COURS DE PHYSIQUE

TEMPLATE LATEX

Jimmy Roussel

2023

femto-physique.fr/omp

Cours sur les outils et méthodes scientifiques – femto-physique.fr
Jimmy Roussel, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Ce document est réalisé avec l'aide de KOMA-Script et LaTeX en utilisant la classe kaobook.

1re édition – Janv. 2011
Version en ligne – femto-physique.fr/omp

Préface

La physique est une science qui repose essentiellement sur la mesure et la modélisation. Le bagage du physicien doit donc contenir les outils et les méthodes qui lui permettent :

1. de tirer une information rationnelle à partir de ses mesures ;
2. d'approcher le comportement d'un système modèle à l'aide d'une analyse mathématique.

C'est pourquoi ce cours est découpé en deux parties : une première autour de la mesure, une autre autour des concepts mathématiques utiles au physicien.

Ce cours s'adresse à un public relativement large car il aborde différents outils mobilisés aussi bien en Lycée que dans l'Enseignement Supérieur.

Jimmy Roussel

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Autour de la mesure

UNITÉS ET DIMENSIONS 1

« Dis-moi comment l'on te cherche, je te dirai qui tu es » (Bachelard)

Version en ligne

https://femto-physique.fr/omp/grandeurs-physiques.php

1.1 Dimension d'une grandeurs physique

Grandeurs physiques

Une grandeur physique est une quantité qui se rapporte à une propriété et qui peut se mesurer. Or, **mesurer, c'est comparer**. C'est comparer à l'aide d'un instrument, une grandeur physique inconnue avec une grandeur de même nature – on dira **de même dimension** – prise comme référence que l'on appelle **étalon**.

Par exemple, le poids de Miss Univers peut être comparé à celui d'un étalon (1 kg par exemple) à l'aide d'une balance : le poids de Miss Univers est une grandeur physique. En revanche, sa beauté est une propriété subjective qui ne peut être mesurée compte tenu qu'il n'existe pas d'étalon de beauté. En d'autres termes, la beauté se rapporte à l'aspect physique mais ne relève pas de la Physique ; il ne s'agit pas d'une grandeur physique.

Lors du processus de mesure (mesurage) on effectue donc une comparaison entre un étalon (l'unité) et la grandeur à mesurer puis l'on traduit le résultat par un chiffre (la mesure) assortie d'un intervalle définissant un certain niveau de confiance (l'incertitude) ainsi que l'unité[1]

$$X = x_{\mathrm{m}} \pm \Delta x \quad \text{unité}$$

1: L'unité est indispensable ! Exprimer le résultat d'un calcul ou d'une mesure sans préciser l'unité n'a aucun sens.

La détermination de la mesure et de l'incertitude fait l'objet d'un autre chapitre. Ici on s'intéresse au contenu dimensionnel des grandeurs physiques et du choix de l'unité.

Notion de dimension

En général, le résultat d'une mesure dépend de l'étalon utilisé. Par exemple, si l'on compare la longueur ℓ d'une règle de 1 m avec un décimètre, on obtient $\ell = 10$ dm. Si l'on choisit un double décimètre comme étalon de mesure, on trouve $\ell = 5$ ddm (double décimètre). La mesure est donc différente ($5 \neq 10$) : on dit que la longueur possède une dimension.

Dimension d'une grandeur

Par définition, une grandeur physique G a une dimension si sa mesure dépend du choix de l'étalon de mesure. Sa dimension est notée $[G]$.

Il ne faut pas confondre cette notion avec l'unité qui est purement conventionnelle alors que la dimension est une propriété indépendante de tout système d'unités.

Deux grandeurs ont même dimension si on peut les comparer. C'est pourquoi le rayon d'un cercle et son périmètre ont même dimension, car je peux en faire la mesure avec le même étalon (par exemple un fil souple d'une certaine longueur). Ici il s'agit de la dimension [longueur].

Il existe également des grandeurs physiques sans dimension (on dit aussi adimensionnées). Dans ce cas la dimension est noté $[G] = 1$. Par exemple, l'angle θ d'un secteur AOB est une grandeur que l'on peut mesurer comme suit : traçons un cercle de centre O et de rayon r. Les droites (OA) et (OB) coupent le cercle en deux points A′ et B′. L'angle se mesure en faisant le rapport de la longueur d'arc $\widehat{A'B'}$ et du rayon du cercle.

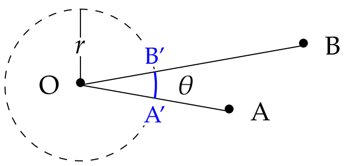

Figure 1.1 – Définition de l'angle plan.

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widehat{A'B'}}{r}$$

On constate donc que si l'on double le rayon du cercle, la longueur d'arc double également de sorte que l'angle ne dépend pas de la taille du cercle. Il est alors assez évident que si l'on décide de mesurer les distances en centimètre, en pouce, ou dans n'importe quel système d'unités, le résultat de l'angle θ ne changera pas. **L'angle est donc sans dimension**. De la même manière, une grandeur définie comme le rapport de deux grandeurs de même dimension, ne présente pas de dimension.

Enfin, par commodité, on a donné un nom spécifique à certaines dimensions (cf. Table 1.1).

Table 1.1 – Symbole donné aux dimensions des grandeurs de base.

Dimension	Symbole
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Intensité électrique	I
Température	Θ
Quantité de matière	N

Équation aux dimensions

Une loi physique affirme l'égalité de deux grandeurs qui sont nécessairement de même nature. Une loi physique est donc aussi une relation entre différentes dimensions : on parle d'**équation aux dimensions**. Voyons comment obtenir ces équations aux dimensions sur quelques exemples.

