prêt, β négatif un emprunt) en date 0.

La valeur en date 0 du portefeuille (α, β) est donc donné par : $V_0 = \alpha S + \beta$

En date 1, on obtient :

- en cas de hausse de l'action : $V_1^u = \alpha uS + \beta(1+r)$
- en cas de baisse de l'action : $V_1^d = \alpha dS + \beta(1+r)$

Pour dupliquer le call il faut déterminer (α^*, β^*) tels que la valeur en date 1 du portefeuille soit égale à celle de l'option dans les deux états du monde, soit résoudre :

$$\alpha uS + \beta(1+r) = C_1^u \quad (= \max(uS - K, 0))$$

$$\alpha dS + \beta(1+r) = C_1^d \quad (= \max(dS - K, 0))$$

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.1. Probabilités historiques et risque-neutre en discret

Au final, en AOA, on a donc :

$$C_0 = V_0 = \alpha^* S + \beta^*$$

avec

$$\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} \quad ; \quad \beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1+r}$$

Exemple : soit un parapluie de valeur $S = 100$ €, en date 0. En date 1, le prix du parapluie augmentera de 10 % s'il pleut ($uS = 110$) et diminuera de 10 % s'il ne pleut pas ($dS = 90$). On considère par ailleurs que le taux de prêt-emprunt est nul et que la météo estime (avec raison) qu'il pleuvra avec une probabilité $p = 90$ %.

Quel est le prix d'un call sur le parapluie, de prix d'exercice 100 € et de maturité 1 ?

$$\text{On a : } \alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} = \frac{10 - 0}{110 - 90} = 0,5 \quad ; \quad \beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1+r} = \frac{10 - 0,5 \times 110}{1+0} = -45$$

Le prix du call est donc de 5 €,... et non de 9 € ($= 90 \% \times 10 + 10 \% \times 0$).

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.1. Probabilités historiques et risque-neutre en discret

Après quelques calculs simples, on trouve :

$$C_0 = V_0 = \alpha^* S + \beta^* = \frac{1}{1+r} \left(C_1^u \frac{(1+r)-d}{u-d} + C_1^d \frac{u-(1+r)}{u-d} \right)$$

Dans cette équation, le payoff C_1^u de l'option en cas de hausse est ainsi pondéré par un facteur multiplicatif que nous notons q :

$$q = \frac{(1+r)-d}{u-d}$$

Par ailleurs, le facteur multiplicatif portant sur C_1^d est égal à $1-q$:

$$1-q = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

Rappelons que l'hypothèse d'AOA implique $d < 1+r < u$. Ces deux inégalités impliquent en particulier que q est compris entre 0 et 1 et peut donc s'interpréter comme une probabilité.

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.1. Probabilités historiques et risque-neutre en discret

Sous cette probabilité, l'espérance du payoff du call s'écrit :

$$E^q [C_1] = qC_1^u + (1-q)C_1^d$$

et on a :

$$C_0 = \frac{1}{1+r} E^q [C_1]$$

Au final, la valeur d'une option s'exprime donc comme une espérance actualisée de son payoff ; calculée sous la probabilité dite « risque-neutre » ($q, 1-q$), définie ci-avant, et l'actualisation est opérée au taux sans risque r .

On note que sous la probabilité risque-neutre (RN), tous les actifs du marché (action, option, actif sans risque) ont la même espérance de rentabilité, égale au taux sans risque r (on en déduit que sous la probabilité RN, les valeurs actualisées au taux sans risque de tous les actifs suivent des processus martingales).

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.1. Probabilités historiques et risque-neutre en discret

Pour s'en convaincre, en notant $E^q[C_1] = C_0(1+r)$, on comprend facilement que l'espérance sous q de la rentabilité du call est r .

Calculons plus généralement l'espérance de rentabilité dans l'univers RN. Soit l'action de prix S , dont le taux de rentabilité est R . On a donc $R_u = u - 1$ et $R_d = d - 1$.

On obtient donc en espérance : $E^q[R] = q(u-1) + (1-q)(d-1) = qu + (1-q)d - 1$

$$\text{Soit : } E^q[R] = \frac{(1+r)-d}{u-d}u + \frac{u-(1+r)}{u-d}d - 1 = r$$

Pour illustrer cette caractéristique, on reprend l'exemple précédent. En calculant le rendement de l'actif risqué sous q (avec $q = 0,5$) :

$$E^q\left[\frac{S_1 - S_0}{S_0}\right] = 0,5 \times 10\% - 0,5 \times 10\% = r = 0\%$$

On remarque par ailleurs que sous p : $E^p\left[\frac{S_1 - S_0}{S_0}\right] = 0,9 \times 10\% - 0,1 \times 10\% = 8\%$

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.1. Probabilités historiques et risque-neutre en discret

On s'intéresse désormais au rendement sous la probabilité historique (réelle) p .
Considérons les actions ; l'espérance m_S du taux de croissance du prix de l'action :

$$m_S = E^p [(S_1 - S_0) / S_0] = pu + (1 - p)d - 1$$

et la variance v_S :

$$v_S = E^p [(R - m_S)^2] = p(u - 1 - m_S)^2 + (1 - p)(d - 1 - m_S)^2 = p(1 - p)(u - d)^2$$

On dit qu'il y a excès de rendement lorsque, sous la probabilité p , la rentabilité espérée de l'action est supérieure au taux sans risque r , i.e. lorsque : $m_S > r$. La différence $m_S - r$ s'interprète comme une prime de risque.

