

# 2024春离散数学期中考试 1

## 一、计算题 (20 分 + 20 分)

- 假设有一盏电灯的开关电路受 3 个开关  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的控制：当且仅当  $A$  和  $C$  同时打开或  $B$  和  $C$  同时打开时灯亮。设  $L$  表示灯亮，请用等值演算法推导出  $L$  的主析取范式以及主合取范式，并写出相应的小项及大项编码。
- 集合  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$ , 求  $R$  的自反闭包  $r(R)$  和对称闭包  $s(R)$ , 并利用 Wardshall 算法求  $ts(R)$ , 要求写出所有中间过程。

---

## 二、证明题 (30 分 + 30 分)

- 如果  $A$  努力工作，那么  $B$  或  $C$  感到愉快；如果  $B$  愉快，那么  $A$  不努力工作；如果  $D$  愉快那么  $C$  不愉快。所以，如果  $A$  努力工作，则  $D$  不愉快。

请对上面的前提和结论进行建模，并用推理理论进行证明，判断结论是否是有效结论。

- 利用推理理论证明下面的推理：

$$(\exists x(A(x) \rightarrow \forall y B(y))) \wedge (\forall x(B(x) \rightarrow \exists y C(y))) \Rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \exists y C(y))。$$

# 2024春离散数学期中考试 2

1. 请用等值演算法证明下面的等价式

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q)。$$

2. 请用等值演算法求下面命题公式的主析取范式与主合取范式，判断公式的类型，并写出其相应的成真赋值和成假赋值

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)。$$

3. 设计一盏电灯的开关电路，要求受三个开关  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的控制（即有三个输入信号）：当且仅当  $A$  和  $C$  同时关闭或  $B$  和  $C$  同时关闭时灯亮。设  $F$  表示灯亮。为了设计电路实现这个开关逻辑，请写出灯亮的逻辑表达式（强调：有三个输入信号）。

4. 判断下面公式是否是永真式

$$(\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))。$$

5. 请用推理过程证明下面的有效结论

$$\exists x (A(x) \rightarrow \forall y B(y)), \forall x (B(x) \rightarrow \exists y C(y)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists y C(y)。$$

6. 请用谓词逻辑演算的方法证明  $A - (A - B) = A \cap B$ 。

7. 请用集合恒等式的方法证明  $A \cup B = A \cup (B - A)$ 。

8. 设  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R$  是  $X$  上的二元关系, 且  $R = \{<1, 1>, <3, 1>, <1, 3>, <3, 3>, <3, 2>, <4, 3>, <4, 1>, <4, 2>, <1, 2>\}$

1. 画出  $R$  的关系图并写出  $R$  的关系矩阵;

2. 说明  $R$  是否是自反、反自反、对称、传递的。

9. 若集合  $A$  上的二元关系  $R$  和  $S$  具有对称性,

请证明:  $R \circ S$  对称当且仅当  $R \circ S = S \circ R$ 。

10. 设  $R_1$  是  $A$  上的等价关系,  $R_2$  是  $B$  上的等价关系,  $A \neq \emptyset$  且  $B \neq \emptyset$ 。关系  $R$  满足:  $<< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >> \in R \Leftrightarrow < x_1, x_2 > \in R_1$  且  $< y_1, y_2 > \in R_2$ 。

请证明:  $R$  是  $A \times B$  上的等价关系。