2018-2019 线性代数 II 第 2 学期 A 试题答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 六阶行列式$\Delta(a_{ij})$中含$a_{54}a_{41}$的项数是 ________

2. 若$|A_{3\times3}|=-2,|B_{5\times5}|=3$，则对于任意的$5\times3$矩阵$C$有$\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=$________

3. 全体3×3的实对称矩阵组成一集合V，在实数域上按照通常的矩阵乘法和矩阵数乘法可以构成一个线性空间（一般向量空间），则$\dim V=$ ________

4. 设方程组$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\beta$（$\alpha_j$为向量，$j=1,2,3,4$）有通解$(-2,1,0,3)^T+k(1,-1,3,2)^T$，则方程组$\gamma x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\beta$（$\gamma$为向量，$\gamma\neq\alpha_1$）有一个解是________

5. 已知$\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$相似，则$x-y=$ ________

6. 若二次型$f(x,y,z)=x^2+ky^2+4xy+z^2$是正定的，则实数$k$的取值范围是 ________

____

答：1. 24 ；2. 6 ；3. 6 ；4. $(0,-1,6,7)^T$ ；5. 13 ；6. $k>4$.

解 1. 六阶行列式总共的项数是$6!=720$，六阶行列式中含a_{54}的项数是$5!=120$；六阶行列式中含$a_{54}a_{41}$的项数是$\underline{4!=24}$

2. $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{3\times5}|A||B|\ =6$；

3. $\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$

$$=a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$线性无关，构成$V$的一个基，$\dim V\ \underline{=6}$

4. 根据通解结构，得到$(-2,1,0,3)^T$是$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\beta$的解，

且$(1,-1,3,2)^T$是$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=0$的解 ；

因此$\begin{cases} -2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_4=\beta & (1) \\ \alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4=0 & (2) \end{cases}$

$(1)+2(2)$得到$-\alpha_2+6\alpha_3+7\alpha_4=\beta$，

$(0,-1,6,7)^T$是$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\beta$的解

5. $\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$相似，则$x-5=1-2,x=4$且$-5x-2y=-2,y=-9,x-y\ \underline{=13}$；

6. 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，各阶顺序主子式都大于零，即

$1>0,\begin{vmatrix}1&2\\2&k\end{vmatrix}=k-4>0,|A|=k-4>0,k>4$.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1.若$\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}&&&\lambda_1\\&&\lambda_2&\\&\iddots&&\\\lambda_n&&&\end{vmatrix}$，则阶数$n$不可能为（　　）

（A） 7;（B） 4^k-1;（C）4^k ;（D）17 。

2.将矩阵$A_{3\times3}$的第二行加到第一行得B，再将B的第一列-1倍加到第二列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$C=$（　　）

（A）$P^{-1}AP$;（B）PAP^{-1};（C）P^TAP;（D）PAP^T 。

3.设向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$的秩为 3，向量组（II）由向量组（I）的一部分向量构成，则下列错误的是（　　）

（A）若向量组（II）的个数大于 3，则（II）一定线性相关;

（B）向量组（I）与（II）等价，则（II）是（I）的一个最大线性无关组;

（C）向量组（II）有 3 个向量且线性无关，则（II）是（I）的一个最大线性无关组;

（D）向量组（I）与（II）等价且（II）线性无关，则（II）是（I）的一个最大线性无关组.

4.若矩阵$A_{n\times n},B_{n\times1}$满足$R\begin{pmatrix}A&B\\B^T&0\end{pmatrix}=R(A)$，则方程组（　　）

（A）$Ax=B$必有无穷多个解;（B）$Ax=B$必有唯一解;

（C）$\begin{pmatrix}A&B\\B^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$仅有零解;（D）$\begin{pmatrix}A&B\\B^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$有非零解。

5.设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则下列矩阵与$A$合同的是（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$;（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$;（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$;（D）$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$。

6. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Py$下标准形为$f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，若$Q=(\alpha_1,-\alpha_3,\alpha_2)$，则二次型$f$在正交变换$x=Qy$标准形为（　　）

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$;（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$;（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$;（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$。

答：1.A; 2.B; 3.B ; 4.D ; 5.B ; 6.A .