La vitesse : d'après la définition $v_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, on déduit

$$[v] = \mathrm{LT}^{-1}$$

L'accélération : la définition $a_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$ donne

$$[a] = \frac{[v]}{\mathrm{T}} = \mathrm{LT}^{-2}$$

La force : en vertu de la deuxième loi de Newton $F = ma$ on a

$$[\mathrm{F}] = \mathrm{MLT}^{-2}$$

La constante des gaz parfaits : on peut obtenir sa dimension à partir de la loi du gaz parfait $pV = nRT$.

$$[R] = \frac{[p][V]}{[n][T]} = \frac{[F]}{\mathrm{L}^2} \times \frac{\mathrm{L}^3}{N\Theta} = \mathrm{ML^2T^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}}$$

Le champ magnétique : par définition du champ magnétique, une particule de charge électrique q se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit une force $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, d'où

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{IT \times LT^{-1}}} = \mathrm{MT^{-2}I^{-1}}$$

1.2 Le Système international d'unités

Comme on l'a déjà dit, mesurer c'est comparer une grandeur physique avec un étalon qui définit l'**unité de mesure**. Celle-ci relevant d'un choix arbitraire il faut bien **convenir** d'un système d'unités pour pouvoir communiquer (transactions commerciales, rapports scientifiques, etc.). La bonne idée consiste alors à choisir des étalons dont la définition est indépendante du lieu et du temps et avec lesquels on peut construire toutes les unités. C'est l'ambition du Système international d'unités (SI) adopté par quasiment tous les pays[2]. Né officiellement en 1960, il s'agit d'une extension de l'ancien système MKSA.

2: Trois pays n'ont pas encore adopté officiellement le système métrique : le Libéria, la Birmanie et. . . les Etats-Unis.

Les unités de base

Le (SI) forme un système cohérent reposant sur **sept unités de base** (*cf.* Table 1.2) indépendants du point de vue dimensionnel. Depuis le 20 mai

Dimension	Symbole	Unité SI	Symbole
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	ampère	A
Température	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	cd

Table 1.2 – Les sept unités de base du Système internationale d'unités.

Figure 1.2 – Le SI et ses 7 unités fondamentales liées aux 7 constantes universelles.

2019, les unités du SI sont définies à partir de sept constantes de la nature auxquelles on donne une valeur fixe. Les sept constantes sur lesquelles repose le Système international d'unités sont

- la fréquence de la transition hyperfine du césium 133 $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} = 9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$ qui permet de définir la seconde ;
- la vitesse de la lumière dans le vide $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m.s^{-1}}$ qui permet de relier le mètre à la seconde ;
- la constante de Planck $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$ qui définit indirectement le kilogramme ;
- la charge élémentaire $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ qui fixe l'ampère puisque $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A.s}$;
- la constante de Boltzmann $k_{\mathrm{B}} = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J.K^{-1}}$ qui relie le kelvin aux unités mécaniques ;

- la constante d'Avogadro $N_{\text{A}} = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ qui donne le nombre exact d'entités élémentaires (atomes, molécules, ions, etc.) formant une mole ;
- Enfin, l'efficacité lumineuse $K_{cd} = 683\,\text{lumen.W}^{-1}$ pour un rayonnement monochromatique de longueur d'onde[3] $\lambda = 555\,\text{nm}$. Cette constante relie les grandeurs sensorielles (intensité en candela, éclairement en lux, flux lumineux en lumen) aux grandeurs énergétiques de la lumière (intensité en watt par stéradian, éclairement en watt par mètre carré, flux en watt).

3: Cette longueur d'onde correspond au maximum de sensibilité de l'œil humain.

Notez que ces constantes sont des grandeurs physiques sans incertitude. En revanche, certaines grandeurs auparavant fixées (avant mai 2019) retrouvent leur statut de grandeur expérimentale. Par exemple, une mole de carbone 12 pesait auparavant 12 g par définition ; dorénavant sa valeur n'est plus connue exactement. Elle présente donc une incertitude.

Les unités dérivées

Les sept unités de base du système international sont les «unités fondamentales» à partir desquelles sont obtenues par combinaison toutes les autres unités, dites **unités dérivées**. Certaines d'entre-elles se sont vues attribuer un nom qui rappelle une personnalité scientifique : newton, pascal, joule, volt, tesla, henry etc. Il peut donc y avoir différentes façons d'exprimer la même unité.

TABLE 1.3 – Quelques unités dérivées.

Grandeur	Unité SI	Grandeur	Unité SI
aire	m^2	énergies	J (joule)
volume	m^3	pression	Pa (pascal)
masse molaire	kg.mol^{-1}	tension	V (volt)
masse volumique	kg.m^{-3}	charge électrique	C (coulomb)
fréquence	Hz (hertz)	résistance électrique	Ω (ohm)
vitesse (scalaire)	m.s^{-1}	champ électrique	V.m^{-1}
vitesse angulaire, pulsation	rad.s^{-1}	conductance électrique	S (siemens)
accélération (scalaire)	m.s^{-2}	capacité électrique	F (farad)
force d'interaction	N (newton)	inductance	H (henry)
puissance mécanique	W (watt)	champ magnétique	T (tesla)

Exemple : unités de la pression

La pression s'exprime en pascal (Pa) dans le système international. Etant donné que la pression représente une force par unité de surface on peut aussi l'exprimer en N/m^2. Par ailleurs, on sait d'après l'équation aux dimensions $\text{F} = \text{MLT}^{-2}$, que 1 N = 1 kg.m.s^{-2} d'où l'on déduit

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N.m}^{-2} = 1\ \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

Il existe une dernière classe d'unités qu'on appelle unités supplémentaires. Cette classe contient deux unités sans dimension : le radian (rad), unité de l'angle plan, et le stéradian (sr), unité d'angle solide.

