from 20241280汤英琦
该文档使用markdown编写

背景

在计算机科学与技术领域，**概率论与数理统计**在系统可靠性分析和模型评估中至关重要。例如，在评估硬件或软件系统的**寿命**时，**指数分布**（Exponential Distribution）常被用来建模系统无故障运行的时间（Time To Failure）。指数分布的概率密度函数（PDF）为 $f(t;\lambda)=\lambda e^{-\lambda t}$，其中 λ 是**故障率**（rate parameter）。

问题

某批次计算机服务器的无故障运行时间 T（单位：年）被认为服从指数分布，其唯一的参数是故障率 λ。

为了估计这批服务器的故障率 λ，工程师随机监测了 $n=5$ 台服务器，记录到的无故障运行时间 T_i（单位：年）数据如下：

$$T_1=2.0, T_2=3.5, T_3=1.5, T_4=2.5, T_5=3.0$$

请利用**矩估计法**（Method of Moments, MM），根据样本均值等于总体期望的原理，求出该服务器批次故障率 λ 的**矩估计值** $\hat{\lambda}$。

解决

1.建立估计方程

对于服从指数分布 $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 的随机变量，其总体期望为：

$$E[T]=\frac{1}{\lambda}$$

样本均值 $\overline{T}$ 的计算公式为：

$$\overline{T}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i$$

因此，矩估计方程为：

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \overline{T}$$

解得 λ 的矩估计值 $\hat{\lambda}$：

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{T}}$$

2.计算样本均值 $\overline{T}$

首先计算样本数据的总和：

$$\sum_{i=1}^{5} T_i = 2.0 + 3.5 + 1.5 + 2.5 + 3.0 = 12.5$$

计算样本均值 $\overline{T}$：

$$\overline{T} = \frac{12.5}{5} = 2.5 \text{ 年}$$

3.计算 λ 的矩估计值 $\hat{\lambda}$

将 $\overline{T}$ 代入 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{T}}$：

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

结论： 该批次服务器的故障率 λ 的矩估计值 $\hat{\lambda}$ 为 $\mathbf{0.4}$ 次/年。

参考文献

[1] 王二威. "软件可靠性模型研究综述." 软件工程 19.2 (2016): 1-2.