解 1. 等式成立的条件为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=1$，即$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数.当$n=4^k+1$，$4^k$和$17$时$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数

当 $n=7$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=-1$，阶数 n 不可能为7。选 A

2. 矩阵 $A_{3\times3}$ 的第二行加到第一行得 B，则 $PA=B$. $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

再将 B 的第一列 -1 倍加到第二列得 C，则 $BP^{-1}=C$；

$C=BP^{-1}=PAP^{-1}$，选 B

3. 向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 的秩为 3，则（I）的一个最大线性无关组只有三个线性无关的向量. 只有 B 的说法错误.

4. $Ax=B$ 有无穷多个解 $\Leftrightarrow R(A \quad B)=R(A)<n$

$Ax=B$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A \quad B)=R(A)=n$

由 $R\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & 0\end{pmatrix}=R(A)$ 得到 $R(A \quad B)=R(A)$，

可能有 $R(A \quad B)=R(A)<n$，也可能有 $R(A \quad B)=R(A)=n$；不能选 A 和 B

由 $R\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & 0\end{pmatrix}=R(A)\le n$ 得到 $R\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & 0\end{pmatrix}<2n$，$\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$ 有非零解，选 D

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=3$，正惯性指数（标准形中系数为正的平方项的个数）是 2；负惯性指数（标准形中系数为负的平方项的个数）是 1. 只有 B 满足.

6. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 对应的特征值分别为 $2,1,-1$，

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$ 对应的特征值分别为 $2,-1,1$

$\alpha_1,-\alpha_3,\alpha_2$ 对应的特征值分别也为 $2,-1,1$，选 A

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1.若 3 阶矩阵 A 满足 $|A|=2$，则 $|A^*+A^{-1}|=3/2$。（　　）

2.n 阶矩阵 A 有 n 个非零特征值，则 A 可通过初等行变换变为单位阵.（　　）

3.平面上所有与某个非零向量不平行的向量构成一集合 V，V 在实数域上按照通常的向量乘法和向量数乘法可以构成一个向量空间。（　　）

4.向量组 A 能由向量组 B 线性表示,向量组 B 能由向量组 C 线性表示,若向量组 A 的个数大于向量组 C 的个数，则向量组 A 线性相关。（　　）

5.任意的二阶实矩阵 A，若 $|A|<0$，则 A 一定相似于某对角阵。（　）

答：1. 错；2 对；3.错；4 对；5 对

解 1. $|A|=2$，A 可逆，$AA^*=|A|E=2E$，$A^*=2A^{-1}$，

$|A^*+A^{-1}|=|3A^{-1}|=27|A^{-1}|=27/2$

2. n 阶矩阵 A 有 n 个非零特征值，则 $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot...\cdot\lambda_n\neq0$，$A$ 可逆，可通过初等行变换变为单位阵；

3. 加法运算不封闭. 与非零向量 α 不平行的两个向量的和可能平行 α；

4. 根据条件向量组 A 能由向量组 C 线性表示，向量组 A 的个数大于向量组 C 的个数，（课本 73 页推论 1）则向量组 A 线性相关；

5. 二阶实矩阵 A 的特征值为 λ_1,λ_2，若 $|A|=\lambda_1\lambda_2<0$，则 $\lambda_1\neq\lambda_2$，A 一定相似于某对角阵

四、计算题（一）（每小题 8 分，本题共 16 分）

1. 计算行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -x & -1 \\ 3 & 1 & x & 7 \\ -1 & 2 & x^2 & -2 \\ 1 & 0 & x+1 & 5 \end{vmatrix}$,求 $f(2)-f(1)$

2. 设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$，且 $AB=B+3A$，求矩阵 B

1.解 $f(2)-f(1)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-2r]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-5(15-16)=5$$