Préfixes SI

Enfin, on utilise parfois des préfixes multiplicateurs pour remplacer les puissances de 10 :

Valeur	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Préfixe	atto	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci
Symbole	a	f	p	n	μ	m	c	d
Valeur	10	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}
Préfixe	déca	hecto	kilo	Mega	Giga	Tera	Peta	Exa
Symbole	da	h	k	M	G	T	P	E

Table 1.4 – Préfixes multiplicateurs.

1.3 Analyse dimensionnelle

Analyser le contenu dimensionnel d'une relation permet de rendre bien des services. En voici un petit tour d'horizon ...

Vérifier une formule

Une loi physique impose une contrainte qui n'existe pas en mathématique ; elle doit être **homogène**, c'est-à-dire constituée de termes de même dimension. Sommer deux grandeurs de dimension différente n'a aucun sens en physique. Ainsi pour vérifier une loi physique, la première chose à faire est de vérifier l'homogénéité !

Vérifier une formule

Toute formule non homogène est nécessairement fausse. On retiendra quelques règles :

- dans $\sin x$, $\cos x$, e^{x}, $\ln x$ et $\log x$ la grandeur x doit être sans dimension ;
- dans $1 + x$, la grandeur x doit être sans dimension ;
- dans $1 + x/y$, les grandeurs x et y sont de même dimension.

Exercice – La période d'oscillation d'un pendule simple dépend de sa longueur ℓ, du champ de pesanteur g et de l'amplitude angulaire $\theta_{\max}$ des oscillations. On propose plusieurs formules ; préciser celles qui ne sont pas homogènes :

- ☐ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell + \theta_{\max}}{g - \theta_{\max}}}$
- ☐ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g\theta_{\max}}}$
- ☐ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\left(1 + \dfrac{{\theta_{\max}}^{2}}{16}\right)$
- ☐ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\left(1 + \dfrac{\theta_{\max}}{\ell}\right)$

Bien entendu, cela ne signifie pas qu'une formule homogène soit forcément exacte, mais cela permet déjà de trier ce qui n'a aucun sens physique de ce qui peut en avoir. De manière générale, l'analyse dimensionnelle est un outil de réfutation, pas de validation.

Il faut prendre garde à certaines formules qui mélangent expressions numériques et littérales. Par exemple, le pH d'une solution acido-basique diluée est souvent défini par

$$\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$$

Or la concentration n'est pas sans dimension ce qui suggère que cette formule est non-homogène. En réalité cette formule n'obéit pas à la règle élémentaire qui veut que toute relation soit indépendante du système d'unités. En effet, dans la formule qui donne le pH, il est sous entendu qu'il faut exprimer

$[H_3O^+]$ en mol.L^{-1}. Si l'on veut donner la relation qui donne le pH quel que soit le système d'unités on écrira plutôt

$$\mathrm{pH} = -\log \frac{[H_3O^+]}{c^\circ}$$

où c° désigne la concentration standard. Dans le SI, $c^\circ = 1000$ mol.m^{-3} mais si l'on décide d'exprimer les concentrations en mol.L^{-1}, on a $c^\circ = 1$ mol.L^{-1} et dans ce cas la tentation est grande de faire disparaître cette constante par commodité. Mais cela ne doit pas nous faire oublier sa présence.

Conversion d'unités

L'équation aux dimensions étant indépendante du système d'unités, elle est très utile quand il faut convertir une unité d'un système vers celle d'un autre système.

Exemple : la dyne

Dans le Système International, la force s'exprime en newton alors qu'elle s'exprime en dyne dans le Système CGS (cm, gramme, seconde). Combien de newton vaut 1 dyne ?

L'équation aux dimensions [Force] = MLT^{-2} doit être vérifiée dans tout système d'unités. On a donc

$$1\,\text{newton} = 1\,\text{kg.m.s}^{-2} \quad \text{et} \quad 1\,\text{dyne} = 1\,\text{g.cm.s}^{-2}$$

Ainsi on en déduit la conversion :

$$1\,\text{newton} = 10^5\,\text{dynes}$$

Modéliser

L'analyse dimensionnelle permet de prévoir la forme d'une loi si l'on sait quels sont les paramètres pertinents du problème.

Supposons par exemple que nous cherchions à exprimer une grandeur G en fonction de 2 paramètres pertinents indépendants p_1 et p_2. La méthode consiste alors à trouver comment multiplier p_1 et p_2 pour former une grandeur de même dimension que G. On écrit donc

$$G = \mathrm{C^{te}} {p_1}^{\alpha}\, {p_2}^{\beta}$$

où α et β sont des facteurs que l'on détermine grâce à l'équation aux dimensions. Une fois ces constantes déterminées, on peut proposer la forme générale de la loi recherchée.

