

2019-2020 电子信息第 1 学期 A 试题答案

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{ax+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = b$ , 其中  $a, b$  是常数, 则 ( )

- (A)  $a=1, b=1$ ; (B)  $a=-1, b=1$ ; (C)  $a=1, b=-1$ ; (D)  $a=-1, b=-1$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 则  $x=0$  是函数  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  的 ( )

- (A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 连续点; (D) 第二类间断点。

3. 函数  $f(x) = \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有 ( )

- (A) 1 条铅直渐近线, 1 条水平渐近线; (B) 1 条铅直渐近线, 2 条水平渐近线;  
(C) 2 条铅直渐近线, 1 条水平渐近线; (D) 2 条铅直渐近线, 2 条水平渐近线。

4. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x - x, & x \geq 1 \\ x^2 - 2x, & x < 1 \end{cases}$ , 则 ( )

- (A)  $x=1$  是  $f(x)$  的极小值点; (B)  $x=1$  是  $f(x)$  的极大值点;  
(C)  $(1, f(1))$  为  $y=f(x)$  的拐点; (D) 不能判断  $f(1)$  是否为  $f(x)$  的极值。

5. 积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} dx = ( )$

- (A)  $\ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ; (B)  $\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ; (C)  $2 \ln(\sqrt{2}+1)$ ; (D)  $\ln(\sqrt{2}+1)$ .

6. 当  $x \rightarrow 0$  时下列无穷小中阶数最高的是 ( )

- (A)  $(1+x)^{x^2} - 1$ ; (B)  $e^{x^5-2x} - 1$ ; (C)  $\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt$ ; (D)  $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ .

答: 1. B; 2. A; 3. D; 4. C; 5. A; 6. C.

解: 1.  $a=1$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -1$ ;

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ,  $x=0$  是函数  $g(x)$  的可去间断点;

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ ,  $x=1, x=2$  为 2 条铅直渐近线;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ,  $y=1, y=-1$  为 2 条水平渐近线

4.  $x > 1$  时  $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$x < 1$  时  $f'(x) = 2x - 2 < 0$ ,  $f''(x) = 2 > 0$ ,  $(1, f(1))$  为  $y=f(x)$  的拐点;

5.  $\int_0^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} dx = \int_0^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} e^{\frac{x}{2}} dx = 2 \ln(e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{1+e^x}) \Big|_0^{-\infty} = \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ;

6.  $(1+x)^{x^2} - 1 = e^{x^2 \ln(1+x)} - 1 \sim x^2 \ln(1+x) \sim x^3$ .

$e^{x^5-2x} - 1 \sim x^5 - 2x \sim -2x$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^{x^4} - 1)}{6x^5} = \frac{1}{3}$ ,  $\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt \sim \frac{1}{3}x^6$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}} - (1+3x)^{-\frac{2}{3}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1+2x)^{-\frac{3}{2}} + 2(1+3x)^{-\frac{5}{3}}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} \sim \frac{1}{2}x^2$$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(e^n + e^{n/2} + e^{n/3} + \dots + e^{n/n}) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 定积分  $\int_{-1}^3 \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 椭圆  $x = a \cos t, y = b \sin t (a > b > 0)$  在  $t = \pi$  处的曲率为  $\underline{\hspace{2cm}}$

4. 设  $f(x) = x^3 \sin 3x$ ，则  $f^{(2020)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 设  $f(x)$  连续，且  $\int_0^x f(x-u) 5^u du = x^2$ ，则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 定积分  $\int_{-1}^1 [(e^x - e^{-x}) \cos x + x^2] dx = \underline{\hspace{2cm}}$

答：1.  $e - 1$ ；2.  $2 \ln 3$ ；3.  $\frac{a}{b^2}$ ；4.  $2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 3^{2017}$ ；5.  $2x - x^2 \ln 5$ ；6.  $\frac{2}{3}$ .