Le risque affectant S étant mesuré par l'écart-type σ_S , il est naturel de penser que cette prime soit proportionnelle au risque et donc de poser :

$$m_S - r = \lambda * \sigma_S$$

où λ s'interprète comme le prix de marché d'une unité de risque.

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.2. Probabilités historiques et risque-neutre en continu

Les probabilités risque-neutre (RN) correspondent à des probabilités virtuelles, où les agents seraient tous neutres face au risque, et où les espérances de rentabilité de tous les titres sont ainsi égales au taux sans risque $r(t)$.

Soit \widehat{W}_t le brownien dans l'univers RN. Le rendement d'un titre sous les probabilités RN est donc :

$$\frac{dX}{X} = r(t)dt + \sigma(t)d\widehat{W}_t$$

et en appliquant le lemme d'Itô à $\ln(X)$, on a :

$$X(t) = X(0)e^{\int_0^t \left(r(u) - \frac{1}{2}\sigma(u)^2 \right) du + \int_0^t \sigma(u)d\widehat{W}(u)}$$

En outre, sous les probabilités RN (désignées par Q), la valeur en 0 d'un droit sur un flux aléatoire X disponible en $t > 0$ est égale à :

$$X(0) = E^Q \left\{ X_t e^{-\int_0^t r(u)du} \mid \mathcal{I}_0 \right\}$$

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.2. Probabilités historiques et risque-neutre en continu

La probabilité Q risque-neutre diffère de la probabilité réelle.

En pratique, le processus de rendement d'un actif avec les probabilités réelles s'écrit :

$$\frac{dX}{X} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

Avec les probabilités réelles, les espérances de rentabilité sont égales au taux sans risque majoré d'une prime de risque, égale au produit du prix de marché du risque et de l'intensité du risque (soit $\mu(t)dt = [r(t) + \sigma(t)\lambda(t)]dt$).

Pour déterminer la valeur d'un flux aléatoire futur, il est alors nécessaire de disposer d'un moyen technique pour passer des probabilités réelles aux probabilités risque-neutre.

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.2. Probabilités historiques et risque-neutre en continu

On considère W le brownien standard sous la probabilité P . Soit $\gamma(t)$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \gamma(t)^2 ds < \infty$ et tel que le processus suivant soit une martingale :

$$\xi(t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(s)^2 ds - \int_0^t \gamma(s) dW \right]$$

avec le théorème de Girsanov :

$$\widehat{W}(t) = W(t) + \int_0^t \gamma(s) ds$$

est un processus brownien standard sous la probabilité P^ξ , avec $dP^\xi / dP = \xi(t)$, avec $\xi(t)$ satisfaisant aux conditions requises d'une dérivée de Radon-Nikodym.

Les caractéristiques d'une dérivée de Radon-Nikodym permettent alors d'avoir une relation d'évaluation impliquant la probabilité historique P .

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.2. Probabilités historiques et risque-neutre en continu

En effet, pour tout prix de marché du risque (noté $\lambda(t)$), une probabilité Q risque-neutre peut être définie à partir de la probabilité historique P par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda(s)^2 ds - \int_0^t \lambda(s) dW \right]$$

La valeur d'un titre constitué d'un droit aléatoire unique X_T disponible en T a alors pour valeur en date 0 :

$$X(0) = E^Q \left\{ X_T e^{-\int_0^T r(u) du} \right\} = E^P \left\{ X_T e^{-\int_0^T \left(r(t) + \frac{1}{2} \lambda(t)^2 \right) dt - \int_0^T \lambda(t) dW} \right\}$$

Le terme $e^{-\int_0^T \left(r(t) + \frac{1}{2} \lambda(t)^2 \right) dt - \int_0^T \lambda(t) dW}$ s'interprète comme le déflateur.

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.2. Probabilités historiques et risque-neutre en continu

On remarque notamment que d'après le théorème de Girsanov, le processus défini par :

$$d\widehat{W}(t) = dW(t) + \lambda(t)dt$$

est un brownien sous Q .

En remplaçant $dW(t)$ par $dW(t) = d\widehat{W}(t) - \lambda(t)dt$ dans $\frac{dX}{X} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$, on a :

$$\frac{dX}{X} = \mu(t)dt + \sigma(t)\left[d\widehat{W}(t) - \lambda(t)dt\right]$$

et en notant que $\mu(t)dt = \left[r(t) + \sigma(t)\lambda(t)\right]dt$, on a bien :

$$\frac{dX}{X} = r(t)dt + \sigma(t)d\widehat{W}_t$$

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.3. Calibrage et mise en œuvre (exemple avec Vasicek en historique)

Le modèle de Vasicek pour les taux d'intérêt est : $dr = a(b - r)dt + \sigma dW_t$

soit après discrétisation exacte : $r_{t+1} = r_t \times \exp(-a) + b(1 - \exp(-a)) + \varepsilon \times \sigma \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a)}{2a}}$