Exemple : période d'oscillation T d'un pendule simple

On suppose que la période T dépend de la masse m, du champ de pesanteur g et de la longueur ℓ du pendule : $T = f(m, g, \ell)$. On écrit alors

$$T = \mathrm{C^{te}} m^{\alpha}\, g^{\beta}\, \ell^{\gamma}$$

où C^{te} est un facteur adimensioné. Cela nous donne l'équation aux dimensions

$$\mathrm{T} = \mathrm{M}^{\alpha}\mathrm{L}^{\gamma+\beta}\mathrm{T}^{-2\beta}$$

La loi devant être homogène on doit poser $\alpha = 0$, $\beta = -1/2$ et $\gamma = 1/2$. La forme générale est donc

$$T = \mathrm{C}^{te}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Attention, ce n'est pas parce que l'on trouve une loi qu'elle est juste ! L'analyse dimensionnelle nous dit simplement que la loi est correcte en termes de dimension. C'est à l'expérience de confirmer ou d'infirmer l'analyse. Par exemple, dans le cas du pendule, supposer comme nous l'avons fait, que la période du pendule ne dépend pas de l'amplitude des oscillations est en contradiction avec les faits [a]. Il faut alors introduire l'amplitude θ_0 des oscillations dans l'analyse dimensionnelle :

$$T = f(m, g, \ell, \theta_0) \quad \Longrightarrow \quad T = \mathrm{C}^{te} m^{\alpha}\, g^{\beta}\, \ell^{\gamma}\, {\theta_0}^{\delta}$$

d'où l'équation aux dimensions

$$\mathrm{T} = \mathrm{M}^{\alpha}\mathrm{L}^{\gamma+\beta}\mathrm{T}^{-2\beta}$$

identique à la précédente. On trouve donc les mêmes résultats ($\alpha = 0$, $\beta = -1/2$ et $\gamma = 1/2$) et δ peut prendre des valeurs quelconque. En d'autres termes on peut écrire la période ainsi

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}(a_0 + a_1\,\theta_0 + a_2\,{\theta_0}^2 + \ldots + a_p\,{\theta_0}^p + \ldots)$$

où les exposants peuvent être quelconques de sorte que la forme la plus générale est

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}} f(\theta_0)$$

a. On peut montrer que cette propriété n'est correcte que si les angles sont petits.

Notez que l'analyse dimensionnelle ne permet pas de déterminer complètement la loi recherchée. Dans le meilleur des cas, une constante adimensionnée est à déterminer de façon empirique.

MESURES ET INCERTITUDES 2

« La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant » (Edgar Morin)

Accéder à une valeur objective de la réalité sans erreur est tout simplement impossible. L'erreur fait parti de l'opération de mesure. Une des forces de la science est d'avoir mis au point des outils qui permettent d'**estimer** cette erreur.

Version en ligne

https://femto-physique.fr/omp/mesures-et-incertitudes.php

2.1 Mesurer c'est évaluer

Notion d'erreur et d'incertitude

Expérience

Mesurons, à l'aide d'un chronomètre, la durée t correspondant à 2,5 périodes d'oscillation d'un pendule simple (5 passages à la verticale). En faisant faire cette même mesure par différents élèves on trouve

mesure n°	1	2	3	4
durée t	3,62 s	3,47 s	3,44 s	3,30 s

L'expérience précédente montre que les résultats sont différents ce qui traduit l'existence **d'erreurs de mesure**. L'erreur faite lors de la mesure d'une grandeur x est l'écart entre la valeur mesurée (x_i) et sa valeur vraie (x_{vraie}), laquelle est unique mais inaccessible. Elle présente deux composantes.

Erreur aléatoire L'erreur aléatoire ϵ_a provient des variations temporelles et spatiales **non prévisibles** de grandeurs d'influence[1]. Elle est définie par

$$\epsilon_a = x_i - \overline{x}$$

où $\overline{x}$ est la moyenne des mesures obtenue en répétant N fois la même expérience avec $N \longrightarrow \infty$.

Erreur systématique L'erreur systématique[2] ϵ_s est un **décalage constant** dont l'origine peut être d'ordre théorique ou expérimentale[3]. Par définition,

$$\epsilon_s = \overline{x} - x_{\text{vraie}}$$

Ainsi, l'erreur sur une mesure est la somme d'un biais et d'une quantité aléatoire :

$$\epsilon = x_i - x_{\text{vraie}} = (x_i - \overline{x}) + (\overline{x} - x_{\text{vraie}}) = \epsilon_a + \epsilon_s$$

1: Par exemple, le soin avec lequel sont effectuées les mesures, la température de la pièce, la fidélité de l'appareil de mesure, etc.

2: On dit aussi *biais*.

3: Exemple de biais : influence du mode opératoire, problème de calibrage d'un appareil, modélisation incomplète, etc.

Exemple

Dans l'expérience précédente on peut lister les différentes sources d'erreur :

Erreur aléatoire	Erreur systématique (biais)
réflexe humain	défaut de parallaxe
fidélité limité du chronomètre	chronomètre mal calibrés
erreur de lecture	verticale mal positionnée

Correction d'un biais

Bien qu'il ne soit pas possible de compenser l'erreur aléatoire faite sur une mesure, elle peut être réduite en augmentant le nombre d'observations comme nous allons le voir. En revanche, l'erreur systématique d'un résultat de mesure ne peut être réduite en augmentant le nombre d'observations, mais par l'application d'une **correction**.

Le résultat final est exprimé sous la forme d'un **intervalle de valeurs probables**

$$x = x_\mathrm{m} \pm \Delta x$$

où x_m est la mesure, c'est-à-dire la meilleure estimation de la valeur vraie et Δx l'**incertitude sur la mesure** que l'on cherche à évaluer. Plus précisément l'intervalle $[x_\mathrm{m} - \Delta x, x_\mathrm{m} + \Delta x]$ est défini comme un intervalle de confiance associé à une probabilité de contenir la valeur vraie x_vraie. Cette probabilité est appelé **niveau de confiance**.

