考试教室 姓名 学号 年级 专业、班 学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

命题人： 组题人： 审题人： 命题时间： 教务处制

重庆大学《高等数学 II-2》半期试卷

◉A卷 ○B卷

2022— 2023 学年 第 2 学期

开课学院： 数统 课程号： MATH10822 考试日期： 20230427

考试方式： ○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间： 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;

2.考试作弊,留校察看,毕业当年不授学位;请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.

一、 单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ ( ). D

(A) 等于$\dfrac{1}{2}$ (B) 等于0 (C) 等于-1 (D) 不存在

2. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处( ). C

(A) 不连续 (B) 偏导数存在

(C) 任意方向的方向导数存在且相等 (D) 可微

3. 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 坐标面上的投影图形是( ). A

(A) 椭圆 (B) 柱面 (C) 双曲线 (D) 抛物线

4. 一条直线绕 z 轴旋转一周所形成的曲面不可能是( ). C

(A) 圆柱面 (B) 平面 (C) 马鞍面 (D) 锥面

5. 设积分区域 $D:|x|+|y|\le 1$, 则 $\iint\limits_D[1+x(x-2y)^2]dxdy=$( ). C

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\dfrac{1}{2}$

6. 设 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1,x+y=2$ 围成的区域,则( ). A

(A) $\iint\limits_D\ln(x+y)d\sigma<\iint\limits_D(x+y)d\sigma$ (B) $\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma<\iint\limits_D\ln(x+y)d\sigma$

(C) $\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma>\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$ (D) $\iint\limits_D\ln(x+y)d\sigma>\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$

二、 填空题(每小题 3 分,共 18 分)

7. 过点 $M(1,1,1)$ 且与平面 $x-2y+z=0$ 垂直的直线方程为______.

【答案】 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$

8. 由 $A(1,1,1),B(2,3,4),C(3,2,1),D(1,3,2)$ 为顶点的四面体的体积为______.

【答案】 $\dfrac{3}{2}$

9. 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为______.

【答案】 $2x+y-4=0$

10. 二元函数 $z=2x+y$ 在点 $(1,2)$ 沿各个方向的方向导数的最大值为______.

【答案】$\sqrt{5}$

11. 已知函数 $z = x^y + \pi^e$, 则 $dz =$ ______.

【答案】$yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$

12. 设 $D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$, 且 $f(x,y) = x^2 - \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$, 则

$$f(x,y) = \text{\_\_\_\_\_\_}.$$

【答案】$x^2 - \dfrac{\pi}{4(1+\pi)}$

三、计算题(每小题 7 分,共 28 分)

13. 设 $z = f\left(\dfrac{y}{x}, x^2+y^2\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} f_1' + 2x f_2'$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f_1' - \frac{y}{x^2}\left[\frac{1}{x} f_{11}'' + 2y f_{12}''\right] + 2x\left[\frac{1}{x} f_{21}'' + 2y f_{22}''\right]$$

$$= -\frac{1}{x^2} f_1' - \frac{y}{x^3} f_{11}'' + 2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) f_{12}'' + 4xy f_{22}''.$$

14. 求过点 $P(1,2,3)$ 且与两直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+13}{-1}$ 和 $L_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ 均垂直的直线 L 的方程.

【解】依题意, $\vec{s}_1 = \{1,0,-1\}, \vec{s}_2 = \{2,1,1\}$. 于是, 直线 L 的方向向量

$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{1,-3,1\}$. 故 L 的方程为 $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{1}$.

15. 计算二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy$.

【解】积分区域 $D = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{2-x^2}\right\}$.

(1) 化成极坐标下区域 $D = D' = D_1 + D_2$, 其中

$$\begin{cases} D_1 = \left\{(\rho,\theta) \middle| 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}, 0 \le \rho \le \dfrac{1}{\cos\theta}\right\}; \\ D_2 = \left\{(\rho,\theta) \middle| \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le \sqrt{2}\right\}. \end{cases}$$

(2) $I_1 = \int \dfrac{1}{\cos^3\theta} d\theta = \int \sec^3\theta d\theta = \int \sec\theta d(\tan\theta) = \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta \sec\theta d\theta$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta d\theta + \int \sec\theta d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - I_1 + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|.$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C.$$

(3) $I_2 = \int \dfrac{1}{\cos^5\theta} d\theta = \int \sec^5\theta d\theta = \int \sec^3\theta d(\tan\theta) = \sec^3\theta\tan\theta - 3\int \tan^2\theta \sec^3\theta d\theta$

$$= \sec^3\theta\tan\theta - 3\int (\sec^2\theta - 1)\sec^3\theta d\theta$$

$$= \sec^3\theta\tan\theta - 3\int \sec^5\theta d\theta + 3\int \sec^3\theta d\theta$$

$$= \sec^3\theta\tan\theta - 3I_2 + 3I_1.$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{4}\sec^3\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\sec\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C.$$

$$\Rightarrow I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5\theta d\theta = \left[\frac{1}{4}\sec^3\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\sec\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{40} + \frac{3}{40}\ln(1+\sqrt{2}).$$

(4) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\rho^3\cdot\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\cdot\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\cos\theta}}d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}}d\theta$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^5\theta}d\theta+\frac{4\sqrt{2}}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^5\theta d\theta+\frac{\sqrt{2}}{5}\pi$$

$$=\frac{7\sqrt{2}}{40}+\frac{3}{40}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{5}\pi.$$

16. 求由 $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=4, z=0$ 围成立体的体积.

