

2019-2020 电子信息第 1 学期 A 试题答案

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{ax+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = b$, 其中 a, b 是常数, 则 ()
(A) $a=1, b=1$; (B) $a=-1, b=1$; (C) $a=1, b=-1$; (D) $a=-1, b=-1$.
2. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 则 $x=0$ 是函数 $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 的 ()
(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 连续点; (D) 第二类间断点.
3. 函数 $f(x) = \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有 ()
(A) 1 条铅直渐近线, 1 条水平渐近线; (B) 1 条铅直渐近线, 2 条水平渐近线;
(C) 2 条铅直渐近线, 1 条水平渐近线; (D) 2 条铅直渐近线, 2 条水平渐近线.
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x - x, & x \geq 1 \\ x^2 - 2x, & x < 1 \end{cases}$, 则 ()
(A) $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点; (B) $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点;
(C) $(1, f(1))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点; (D) 不能判断 $f(1)$ 是否为 $f(x)$ 的极值.
5. 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} dx =$ ()
(A) $\ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; (B) $\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; (C) $2 \ln(\sqrt{2}+1)$; (D) $\ln(\sqrt{2}+1)$.
6. 当 $x \rightarrow 0$ 时下列无穷小中阶数最高的是 ()
(A) $(1+x)^{x^2} - 1$; (B) $e^{x^5-2x} - 1$; (C) $\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt$; (D) $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$.

答: 1. B; 2. A; 3. D; 4. C; 5. A; 6. C.

解: 1. $a=1, b = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -1$;

2. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点;

3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$, $x=1, x=2$ 为 2 条铅直渐近线;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $y=1, y=-1$ 为 2 条水平渐近线

4. $x > 1$ 时 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$x < 1$ 时 $f'(x) = 2x - 2 < 0$, $f''(x) = 2 > 0$, $(1, f(1))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点;

5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} e^{\frac{x}{2}} dx = 2 \ln(e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{1+e^x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$;

6. $(1+x)^{x^2} - 1 = e^{x^2 \ln(1+x)} - 1 \sim x^2 \ln(1+x) \sim x^3$.

$e^{x^5-2x} - 1 \sim x^5 - 2x \sim -2x$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^{x^4} - 1)}{6x^5} = \frac{1}{3}$, $\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt \sim \frac{1}{3} x^6$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}} - (1+3x)^{-\frac{2}{3}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1+2x)^{-\frac{3}{2}} + 2(1+3x)^{-\frac{5}{3}}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} \sim \frac{1}{2}x^2$$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}) =$ _____

2. 定积分 $\int_{-1}^3 \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx =$ _____

3. 椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t (a > b > 0)$ 在 $t = \pi$ 处的曲率为 _____

4. 设 $f(x) = x^3 \sin 3x$, 则 $f^{(2020)}(0) =$ _____

5. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x f(x-u) 5^u du = x^2$, 则 $f(x) =$ _____

6. 定积分 $\int_{-1}^1 [(e^x - e^{-x}) \cos x + x^2] dx =$ _____

答: 1. $e-1$; 2. $2 \ln 3$; 3. $\frac{a}{b^2}$; 4. $2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 3^{2017}$; 5. $2x - x^2 \ln 5$; 6. $\frac{2}{3}$.

解: 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}) = \int_0^1 e^x dx = e-1$;

2. $\int_{-1}^3 \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx = \int_{-1}^3 (1 - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}) dx = 4 - \int_{-1}^3 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$

令 $1+\sqrt{x+1} = t$, 则 $\int_{-1}^3 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx = \int_1^3 \frac{2t-2}{t} dt = 4 - 2 \ln 3$;

3. $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos t}{a \sin t}, y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$, 曲率

$$K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{\frac{b}{a^2 \sin^3 t}}{\sqrt{(1+\frac{b^2 \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t})^3}} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}};$$

$t = \pi$ 处的曲率为 $K = \frac{a}{b^2}$

4. 解法 1 $f^{(2020)}(x) = (\sin 3x \cdot x^3)^{(2020)}$

$$= (\sin 3x)^{(2020)} x^3 + 2020 (\sin 3x)^{(2019)} \cdot (x^3)' + \frac{2020 \cdot 2019}{2!} (\sin 3x)^{(2018)} \cdot (x^3)''$$

$$+ \frac{2020 \cdot 2019 \cdot 2018}{3!} (\sin 3x)^{(2017)} \cdot (x^3)'''$$

$$f^{(2020)}(0) = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 (\sin 3x)^{(2017)}|_{x=0} = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 3^{2017} \sin(\frac{2017\pi}{2})$$

$$= 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 3^{2017}$$

解法 2 $\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

$$\sin 3x = 3x - \frac{3^3}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$f(x) = x^3 \sin 3x = 3x^4 - \frac{3^3}{3!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+4} + o(x^{2n+1});$$

$$\frac{f^{(2n+4)}(0)}{(2n+4)!} = \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad f^{(2n+4)}(0) = (-1)^n (2n+4)(2n+3)(2n+2)3^{2n+1}$$

$$n=1008 \text{ 时 } f^{(2020)}(0) = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 3^{2017}$$

5. 解 令 $t = x - u$ 得到 $\int_0^x f(t)5^{x-t} dt = x^2$, 即 $\int_0^x f(t)5^{-t} dt = x^2 5^{-x}$, 两边求导数

$$f(x)5^{-x} = 2x5^{-x} - x^2 5^{-x} \ln 5, \quad f(x) = 2x - x^2 \ln 5;$$

$$6. \int_{-1}^1 [(e^x - e^{-x}) \cos x + x^2] dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

