

# 2024春离散数学期中考试 1

## 一、计算题 (20 分 + 20 分)

1. 假设有一盏电灯的开关电路受 3 个开关  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的控制：当且仅当  $A$  和  $C$  同时打开或  $B$  和  $C$  同时打开时灯亮。设  $L$  表示灯亮，请用等值演算法推导出  $L$  的主析取范式以及主合取范式，并写出相应的小项及大项编码。
  2. 集合  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $R = \{< a, b >, < b, a >, < b, c >, < c, d >\}$ , 求  $R$  的自反闭包  $r(R)$  和对称闭包  $s(R)$ , 并利用 Wardshall 算法求  $ts(R)$ , 要求写出所有中间过程。
- 

## 二、证明题 (30 分 + 30 分)

3. 如果  $A$  努力工作, 那么  $B$  或  $C$  感到愉快; 如果  $B$  愉快, 那么  $A$  不努力工作; 如果  $D$  愉快那么  $C$  不愉快。所以, 如果  $A$  努力工作, 则  $D$  不愉快。  
请对上面的前提和结论进行建模, 并用推理理论进行证明, 判断结论是否是有效结论。
4. 利用推理理论证明下面的推理:  
 $(\exists x(A(x) \rightarrow \forall yB(y))) \wedge (\forall x(B(x) \rightarrow \exists yC(y))) \Rightarrow (\forall xA(x) \rightarrow \exists yC(y))$ 。

## 2024春离散数学期中考试 2

1. 请用等值演算法证明下面的等价式  
 $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q)$ 。
2. 请用等值演算法求下面命题公式的主析取范式与主合取范式，判断公式的类型，并写出其相应的成真赋值和成假赋值  
 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 。
3. 设计一盏电灯的开关电路，要求受三个开关  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的控制（即有三个输入信号）：当且仅当  $A$  和  $C$  同时关闭或  $B$  和  $C$  同时关闭时灯亮。设  $F$  表示灯亮。为了设计电路实现这个开关逻辑，请写出灯亮的逻辑表达式（强调：有三个输入信号）。
4. 判断下面公式是否是永真式  
 $(\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$ 。
5. 请用推理过程证明下面的有效结论  
 $\exists x (A(x) \rightarrow \forall y B(y)), \forall x (B(x) \rightarrow \exists y C(y)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists y C(y)$ 。
6. 请用谓词逻辑演算的方法证明  $A - (A - B) = A \cap B$ 。
7. 请用集合恒等式的方法证明  $A \cup B = A \cup (B - A)$ 。
8. 设  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R$  是  $X$  上的二元关系，且  $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$ 
  1. 画出  $R$  的关系图并写出  $R$  的关系矩阵；
  2. 说明  $R$  是否是自反、反自反、对称、传递的。
9. 若集合  $A$  上的二元关系  $R$  和  $S$  具有对称性，  
请证明：  $R \circ S$  对称当且仅当  $R \circ S = S \circ R$ 。
10. 设  $R_1$  是  $A$  上的等价关系， $R_2$  是  $B$  上的等价关系， $A \neq \emptyset$  且  $B \neq \emptyset$ 。关系  $R$  满足： $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x_1, x_2 \rangle \in R_1$  且  $\langle y_1, y_2 \rangle \in R_2$ 。  
请证明： $R$  是  $A \times B$  上的等价关系。