L'estimation des paramètres est effectuée via une régression linéaire simple :

$$r_{t+1} = \beta \times r_t + \alpha + \delta \times \varepsilon$$

La vitesse de retour à la moyenne \hat{a} est ainsi calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \beta &= \exp(-a) \\ a &= -\ln(\beta) \end{aligned}$$

Le taux d'intérêt moyen est déterminé par :

$$\begin{aligned} \alpha &= b(1 - \exp(-a)) = b(1 - \exp(\ln(\beta))) \\ b &= \frac{\alpha}{(1 - \beta)} \end{aligned}$$

L'écart type $\hat{\sigma}$ est calculé par : $\sigma = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{1 - \exp(-2a)}{2a}}}$

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.3. Calibrage et mise en œuvre (exemple avec Vasicek en RN)

Dans le modèle de Vasicek, le processus de taux court sous Q s'écrit :

$$dr = a(b^Q - r)dt + \sigma d\widehat{W}_t$$

On note par ailleurs que $b^Q = b^P - \lambda\sigma/a$ et $\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$. Les paramètres a et σ sont théoriquement les mêmes dans les univers de probabilités réelles (sous P) et risque neutre (sous Q).

La solution de cette EDS est : $r(t) = r(0)e^{-at} + b^Q(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} d\widehat{W}_s$

Le prix des zéro-coupons est alors : $P(t, T) = E^Q \left(e^{-\int_t^T r(s)ds} \right)$

Au final, on obtient (cf. par exemple Lamberton et Lapeyre [1997]) :

$$P(t, T) = \exp \left[-(T - t) R(T - t, r(t)) \right]$$

$$\text{avec } R(\theta, r) = R_\infty - \frac{1}{a\theta} \left[(R_\infty - r)(1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-a\theta})^2 \right] \text{ et } R_\infty = \lim_{\theta \rightarrow \infty} R(\theta, r) = b^Q - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

3. GSE : probabilités historiques et RN

3.3. Utilisation et validation

On comprend qu'il existe deux univers de probabilités pour générer des scénarios économiques :

- Un univers de probabilités **réelles**, lorsque l'on cherche à déterminer les évolutions futures compatibles avec les observations historiques : dans ce cas, les simulations reproduisent le plus fidèlement possible la réalité et les modèles sont calibrés sur les données historiques. Dans cette configuration, les actifs risqués offrent une prime de risque, ce qui rend difficile la réalisation d'une évaluation correcte.
- Un univers de probabilités **risque neutre**, lorsque l'on est dans une logique d'évaluation : dans ce cas, tous les actifs ont une performance moyenne égale au taux sans risque (les primes de risque sont nulles), ce qui permet de réaliser des évaluations en actualisant les flux futurs au taux sans risque. En outre, pour garantir une évaluation cohérente avec les prix observés sur les marchés, les modèles doivent être calibrés à partir de ces prix de marché.

1. GSE : présentation de risques financiers et de modèles
2. GSE : mise en œuvre en probabilités historique
3. GSE : probabilités historiques et risque-neutre
4. GSE et actualisation des flux : principes
5. GSE et actualisation des flux : construction d'une STTI

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.1. Principes de l'actualisation des flux

Un taux d'actualisation peut s'interpréter comme le prix de l'argent, mais aussi comme un « taux de change » explicite entre le présent et le futur.

À long terme, il est considéré que le taux d'intérêt nominal utilisé pour l'actualisation est égal à la somme du taux d'intérêt réel et du taux d'inflation anticipé.

Outre la distinction taux nominaux / réels, il existe un clivage entre les taux courts et les taux longs, les taux d'actualisation étant différenciés par l'échéance du crédit.

Enfin, le taux d'actualisation dépend également de la plus ou moins grande prime de risque exigée par les investisseurs et de la finalité de l'utilisation :

- s'il vise à prendre en compte un ajustement pour risque dans l'évaluation d'un actif, un taux d'actualisation relativement élevé sera approprié (plus les flux de l'actif sont incertains, et plus le taux d'actualisation sera important) ;
- s'il vise à prendre en compte un ajustement pour risque dans l'évaluation d'un passif, un taux d'actualisation relativement faible sera approprié.

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.1. Principes de l'actualisation des flux

Dans le cadre du choix du taux d'actualisation, il convient de distinguer les modèles « Going concern » ou en « run off » :

- dans le premier cas, on considère une poursuite d'activité, ce qui peut conduire à penser que le taux d'actualisation doit être cohérent avec le taux de rentabilité attendue de l'activité ;
- dans le deuxième cas, on est plutôt dans une logique de liquidation (et donc d'appréciation de la solvabilité), ce qui peut inviter à retenir un taux cohérent avec les rendements des actifs obligataires en portefeuille (à duration comparable).

Dans le cadre des modèles de solvabilité, la prise en compte d'un ajustement pour risque dans l'évaluation des passifs est généralement requise. C'est notamment pour cette raison que des taux basés sur les rendements d'obligations souveraines ou avec un faible spread sont privilégiés.