三、计算题 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}}$

2. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$ 确定, 且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$ 且可导函数 $\varphi(u) > 0$, 求

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$$

3. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x - x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\sin(\frac{\pi}{4} - x) \tan 2x]$, 求正常数 a 的值

4. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{2x \arctan x}{(2-x^2)^2} dx$

解: 1. $(\cos x)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}} = \{[1 + [\cos x - 1]]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\}^{\frac{\cos x - 1}{e^{x^2}-1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2};$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{[1 + [\cos x - 1]]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\}^{\frac{\cos x - 1}{e^{x^2}-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

2. $x = 0$ 代入方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$ 得到 $y = 0$;

方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$ 两边对 x 求导, 得到 $\cos x - \varphi(y)y' + \varphi(x) = 0$

$x = 0, y = 0$ 代入 $\cos x - \varphi(y)y' + \varphi(x) = 0$, 得到 $y' = 2$

$\cos x - \varphi(y)y' + \varphi(x) = 0$ 两边对 x 求导, 得到 $-\sin x - \varphi'(y)y'^2 - \varphi(y)y'' + \varphi'(x) = 0$

$x = 0, y = 0, y' = 2$, 得到 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = -3$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x - x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(\sec^2 x - 1)\sqrt{a+x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\sin(\frac{\pi}{4} - x) \tan 2x] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos(\frac{\pi}{4} - x)}{-2 \sin 2x} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a = 4;$$

$$4. \int_0^1 \frac{2x \arctan x}{(2-x^2)^2} dx = \int_0^1 \arctan x d\left(\frac{1}{2-x^2}\right) = \frac{\arctan x}{2-x^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x^2-2)(x^2+1)} dx;$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-1)$$

四、解答题（每小题 8 分，本题共 16 分）

1. 设 $f(x)$ 是以 4 为周期的可导函数， $f(1) = \frac{1}{4}$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-4x) - f(1+2x)}{x} = 12$ ，求 $y = f(x)$ 在 $(5, f(5))$ 处的法线方程。

2. 设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ ($1 \leq x \leq e$)，(1) 求曲线 L 的弧长

(2) 设 D 是由曲线 L ，直线 $x=1$ ， $x=e$ 及 x 轴所围成的平面图形，求 D 的面积

解：1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = f'(1)$ ，

$$12 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-4x) - f(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1-4x) - f(1)}{x} - \frac{f(1+2x) - f(1)}{x} \right] = -6f'(1)$$

$$f'(1) = -2$$

在 $(5, f(5))$ 处的法线方程为 $y - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(x - 5)$

$$2. (1) \text{ 曲线 } L \text{ 的弧长 } s = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$(2) \text{ 面积 } s = \int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x \ln x + \frac{1}{2}x\right]_1^e = \frac{1}{12}e^3 - \frac{7}{12}$$

五、证明题（每小题 8 分，本题共 16 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续，在 $(0, 3)$ 内可导，且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$ ， $f(3) = 1$ ，证明存在 $\xi \in (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可微， $\forall x \in [a, b]$ ， $f'(x) > 0$ ， $f''(x) > 0$ ，证明

$$\int_a^b f(x) dx < \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a))$$

证明：1. $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值为 M ，最小值为 m

$$\forall x \in [0, 2], m \leq f(x) \leq M, m \leq f(0) \leq M, m \leq f(1) \leq M, m \leq f(2) \leq M$$

$$m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M, \text{ 根据介值定理, 存在 } c \in [0, 2], \text{ 使得 } f(c) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1.$$

$f(x)$ 在 $[c, 3]$ 上连续，在 $(c, 3)$ 内可导，且 $f(c) = f(3)$ ，根据罗尔定理存在 $\xi \in (c, 3) \subset (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

2. 设 $\varphi(x) = \frac{x-a}{2}(f(x) + f(a)) - \int_a^x f(t) dt$ ，则

$$\varphi'(x) = \frac{f(a) - f(x)}{2} + \frac{x-a}{2} f'(x), \quad \varphi''(x) = \frac{x-a}{2} f''(x)$$

$$\forall x \in (a, b], f'(x) > 0, f''(x) > 0, \varphi''(x) > 0, \varphi'(x) > \varphi'(a) = 0, \varphi(x) > \varphi(a) = 0$$

$$\varphi(b) > 0, \text{ 即 } \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \int_a^b f(t) dt > 0, \int_a^b f(x) dx < \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a))$$

六、应用题（本题 6 分）

设曲线 $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$ 与 $y = 1 - x^2$ 交于点 A ，过坐标原点和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成

平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周的体积为最大？

解： $A(\frac{1}{\sqrt{a+1}}, \frac{a}{a+1})$ ，绕 x 轴旋转一周的体积

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{a+1} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{a+1}} - \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} (ax^2)^2 dx = \frac{2\pi}{15} \frac{a^2}{(a+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$V' = \frac{2\pi a}{15} \frac{(2 - \frac{1}{2}a)}{(a+1)^{\frac{7}{2}}}, \quad 0 < a < 4, V' > 0; a > 4, V' < 0, \text{ 当 } a = 4 \text{ 时体积为最大.}$$