2019-2020 电子信息第 1 学期 B 试题

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1． $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$ 、 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$ 是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的（　　）

(A) 充分条件；(B) 必要条件 ；(C) 充分必要条件；(D) 没有关系.

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 存在左、右导数，则 $f(x)$ 在 x_0（　　）

(A) 可导；　　(B) 连续；　　(C) 不可导；　　(D) 不连续.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，则

$F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 (a,b) 上 （　　）

(A) 单调增；　　(B) 单调减；　　(C) 有极大值；　　(D) 有极小值。

4. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{2x}，则 $\int xf'(x)dx=$（　　）

(A) $(2x-1)e^{2x}$；　(B) $2xe^{2x}+c$；　(C) $(2x-1)e^{2x}+c$；(D) $2xe^{2x}$

5. 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成图形的面积可表为（　　）

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$ ；　　(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$；

(C) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$；　　(D) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

6. 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$，其中 $t>0,s>0$，

则 I 的值（　　）

(A) 依赖于 s 和 t；　　(B) 依赖于 s,t,x；

(C) 依赖于 t 和 x，不依赖于 s；　　(D) 依赖于 s，不依赖于 t

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $x\to0^+$时 ，$\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$____

2. 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ ______

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的斜渐近线为____

4. 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，则 $\lim\limits_{n\to0}n\left[f\left(\dfrac{n+1}{n}\right)-f\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right]=$ ____

5. $y=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$，则 $dy=$ ________

6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$ ________

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 求 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

2. 求曲线 $\cos(x^2y)+\ln(y-x)=x+1$ 在横坐标 $x=0$ 处切线方程及法线方程.

3. 求 $\int\csc^3 x dx$

4. 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)du\right]dt}{(e^x-1)x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中函数 φ 处处连续，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

2. 讨论：连续的奇函数、偶函数，其原函数的奇偶性如何？

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设 f 是定义在 R 上的函数，且对任何 $x_1,x_2\in R$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

若 $f'(0)=1$，证明对任何 $x\in R$，都有 $f'(x)=f(x)$

2. 设 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\int_a^b g(x)dx\neq 0$, 又 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|+|g(x)|\neq 0$ 成立. 证明 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

六、应用题（6 分）

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leq 2x$ 与 $y\geq x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积

2019-2020 电子信息第 1 学期 B 试题答案

一、答：1. C；2. B；3. A；4. C；5. D；6. D.

解：1. ；

2. ；

3. ；

4. ；

5. ；

6. .

二、答：1. $\underline{\frac{2}{3}}$；2. $\boldsymbol{xf(x^2)}$；3. $\underline{y=x-1}$；4. $\underline{2f'(1)}$；5. $\underline{x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}dx}$；6. $\underline{\pi}$.

解：1. ；

2. ；

3. ；

4. ；

5. ；

6. .

三、解：1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\tan x)-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{12x}=\frac{1}{3}$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}=e^{\frac{1}{3}}$；

2. 解:当$x=0$时，$y=1$.

已知方程两边对x求导:

$$-\sin(x^2y)(2xy+x^2y')+\frac{y'-1}{y-x}=1$$

将$(x,y)=(0,1)$代入上式,解得$y'(0)=2$，于是

切线方程为$y=2x+1$,法线方程为$y=-\frac{1}{2}x+1$；

3. $\boldsymbol{\int\csc^3 xdx=\int\csc x\csc^2 xdx=\int\csc x(-\cot x)'dx=-\csc x\cot x-\int\csc x\cot^2 xdx}$

$\boldsymbol{=-\csc x\cot x-\int\csc x(\csc^2 x-1)dx=-\csc x\cot x-\int\csc^3 xdx+\int\csc xdx}$

$\int\csc^3 xdx=-\frac{1}{2}\csc x\cot x+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+c$；

4. 解　令 $x^2=\sin t$，则 $x=0$ 时，$t=0$；$x=1$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$，

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{32}\text{.；}$$

四、解：1．解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)du\right]dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)\int_0^{x^2}\varphi(u)du}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\int_0^{x^2}\varphi(u)du}{2x}-\frac{\int_0^{x^2}\varphi(u)du}{2x}\right]=-\lim_{x\to 0}\frac{2x\varphi(x^2)}{2}=0=f(0)$$

因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)du\right]dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\int_0^{x^2}\varphi(u)du}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\int_0^{x^2}\varphi(u)du}{x^2}-\frac{\int_0^{x^2}\varphi(u)du}{x^2}\right]=-\frac{1}{3}\varphi(0)$$

因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且

$f'(0)=-\dfrac{1}{3}\varphi(0).$

2．解 连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数；
连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

$f(x)$ 为一连续函数，f 的一切原函数可写作 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+C$

若 f 为奇函数，则

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt+C=\int_0^x -f(-s)\,ds+C=\int_0^x f(s)\,ds+C=F(x)$$

所以 f 的一切原函数 $F(x)$ 为偶函数.

若 f 为偶函数，则

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt+C=\int_0^x -f(-s)\,ds+C=-\int_0^x f(s)\,ds+C$$

当且仅当 $C=0$ 时，$F(x)$ 为奇函数.

五、证：1．证明　在 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 中令 $x_2=0$，可得 $f(0)=1$.

在 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 中令 $x_2=\Delta x$，得 $f(x_1+\Delta x)=f(x_1)\cdot f(\Delta x)$，于是有

$f(x_1+\Delta x)-f(x_1)=f(x_1)\cdot f(\Delta x)-f(x_1)$，

从而有 $\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}=\dfrac{f(x_1)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}$，

所以 $f'(x_1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_1)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}$

$$=f(x_1)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(\Delta x)-f(0)]}{\Delta x}=f(x_1)\cdot f'(0)=f(x_1)；$$

2. 证：因 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 所以 $\int_a^x f(t)dt,\int_a^x g(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导.

令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_a^b g(t)dt-\int_a^x g(t)dt\int_a^b f(t)dt$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=f(\xi)\int_a^b g(t)dt-g(\xi)\int_a^b f(t)dt=0$$

从而 $f(\xi)\int_a^b g(t)dt=g(\xi)\int_a^b f(t)dt$, 且 $\int_a^b g(t)dt\neq 0$, 故

$$f(\xi)=g(\xi)\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

若 $g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=0$, 这与 $|f(\xi)|+|g(\xi)|\neq 0$ 矛盾，所以 $g(\xi)\neq 0$, 由上式即得:

$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.；

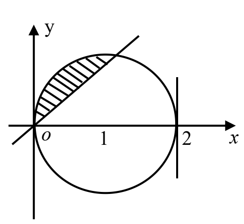
六、应用题 （本题 8 分）

解　A 的图形如下图所示，取 y 为积分变量，它的变化区间为 $[0,1]$，A 的两条边界曲线方程分别为 $x=1-\sqrt{1-y^2}$ 及 $x=y$.

相应于 $[0,1]$ 上任一小区间 $[y,y+dy]$ 的薄片的体积元素为

$$dV=\{\pi\left[2-(1-\sqrt{1-y^2})\right]^2-\pi(2-y)^2\}dy$$

$$=2\pi\left[\sqrt{1-y^2}+(1-y)^2\right]dy.$$



于是所求体积为

$$V=\int_0^1 2\pi\left[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2\right]dy$$

$$= 2\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\arcsin y + \frac{(1-y)^3}{3}\right]_0^1$$