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.2. Notion de taux d'intérêt « sans risques »

Le concept de taux « sans risque » est apparu pour s'assurer que les bénéfices tirés d'investissement dans des titres risqués soient pris en compte après que le risque ait été supporté (contrairement à ce que l'on ferait en actualisant avec un taux incluant un ajustement pour risque).

« Sans risque » peut en théorie s'interpréter comme « libre de tout risque ». Il est toutefois impossible d'éliminer toute forme de risque. Le terme « sans risque » signifie donc en pratique « moins de risque possible ». Bien que plus approprié, ce terme n'est pas utilisé dans la littérature relative aux normes prudentielles et réglementaires.

Pour construire des courbes sans risque, une première approche consiste à s'appuyer sur les titres souverains, dans ce cas les limites sont liées aux questions à se poser sur :

- les maturités disponibles,
- le type de titre à retenir (en cours d'émission ou déjà émis),
- les conflits dans les informations,
- la liquidité (qui engendre un spread, et qui n'est généralement pas simple à quantifier).

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.2. Notion de taux d'intérêt « sans risques »

Une autre approche consiste à s'appuyer sur les taux swap, sachant qu'une courbe des taux swap est une courbe qui représente, pour chaque maturité, le taux fixe qu'un investisseur est prêt à payer en échange de paiements à taux d'intérêt variables pour la même maturité.

Une courbe des taux swap n'est pas une courbe des taux sans risque, et on y retrouve des risques de défaut et de signature. Elle est toutefois souvent utilisée pour en construire car :

- les contreparties sont souvent très bien notées (banques, etc.),
- il existe de nombreuses couvertures,
- il est « facile » de soustraire à la courbe des taux swap un spread.

Néanmoins, dans certains pays ou espaces monétaires, on retrouve pour les taux swap les limites avancées pour les taux souverains (notamment au niveau de la liquidité).

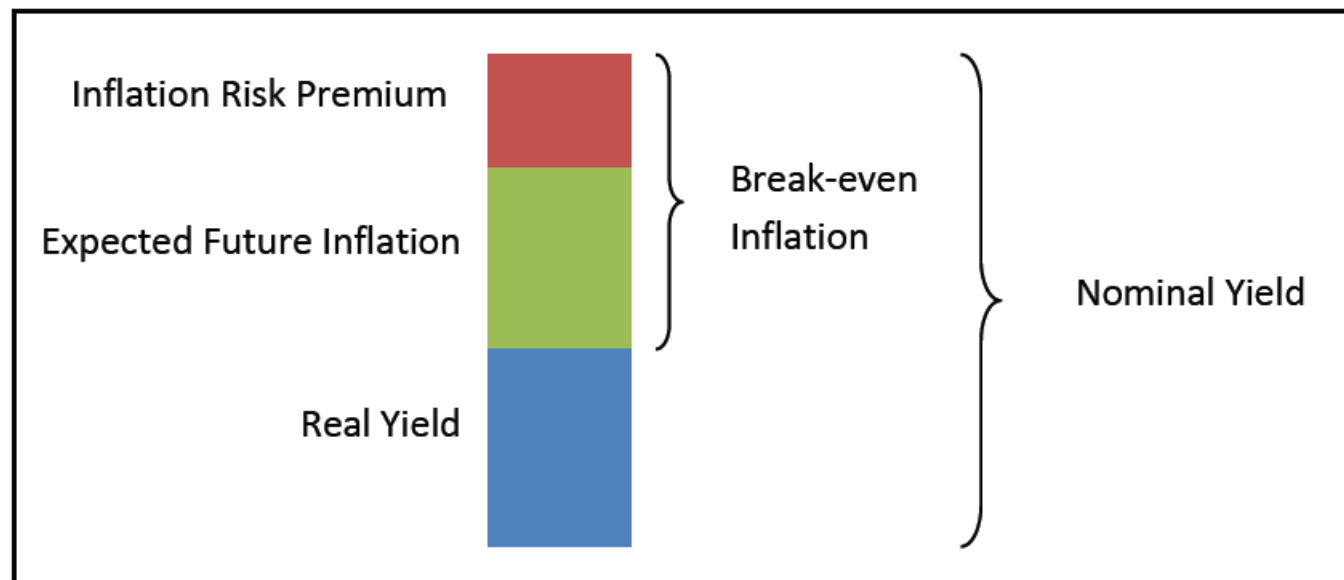
Au final, l'arbitrage entre taux swap ou taux souverains est réalisé par avis d'expert.

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.3. Décomposition des taux d'actualisation : traitement de l'inflation

L'inflation, généralement mesurée par l'indice des prix à la consommation, est un élément fondamental du taux d'intérêt nominal. En pratique, le taux d'intérêt nominal est composé :

- des taux d'intérêt réels ;
- du taux d'inflation attendue dans le futur ;
- d'une prime de risque au titre de l'inflation, qui compense le risque d'inflation supporté par les investisseurs.



4. GSE et actualisation des flux : principes

4.3. Décomposition des taux d'actualisation : traitement de l'inflation

Le risque inflation à l'origine de la prime de risque inflation peut prendre différente forme : hyperinflation, déflation, forte inflation, pic d'inflation, etc.