Exemple

La masse de l'électron vaut (CODATA 2010)

$$m_\mathrm{e} = (9,10938291 \pm 0,00000040) \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

avec un niveau de confiance de 68%.

Insistons sur le fait que sans incertitude il nous est impossible de comparer deux résultats ou de réfuter une loi. Pour qu'un résultat ait une valeur scientifique il faut pouvoir prouver que les éventuels écarts entre la théorie et l'expérience sont non significatifs c'est-à-dire liés aux erreurs de mesure ce qui rend nécessaire l'estimation des incertitudes.

Écriture scientifique

Avant de voir comment estimer les incertitudes, faisons une petite mise au point sur les conventions d'écriture scientifique.

Dans une valeur numérique, le premier chiffre non-nul de gauche désigne le chiffre le plus significatif et le dernier chiffre de droite le chiffre le moins significatif. Les nombres 1230, 1,230 et 0,001230 ont ainsi tous quatre chiffres significatifs. Le nombre de chiffres significatifs rend compte de la précision du résultat et permet donc de se faire une idée de l'incertitude, même quand cette dernière n'est pas indiquée. Par exemple, écrire

$$c = (3,00278 \pm 0,04) \cdot 10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

n'a aucun sens, puisque l'incertitude indique que nous n'avons pas d'information au delà de la deuxième décimale. Il faut donc arrondir le résultat au centième.

Comment arrondir ?

Pour les arrondis on adopte la méthode qui consiste à arrondir au plus près : cela consiste à repérer le dernier chiffre à arrondir (en fonction de la précision) puis à l'augmenter d'une unité si le chiffre suivant est au moins égal à 5 ou à le conserver sinon. Par exemple,

- arrondir 1,645 à l'unité donne 2 ;
- arrondir 1,645 au dixième donne 1,6 ;
- arrondir 1,645 au centième donne 1,65.

Si l'on reprend l'exemple précédent, on écrira plutôt

$$c = (3,00 \pm 0,04) \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Par ailleurs, l'incertitude étant elle-même entachée d'une incertitude assez importante, on ne garde qu'un seul chiffre significatif, éventuellement deux si l'on estime faire une erreur d'arrondi trop importante avec un seul chiffre. Par exemple

$$175,652 \pm 6,922 \longrightarrow 176 \pm 7 \quad \text{et} \quad 175,652 \pm 1,394 \longrightarrow 175,7 \pm 1,4$$

En résumé

Une fois l'incertitude estimée, on l'arrondit à un ou deux chiffres. On ajuste la valeur de la mesure x_m de manière à ce que son **dernier chiffre significatif soit à la même position que celui de l'incertitude** en arrondissant au plus près. Le résultat se met sous la forme

$$x = (x_\mathrm{m} \pm \Delta x) \cdot 10^n \quad \text{unité}$$

2.2 Comment estimer une incertitude ?

Décrivons les différentes méthodes qui nous permettent d'évaluer les erreurs aléatoires. Notez que l'on suppose les erreurs systématiques négligeables et que ça n'est qu'à la fin, lorsque l'on confronte théorie et expérience, que l'on peut invoquer l'existence de biais pour expliquer un désaccord.

Généralités

Finalement, mesurer c'est accéder à une grandeur aléatoire. Cette variable aléatoire présente une distribution qui a souvent l'allure d'une gaussienne dont la figure Figure 2.1 en donne une représentation.

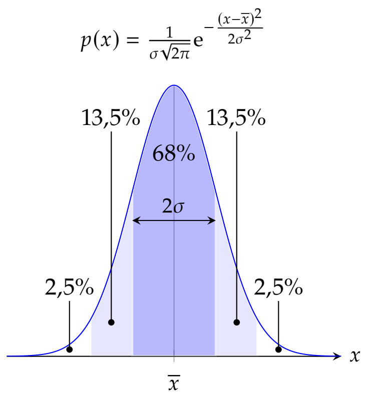

Figure 2.1 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne. On a 68% de chance de trouver x dans l'intervalle $\overline{x} \pm \sigma$ et 95% dans l'intervalle $\overline{x} \pm 2\sigma$.

Pour caractériser la dispersion des résultats autour de la moyenne on définit **l'écart-type** σ :

$$\sigma \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\overline{(x-\overline{x})^2}}$$

où $\overline{x}$ désigne la moyenne[4] et $\overline{(x-\overline{x})^2}$ la moyenne des écarts quadratiques. On montre qu'il existe une probabilité de 68% pour qu'une mesure soit compris dans l'intervalle $\overline{x} \pm \sigma$. On dit alors que l'intervalle $\overline{x} \pm \sigma$ représente un niveau de confiance de 68%. Le problème que l'on se pose est, comment, à partir de mesures, évaluer les valeurs $\overline{x}$ et σ ?

4: On dit *espérance* en mathématique.

Pour cela, il existe deux types d'estimations :

Type A – On répète n fois la même expérience puis on effectue une analyse statistique.

Type B – À partir d'une seule mesure on estime $\overline{x}$ et σ à l'aide de différentes informations (notices techniques) et d'hypothèses probabilistes.

Estimation de type A

Supposons que l'on collecte n mesures en répétant n fois la même expérience. On cherche à accéder aux paramètres $\overline{x}$ et σ à partir des n mesures x_1, x_2, ..., x_n. Si $n \to \infty$ on pourrait reconstruire la loi de probabilité relative à la variable x et par conséquent calculer $\overline{x}$. Hélas, n est fini ; il faut donc chercher la meilleur façon d'estimer les paramètres $\overline{x}$ et σ à partir d'un ensemble discret de mesures.

