2016-2017 线性代数 II 第 2 学期 A 试题答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 在四阶行列式$\Delta(a_{ij})$中含有$a_{32}a_{14}a_{21}$的项是 ________

2. p个方程q个未知数的非齐次线性方程组$Bx=\alpha$解唯一的充分必要条件是 ________

3. 设A为n阶矩阵且$|A|=a\neq 0$，A^*为A的伴随矩阵，若A有一个特征值为λ，则$(A^*)^2+E$必有一个特征值为 ________

4. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$经过正交变换$x=Py$后化为标准型为$f=y_1^2+by_2^2$，其中$b$为未知实数，则$a=$ ________

5. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{2017}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=$________

6. 向量组$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(2,3,4),\alpha_3=(3,5,7),\alpha_4=(4,7,11)$的一个最大线性无关组是 ________

一、答：1. $-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ ；2. $R(B)=R(B\ \beta)=q$ ；3. $\dfrac{a^2}{\lambda^2}+1$ ；4. $\dfrac{4}{3}$；5. $\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$；6. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

一、解 **1.** 四阶行列式$\Delta(a_{ij})$中共 24 项，每一项是不同行不同列的四个数的乘积，含有$a_{32}a_{14}a_{21}$的项还差一个数a_{43}，$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，4123 的逆序数是 3，前面乘以$(-1)^3$，得$-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$

3. $A^*=|A|A^{-1}$必有一个特征值为为$\dfrac{a}{\lambda}$，$(A^*)^2+E$必有一个特征值为$\dfrac{a^2}{\lambda^2}+1$

4. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&3\end{pmatrix}$特征根为$0,1,b$，$|A|=2(3a-4)=0,a=\dfrac{4}{3}$

5. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{2017}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$

6. 课本 **75** 页第三行定理 **3.3.2**（**1**）若矩阵A经过有限次初等行变换变为B，则A的行向量组与B的列向量组等价，且A的任意k个列向量与B对应的k个列向量有相同的线性相关性。对$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$进行初等行变换，

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&5&7\\1&4&7&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&2&4&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

最大线性无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设A,B均为 3 阶矩阵，下列说法正确的是（　　）

（A）$\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=|B||A|$；（B）$|A|=a^3$，则$|A+A|=2a^3$ ；（C）$|A|=0$的充分条件是A的各行元素之和为零；（D）$|B|=0$的必要条件是B中有两行元素成比例。

2. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\a&b&c\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\\a+2&b+4&c+6\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，则必有（　　）

（A）$PQA=B$；（B）$QPA=B$；（C）$APQ=B$；（D）$AQP=B$。

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是四维向量空间$R^4$的一组基，则$R^4$的另一组基是（　　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ ；（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$；

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$；（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$。

4.若向量$\xi_1=(1,a,2)^T,\xi_2=(b,1,-1)^T,(a\neq-2,a,b\in R)$都是线性方程组$Ax=0$的解，则系数矩阵$A$可能为（　　）

（A）$\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}0&-1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$；（D）$(-2,1,1)$。

5. 设A为n阶矩阵，下列说法正确的是（　　）

（A）A的特征向量的线性组合仍是A的特征向量；（B）A与A^T的特征值完全相同；（C）A有一个特征值为1，则A^{-1}也有一个特征值为1；（D）A的对应特征值1的特征向量是方程组$(A-E)x=0$的全部解向量。

6. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$A$与$B$（　　）

（A）合同但不相似；（B）相似但不合同；（C）合同且相似；（D）不合同且不相似。

二、答：1.C；2.A；3.C ；4.D ；5.B ；6.A .

二、解 **1.**正确的是 **C.** $\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^9|B||A|=-|B||A|$.若$|A|=a^3$，则$|A+A|=2^3a^3=8a^3$。

若A的各元素之和为零，则$|A|=0$.因此$|A|=0$的充分条件是A的各元素之和为零；

若$|B|=0$则B中不一定有两行元素成比例. $|B|=0$的必要条件不是B中有两行元素成比例

2. $PQA=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\a&b&c\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\a+2&b+4&c+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\\a+2&b+4&c+6\end{pmatrix}=B$$

3. 课本96页倒数第十三行，(5)只有C线性无关.选C

4. $(\xi_1^T,\xi_2^T)=\begin{pmatrix}1&b\\a&1\\2&-1\end{pmatrix}$，

（A）$\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\a&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2b+1\\a+2&0\\-3&b+2\end{pmatrix}$不可能为零矩阵，不能选A

（B）$\begin{pmatrix}0&-1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\a&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a-2&0\\-2a&4b\\a+2&0\end{pmatrix}$不可能为零矩阵，不能选B

（C）$\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\a&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-b-2\\a+2&0\end{pmatrix}$不可能为零矩阵，不能选C

（D）$(-2,1,1)\begin{pmatrix}1 & b\\ a & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -2b\end{pmatrix}$，有可能为零矩阵，选 D

5. A 与 A^T 的特征值完全相同，正确. 选 **B.** A 的同一个特征值对应的特征向量的线性组合仍是 A 的特征向量，A 的不同特征值对应的特征向量的线性组合不是 A 的特征向量. 可逆 A 有一个特征值为 1，则 A^{-1} 也有一个特征值为 1. A 的对应特征值 1 的特征向量是方程组 $(A-E)x=0$ 的全部非零解向量

6. 设 $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^TAP=B$，合同但不相似

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1.秩为 1 的矩阵一定可以某个列向量与某个行向量的乘积。（　　）

2..若 n 阶矩阵 A 可逆，则 A^2 加上 n 阶单位阵也可逆（　　）

3. 齐次线性方程组 $Ax=0$ 有唯一解，是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解的充分条件。（　　）

4.若 5 阶矩阵 A 经过有限次初等变换变为 B，且 B 的列向量组中第 1,3,5 列线性无关，则 A 的列向量组中第 1,3,5 列也线性无关。（　　）

5.全体 n 阶反对称实矩阵按照矩阵的加法和数乘法在实数域上构成一个一般向量空间。（　）

三、答：1.对；2 对；3.错；4 错；5.对

三、解 **1.**对，秩为 1 的矩阵任何两列和任何两行一定对应成比例.