L'un des phénomènes les plus préjudiciables est l'hyperinflation, qui survient lorsque l'inflation atteint des niveaux extrêmement élevés et qu'il n'y a pas de tendance à un retour vers des niveaux d'inflation normaux.

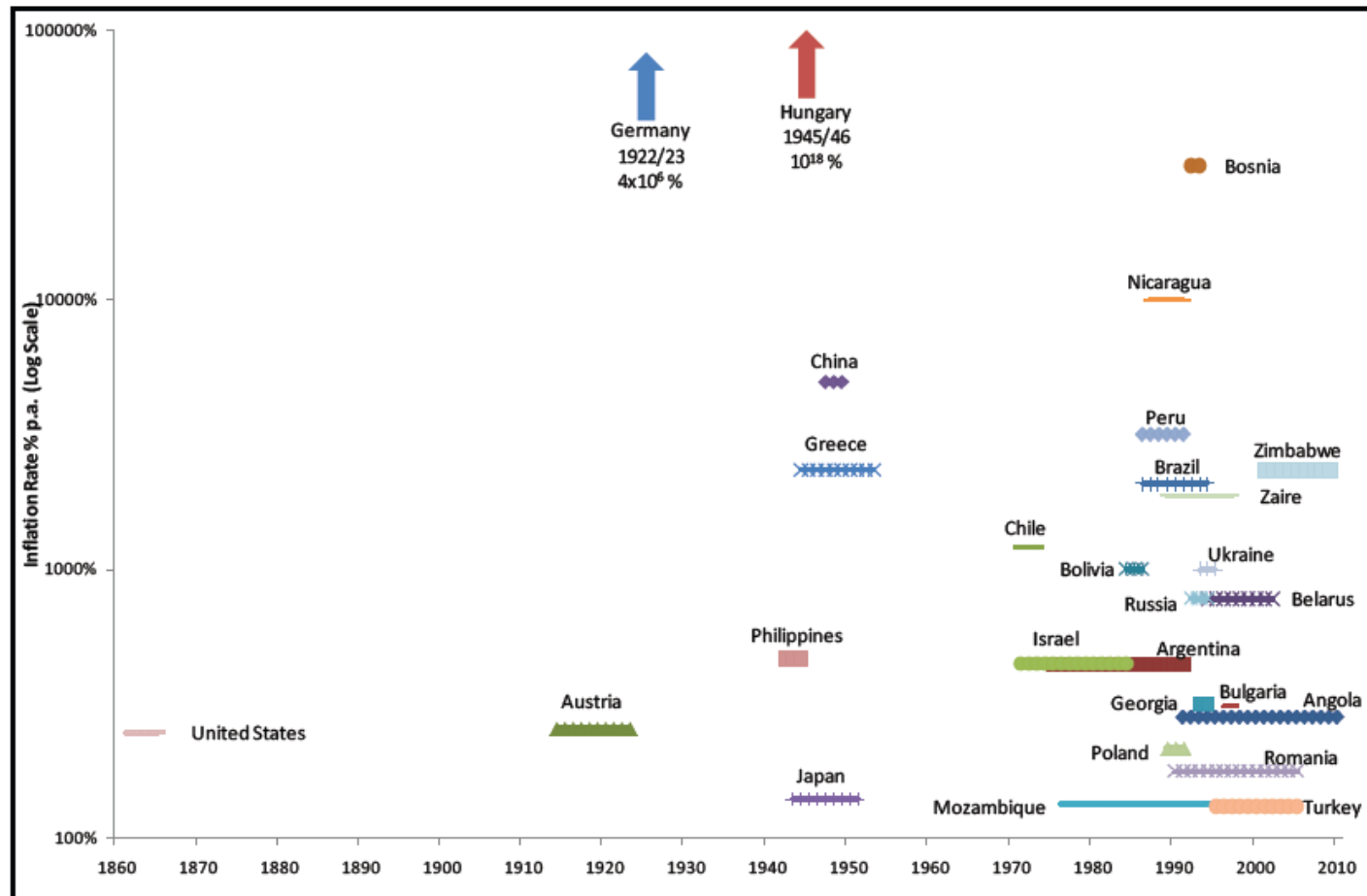
Cela survient lorsque les émissions de monnaie ne sont pas supportées par une croissance économique correspondante. La conséquence est une perte de confiance dans la monnaie, une perte de valeur de la monnaie et une perte de pouvoir d'achat pour les consommateurs.

Il existe plusieurs exemples notables d'hyperinflation, dont l'un des plus récent est celui du Zimbabwe, où avant que le gouvernement abandonne la monnaie locale en 2009, des billets de 100 000 milliards de dollars zimbabwéens (d'une valeur de 30 dollars américains) ont été imprimés !

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.3. Décomposition des taux d'actualisation : traitement de l'inflation

Le graphique suivant quelques exemples d'hyperinflation ces 150 dernières années.



4. GSE et actualisation des flux : principes

4.3. Décomposition des taux d'actualisation : traitement de l'inflation

La déflation survient quant à elle lorsque le niveau des prix diminue, conduisant à un taux d'inflation négatif.

Le tableau suivant présente quelques exemples de période de déflation sur les 100 dernières années.

