2018-2019 电子信息第 1 学期 A 试题

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ x\sin\dfrac{1}{x} & x<0\end{cases}$，那么 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在的原因是（　　）

（A） $f(0)$ 无定义；（B） $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)$ 不存在；（C） $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$ 不存在；

（D） $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$ 都存在但不相等。

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为（　　）

（A）1；（B）2；（C）3；（D）无穷多个。

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　）

（A） $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)]$ 存在。（B） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

（C） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a+h)}{h}$ 存在。（D） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-2h)}{h}$ 存在。

4. 设 ξ 为 $f(x)=\arctan x$ 在 $[0,b]$ 上应用拉格朗日中值定理的“中值”，则 $\lim\limits_{b\to 0}\dfrac{\xi^2}{b^2}$（　　）

（A）1；（B） $\dfrac{1}{2}$；（C） $\dfrac{1}{3}$；（D） 2。

5. 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=$（　　）

（A） $F(\sin x)+C$；（B） $-F(\sin x)+C$；（C） $xF(\sin x)+C$；（D） $F(\sin x)\sin x+C$。

6. 下列四个广义积分中收敛的个数是（　　）

$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x;\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,\mathrm{d}x;\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x;\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

（A）1；（B）2；（C）3；（D）0。

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+...+\dfrac{1}{2n})=$ ________

2. 当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $\sin 2x-2\sin x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$ ________

3. 设曲线方程为 $y=x^2+\sin x$，该曲线在点 $(0,0)$ 处的法线方程为 ________

4. 曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率为 ________

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\ln x}{x}$，则 $\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=$ ________

6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)\,\mathrm{d}x=$ ________

三、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1.计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\tan\dfrac{1}{x})^{x^2}$

2.讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3x}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导性

3.设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值

4.计算不定积分 $\int(\ln x)^2\,\mathrm{d}\,x$

四、解答题（每小题 8 分，本题共 16 分）

1.设 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可导且 $f'(x)<0$，令 $F(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}\dfrac{f(u)}{u^2}\mathrm{d}\,u-x\int_1^{\frac{1}{x}}f(u)\,\mathrm{d}\,u$

（1）求 $F''(x),(x>0)$；

（2）讨论曲线 $y=F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内内的凹凸性，并其拐点坐标

2.求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l，使该曲线与切线 l 及直线 $x=0,x=2$ 所围成的平面图形面积最小

五、证明题（每小题 8 分，本题共 16 分）

1.设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，试证

（1）$\forall x\in[-1,1],x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得

$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

2.设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，证明 $\int_0^{2a}f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^a[f(x)+f(2a-x)]\,\mathrm{d}\,x$，并由此计算

$\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x$

六、应用题 （本题 **8** 分）某部通讯连因执行任务需要在野外搭建大帐篷，搭建大帐篷需要用气锤将桩打进土层，气锤每次打击都将克服土层对桩的阻力而做功，设克服土层对桩的阻力大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数 $k>0$），气锤第一次击打，将桩打进地下 a 米，根据设计方案，要求每次打击时所做的功相等，气锤打击 **3** 次后，可将桩打进地下多深.

2018-2019 电子信息第 1 学期 A 试题答案

一、答：1.C；2.B；3. D；4.C；5.A；6.A.

解 **1.** 定理 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$ 都存在且相等。

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$ 至少有一个不存在，或者 $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$ 都存在但不相等

（B）$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 存在，（C）$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\sin\dfrac{1}{x}$ 振荡，不存在.

2. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\sin\pi x}$ 的间断点就是分母 $\sin\pi x$ 的零点 $x=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots$

$x\to 0$ 时，$\sin\pi x\sim\pi x$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\pi x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{\pi}=-\dfrac{1}{\pi}$（可以用洛必达法则）

$x\to 1$ 时，$\sin\pi x=\sin\pi(1-x)\sim\pi(1-x)$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\pi(1-x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{\pi}=-\dfrac{1}{\pi}$（可以用洛必达法则）

$x=0,1$ 是可去间断点。其余的（$x=-1,\pm2,\pm3,...$）都是无穷间断点

3.（A）错，例如 $f(x)=|x-a|=\begin{cases}x-a & x\ge a\\ a-x & x<a\end{cases}$ 在点 $x=a$ 处不可导，$f(a)=0$

$h>0$ 时 $f(a+\dfrac{1}{h})=|\dfrac{1}{h}|=\dfrac{1}{h}$，但是 $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)]=\lim\limits_{h\to+\infty}h\cdot\dfrac{1}{h}=1$ 存在.

