2017-2018 线性代数 II 第 2 学期 A 试题答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 五阶行列式$\Delta(a_{ij})$中含a_{32}的项数是________

2. 若$R(AB)=3$且矩阵B可逆，则五阶矩阵A的伴随矩阵A^*的秩为 ________

3. 设$V=\left\{\begin{pmatrix}-c & a & c+a\\ 0 & c & b\end{pmatrix} \mid a,b,c\in R\right\}$是一个一般向量空间（按通常的矩阵运算），则$\dim V=$ ________

4. 若线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_2+x_3=2\\ x_3+x_4=3\\ x_4+x_1=a\end{cases}$有解，则$a=$ ________

5. 已知$A^{-1}=\begin{pmatrix}0.4 & -0.2\\ -0.3 & 0.4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}7 & 5\\ x & y\end{pmatrix}$且$A$与$B$相似，则$x$与$y$分别等于 ________

6. 已知三阶实对称矩阵A的秩为 2，且$|A-E|=0,|A+4E|=0$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A(x_1,x_2,x_3)^T$的标准型$f(y_1,y_2,y_3)=$ ________

一、答：1. 24 ；2. 0；3. 3；4. 2 ；5. $x=-0.6,y=1$ ；6. $y_2^2-4y_3^2$.

一、解 **1.** a_{32}的余子式M_{23}是四阶行列式，共 24 项，五阶行列式$\Delta(a_{ij})$中含a_{32}的项数是 24，

2. 矩阵B可逆，$R(A)=R(AB)=3$，A所有四阶子式全为零，$A^*=O$，$R(A^*)=0$

3. $$\begin{pmatrix}-c & a & c+a\\ 0 & c & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c & 0 & c\\ 0 & c & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$
$$=c\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$线性无关，够成$V$中的一个基，维数$\dim V=3$

4. 第一个与第三个方程之和为$x_1+x_2+x_3+x_4=4$

第二个与第四个方程之和为$x_1+x_2+x_3+x_4=2+a=4,a=2$

5. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}7 & 5\\ x & y\end{pmatrix}$相似，$4+4=7+y,y=1$。

$|A|=10=|B|=7-5x,x=-0.6$

6. A的特征值为$0,1,-4$，标准型$f(y_1,y_2,y_3)=y_2^2-4y_3^2$

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 下列说法错误的是（　　）

（A）排列 312546 是奇排列 ；（B）方阵A的列向量组线性无关，则$|A|\neq 0$ ；

（C）$\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-3$ ；（D）若$\det(A_{2\times 2})=-1$，则$\det(|A|E_{2\times 2})=-1$.。

2. 已知 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{11}-2a_{31} & a_{12}-2a_{32} & a_{13}-2a_{33} & a_{14}-2a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$

若 $XA=B$，则 $X=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；（D）以上答案都不对。

3. 下列结论正确的是（　　）

（A）标准正交向量组排列成的矩阵一定是正交阵；

（B）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 的秩相等，则这两个向量组一定等价；

（C）若 $\alpha_1=(1,2,3,4,a,b),\alpha_2=(0,3,4,a,0,b),\alpha_3=(0,4,0,4,c,0)$，适当选取实数 a,b,c 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

（D）若 $0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+...+0\cdot\alpha_m=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关。

4 设 A 是 n 阶实矩阵，则线性方程组（I）$Ax=0$ 与（II）$A^TAx=0$ 必有（　　）

（A）（I）的解是（II）的解，（II）的解也是（I）的解；

（B）（I）的解是（II）的解，但（II）的解不是（I）的解；

（C）（I）的解是（II）的解，但（II）的解有可能不是（I）的解；

（D）（I）的解解有可能不是（II）的解，但（II）的解有可能不是（I）的解。

5. 设 A 是 5 阶实对称矩阵，若对任意非零的 5 维列向量 x 都有二次型 $f=x^TAx$ 的值大于零，则（　　）

（A）$|A|<0$；（B）$|A|=0$；（C）$|A|>0$；（D）$|A|\le 0$。

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是某 4 维向量空间 V 的一组基，则 V 的另一组基是（　　）

（A）任意四个向量构成的线性无关的向量组；

（B）某个向量组 T 满足：V 中的任意向量都能由向量组 T 线性表示；

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$；（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$。

二、答：1.D；2.B；3.B ；4.A ；5.C ；6.C .

二、解 1. 排列 312546 的逆序数为 3，是奇排列；B，C 正确，D 错，选 D

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}-2a_{31} & a_{12}-2a_{32} & a_{13}-2a_{33} & a_{14}-2a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=B$

3. A 不一定正确，n 个 n 维标准正交向量组排列成的矩阵一定是正交阵

B 正确. 选 B. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的最大线性无关组一定是 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 的最大线性无关组。这两个向量组有相同的最大线性无关组，它们等价

C 错，$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a & b \\ 0 & 3 & 4 & a & 0 & b \\ 0 & 4 & 0 & 4 & c & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 3，对任意实数 a,b,c，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

D 错.