Country	Years	Deflation Total Impact	Deflation % per annum	Event / Cause
United States	1921 to 1932	-32%	-3.2%	Great Depression
United Kingdom	1920 to 1933	-37%	-3.6%	Great Depression
Australia	1929 to 1933	-22%	-6.1%	Great Depression
West Germany	1949 to 1950	-7%	-3.7%	End of World War II
Japan	1999 to 2009	-4%	-0.4%	Capital market bust
Hong Kong	1999 to 2004	-15%	-2.6%	Asian financial crisis
Ireland	2009	-5%	-5%	Credit crisis, banking debts

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.3. Décomposition des taux d'actualisation : traitement de l'inflation

Entre ces deux cas extrêmes, il existe un environnement « normal » d'inflation.

Dans un cas « normal », l'inflation est généralement considérée sous contrôle, et facilite un environnement de production économique.

Le niveau d'inflation « normal » varie toutefois d'un pays à l'autre, selon la politique des banques centrales en termes de niveau d'inflation acceptée et visée mais également selon qu'il s'agisse d'un pays développé ou en développement.

En pratique, pour l'essentiel des pays développés, un niveau d'inflation classique est compris entre 0 et 10 % pour une année donnée, et entre 0 et 5 % au niveau de l'inflation moyenne de long terme.

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.3. Décomposition des taux d'actualisation : traitement de l'inflation

Le tableau suivant présente une analyse de l'inflation en 2010 : on note que l'inflation est de moins en moins élevée et volatile, surtout aux USA et en UK, pays au sein desquels il apparaît également une forte auto-corrélation positive, synonyme de pics et régimes.

					Distribution of Annual Inflation Rates			
Country / Region	Start Year	Mean	St. Dev.	1-yr. Auto-Correlation	<0%	>0% and <5%	>5% and <10%	>10%
US	1990	2.7%	1.2%	-0.12	0%	95%	5%	0%
UK	1990	2.5%	1.8%	0.75	0%	90%	10%	0%
Eurozone	1990	2.2%	0.8%	0.50	0%	100%	0%	0%
US	1950	3.7%	2.9%	0.74	2%	82%	16%	5%
UK	1950	5.3%	4.8%	0.81	0%	77%	23%	11%
Eurozone	1950	2.6%	2.1%	0.37	5%	80%	15%	0%
US	1913	3.2%	5.0%	0.65	11%	76%	13%	8%
UK	1900	4.1%	6.1%	0.75	11%	74%	15%	14%
Eurozone	1948	2.5%	2.2%	0.42	6%	79%	15%	0%

4. GSE et actualisation des flux : principes

4.3. Décomposition des taux d'actualisation : spread

Généralement, on considère le spread égal à une combinaison de primes au titre du risque de liquidité, de défaut et de signature.

Pour le positionnement des dispositions prudentielles et d'informations financières en matière de prise en compte du spread, on peut retenir les approches suivantes :

- IFRS 4 phase 2 : il est recommandé de retenir une courbe d'actualisation dans laquelle le risque de crédit est minimal (si les actifs utilisés en présente, il convient donc de l'enlever) ;
- MCEV : le taux d'actualisation peut être construit à partir des taux swap, ajustés pour enlever le risque de liquidité associé à ces taux swap (aucun ajustement au titre du risque de crédit n'est mentionné) ;
- Solvabilité 2 (pilier 1) : le taux d'actualisation proposé est construit à partir des taux swap, ajustés pour enlever le risque de crédit associé à ces taux swap.

1. GSE : présentation de risques financiers et de modèles
2. GSE : mise en œuvre en probabilités historique
3. GSE : probabilités historiques et risque-neutre
4. GSE et actualisation des flux : principes
5. GSE et actualisation des flux : construction d'une STTI

5. GSE et actualisation des flux : STTI

5.1. Définition et théories de base sur les courbes des taux

Une courbe des taux correspond à l'ensemble (pour différentes maturités) des rendements actuariel des titres zéro-coupon. Cette courbe correspond ainsi à une gamme de facteurs d'actualisation, ainsi qu'aux prix des zéro-coupons.

En pratique, la courbe des taux peut avoir différentes formes : ascendante (dite aussi « normale »), descendante (dite aussi « inversée »), plate, avec un ou plusieurs pics, etc.

Plusieurs théories sont avancées pour décrire la forme de la gamme des taux. Une première approche est la théorie des anticipations, selon laquelle les taux longs reflètent les anticipations des opérateurs concernant les taux courts qui prévaudront dans le futur, ie que le taux forward pour une période future donnée est égale à l'espérance du taux spot qui prévaudra à cette période, soit :

$$\left[1 + R_t(\tau)\right]^\tau = \prod_{\theta=0}^{\tau-1} \left[1 + F_t(\theta, 1)\right]$$

avec

$$F_t(\theta, 1) = E\left[{}_tR_{t+\theta}(1)\right]$$

5. GSE et actualisation des flux : STTI

5.1. Définition et théories de base sur les courbes des taux

Une seconde approche est la théorie de la préférence pour la liquidité, selon laquelle les taux forward sont égaux à l'espérance des taux spot à court terme anticipés correspondants, majorés d'une prime de liquidité, soit :

$$F_t(\theta, 1) = E\left[{}_tR_{t+\theta}(1)\right] + L_t(\theta, 1)$$

La prime de liquidité de cette théorie est nécessaire pour compenser la préférence manifestée en moyenne pour les emprunts longs et les placements courts. Au final, dans cette théorie les taux forward sont plus élevés que les taux zéro-coupons futurs espérés et on obtient une courbe des taux croissante, ce qui constitue la forme la plus fréquente.

