重庆大学《概率论与数理统计II》课程试卷

◉ A卷
○ B卷

2022—2023 学年　第一学期

开课学院：数统学院　课程号：MATH20042　考试日期：2022.12.15

考试方式：○开卷　◉闭卷　○其他　　考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

分位数：$t_{0.95}(8)=1.86$，$F_{0.95}(1,8)=5.31$，$\chi^2_{0.99}(1)=6.633$，$u_{0.995}=2.575$，

$u_{0.975}=1.96$，$u_{0.9}=1.65$，$t_{0.95}(13)=1.771$

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 设事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，则 A,B 都发生的概率为___(1)___。

$P(A)P(\bar{B})+P(B)P(\bar{A})=P(A)[1-P(B)]+P(B)[1-P(A)]=0.3 \Rightarrow P(A)P(B)=0.1$

2. 设随机变量 $X\sim B(4,0.5)$，令 $Y=|X-2|$，则 Y 的分布律为：___(2)___。

X	0	1	2	3	4
P	0.5^4	$C_4^1 0.5^4$	$C_4^2 0.5^4$	$C_4^3 0.5^4$	0.5^4

$Y=\|X-2\|$	0	1	2
P	$X=2$	$X=1,3$	$X=0,4$

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} cx+2, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。若 $Y=2X+3$，则 Y 的密度函数为___(3)___。

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow c=-2$

$Y=2X+3$，$3<Y<5$

$x=\frac{Y-3}{2}$

$f_Y(y)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y-3}{2}\right)=\frac{1}{2}\begin{cases}-2\left(\frac{y-3}{2}\right)+3 \\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{5-y}{2} \\ 0\end{cases}$

$F(y)=P(Y<y)=P(2X+3<y)=P\left(X<\frac{y-3}{2}\right)$

$=\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} f_X(x)dx$

y的导数

$F'(y)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y-3}{2}\right)=f_Y(y)$

0.4 去　　0.1 去　　0.5 去

4. 某同学周三上午在第一教学楼、艺术楼和图书馆上自习的概率为 0.4，0.1，0.5。在中午下课后该同学从三个自习地点赶去一食堂用餐，其排队不超过 5 分钟的概率依次为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{4}$。则该同学周三中午用餐排队不超过 5 分钟的概率为___(4)___；若某周三中午该同学用餐排队时间未超过 5 分钟，则他在___(5)___上自习的可能性最大？

$\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B_i)=\frac{27}{80}$

$P(一教|t\le5)=\frac{P(一教,t\le5)}{P(t\le5)}=\frac{0.4\times\frac{1}{2}}{\frac{27}{80}}$ 同理

5. 设 $\{X_i, i=1,2,\cdots\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 $EX_i=16$，$DX_i=2$，$i=1,2,\cdots$，则当 $n\to\infty$ 时，$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-16\right|<2\right\}=$___(6)___。

$\bar X$

$P\{|\bar X-16|<2\}$ ∵ $n\to\infty$，$|\bar X-16|\to 0$ ∴ $P=1$

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自总体 $X\sim N(32,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar X$ 和 S^2 分别是对应的样本均值和样本方差，则 $P\left\{\frac{\bar X-32}{S}\ge 0.62\right\}=$___(7)___；$P\left\{\left(\frac{\bar X-32}{S}\right)^2\ge 0.59\right\}=$___(8)___；$P\left\{\left(\frac{\bar X-32}{\sigma}\right)^2\ge 0.737\right\}=$___(9)___。

$\frac{\bar X-32}{3/\sqrt n}\sim N(0,1)$

$1-P\left(\frac{\bar X-32}{S/\sqrt 9}<0.62\right)$　~~$1-\Phi(0.62\sqrt{9})$~~

$\left(\frac{\bar X-32}{3/\sqrt n}\right)^2\sim\chi^2(1)$　$\frac{8S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8)$　$n\left(\frac{\bar X-32}{S}\right)^2\sim F(1,8)$

$F_{0.75}(1,8)=0.51$　0.08

$P\left(\frac{\bar X-32}{3/\sqrt n}\ge 2.575\right)+P\left(\frac{\bar X-32}{3/\sqrt n}\le -2.575\right)=0.01$

7. 设随机变量 $X\sim P(2)$，$Y\sim G(0.5)$，且 X 和 Y 相互独立。则 $E(X-4Y)^2=$___(10)___；$\mathrm{cov}(3X-Y,2X)=$___(11)___。

$EX=DX=2\Rightarrow EX^2=6$　Y同X

展开

8. 假设某小区居民到附近的菜鸟驿站取快递，从收到取件通知到取走快递的时间间隔服从正态分布 $N(\mu,6^2)$（单位：小时）。现随机调查 9 次取件时间间隔，测得样本均值为 $\bar x=18.5$。则总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为___(12)___。

$\left[\bar X-u_{0.975}\sqrt{\frac{6^2}{n}},\ \bar X+u_{0.975}\sqrt{\frac{6^2}{n}}\right]$

