





On se propose d'estimer et de projeter la mortalité d'un portefeuille d'assurés afin de calculer la valeur actuelle probable (VAP) d'un produit de rente viagère.

Le portefeuille est composé de femmes nées en 1950. 60% des assurées se sont déclarées non-fumeuses, et les 40% restant sont des fumeuses régulières. Chaque assurée a contracté en 2000 un contrat de rente viagère différée démarrant en 2010.


Dans la suite, on utilisera les données disponibles sur la Human Mortality Database (<http://www.mortality.org/>). Télécharger les données pour le pays concerné. Chaque groupe aura un pays différent.



### (A) Analyse de la mortalité de la population générale

1. **Maximum de vraisemblance** : En utilisant la procédure vue en cours pour estimer les taux de mortalité par maximum de vraisemblance, *calculer* les taux de mortalité en fonction de l'âge. *Afficher* les taux de mortalité par maximum de vraisemblance en fonction de l'âge pour la cohorte concernée à partir de 2000. *Tracer* également les intervalles de confiance au seuil de 99% pour cette cohorte.
2. **Discussion des  $\hat{\mu}_x(t)$  estimés par maximum de vraisemblance**, notamment :
  - tendances associés à l'espérance de vie périodique,
  - tendances associés à l'âge médian et les interquartiles (IQR),
  - discutez si on observe le phénomène d'expansion et rectangularisation.
3. **Estimation, projection et diagnostique**: *Estimer* les paramètres d'un modèle de Lee-Carter à partir des données historiques téléchargées. On prendra bien soin de :
  - *Commenter/justifier* le choix de la plage d'âge et de la période choisie pour calibrer les données. 
  - *Commenter* les résultats obtenus en affichant les paramètres estimés.
  - *Comparer* les log taux de mortalité par maximum de vraisemblance (question A1) avec les log taux de mortalités estimés par Lee-Carter pour la cohorte concernée. 
  - *Afficher* les résidus et *discuter* les résultats. 
  - *Projeter* les log taux de mortalité.
  - *Calculer* des intervalles de prédiction au seuil de 95% par *bootstrapping* (vu dans le cours). *Justifier* votre choix de méthode. Utilisez  $N=5\ 000$ . *Afficher* aussi l'histogramme des espérances de vie cohorte à l'âge de 65 ans pour la cohorte concernée. 

### (B) Analyse de la mortalité pour les assurés de notre portefeuille

Maintenant on s'intéresse **exclusivement** aux assurés du portefeuille :

1. *Afficher* les log taux de mortalités historiques et projetés pour la cohorte 1950, à partir de 2010.
2. *Simuler*  $N = 5000$  trajectoires projetées sur 25 ans des taux de mortalité futurs pour la cohorte concernée. *Calculer* des intervalles de prédiction au seuil de 95%. Ici on s'intéresse seulement à la  projection du  $\kappa_t$  (et pas à l'incertitude obtenue dans la méthodologie du bootstrapping).

3. *Comparer* les intervalles de prédiction obtenus avec *bootstrapping* avec celles basées exclusivement sur la projection des  $\kappa$  
4. **Tarification** : *Calculer* la valeur actuelle probable (VAP) du contrat à la date de souscription du contrat pour chacun des scénarios de mortalité générés à la question B2. Utiliser le taux technique  $t = 2\%$ . *Donner* la valeur moyenne obtenue et sa variance. Quelles sont les autres sources d'incertitudes ? *Développer* cette question.
5. L'assureur dispose d'informations plus précises sur les assurées et fait l'hypothèse que les assurées non-fumeuses ont des taux de mortalité de 10% inférieur à la moyenne nationale et que les assurés fumeuses ont une mortalité de 15% supérieure à la moyenne.
  - a. *Recalculer* la VAP du contrat en différenciant selon les deux cas, et *calculer* la variation obtenue par rapport à la valeur calculée à la question B4.
  - b. L'assureur ne souhaite pas proposer des tarifs différenciés. *Proposer* dans ce contexte une valeur de la prime pure du contrat adapté à la composition du portefeuille.
6. **Solvabilité**  nous utilisons ici la table de mortalité différencié (question B5(a)) [table de mortalité D] et la table de mortalité issue de la non-différentiation et composition du portefeuille (question B5(b)) [table de mortalité ND].

Le Solvency Capital Requirement (SCR) est défini comme le percentile 99,5% VaR pendant la période d'une année. En d'autres mots, l'assureur doit avoir assez de fonds afin de couvrir 99,5% de ces pertes potentielles :

$$P(BOF_{t+1} > 0 | BOF_t = x) < 99,5\%$$

où  $BOF_t = A_t - BE_t$  avec  $A_t$  les actifs après paiement des prestations et  $BE_t$  est la réserve mathématique actualisé avec le taux marché  $r = 1\%$  pour les cash-flows restants. L'actif initial  $A_0$  correspond à la prime unique VAP calculé dans la question Q5(b). L'assureur investit cette prime dans un fonds qui paie un rendement annuel de  $i = 4\%$  sans risque.

Dans cet exercice, on calcule le *SCR* de la façon suivante :

$$SCR_t = VaR_{99,5\%}(-\Delta BOF) = VaR_{99,5\%} \left( BOF_t - \frac{BOF_{t+1}}{1+r} \right)$$



**Attention** : dans le calcul du  $SCR_0$  nous avons besoin de  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $BE_0$  et  $BE_1$ . En général les expressions des actifs et du best estimates sont :

$$A_t = \text{actifs en } t - \text{prestations de 0 à } t \text{ capitalisées en } t \quad (1)$$

$$BE_t = \text{réserve actualisée à } t \quad (2)$$

= (ce qui reste à payer en  $t$  - ce qu'on doit encore recevoir en  $t$ )

Notez que ces valeurs sont calculés à  $t^+$  (donc après paiement). En particulier, nous savons que la prime unique a été payé en  $t = 0$ . Donc pour  $BE_0 \Rightarrow$  "ce qu'on doit encore recevoir en 0" = 0.

- (a) *Calculer*  $SCR_0$  en utilisant la table D, ie, le *SCR* à la date de début du contrat pour les fumeuses et non-fumeuses .

- (b) *Calculer*  $SCR_0$  en utilisant la table ND, ie, le  $SCR$  à la date de début du contrat sans différentier.
- (c) *Comparer* le  $SCR_0$  obtenus en (a) et (b).
- (d) *Calculer* le  $SCR$  en 2012, c'est-à-dire 2 ans après le début des paiements en utilisant la table D, ie, pour les fumeuses et non-fumeuses.
- (e) *Calculer* le  $SCR$  en 2012, c'est-à-dire 2 ans après le début des paiements en utilisant la table ND, ie, sans différentier.
- (f) *Comparer* les  $SCR$  obtenus en (d) et (e).
- (g) Quel sont les résultats de (a), (b), (d) et (e) si l'assureur n'obtient qu'un rendement annuel de  $i = 0.5\%$  au lieu de  $i = 4\%$  sans risque dans ses actifs? *Discutez.*