2. 对，若 n 阶矩阵 A 可逆，则其所有特征值都不等于零，A^2+E 的所有特征值都大于零，$|A^2+E|\neq 0$，A^2+E 可逆

3. 错. 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 有唯一解，则非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 可能无解

4. 错. 若 5 阶矩阵 A 经过有限次初等行变换变为 B，且 B 的列向量组中第 1,3,5 列线性无关，则 A 的列向量组中第 1,3,5 列也线性无关。

5. 对.定义 如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^T=-A$，则称 A 是反对称实矩阵，

若 A,B 都是 n 阶反对称实矩阵，则 $(A+B)^T=-A-B=-(A+B)$，$A+B$ 是反对称实矩阵

$(kA)^T=-kA$，kA 是反对称实矩阵.加法运算，数乘运算封闭。结论正确.

四、计算题（一）（每小题 8 分，本题共 16 分）

1.已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 0 & 5\\ 10 & -2 & 1 & 3\end{vmatrix}$，计算 $A_{11}-2A_{21}-A_{31}+10A_{41}$，其中 A_{ij} 为 A 的第 i 行第 j 列元素的代数余子式.

解 $A_{11}-2A_{21}-A_{31}+10A_{41}$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ -2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 0 & 5\\ 10 & -2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 5 & 8 & 11\\ 0 & 6 & 3 & 10\\ 0 & 3 & 11 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 8 & 11\\ 6 & 3 & 10\\ 3 & 11 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 1\\ 6 & 3 & 10\\ -3 & 8 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 6 & 33 & 16\\ -3 & -7 & -5\end{vmatrix}=53$$

2. 已知 4 维向量空间 R^4 的两组基分别为：

（I）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；（II）$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4,\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4,\alpha_3+2\alpha_4,\alpha_4$

求（**1**）基（I）到基（II）的过渡矩阵 P，（2）P^{-1}，（3）向量 x 在基（I）下的坐标为 $(1,-2,3,-4)^T$，求 x 在基（II）的坐标.

解 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4,\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4,\alpha_3+2\alpha_4,\alpha_4)$

$$AP=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}=B$$

（**1**）基（I）到基（II）的过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$，

（2）$(P\ E)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&2&1&0&-3&0&1&0\\0&3&2&1&-4&0&0&1\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&2&1&2&-3&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

（3）$x=A\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}=BP^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}$，$x$ 在基（II）的坐标为 $P^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\8\\-12\end{pmatrix}$

五、计算题（二）（每小题 12 分，本题共 24 分）

1.已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=m\end{cases}$，讨论参数 m 取何值时，方程组无解、有解？有解时，求其通解.

解 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&-8&7&-1\\1&-1&-6&-1&m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-2&-4&-4&m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&m+2\end{pmatrix}$

当 $m\neq-2$ 时 $R(A)<R(\overline{A})$，方程组无解

当 $m=-2$ 时 $R(A)=R(\overline{A})=2<4$，方程组有无穷多个解，

$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$，$\begin{cases} x_1 = -1 + 4x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 = \quad x_3 \\ x_3 = \qquad x_4 \end{cases}$，通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k_1, k_2$为任意常数

2，已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3$，求正交变换$x = Qy$，把二次型化为标准型，写出标准形并判定二次型的正定性

解$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$，特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$

特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$A + E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

特征值$\lambda_3 = 5$，$A - 5E = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，正交变换$x = Qy$，标准形为$f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$，不是正定二次型

六、证明题 （每小题 7 分，本题共 14 分）

1.证明 ：如果A为正交矩阵，则A^*也是正交矩阵

证明 设A为正交矩阵，则$AA^T = E$，所以$A^{-1} = A^T, |A|^2 = 1$

由$AA^* = |A|E$得到$A^* = |A|A^{-1} = |A|A^T$，$(A^*)^T = |A|A$

$A^*(A^*)^T = |A|^2 A^T A = A^T A = E$ ，A^*也是正交矩阵

2.设A是n阶矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$n$维列向量，其中$\alpha_3$是矩阵$A$的特征值 2 所对应的特征向量，且$A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3$，证明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

证明 设$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ （1）

用A左乘（1），$x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_3A\alpha_3 = 0$

根据条件得到$x_1(2\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(2\alpha_2 + \alpha_3) + 2x_3\alpha_3 = 0$ （2）

$(2) - 2 \times (1)$得到$x_1\alpha_2 + x_2\alpha_3 = 0$ （3）

用A左乘（3）$x_1A\alpha_2 + x_2A\alpha_3 = 0$

即 $x_1(2\alpha_2+\alpha_3)+2x_2\alpha_3=0$ （4）

$(4)-2\times(3)$ 得到 $x_1\alpha_3=0$，$\alpha_3\neq 0$，$x_1=0$

将 $x_1=0$ 代入（3）得到 $x_2=0$，

将 $x_1=0$，$x_2=0$ 代入（1）$x_3=0$。$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.