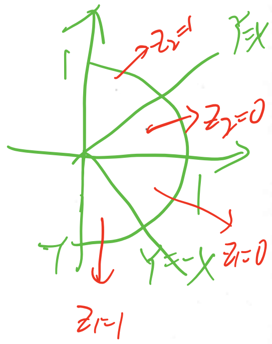
9. 某产品以往废品率不高于 5%，今抽取一样本在显著水平为 α 下，检验这批产品废品率是否高于 5%。则此检验问题的备择假设 H_1 可文字描述为___(13)___，犯第一类错误的概率___(14)___。

$P\{拒绝H_0|H_0\}$

H_0：≤5% 不高于

H_1：这批产品废品率高于5%

二、（12 分）设随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\left\{(x,y):0<x<\sqrt{1-y^2}\right\}$ 上均匀分布，令 $Z_1=\begin{cases}0, X+Y>0\\1, X+Y\le 0\end{cases}$，$Z_2=\begin{cases}0, X-Y>0\\1, X-Y\le 0\end{cases}$。求：（1）$(Z_1,Z_2)$ 的联合分布律；（2）Z_1 和 Z_2 的协方差；（3）$Z^*=2Z_1+Z_2$ 的分布律。

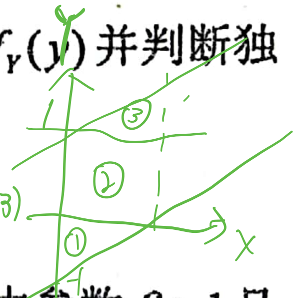


(1) $Z_1\backslash Z_2$ | 0 1 ; 0 ; 1　(2) Z_1 | 0 1　Z_2 | 0 1　Z_1Z_2 | 0 1 ; P | 1 0　$\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)=-\frac{1}{16}$　Z^* | 0 1 2 3

三、（18 分）设随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x+1), & 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）常数 c；（2）随机变量 X,Y 的边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$ 并判断独立性；（3）求 $Z=X-Y$ 的密度函数。



(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow c=\frac{1}{3}$ (2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$　$f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$，$f_Xf_Y=f(x,y)$ (3)

四、（12 分）设总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-x^{-\beta}, & x>1\\0, & \text{其他}\end{cases}$，其中参数 $\beta>1$ 且未知。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求：（1）参数 β 的矩估计量；（2）参数 β 的极大似然估计量。

分部分求积分

$\hat\beta=\frac{\bar X}{\bar X-1}$　$L=\beta^n(x_1\cdots x_n)^{-\beta-1}$

(1) 建立总体X未知期望，先求概率密度 $f(x)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1}\\0\end{cases}$，$EX=\int_1^{+\infty} xf(x)dx=\frac{\beta}{\beta-1}=\bar X$

(2) $\ln L=n\ln\beta+(-\beta-1)\ln(x_1\cdots x_n)$

$\hat\beta=\frac{n}{\sum \ln x_i}$

五、（10 分）我国拥有完全自主知识产权的首列商用磁浮 3.0 列车，于 2022 年 3 月在同济大学高速磁浮试验线完成了相关动态试验和系统联调联试。从商用磁浮 1.0 版（时速 100 公里）、2.0 版（时速 160 公里），到 3.0 版（时速 200 公里）列车，我国已实现了时速 100 公里的提速，也实现了从短定子直线电机驱动到长定子直线电机驱动的跨越。

假设磁悬浮列车启动后达到最高速度所需时间为随机变量 X（单位：秒），且 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。为了判断某磁悬浮列车启动后达到最高速度所需时间是否显著低于 39 秒，现随机调查了该磁悬浮列车 14 次发车情况，得所需时

$H_0: \mu\le 39$　$H_1: \mu>39$　$\alpha=0.05$　$n=14$　σ^2 未知

$t=\frac{\bar x-\mu}{S/\sqrt{n}}=-1.871$　$t_{0.95}(13)=1.771$

$t<1.771$ 不拒 H_0

间的样本均值为$\bar{x}=38.2$，样本标准差为$s=1.6$。试问调查结果是否支持该判断？（$\alpha=0.05$）

六、（6 分）网商随机地罐装盲盒，每盒先装$X(\le n)$只彩色气球，再补装$n-X$只白色气球。随机变量X的分布未知，仅从网商宣称知平均每盒有$EX=k$只。现网购一盲盒并从中任抽一件，求该件产品为彩色气球的概率。

【提示：全概率公式】

设有m盒，第i盒有彩色x_i个，事件A抽到彩色

$$p=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{P(A|X=x_i)\,P(X=x_i)}_{P(A,\,X=x_i)}=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\frac{x_i}{n}}_{\text{每个盒子抽中概率}}P(X=x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i P(X=x_i)$$

$$=\frac{1}{n}EX=\frac{k}{n}.$$

扫描全能王 创建