（B）错，

例如狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$，即 x 为有理数时 $D(x)=1$；x 为无理数时 $D(x)=0$

$D(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不连续，不可导，特别 $D(x)$ 在点 $x=2$ 处不可导

h 为有理数时 $D(2+2h)-D(2+h)=1-1=0$

h 为无理数时 $D(2+2h)-D(2+h)=0-0=0$

h 为任何实数 $D(2+2h)-D(2+h)=0$. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{D(2+2h)-D(2+h)}{h}=0$ 存在

（C）和（B）一样的例子

（D）正确. 若 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-2h)}{h}=A$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{-h}=A$

$f'(a)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$（$t=-2h$）令

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-h}=\frac{1}{2}A$$

4. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$\arctan b-\arctan0=\dfrac{b}{1+\xi^2}$，$\xi^2=\dfrac{b-\arctan b}{\arctan b}$

$\dfrac{\xi^2}{b^2}=\dfrac{b-\arctan b}{b^2\arctan b}$，$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$b\to0$ 时 $\arctan b\sim b$，$b-\arctan b\sim\dfrac{1}{3}b^3$，$\lim\limits_{b\to0}\dfrac{\xi^2}{b^2}=\dfrac{1}{3}$

5. 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x=F(\sin x)+C$

6. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}\Big|_{+\infty}^{0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}$ 发散

$\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x+1}{e^x}\Big|_{+\infty}^{0}=1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^x}=1$ 收敛

$\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x\Big|_{+\infty}^{0}=\lim\limits_{x\to0}\cos x-\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 发散

$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_0^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\lim\limits_{x\to0}\ln x$ 发散

二、答：1. $\ln 2$；2.；3. $x+y=0$；4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$；5. $\frac{1-2\ln x}{x}+C$；6. $\frac{\pi^2}{4}$.

解 **1.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n})$

$$=0+\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}\,x=\ln 2$$

2. $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$，

$\sin 2x=2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$，$2\sin x=2x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\sin 2x-2\sin x=-x^3+o(x^3)\sim -x^3$，$k=3$

3. $y'=2x+\cos x$，在$(0,0)$处的切线斜率为 1，法线斜率为-1，法线方程为$y=-x$

4. $y=x^{-1},y'=-x^{-2},y''=2x^{-3}$，$x=1$时$y'=-1,y''=2$

曲率$K=\frac{|y''|}{(1+y')^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.解$\int f(x)\mathrm{d}\,x=\frac{\ln x}{x}+C$，$f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$$\int xf'(x)\mathrm{d}\,x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}\,x=x\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{\ln x}{x}+C=\frac{1-2\ln x}{x}+C$$

6.根据奇偶性$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)\mathrm{d}\,x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\,x=x^2|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$

三、解 **1.**属于1^∞型极限，令$x=\frac{1}{t}$,得

$$\lim_{x\to+\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}=\lim_{t\to0^+}(\frac{\tan t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to0^+}(1+\frac{\tan t-t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to0^+}[(1+\frac{\tan t-t}{t})^{\frac{t}{\tan t-t}}]^{\frac{\tan t-t}{t^3}}$$

其中$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\tan t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sec^2 t-1}{3t^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\tan^2 t}{3t^2}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}=e^{\frac{1}{3}}$

2. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3x}}=\begin{cases}1 & |x|<1\\ |x|^3 & |x|\ge 1\end{cases}=\begin{cases}-x^3 & x<-1\\ 1 & -1\le x\le 1\\ x^3 & x>1\end{cases}$

