

2018-2019 电子信息第 1 学期 B 试题答案

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - ax - b \right) = 0$, 则 ()

- (A) $a=1, b=1$; (B) $a=-1, b=1$; (C) $a=1, b=-1$; (D) $a=-1, b=-1$.

2. 设 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的第一类间断点的个数为 ()

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

- (A) 极限不存在; (B) 极限存在但不连续; (C) 连续不可导; (D) 可导。

4. $y = xe^{-x}$ 的图形 ()

- (A) 在区间 $(-\infty, 2)$ 内是凸的; (B) 在区间 $(-\infty, 2)$ 内是凹的;
(C) 在区间 $(-\infty, 2)$ 内有凸有凹; (D) 在区间 $(-\infty, 2)$ 内是直线段。

5. 下列等式正确的是 ()

(A) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$; (B) $d \int f(x) dx = f(x) + c$;

(C) $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$; (D) $\int d f(x) = f(x)$.

6. 下列广义积分收敛的是 ()

(A) $\int_0^{+\infty} \sin x dx$; (B) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$; (C) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$; (D) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

答: 1. A; 2. C; 3. C; 4. A; 5. ; 6..

解: 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} - ax - b \right) = 0$, $1-a=0, 1-b=0$, $a=1, b=1$;

2. $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点为 $x=0, x=1, x=-1$;

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{|x|(x+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=1$ 为第一类可去间断点

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $x=0$ 为第一类跳跃间断点

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 连续, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 不可导;

4. $y' = e^{-x} - xe^{-x}$, $y'' = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$, 当 $x < 2$ 时, $y'' < 0$, 凸的

5. A 正确。B 应为 $d \int f(x) dx = f(x) dx$, C 应为 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = 0$, D 应为 $\int d f(x) = f(x) + c$;

6. $\int_0^{+\infty} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{+\infty}$ 发散, $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ 收敛

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^{+\infty}$ 发散, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^{+\infty}$ 发散.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $1 - \cos x$ 的等价无穷小, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$
3. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$, 则 $f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 曲线 $y = x^2 + x$ ($x < 0$) 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$
5. 若 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$
6. 定积分 $\int_{-1}^2 |x^3| dx = \underline{\hspace{2cm}}$

答: 1. 1; 2. $\frac{3}{2}$; 3. 2; 4. $(-1, 0)$; 5. $-F(e^{-x}) + C$; 6. $\frac{17}{4}$.

解: 1. $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{a}{3}x^2 = \frac{1}{2}x^2$, $a = \frac{3}{2}$;

3. $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 0$, $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$

4. $y' = 2x+1$, $y'' = 2$, 曲率 $K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{2}{\sqrt{(1+(2x+1)^2)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2x+1=\pm 1$, $x=-1$;

5. $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = -\int f(e^{-x}) d(e^{-x}) = -F(e^{-x}) + C$;

6. $\int_{-1}^2 |x^3| dx = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = \frac{17}{4}$.

三、计算题 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1-\cos x) & x < 0 \\ 1 & x = 0, \text{ 讨论 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处的连续性和可导性} \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt & x > 0 \end{cases}$

3. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}|_{t=1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}$

4. 计算不定积分 $\int \arcsin x dx$

解: 1. $\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{e^x - 1 - x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(1 + \frac{e^x - 1 - x}{x} \right)^{\frac{x}{e^x - 1 - x}} \right]^{\frac{e^x - 1 - x}{x^2}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{2}},$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1-\cos x)}{x^2} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x^2 = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1-\cos x) - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin x - 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x^2 - 1}{3x} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2 - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \sin x^2}{2} = 0$$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f'(0) = 0$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{(t^2 + 1)'}{(t - \ln(1+t))'} = 2t + 2t^2, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2t + 2t^2)'}{(t - \ln(1+t))'} = 2t + 6t + 4t^2,$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 4, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = 12;$$

$$4. \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

四、解答题 (每小题 8 分, 本题共 16 分)

1. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值

2. 设 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 由 $y = \sin x, x = t, x = 2t, y = 0$ 所围成部分绕 x 旋转的旋转体的体积为 $V(t)$, 问 t 为何值时, $V(t)$ 最大?