4. 若 $Ax=0$，则 $A^TAx=0$，即（I）的解是（II）的解，

若 $A^TAx=0$，则 $x^TA^TAx=0,$ 则 $\|Ax\|^2=(Ax)^TAx=0,$ 故 $Ax=0$，（II）的解也是（I）的解

5.选 **C**，A 为正定矩阵

6.选 **C**，

A：涉及的向量不一定是 **V** 中的向量**.**应该这样说“**V** 中的任意四个向量构成的线性无关的向量组“

B：应该这样说“某个向量组 T 满足：向量组 T 线性无关且 V 中的任意向量都能由向量组 T 线性表示”，

C：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关，可以成为 **V** 的基，

D：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性相关，不可能成为 **V** 的基**.**

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1.若 n 阶方阵 A 满足 $A^T=-A$，则 n 为奇数时一定有 $|A|=0$。（　　）

2. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，且 β 不能由此向量组线性表示，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$，$\beta$ 一定线性无关.（　　）

3.若 A,B 可逆，则 $[(A+B)B]^{-1}=B^{-1}(A+B)^{-1}$。（　　）

4.两个矩阵相似，则它们有相同的特征值和特征向量。（　　）

5.若矩阵 A 与 B 合同，则 A 与 B 一定等价。（　）

三、答：1.对；2 对；3.错；4 错；5，对

三、解 **1.** $|A^T|=|-A|$，$|A|=(-1)^n|A|$，n 为奇数时 $|A|=-|A|$，$|A|=0$

2.设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_m\alpha_m+x\beta=0$

若 $x\neq 0$，则 β 能由此向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表示.

故 $x=0$，此时 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_m\alpha_m=0$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关

因此 $x_1=0,x_2=0,...,x_m=0$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$，$\beta$ 线性无关

3. $A+B$ 不一定可逆

4. 两个矩阵相似，则它们有相同的特征值，但特征向量不一定相同

5. 矩阵 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$

A 与 B 一定等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P,Q，使得 $PAQ=B$。合同时令 $Q=C,P=C^T$，得到等价

四、计算题（一）（每小题 8 分，本题共 16 分）

1. 计算 $n+1$ 行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & ... & x \end{vmatrix}$

2.在 R^4 中有两组基：基（I）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，基（II）$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 满足

$\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_1+\beta_2,\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\alpha_4=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4$

求（1）由基（I）到基（II）的过渡矩阵 P

（2）向量 $\alpha=\beta_1+2\beta_2+6\beta_3+24\beta_4$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的坐标

1.解 第 2,3,4，…，$n+1$ 列全部加到第一列，第一列提出公因子得到

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\1 & x & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\1 & a_2 & x & a_3 & \dots & a_n\\1 & a_2 & a_3 & x & \dots & a_n\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & x\end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\1 & x-a_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\1 & a_2-a_1 & x-a_2 & 0 & \dots & 0\\1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & x-a_3 & \dots & 0\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & a_4-a_3 & \dots & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

2.解（1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

由基（I）到基（II）的过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

或 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\alpha_1,\beta_3=\alpha_3-\alpha_2,\beta_4=\alpha_4-\alpha_3$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由基（I）到基（II）的过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

（2）$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$

$$\alpha=\beta_1+2\beta_2+6\beta_3+24\beta_4=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}1\\2\\6\\24\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,P\begin{pmatrix}1\\2\\6\\24\end{pmatrix}$$

向量 $\alpha=\beta_1+2\beta_2+6\beta_3+24\beta_4$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的坐标为

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\6\\24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-18\\24\end{pmatrix}$$

五、计算题（二）（每小题 12 分，本题共 24 分）

1.已知方程组$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=1+\lambda \\ (1-2\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=1\end{cases}$，问$\lambda$取何值时，方程组无解、唯一解、有无穷多个解？有无穷多个解时，求其通解.

2.二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

（1）写出二次型的矩阵表达式；（2） 求正交变换$x=Py$中的P，并把二次型化为标准形；（3）当$x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$时.求$f(x_1,x_2,x_3)$的最大值

1.解（1）$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

（2）$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix},\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(10-\lambda)$

特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$

$\lambda=1,$特征向量$p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=10,$特征向量$p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{\sqrt{18}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{18}}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{18}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，$x=Py$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{\sqrt{18}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{18}}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{18}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\x_3\end{pmatrix}$

标准形$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

（3）当$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$时$f(x_1,x_2,x_3)$的最大值为40

六、证明题 （每小题7分，本题共14分）

1.设A为n阶非奇异方阵，且n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$的秩为$n$。证明向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,...,A\alpha_n$线性无关.

2. 证明n阶矩阵A为正定矩阵的充要条件是存在一个正定矩阵P，使得$A=P^2$

1.证明 设$x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+...+x_nA\alpha_n=0$ （*）

因为A为n阶非奇异方阵，所以A可逆，用A^{-1}左乘（*）得到

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_n\alpha_n=0$（**）

又因为n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$的秩为$n$，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性无关.

由（**）得到$x_1=0,x_2=0,...,x_n=0$

故向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,...,A\alpha_n$线性无关.

2.证明 充分性 设P是一个正定矩阵，则P的特征值全部为正数，因此$A=P^2$的特征值全部为正数，故A为正定矩阵.

必要性：设A为正定矩阵，则存在正交阵Q，对角阵

$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{pmatrix}$，使得$A=Q\Lambda Q^T$，令$\Lambda_1=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$

令$P=Q\Lambda_1Q^T$，则P为正定矩阵，且$P^2=Q\Lambda_1Q^TQ\Lambda_1Q^T=Q\Lambda Q^T=A$.