在$(-\infty,-1)$内$f(x)=-x^3$可导，$f'(x)=-3x^2$

在$(1,+\infty)$内$f(x)=x^3$可导，$f'(x)=3x^2$

在$(-1,1)$内$f(x)=1$可导，$f'(x)=0$，在$x=\pm1$处$f(x)$不可导

3. $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=0$得到$t=1,x=\frac{5}{3},y=-\frac{1}{3}$，或$t=-1,x=-1,y=1$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(\frac{t^2-1}{t^2+1})'}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}$$

当 $t=1$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}>0$， $x=\frac{5}{3}$,极小值 $y=-\frac{1}{3}$

当 $t=-1$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}<0$， $x=-1$,极大值 $y=1$

4. $\int(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,\mathrm{d}x=x(\ln x)^2-2\ln x+2x+C$

四、解 1.（1）$F'(x)=-f(\frac{1}{x})-\int_1^{\frac{1}{x}}f(u)\,\mathrm{d}u+\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})$

$$F''(x)=\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})-f(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})-\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})-\frac{1}{x^3}f'(\frac{1}{x})=\frac{x-1}{x^3}f'(\frac{1}{x})$$

当 $0<x<1$ 时 $F''(x)<0$，曲线 $y=F(x)$ 在 $(0,1)$ 内凸

当 $x>1$ 时 $F''(x)>0$，曲线 $y=F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内凹

$x=1$ 时，$F(1)=0$，拐点坐标为 $(1,0)$

2.曲线 $y=\sqrt{x}$ 上的点 $(t,\sqrt{t})$ 处的切线方程为 $y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$，即 $y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}$

该曲线与切线 l 及直线 $x=0,x=2$ 所围成的平面图形面积为

$$A=\int_0^2(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

当 $t=1$ 时，切线方程为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，面积最小

五、证明 1.（1）$\forall x\in[-1,1],x\neq 0$，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,x]$ 上连续，$(0,x)$ 可导，根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，由于 $f''(x)\neq 0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调增加或者严格单调减少，故在 $(0,x)$ 存在唯一的 ξ，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\xi)$

令 $\frac{\xi-0}{x-0}=\theta(x)$，则 $\xi=\theta(x)x$，且 $0<\theta(x)<1$，在 $(0,1)$ 存在唯一的 $\theta(x)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$

当 $x<0$ 时，有同样的结论.

（2）先证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\frac{1}{2}$

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内具有二阶连续导数，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 内有一阶麦克劳林公式

$\forall x\in(0,1],$，$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，其中 $0<\xi<x$ 之间

根据上面可得 $f'(\theta(x)x)-f'(0)=\frac{1}{2}f''(\xi)x$

$f'(x)$ 在区间 $[0,\theta(x)x]$ 根据拉格朗日中值定理，存在 $0<\eta<\theta(x)x$

$f'(\theta(x)x)-f'(0)=f''(\eta)\theta(x)x$

于是 $f''(\eta)\theta(x)x=\frac{1}{2}f''(\xi)x$，即 $\theta(x)=\frac{f''(\xi)}{2f''(\eta)}$，

当 $x\to 0$ 时 $\xi\to 0,\eta\to 0$，$f''(x)$ 连续，且 $f''(x)\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f''(\xi)}{2f''(\eta)}=\dfrac{f''(0)}{2f''(0)}=\dfrac{1}{2}$，同样可证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

2. $\int_0^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{a}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x$

令 $x=2a-t$，$\int_a^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^{0}f(2a-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{a}f(2a-x)\,\mathrm{d}x$

故 $\int_0^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{a}[f(x)+f(2a-x)]\,\mathrm{d}x$

令 $2a=\pi$，则

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}]\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cos x)^2}\,\mathrm{d}\cos x=\pi\arctan\cos x\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi^2}{4}$$

六、解：土层对桩的阻力 $F=kx$，气锤第一次击打，将桩打进地下 a 米，做功为 $\int_0^{a}kx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}a^2$

气锤打击 **3** 次后，将桩打进地下 h 米，做功为 $\int_0^{h}kx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}h^2$

每次打击时所做的功相等，故 $\dfrac{1}{2}h^2=\dfrac{3}{2}a^2,h=\sqrt{3}a$