2.解 $|A^*|=8=|A|^3, |A|=2$， A 可逆，

用 A^* 左乘 $AB=B+3A$， $A^*AB=A^*B+3A^*A$，根据 $A^*A=|A|E=2E$

得到 $2B=A^*B+6E$，$(2E-A^*)B=6E$.

$$2E-A^*=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$B=6(2E-A^*)^{-1}=6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

五、计算题（二）（每小题 12 分，本题共 24 分）

1.设 $A=\begin{pmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} \lambda-1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$，讨论 λ 为何值时，方程组 $Ax=b$ 无解、唯一解、有无穷多个解？有无穷多个解时，求其通解.

解 $|A|=\begin{vmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$

当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\pm 1$ 时，$R(A)=R(\bar{A})=3$，方程组有唯一解

当$\lambda=0$时，$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\-2&-1&-2&0\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&-1&0&-2\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&-1&0&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$R(A)<R(\bar{A})$，方程组无解

当$\lambda=1$时，$\bar{A}=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\-1&0&-1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\-1&0&-1&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，$R(A)<R(\bar{A})$，方程组无解

当$\lambda=1$时，$\bar{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0&-2\\-3&-2&-3&-1\\-3&-2&-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&-5&-3&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0.6&1\\0&1&0.6&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=R(\bar{A})<3$有无穷多个解

$\begin{cases}x_1+0.6x_3=1\\x_2+0.6x_3=-1\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=1-0.6x_3\\x_2=-1-0.6x_3\\x_3=x_3\end{cases}$，通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-0.6\\-0.6\\1\end{pmatrix}$，$k$为任意常数

2，设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$，其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为1，（1）求$a$的值；（2）求正交变换$x=Py$，将二次型化为标准形

解 $A=\begin{pmatrix}a&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$

（1）二次型的矩阵A的特征值之和为1，$a=1$.

（2）$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&0\\2&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+3)$

特征值$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$

特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$必须有两个线性无关的特征向量

$A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\2&0&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，特征向量为$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

特征值$\lambda_3=-3$，特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}&0&1/\sqrt{5}\\0&1&0\\1/\sqrt{5}&0&-2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

标准形为$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$

六、证明题 （每小题7分，本题共14分）

1.正交向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$一定线性无关

2. 设A为n阶非零矩阵，且$A^T=A^*$.（1）猜想出A^*的秩；（2）证明你的猜想

证明 1.课本78页定理3.4.1.设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$是正交向量组

则$\alpha_i\neq\vec{0}$，$[\alpha_i,\alpha_i]=\alpha_i^T\alpha_i=\|\alpha_i\|^2>0$，且当$i\neq j$时，$[\alpha_i,\alpha_j]=\alpha_i^T\alpha_j=0$

设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = \vec{0}$ （*）

用$\alpha_1{}^T$左乘（*）得到

$x_1\alpha_1{}^T\alpha_1 + x_2\alpha_1{}^T\alpha_2 + ... + x_n\alpha_1{}^T\alpha_n = 0$，即$x_1\|\alpha_1\|^2 + x_2 \cdot 0 + ... + x_n \cdot 0 = 0$，

$x_1\|\alpha_1\|^2 = 0$，$\|\alpha_1\|^2 > 0$，$x_1 = 0$，代入（*）得到

$$x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = \vec{0} \text{ （**）}$$

用$\alpha_2{}^T$左乘（**）得到$x_2 = 0$，如此下去得$x_n = 0$.故向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$线性无关

证明 2.课本 54 页（11）题（1）$R(A^*) = n$

（2）$AA^T = AA^* = |A|E$，

即$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$

故$|A| = a_{11}^2 + a_{12}^2 + ... + a_{1n}^2$， 且$|A| = a_{21}^2 + a_{22}^2 + ... + a_{2n}^2$， $..., |A| = a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + ... + a_{nn}^2$，

$A \neq O$，A至少有一个元素a_{ij}不等于零.，故$|A| \neq 0$

$R(A) = n$，$R(A^*) = n$