考试教室　　姓名　　学号　　年级　　专业、班　　学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

命题人：　组题人：　审题人：　命题时间：　教务处制

重庆大学《高等数 1》（电子信息类）评分参考

◉A卷　○B卷

2020— 2021 学年　第 1 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10012　考试日期：202101

考试方式：○开卷　◉闭卷　○其他　　考试时间：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$（ B ）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

2. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为（ A ）

A. $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.　　B. $y=x-\dfrac{\pi}{2}$.

C. $y=-x+\dfrac{\pi}{2}$.　　D. $y=-x-\dfrac{\pi}{2}$.

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（ B ）

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

4. 设在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)>0,\ f'(x)<0,\ f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（ C ）

A. $S_1<S_2<S_3$.　　B. $S_3<S_1<S_2$.

C. $S_2<S_1<S_3$.　　D. $S_2<S_3<S_1$.

5. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则（ A ）

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.　　B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.　　D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

6. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数，则下列等式中，正确的是（ D ）

A. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.　　B. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.　　D. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.1

2. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处的切线方程是__________. $y=2x$

3. 曲线 $y=x^2+x\ (x<0)$ 曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是______. $(-1,0)$

4. 若函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1)=$________ 1

5. $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$__________. -4π

6. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\ (-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$，则 L 所围平面图形的面积为____.

$\frac{\pi}{12}$

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t}{x^5}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t}{x^5}&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin^3(1-\cos x)}\sin x}{5x^4}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}x}{5x^4}\\&=\frac{\sqrt{2}}{20}.\end{aligned}$$

2. 求不定积分 $\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\ \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，所以

$$\begin{aligned}\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x&=2\int\frac{t\arcsin t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}\mathrm{d}t\\&=2\int\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=2\int\arcsin t\,\mathrm{d}\arcsin t\\&=\arcsin^2 t+C\\&=\arcsin^2\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

3. 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点及凹凸区间.

解 函数 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$y'=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\ y''=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

令 $y''=0$，得 $x=0$ 及 $x=\pm\sqrt{3}$.

列表讨论如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

由此可知，曲线 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 在区间 $(-\sqrt{3},0)$ 及 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内是凹的，

在区间 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 及 $(0,\sqrt{3})$ 内是凸的.

又 $y(0)=0,\ y(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},\ y(\sqrt{3})=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$，

所以曲线 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点为 $(0,0),\ (\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}),\ (-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$.

4. 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 任给 $A>1$，有

$$\int_1^A\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^A+\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}.$$

其中

$$\begin{aligned}\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}&=\int_1^A\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^A\\&=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{A^2}{1+A^2}.\end{aligned}$$

于是，有

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\arctan A}{A}+\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{A^2}{1+A^2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解　令 $u=2x-t$，则 $t=2x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$.

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=-\int_{2x}^x(2x-u)f(u)\mathrm{d}u=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u,$$

于是

$$2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan x^2,$$

两边对 x 求导得

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u=\frac{x}{1+x^4}+xf(x),$$

令 $x=1$，得 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$.

2. 设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t(x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

解　当 $0<x\le 1$ 时，

$$f(x)=\int_0^x\left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t+\int_x^1\left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^x(t^2-x^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$

当 $x>1$ 时，$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3}$，

所以

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}, & 0<x\le 1\\ x^2-\frac{1}{3}, & x>1\end{cases}$$

而

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2,\quad f'_+(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2$$

故 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x\le 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$

由于 $f'(x)=0$ 求得唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$，又 $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0$，从而 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，并且有 $f''(x)>1$，$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$. 证明：

$$f(x)\ge 2x+\frac{x^2}{2}.$$

【证】　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-2x-\frac{x^2}{2}.$$

由已知条件可知函数 $f(x)$ 连续，从而由

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2\Rightarrow f(0)=0.$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2\Rightarrow f'(0)=2.$$

于是对 $F(x)$ 求一阶、二阶导数，得

$$F'(x)=f'(x)-2-x,$$

$$F''(x)=f''(x)-1.$$

由于 $f''(x)>1\Rightarrow F''(x)>0$，函数 $F(x)$ 为凹函数，并且有

$F'(0)=f'(0)-2=0$， $F(0)=0$，

所以 $x=0$ 是函数 $F(x)$ 的极小值点，也是最小值点，故结论成立.

2. 设 $f''(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续， $f(2)=0$，证明: 存在 $\xi\in[1,3]$，使得

$$f''(\xi)=3\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 令 $F(x)=\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(2)=0$，

由泰勒中值定理得

$$F(x)=F(2)+f(2)(x-2)+\frac{f'(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f''(\eta)}{3!}(x-2)^3;$$

分别代入 $x=1$ 和 $x=3$，得

$$F(1)=\frac{f'(2)}{2!}-\frac{f''(\xi_1)}{3!},\quad F(3)=\frac{f'(2)}{2!}+\frac{f''(\xi_2)}{3!};$$

其中 $\xi_1\in(1,2),\xi_2\in(2,3)$.

由介值定理得 $\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，因此有

$$F(3)-F(1)=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f''(\xi).$$

故结论成立.

六、应用题（共 6 分）

1. 已知曲线 $L: y=\dfrac{4}{9}x^2\ (x\ge 0)$. 点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$. 设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积. 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率.

解 设点 P 的坐标为 (m,n)，则直线 AP 的方程为

$$y=\left(\frac{4}{9}m-\frac{1}{m}\right)x+1.$$

直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_0^m\left[\left(\frac{4}{9}m-\frac{1}{m}\right)x+1-\frac{4}{9}x^2\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{m^2}{2}\left(\frac{4}{9}m-\frac{1}{m}\right)+m-\frac{4}{27}m^3\\&=\frac{2}{27}m^3+\frac{1}{2}m.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{27}m^3+\frac{1}{2}m\right)=\left(\frac{2}{9}m^2+\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

由题设，当 $m=3$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=4$，代入上式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{m=3}=\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 4=10,$$

即当 P 运动到点 $(3,4)$ 时， S 关于时间 t 的变化率为 10.