La troisième théorie présentée est celle de la segmentation, qui stipule qu'il n'y a pas forcément de relation mécanique entre les taux courts et les taux longs, les opérateurs étant différents sur ces deux parties de la courbe. Par exemple, un régime de retraite détiendra des obligations de maturité longue et n'aura aucun intérêt à se déplacer sur des maturités plus courtes. À l'inverse, les taux courts sont déterminés par le jeu de l'offre et de la demande sur le marché des capitaux à court terme.

5. GSE et actualisation des flux : STTI

5.2. Construction d'une courbe des taux : le bootstrapping

Le bootstrapping est une procédure qui permet de reconstituer une courbe zéro-coupon pas à pas. La démarche est la suivante :

- pour les maturités inférieures à 1 an : extraire des taux zéro-coupons au prix des titres zéro-coupons cotés sur le marché ;
- pour les maturités de 1 à 2 ans : on observe le prix de l'obligation à l'échéance la plus rapprochée, et en considérant qu'elle a deux flux :
 - le facteur d'actuation $B(0,t_1)$ du premier flux est connu grâce à l'étape 1 ;
 - le facteur d'actualisation $B(0,t_2)$ du second est solution de l'équation suivante :

$$P(0,t_2) = C \times B(0,t_1) + (1 + C) \times B(0,t_2)$$

- pour les maturités de 2 à 3 ans, etc. : on réitère l'opération précédente à partir des titres ayant une maturité comprise entre 2 et 3 ans, etc.

5. GSE et actualisation des flux : STTI

5.2. Construction d'une courbe des taux : le bootstrapping

À ce stade, la courbe n'est définie qu'à certaines maturités. Pour obtenir toutes les maturités, des méthodes d'interpolation peuvent être employées.

Dans le cadre de l'interpolation linéaire « classique », on a : $R_0(\tau) = a + b\tau$. Avec les taux de maturité t_1 et t_2 , on interpole alors les taux ZC de maturité $t_1 < \tau < t_2$ par :

$$R_0(\tau) = \frac{(t_2 - \tau) R_0(t_1) - (\tau - t_1) R_0(t_2)}{t_2 - t_1}$$

Des interpolations cubiques peuvent être envisagées avec $R_0(\tau) = a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d$. Pour cela on définit un premier segment entre t_1 et t_4 , où l'on dispose de quatre taux. La courbe doit passer par ces quatre points, le système à résoudre est donc :

$$R_0(t_1) = at_1^3 + bt_1^2 + ct_1 + d$$

$$R_0(t_2) = at_2^3 + bt_2^2 + ct_2 + d$$

$$R_0(t_3) = at_3^3 + bt_3^2 + ct_3 + d$$

$$R_0(t_4) = at_4^3 + bt_4^2 + ct_4 + d$$

5. GSE et actualisation des flux : STTI

5.3. Construction d'une courbe des taux : Nelson et Siegel

Construire une courbe des taux revient à postuler une forme du prix de l'obligation zéro-coupon. On considère ici le modèle paramétrique de Nelson et Siegel, qui suppose que le taux forward instantané est défini par :

$$f(t, t + \tau) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right) + \mu_3 \frac{\tau}{\lambda} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)$$

Le taux ZC de maturité τ étant :

$$R_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t, t + \theta) d\theta$$

on a :

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \left[\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} \right] + \mu_3 \left[\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} - \exp(-\tau/\lambda) \right]$$

avec $R_t(0) = \mu_1 + \mu_2$ et $R_t(\infty) = \mu_1$

Ainsi, μ_1 représente le taux long (niveau de long terme), μ_2 la différence entre le taux court et le taux long (pente de la courbe) et μ_3 le degré de courbure (s'il est positif – resp. négatif – une bosse – resp. un creux – apparaîtra en λ).

5. GSE et actualisation des flux : STTI

5.3. Construction d'une courbe des taux : Nelson et Siegel

Le modèle de Nelson et Siegel ne permet pas de reconstituer toutes les courbes de taux rencontrées sur le marché, en particulier les formes à une bosse et un creux.

En réponse à ce problème, Svensson introduit un second terme de courbure dans le modèle de Nelson et Siegel :

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \left[\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda_1)}{\tau/\lambda_1} \right] + \mu_3 \left[\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda_1)}{\tau/\lambda_1} - \exp(-\tau/\lambda_1) \right] \\ + \mu_4 \left[\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda_2)}{\tau/\lambda_2} - \exp(-\tau/\lambda_2) \right]$$

On parle alors du modèle de Nelson et Siegel augmenté.

A1. Mouvements browniens

A2. Processus d'Îto et lemme d'Îto

A3. Discrétisation exacte

A1. Mouvements browniens

$X(t)$ est un mouvement brownien arithmétique (MBA) si $X(t) - X(0)$ est gaussien selon la loi $N(\mu t, \sigma^2 t)$ et si ses accroissements sont indépendants (s'ils sont calculés sur des périodes disjointes).