解：1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(e^n + e^{n/2} + e^{n/3} + \dots + e^{n/n}) = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ ；

2.  $\int_{-1}^3 \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx = \int_{-1}^3 \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\right) dx = 4 - \int_{-1}^3 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$

令  $1+\sqrt{x+1} = t$ ，则  $\int_{-1}^3 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx = \int_1^3 \frac{2t-2}{t} dt = 4 - 2 \ln 3$ ；

3.  $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos t}{a \sin t}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$ ，曲率

$$K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{\left|\frac{b}{a^2 \sin^3 t}\right|}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^2 \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t}\right)^3}} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}};$$

$t = \pi$  处的曲率为  $K = \frac{a}{b^2}$

4. 解法 1  $f^{(2020)}(x) = (\sin 3x \cdot x^3)^{(2020)}$

$$= (\sin 3x)^{(2020)} x^3 + 2020(\sin 3x)^{(2019)} \cdot (x^3)' + \frac{2020 \cdot 2019}{2!} (\sin 3x)^{(2018)} \cdot (x^3)''$$

$$+ \frac{2020 \cdot 2019 \cdot 2018}{3!} (\sin 3x)^{(2017)} \cdot (x^3)'''$$

$$f^{(2020)}(0) = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 (\sin 3x)^{(2017)}|_{x=0} = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 3^{2017} \sin\left(\frac{2017\pi}{2}\right)$$

$$= 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 3^{2017}$$

解法 2  $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

$$\sin 3x = 3x - \frac{3^3}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$f(x) = x^3 \sin 3x = 3x^4 - \frac{3^3}{3!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+4} + o(x^{2n+1});$$

$$\frac{f^{(2n+4)}(0)}{(2n+4)!} = \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad f^{(2n+4)}(0) = (-1)^n (2n+4)(2n+3)(2n+2)3^{2n+1}$$

$$n=1008 \text{ 时 } f^{(2020)}(0) = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 3^{2017}$$

5. 解 令  $t = x - u$  得到  $\int_0^x f(t) 5^{x-t} dt = x^2$ , 即  $\int_0^x f(t) 5^{-t} dt = x^2 5^{-x}$ , 两边求导数

$$f(x) 5^{-x} = 2x 5^{-x} - x^2 5^{-x} \ln 5, \quad f(x) = 2x - x^2 \ln 5;$$

$$6. \int_{-1}^1 [(e^x - e^{-x}) \cos x + x^2] dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

三、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

$$1. \text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}}$$

2. 设  $y = y(x)$  由方程  $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$  确定, 且  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$  且可导函数  $\varphi(u) > 0$ , 求

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$$

$$3. \text{已知 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x - x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\sin(\frac{\pi}{4} - x) \tan 2x], \text{ 求正常数 } a \text{ 的值}$$

$$4. \text{计算定积分 } \int_0^1 \frac{2x \arctan x}{(2-x^2)^2} dx$$

$$\text{解: 1. } (\cos x)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}} = \{[1 + [\cos x - 1]]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\}^{\frac{\cos x - 1}{e^{x^2}-1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{[1 + [\cos x - 1]]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\}^{\frac{\cos x - 1}{e^{x^2}-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$2. x = 0 \text{ 代入方程 } \sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0 \text{ 得到 } y = 0;$$

方程  $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$  两边对  $x$  求导, 得到  $\cos x - \varphi(y)y' + \varphi(x) = 0$

$$x = 0, \quad y = 0 \text{ 代入 } \cos x - \varphi(y)y' + \varphi(x) = 0, \text{ 得到 } y' = 2$$

$\cos x - \varphi(y)y' + \varphi(x) = 0$  两边对  $x$  求导, 得到  $-\sin x - \varphi'(y)y'^2 - \varphi(y)y'' + \varphi'(x) = 0$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 2, \quad \text{得到 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = -3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x - x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(\sec^2 x - 1)\sqrt{a+x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\sin(\frac{\pi}{4} - x) \tan 2x] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos(\frac{\pi}{4} - x)}{-2 \sin 2x} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a = 4;$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \int_0^1 \frac{2x \arctan x}{(2-x^2)^2} dx = \int_0^1 \arctan x d\left(\frac{1}{2-x^2}\right) = \frac{\arctan x}{2-x^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x^2-2)(x^2+1)} dx, \\
& = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