【解】 立体在 xOy 坐标面上投影区域为: $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 4\right\}$.

故所求体积为

$$V=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho\cdot\rho d\rho$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{16}{3}\pi.$$

四、综合题(每小题 9 分,共 18 分)

17. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\ne 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处,考察二元函数 $f(x,y)$ 是否连续,是否可偏导,是否可微分,方向导数是否存在?

【解】 (1) 因为 $0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}}\to 0$, 所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$$ 即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(2) 因为 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{0}{\sqrt{(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x}=0$, $f'_y(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) 因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f-[f'_x(0,0)dx+f'_y(0,0)dy]}{\rho}$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

且 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta xk\Delta x}{(\Delta x)^2+(k\Delta x)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$, 所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

(4) 最后考察 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处方向导数:

设 $\vec{l}^{\,0}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos\alpha\rho\cos\beta}{\rho^2}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta.$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处任意方向方向导数均存在.

18. 已知二元函数 $f(x,y)$ 满足

$$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x,\ f'_x(x,0)=(x+1)e^x,\ f(0,y)=y^2+2y.$$

求 $f(x,y)$ 的极值.

【解】 由 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$ 可知: $f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+C_1(x)$.

再由 $f'_x(x,0)=(x+1)e^x$ 知 $C_1(x)=xe^x$.

从而 $f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+xe^x$.

于是 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x+C_2(y)$.

由 $f(0,y)=y^2+2y$ 知 $C_2(y)=0$.

故 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x$.

令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+xe^x=0, \\ f'_y(x,y)=2(y+1)e^x=02(y+1)e^x=0, \end{cases}$ 得唯一驻点 $(0,-1)$.

再由

$$f''_{xx}(x,y)=(y+1)^2e^x+(x+1)e^x,\ f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x,\ f_{yy}(x,y)=2e^x$$

知 $A=1,B=0,C=2,\Delta=AC-B^2=2>0$. 因此, $f(x,y)$ 在点 $(0,-1)$ 处取得极小值 $f(0,-1)=-1$.

五、证明题(9 分)

19. 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处有连续的一阶偏导数,证明二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微.

【证】 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$$=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

(1) $\varphi(x)=f(x,y+\Delta y)$ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间由 Lagrange 中值定理可知:存在 $\theta_1\in(0,1)$, 使得

$$\varphi'(x+\theta_1\Delta x)\Delta x=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y),\text{ 即}$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x=[f_x(x,y)+\varepsilon_1]\Delta x,$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1=0$.

(2) $\tau(x)=f(x,y)$ 在 y 与 $y+\Delta y$ 之间由 Lagrange 中值定理可知:存在 $\theta_2\in(0,1)$, 使得 $\tau'(y+\theta_2\Delta y)\Delta x=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$, 即

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y=[f'_y(x,y)+\varepsilon_2]\Delta y,\text{ 其中 }\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2=0.$$

(3) $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$$=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$=f_x'(x,y)\Delta x+f_y'(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

其中 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}=0.$

故 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微.

六、应用题(9 分)

20. 求抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 的一个切平面,使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 所围成的几何体的体积最小.

【解】 先求抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面.

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+1-z$, 则法向量为 $\vec{n}=\{2x_0,2y_0,-1\}$, 切平面为 $\dfrac{z+z_0}{2}=1+x_0x+y_0y$, 即 $z=2+2x_0x+2y_0y-z_0$.

再求体积:

令 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$, 则

$$V=\iint\limits_D[1+x^2+y^2-(2+2x_0x+2y_0y-z_0)]d\sigma$$

$$=(z_0-1)\pi+\iint\limits_D(x^2+y^2-2x_0x)d\sigma$$

$$=(z_0-1)\pi+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(\rho^2-2x_0\rho\cos\theta)\rho d\rho$$

$$=(z_0-1)\pi+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4-\frac{16}{3}x_0\right)\cos^4\theta d\theta$$

$$=(z_0-1)\pi+\left(4-\frac{16}{3}x_0\right)\cdot\frac{3}{8}\pi$$

$$=\pi\left(x_0^2+y_0^2-2x_0+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\pi\left[(x_0-1)^2+y_0^2+\frac{1}{2}\right].$$

因此,当 $x_0=1,y_0=0$ 时,所求体积最小.这时,切点为 $(1,0,2)$, 法向量为 $\vec{n}=\{2,0,-1\}$. 于是切平面为 $2x-z=0$.