Nous distinguerons deux situations :

- le cas où l'échantillon de mesures est grand, disons $n \geq 10$;
- le cas où l'échantillon est petit, c'est-à-dire $n < 10$.

Cas où $n \geq 10$

La théorie des probabilités permet de montrer que la meilleur estimation de $\overline{x}$ est la **moyenne arithmétique**.

$$\boxed{m \overset{\text{def}}{=} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \simeq \overline{x}} \quad \heartsuit \tag{2.1}$$

On montre également que la meilleure estimation de σ est **l'écart-type non biaisé** (noté σ_{n-1} sur les calculatrices)

$$\boxed{s \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{(x_1-m)^2 + (x_2-m)^2 + \cdots + (x_n-m)^2}{n-1}} \simeq \sigma} \quad \heartsuit \tag{2.2}$$

Notez que dans cette formule, la somme des écarts quadratiques est divisé par $n-1$ et non par n comme on pourrait s'y attendre. Une façon de retenir ce facteur $n-1$ est de réaliser que pour estimer un écart-type il faut au moins deux mesures ce qui implique $n > 1$.

Cas où $n \leq 10$

Si l'échantillon est petit (disons $n \leq 10$) il y a une correction à apporter. On montre alors que la meilleure estimation de l'écart-type vaut $t \times s$ où t est le *coefficient de Student* donnée dans la Table 2.1.

Table 2.1 – Coefficients de Student pour un intervalle de confiance de 68%

Nombre de mesures n	Coefficient t
2	1,84
3	1,32
4	1,20
5	1,14
6	1,11
7	1,09
8	1,08
9	1,07
10	1,06

Exemple

Dans l'expérience précédente, on peut estimer l'incertitude-type associé à la mesure de la durée t. On trouve

$$m = \frac{3,62 + 3,47 + 3,44 + 3,30}{4} = 3,4575 \text{ s}$$

et puisque l'échantillon contient $n = 4$ mesures,

$$\sigma_t = 1,2 \times \sqrt{\frac{(0,1625)^2 + (0,0125)^2 + (-0,0175)^2 + (-0,1575)^2}{3}} \simeq 0,1575 \text{ s}$$

Ainsi, chaque mesure présente une incertitude-type de l'ordre de 0,16 s.

Incertitude sur la moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique est la meilleure estimation de la valeur vraie, pour autant elle n'en est pas moins entachée d'une certaine erreur. En effet, si l'on répète une autre série de n mesures on trouve une autre valeur de m. Il faut donc chercher à calculer l'écart-type de la moyenne σ_m. Il est alors assez facile de montrer que

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \simeq \frac{t\,s}{\sqrt{n}}$$

En d'autres termes, par rapport à une mesure isolée, on réduit l'incertitude d'un facteur $\sqrt{n}$ en procédant à n mesures[5]. Finalement, le résultat se met sous la forme

$$\boxed{x = m \pm \frac{t\,s}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m & \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{n}\sum x_i \\ s & \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum (x_i - m)^2} \end{cases}} \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

5: On pourrait croire qu'il suffit de procéder à un très grand nombre de mesures pour accéder à la valeur vraie de façon très précise mais ce serait oublier la présence d'erreurs systématiques qui ne s'effacent pas avec le nombre d'observations. À partir d'un certain nombre n l'erreur systématique l'emporte sur l'erreur aléatoire. Toute la difficulté réside alors dans la détermination puis la correction des différents biais, comme nous le rappelle la très médiatique affaire des neutrinos supraluminiques.

Exemple

Dans l'expérience qui nous sert de fil rouge, on peut accéder à une valeur précise de t en calculant sa moyenne arithmétique m et son incertitude-type :

$$m = 3,4575 \qquad \text{et} \qquad \sigma_m = \frac{0,1575}{\sqrt{4}} = 0,0787$$

Après avoir arrondi à un chiffre l'incertitude-type on peut finalement écrire le résultats de nos observations :

$$t = 3,46 \pm 0,08 \text{ s} \qquad \text{niveau de confiance : 68\%}$$

Estimation de type B

Lorsque l'on procède à une unique mesure on ne peut plus estimer l'incertitude-type de façon statistique. On procède alors de la manière suivante.

1. On détermine la plage d'erreur $\Delta = x_{\text{max}} - x_{\text{min}}$ dans laquelle il est raisonnable de penser que se trouve la valeur vraie. Cette plage d'erreur peut être fournie par la notice technique d'un appareil de mesure, ou déterminée de façon empirique en fonction des conditions de l'expérience. Il ne faut pas oublier qu'une estimation à un chiffre significatif suffit.
2. On fait ensuite l'hypothèse que la probabilité de trouver la valeur vraie dans cet intervalle est uniforme. Il est alors facile de montrer grâce aux probabilités que

$$\boxed{\overline{x} \simeq \frac{x_{\text{max}} + x_{\text{min}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sigma \simeq \frac{\Delta}{\sqrt{12}}} \quad \heartsuit \tag{2.4}$$