解: 1. 原方程对 x 求导数得到, $3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0 \quad (1)$

令 $y' = 0$ 得到 $y^2 + 2xy = 0$, $y = -2x$, 代入原方程得到 $x = \pm 1, y = \mp 2$

(1) 的两边对 x 求导数得到

$$6yy'^2 + 3y^2y'' + 4yy' + 2xy'^2 + 2xyy'' + 2y + 4xy' + x^2y'' = 0 \quad (2)$$

将 $x = 1, y = -2, y' = 0$ 代入 (2) 得到 $y'' = \frac{4}{13} > 0$, 极小值 $f(1) = -2$

将 $x = -1, y = 2, y' = 0$ 代入 (2) 得到 $y'' = -\frac{4}{13} < 0$, 极大值 $f(-1) = 2$

$$2. V(t) = \pi \int_t^{2t} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_t^{2t} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(t - \frac{\sin 4t - \sin 2t}{2} \right)$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{2} (1 + \cos 2t - 2 \cos 4t) = \frac{\pi}{2} (3 + 4 \cos 2t) (1 - \cos 2t),$$

$$V'(t) = 0 \text{ 得到 } \cos 2t = 0 \text{ 或 } \cos 2t = -\frac{3}{4}$$

$\cos 2t = 0$ 时, $t = 0$, 舍去

$$\cos 2t = -\frac{3}{4} \text{ 时, } t = \frac{1}{2}(\pi - \arccos \frac{3}{4}), V(t) \text{ 最大}$$

五、证明题 (每小题 8 分, 本题共 16 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上有二阶导数, 且 $f(1) = f(2) = 0$, 又 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 证明存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $F''(\xi) = 0$

$$2. \text{ 设 } \lambda \text{ 为任意实数, 证明: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^\lambda} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cot x)^\lambda} dx = \frac{\pi}{4}$$

证明：**1**， $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续， $(1, 2)$ 内可导，且 $F(1) = F(2) = 0$ ，根据罗尔定理存在 $c \in (1, 2)$
 $F'(c) = 0$. $F'(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2f'(x)$ ， $F'(1) = 0$ ， $F'(x)$ 在 $[1, c]$ 上连续， $(1, c)$ 内可导，

$F'(c) = F'(1)$ ，根据罗尔定理存在 $\xi \in (1, c) \subset (1, 2)$ ，使得 $F''(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned} 2. I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^\lambda} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^\lambda}{(\cos x)^\lambda + (\sin x)^\lambda} dx, \text{ 令 } x = \frac{\pi}{2} - t, \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{[\cos(\frac{\pi}{2} - t)]^\lambda}{[\cos(\frac{\pi}{2} - t)]^\lambda + [\sin(\frac{\pi}{2} - t)]^\lambda} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^\lambda}{(\sin t)^\lambda + (\cos t)^\lambda} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^\lambda}{(\sin x)^\lambda + (\cos x)^\lambda} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cot x)^\lambda} dx \\ I &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^\lambda}{(\cos x)^\lambda + (\sin x)^\lambda} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^\lambda}{(\cos x)^\lambda + (\sin x)^\lambda} dx \right] = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

六、应用题（本题 8 分）

从深井中吊水，水桶自重 **4** (kg)，缆绳每米 **2** (kg)，用缆绳从 **30** (m) 深的水井中吊水。初始时桶装有 **40** (kg) 的水，并以 **2** (m/s) 的速度匀速上升，桶内水以 **0.2** (kg/s) 的速率从桶底小孔流出，问将桶吊至井口需做多少功？

解 将水桶拉至井口需做功为 $W_1 = 4g \times 30 = 120$ (Jg)，

位于 $[x, x+dx]$ 上的一段绳拉至井口需做功 $dW_2 = 2gx dx$

将 **30** (m) 缆绳全部拉至井口需做功 $W_2 = \int_0^{30} 2gx dx = 900$ (Jg)

在 x 处，桶里水的质量为 $40 - 0.2 \times \frac{30-x}{2} = 37 + 0.1x$ (kg)

将桶里水拉至井口需做功 $W_3 = \int_0^{30} (37 + 0.1x)g dx = 1155$ (Jg)

桶吊至井口需做功 $W = W_1 + W_2 + W_3 = 2175$ (Jg)