Un MBA dont les accroissements ont une espérance $\mu=0$ et une variance par unité de temps $\sigma^2=1$ s'appelle un mouvement brownien standard (ou processus de Wiener). Il est noté $W(t)$ et on pose par définition $W(0)=0$.

Le calcul différentiel sur les processus de Wiener obéit aux règles suivantes :

- $(dW)^2 = dt = \text{Var}(dW)$
- $dW \cdot dt = 0$

Ces règles s'adaptent au Brownien arithmétique non standard X (de paramètres μ et σ) :

- $(dX)^2 = \sigma^2 dt$
- $dX \cdot dt = 0$

A2. Processus d'Itô et lemme d'Itô

Un processus d'Itô est un processus stochastique pour lequel on a :

$$dX = \mu(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

et

$$X(t) - X(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s$$

Considérons une fonction f dont on écrit les valeurs $f(t,x)$. Les différences partielles sont notées $\partial f / \partial t$, $\partial f / \partial x$ et $\partial^2 f / \partial^2 x$.

On considère l'intervalle $(t, t+dt)$ au cours duquel X varie de $dX = X(t+dt) - X(t)$ et on note enfin la variation de $f(t,X)$ induite par la double variation infinitésimale (dt, dX) : $df = f(t+dt, X(t+dt)) - f(t, X(t))$.

Le lemme d'Itô indique que dans ces conditions $f(t,X(t))$ est un processus d'Itô et la différence df peut s'écrire sous la forme suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\cdot) (dX)^2$$

A2. Processus d'Îto et lemme d'Îto

Pour illustrer un exemple d'application, on considère un mouvement brownien géométrique X et on applique le lemme d'Îto à $\ln(X)$. On a alors :

$$d \ln(X) = \frac{dX}{X} - \frac{1}{2} \frac{(dX)^2}{X^2}$$

Comme $\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dW$ et $\left(\frac{dX}{X}\right)^2 = \sigma^2 dt$, on peut écrire :

$$d \ln(X) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW$$

d'où :

$$X(t) = X(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

A3. Discrétisation exacte (modèle de vasicek à 1 facteur)

Soit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

alors :

$$d(\exp(at)r_t) = \exp(at)dr_t + a\exp(at)r_tdt = ab\exp(at)dt + \exp(at)\sigma dW_t$$

donc :

$$\exp(at)r_t = \exp(at_0)r_{t_0} + ab\int_{t_0}^t \exp(as)ds + \sigma\int_{t_0}^t \exp(as)dW_s$$

soit :

$$r_t = r_{t_0} \exp(-a(t-t_0)) + b(1 - \exp(-a(t-t_0))) + \sqrt{\left(\sigma\int_{t_0}^t \exp(-a(t-s))dW_s\right)^2}$$

d'où :

$$r_t = r_{t_0} \exp(-a(t-t_0)) + b(1 - \exp(-a(t-t_0))) + \sigma\sqrt{\frac{1 - \exp(-2a(t-t_0))}{2a}}\varepsilon_t$$

où ε représente une loi normale centrée réduite.

- Ahlgrim K. C., D'Arcy S. P., Gorvett R. W. [2005] « Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession », *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 92.
- Brennan J. M. et Xia Y. [2000] « Dynamic Asset Allocation under Inflation », University of California.
- Caja A., Carvas P., Rousseau V. [2009] « Intégrer des informations exogènes dans un modèle d'actifs », Groupe de travail, ISFA.
- Eiopa [2013] « [Technical Findings on the Long-Term Guarantees Assessment](#) », EIOPA, EIOPA/13/296.
- Eiopa [2013] « [Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment \(Part I\)](#) », EIOPA, EIOPA-DOC-13/61.
- Eiopa [2013] « [Technical Specifications part II on the Long Term Guarantee Assessment – Final version](#) », EIOPA, EIOPA/12/307.
- Friggit J. [2007] « Long Term (1800-2005) Investment in Gold, Bonds, Stocks and Housing in France – with Insights into the USA and the UK: a Few Regularities », CGPC Working paper.
- Parlement européen, Conseil [2009] « [Directive du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice \(Solvabilité II\) \(Refonte\)](#) », Union européenne, PE-CONS 3643/6/09, REV 6.
- Planchet F., Leroy G. [2013] « [Risque de taux, spread et garanties long terme](#) », *la Tribune de l'Assurance* (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°178 du 01/03/2013.
- Planchet F., Thérond P.E., Kamega A. [2009] *Scénarios économiques en assurance. Modélisation et simulation*, Economica.
- Roncalli T. [1998] *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux IV.

Aymric Kamega

aymric.kamega@univ-brest.fr

EURIA

Université de Bretagne Occidentale

6 avenue le Gorgeu

CS 93837

29238 Brest Cedex 3

Tél : +33-2-98-01-66-55

www.euria.univ-brest.fr

<http://www.ressources-actuarielles.net>

<http://blog.ressources-actuarielles.net>

<http://afrique.ressources-actuarielles.net>