Exemple

1. On souhaite déterminer par autocollimation la focale d'une lentille convergente. La plage de distance qui permet d'obtenir l'image nette de l'objet par le miroir est $9,8\,\text{cm} \leftrightarrow 11,2\,\text{cm}$. Comme valeur vraie, on prendra le centre de la plage :

$$f' = \frac{11,2 + 9,8}{2} = 10,5\,\text{cm}$$

Pour calculer l'incertitude, on effectue

$$\sigma_{f'} = \frac{11,2 - 9,8}{\sqrt{12}} = 0,4 \text{ cm}$$

2. On mesure une tension de $4,32$ V avec un voltmètre sur le calibre 20 V, la résolution est de 10 mV. La notice technique indique une précision de $\pm$(0, 5% valeur lue + 1 digit). La plage d'erreur vaut donc

$$\Delta = 2 \times [(0,5 \times 4,32)/100 + 0,01] = 0,0632 \text{ V}$$

et l'incertitude-type

$$\sigma = \frac{0,0632}{\sqrt{12}} \simeq 0,02 \text{ V}$$

Incertitude composée

La plupart du temps, l'erreur expérimentale présente de nombreuses composantes dont on peut estimer l'incertitude-type (notée σ_i). Pour obtenir l'incertitude globale il faut alors **composer les incertitudes-type**. Si l'on suppose ces différentes composantes indépendantes, alors en vertu de la loi de composition des variances, on a :

$$\boxed{\sigma_{\text{total}} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}} \quad \heartsuit \tag{2.5}$$

On notera que puisque l'on arrondit l'incertitude à un chiffre significatif, il est possible de négliger σ_i si ce dernier est au moins trois fois plus petit que le terme le plus important.

Exemple

Reprenons notre expérience. On a estimé l'incertitude-type associée notamment au réflexe humain par la méthode de type A et on a trouvé $\sigma_A = 0,0787$ s. En revanche, le chronomètre présente une erreur de justesse qui n'est pas évaluée par la méthode de type A. Si l'on suppose une précision du chronomètre égale au 1/100e s, on prendra

$$\sigma_B = \frac{0,01}{\sqrt{12}} = 3 \text{ ms}$$

On constate que l'erreur liée au manipulateur est prépondérante et qu'il est légitime de négliger l'erreur liée à l'instrument : $\sigma_{\text{total}} = \sigma_A$.

Incertitude élargie

Pour finir, il est d'usage de donner les incertitudes avec un niveau de confiance de 95%. On notera Δx cette incertitude dite **élargie** :

$$\boxed{\Delta x = k\sigma \quad \text{avec} \quad k = 2 \quad \text{à 95\% de niveau de confiance}} \quad \heartsuit \qquad (2.6)$$

Si rien n'est précisé, le résultat d'une mesure est a donner avec un niveau de confiance de 95%, ce qui correspond à un bon niveau de confiance.

On définit aussi *l'incertitude relative* par $\frac{\Delta x}{x}$ exprimé en %. Plus elle est petite, plus la mesure est précise.

Expérience

Finalement, la durée correspondant à 2,5 périodes d'oscillations du pendule simple peut s'écrire

$$t = 3,46 \pm 0,16 \text{ s} \qquad \text{niveau de confiance : 95\%}$$

ce qui signifie que la période des oscillations vaut

$$T = 1,38 \pm 0,06 \text{ s} \qquad \text{niveau de confiance : 95\%}$$

L'incertitude est donc de 4% en valeur relative.

2.3 Propagation des erreurs

Supposons que l'on mesure n grandeurs différentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et que l'on calcule, à partir d'une loi physique ou d'une définition, une nouvelle grandeur $G = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Connaissant les incertitudes $\Delta x_{i=1\ldots n}$ associées aux n mesures, il est alors légitime de se demander quelle est l'incertitude de G suite à la propagation des erreurs dans le calcul de G.

Cas d'une loi affine

Commençons par un cas simple, celui d'une relation affine à une seule variable :

$$G = ax + b \quad \text{avec} \quad x = x_m \pm \Delta x$$

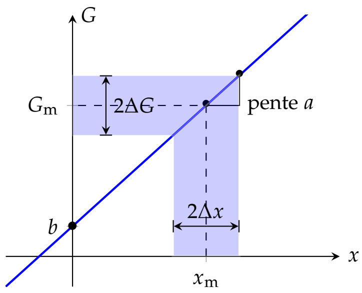

Figure 2.2 – Propagation des incertitudes dans le cas d'une relation affine

Dans ce cas, il est facile de voir sur un graphique qu'une incertitude Δx produit une incertitude $\Delta G = |a|\Delta x$ de sorte que le calcul donne

$$\boxed{G = G_m \pm \Delta G \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_m &= a x_m + b \\ \Delta G &= |a|\Delta x \end{cases}} \quad \heartsuit \tag{2.7}$$

Exercice – L'indice de réfraction de l'air à 20°C varie avec la pression selon la loi de Gladstone : $n = 1 + kP$ avec $k = (27 \pm 1) \cdot 10^{-5}\,\text{bar}^{-1}$ et où P est exprimé en bar. Que vaut l'indice de l'air à 20°C et à la pression $P = 2\,\text{bar}$?

Rép. $n = 1,00054 \pm 0,00002$.

Cas d'une loi puissance

Supposons maintenant que la grandeur G dépend d'une variable x *via* une loi de puissance :

$$G = G_0\, x^n$$

et cherchons à estimer l'incertitude de G liée à la propagation de l'incertitude de x. Pour cela nous allons supposer que les incertitudes sont petites en valeur relative. Cela signifie qu'entre x et $x + \Delta x$, G varie si peu qu'on peut approcher la courbe par un segment de coefficient directeur

$$a = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = n\, G_0\, x^{n-1}$$

Si l'on applique le résultat du paragraphe précédent, on trouve donc $\Delta G = |a|\,\Delta x = |n\, G_0\, x^{n-1}|\,\Delta x$. En divisant par G_m on trouve la règle simple suivante.

$$\boxed{\left|\frac{\Delta G}{G_\mathrm{m}}\right| = \left|n\,\frac{\Delta x}{x}\right|} \quad \heartsuit \tag{2.8}$$

Dans le cas d'une loi de puissance, l'incertitude relative est multipliée par la puissance.