四、解答题（每小题 8 分，本题共 16 分）

1. 设  $f(x)$  是以 4 为周期的可导函数， $f(1)=\frac{1}{4}$ ，且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-4x)-f(1+2x)}{x}=12$ ，求  $y=f(x)$  在  $(5, f(5))$  处的法线方程。

2. 设曲线  $L$  的方程为  $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$  ( $1 \leq x \leq e$ )，(1) 求曲线  $L$  的弧长

(2) 设  $D$  是由曲线  $L$ ，直线  $x=1$ ， $x=e$  及  $x$  轴所围成的平面图形，求  $D$  的面积

解：1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{x}=f'(1)$ ,

$$12=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-4x)-f(1+2x)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(1-4x)-f(1)}{x} - \frac{f(1+2x)-f(1)}{x} \right]=-6f'(1)$$

$$f'(1)=-2$$

在  $(5, f(5))$  处的法线方程为  $y-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(x-5)$

$$2. (1) \text{ 曲线 } L \text{ 的弧长 } s=\int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{4}(x-\frac{1}{x})^2} dx=\frac{1}{2} \int_1^e (x+\frac{1}{x}) dx=\frac{e^2+1}{4}$$

$$(2) \text{ 面积 } s=\int_1^e \left( \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x \right) dx=\left[ \frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}x \right]_1^e=\frac{1}{12}e^3-\frac{7}{12}$$

五、证明题（每小题 8 分，本题共 16 分）

1. 设  $f(x)$  在  $[0,3]$  上连续，在  $(0,3)$  内可导，且  $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$ ，证明存在  $\xi \in (0,3)$  使得  $f'(\xi)=0$

2. 设  $f(x)$  在  $[a,b]$  上二阶可微， $\forall x \in [a,b], f'(x)>0, f''(x)>0$ ，证明

$$\int_a^b f(x) dx < \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$$

证明：1.  $f(x)$  在  $[0,2]$  上连续，设  $f(x)$  在  $[0,2]$  上的最大值为  $M$ ，最小值为  $m$

$$\forall x \in [0,2], m \leq f(x) \leq M, m \leq f(0) \leq M, m \leq f(1) \leq M, m \leq f(2) \leq M$$

$$m \leq \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leq M, \text{ 根据介值定理，存在 } c \in [0,2], \text{ 使得 } f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1.$$

$f(x)$  在  $[c,3]$  上连续，在  $(c,3)$  内可导，且  $f(c)=f(3)$ ，根据罗尔定理存在  $\xi \in (c,3) \subset (0,3)$  使得  $f'(\xi)=0$ .

2. 设  $\varphi(x)=\frac{x-a}{2}(f(x)+f(a))-\int_a^x f(t) dt$ ，则

$$\varphi'(x)=\frac{f(a)-f(x)}{2}+\frac{x-a}{2}f'(x), \varphi''(x)=\frac{x-a}{2}f''(x)$$

$$\forall x \in (a,b], f'(x)>0, f''(x)>0, \varphi''(x)>0, \varphi'(x)>\varphi'(a)=0, \varphi(x)>\varphi(a)=0$$

$$\varphi(b)>0, \text{ 即 } \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))-\int_a^b f(t) dt>0, \int_a^b f(x) dx < \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$$

六、应用题（本题 6 分）

设曲线  $y=ax^2$  ( $a>0, x \geq 0$ ) 与  $y=1-x^2$  交于点  $A$ ，过坐标原点和点  $A$  的直线与曲线  $y=ax^2$  围成

平面图形，问  $a$  为何值时，该图形绕  $x$  轴旋转一周的体积为最大？

解： $A\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}, \frac{a}{a+1}\right)$ , 绕  $x$  轴旋转一周的体积

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{a+1}} - \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} (ax^2)^2 dx = \frac{2\pi}{15} \frac{a^2}{(a+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$V' = \frac{2\pi a}{15} \frac{(2-\frac{1}{2}a)}{(a+1)^{\frac{7}{2}}}, \quad 0 < a < 4, V' > 0; a > 4, V' < 0, \text{ 当 } a = 4 \text{ 时体积为最大.}$$