Exemple : volume d'une bille

On cherche à déterminer le volume d'une bille d'acier de rayon $r = (2,778 \pm 0,005)$ mm. Sachant que le volume d'une sphère s'écrit $V = 4/3\pi\, r^3$ on trouve

$$V_\mathrm{m} = 89,80\ \text{mm}^3 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta r}{r} = 0,54\% \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = 0,5\ \text{mm}^3$$

On écrira donc $V = (89,8 \pm 0,5)\ \text{mm}^3$.

Méthode générale

G **ne dépend que d'une variable** – En physique, il arrive souvent que le calcul d'une grandeur G implique plusieurs variables. Cependant, il également assez courant qu'une des variables soit moins précise que les autres de sorte que l'on peut considérer les autres variables comme des paramètres constants. On peut alors considérer que

$$G = f(x) \quad \text{avec} \quad x = x_m \pm \Delta x$$

Dans ce cas, et à condition de G varie peu entre x_m et $x_m \pm \Delta x$, on écrira

$$\boxed{G = G_m \pm \Delta G \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_m &= f(x_m) \\ \Delta G &= |f'(x_m)|\, \Delta x \end{cases}} \quad \heartsuit \tag{2.9}$$

G **dépend de** n **variables** – Considérons maintenant le cas général

$$G = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{avec} \quad x_i = x_{\mathrm{m},i} \pm \Delta x_i$$

Si les grandeurs x_i sont indépendantes, on utilise la formule suivante :

$$\boxed{\Delta G = \sqrt{(a_1 \Delta x_1)^2 + (a_2 \Delta x_2)^2 + \ldots + (a_n \Delta x_n)^2} \quad \text{avec} \quad a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots} \quad \heartsuit \tag{2.10}$$

Calcul d'une puissance électrique

Un dipôle électrique est soumis à la tension $U = (2,6 \pm 0,3)$ V ce qui produit un courant d'intensité $I = (0,89 \pm 0,06)$ A. Calculons la puissance électrique $P = U.I$ fournie à ce dipôle.

Tout d'abord, la valeur numérique de la puissance vaut

$$P_\mathrm{m} = U_\mathrm{m} I_\mathrm{m} = 2,6 \times 0,89 = 2,314 \text{ W}$$

Ensuite, calculons les dérivées par rapport à U et I :

$$\frac{\partial P}{\partial U} = I \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial I} = U \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}P = I\,\mathrm{d}U + U\,\mathrm{d}I$$

On en déduit l'incertitude sur le calcul de G :

$$\Delta P = \sqrt{(0,89 \times 0,3)^2 + (2,6 \times 0,06)^2} = 0,31 \text{ W}$$

On écrira donc :

$$P = 2,3 \pm 0,3 \text{ W}$$

Cas où les données sont fournies sans incertitude

Il arrive fréquemment, notamment dans les sujets de concours, que l'on ait à faire un calcul à partir de données dont les incertitudes sont absentes. Dans ce cas c'est le nombre de chiffres significatifs qui indique la précision. On admet alors que le dernier chiffre significatif est connu à ±0,5. Par exemple,

$$v = 55\,\mathrm{km\,h^{-1}} \quad \text{signifie} \quad v = (55{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

Donc, rigoureusement, pour savoir comment arrondir le résultat d'un calcul il faut faire une estimation de l'incertitude liée au calcul. Cependant, si l'on veut s'épargner ce calcul fastidieux, on peut appliquer la méthode simplifiée suivante.

Règles de calcul

- Cas d'une somme : c'est la donnée qui présente le moins de décimales qui impose son nombre de décimales au résultat.
- Cas d'un produit ou d'un quotient : la donnée qui présente le plus faible nombre de chiffres significatifs impose son nombre de chiffres significatif au résultat.
- Cas d'une fonction $f(x)$: le résultat est arrondi avec le même nombre de chiffres significatifs que x.

Exemples

- $25{,}2\,\mathrm{cm} + 8{,}3\,\mathrm{mm} = (25{,}2 + 0{,}83)\,\mathrm{cm} = 26{,}0\,\mathrm{cm}$. Le résultat doit être arrondi au dixième de centimètre. Attention à ne pas oublier d'écrire les grandeurs avec la même unité !
- $\dfrac{0{,}600}{0{,}9 + 0{,}300} = 0{,}50$. En effet, la somme $0{,}9 + 0{,}300$ vaut 1,2 (arrondi au dixième) et possède deux chiffres significatifs. Le résultat doit présenter deux chiffres significatifs.
- $\dfrac{0{,}300 \times 4{,}180 \times (15 - 7{,}0)}{0{,}069} = 145,39\ldots \simeq 1.10^3$, car $15 - 7{,}0 = 8$ est arrondi à l'unité près et ne présente donc qu'un seul chiffre significatif.

Pour en savoir plus

[1] H. Moreau. *Le système métrique*. Chiron, 1975.

[2] P Giacomo. « Du Système métrique décimal au SI ». In : *Bulletin du Bureau national de métrologie* 100 (1995), p. 5-9.

[3] J-R Taylor, L Reynaud et P Reynaud. *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques : avec exercices corrigés*. Dunod, 1999.

[4] François-Xavier Bally et Jean-Marc Berroir. « Incertitudes expérimentales ». In : *ENS, Université Paris* 6.7 (2010).

2023

femto-physique.fr/omp