Chapter 2 递推关系与生成函数

目录

1 线性齐次递推关系与线性非齐次递推关系

1.1 线性齐次递推关系

我们用一个简单而不失趣味的问题引出我们所要讨论的内容.

例 1 ***(Fibonacci序列)***意大利比萨的斐波那契在*1202*年出版的书《珠算原理》中提出*:* 假定一对刚出生的小兔一个月就能长成大兔, 再过一个月便能生下一堆小兔, 且每个月都生一对小兔, 若不考虑死亡问题, 则一对刚出生的兔子一年内能繁殖成多少对兔子*?*

解 1 设f_n为第n月的兔子数,$n \geq 0$ 则

$$f_0 = 0, f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$$

易知$f_{13} = 233$

满足上述性质的数列称为斐波那契(Fibbonaci)数列, 其具有许多有趣的性质, 在此我们不做具体讨论, 而是关注更一般的问题.

上式中序列的每一项都由其之前的若干项的线性组合给出, 我们考虑其一般情况.

定义 1 我们称数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$满足k**阶常系数线性齐次递推关系**, 若对所有的$n \geq k$, 有

$$h_n = a_1 h_{n-1} + \ldots + a_k h_{n-k}$$

其中$a_k \neq 0$为常数.

观察上式不难得出, 对数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$的任意步, 步长任意的差分Δh_n, 其也满足k阶常系数线性齐次递推关系, 且若数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}, \{g_n\}_{n=0}^{\infty}$均满足此递推关系, 则$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 数列$\{\alpha h_n + \beta g_n\}_{n=0}^{\infty}$也满足此递推关系. 前者启发我们考虑在差分算子作用下具有形式不变的数列$q^n, q \in \mathbb{C}$, 后者启发我们考虑其线性组合.

数列$h_n = q^n$为上述递推关系的解, 当且仅当q为下k次多项式方程

$$g(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \ldots - a_{k-1} x^1 + a_k$$

的解. 我们称这样的$g(x)$为上述常系数线性齐次递推关系的**特征方程**. 由代数基本定理我们易知其特征方程有k个根(其中可能有重根). 若其根互不相同, 我们考虑其线性组合, 有以下结论.

定理 1 若k阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n = a_1h_{n-1} + \ldots + a_kh_{n-k}, a_k \neq 0, k \geq 1$$

的特征方程$g(x) = 0$有k个互不相同的根$q_1, \ldots, q_k$, 则

$$h_n = c_1q^1 + \ldots + c_nq^n, n \geq 0$$

是下述意义下的一般解: 无论给定怎样的初始值$h_0, \ldots, h_{k-1}$, 都存在相应的常数$c_1, \ldots, c_k$, 使得上式是满足上述递推关系和初始条件的唯一数列.

证明 1 由$a_k \neq 0$知$g(x) = 0$没有零根. 故

$$h_n = c_1q^1 + \ldots + c_nq^n, n \geq 0$$

满足上述递推关系. 对于任意给定的初始值$h_0, \ldots, h_{k-1}$, 考虑方程组

$$x_1q_1^i + \ldots + x_kq_k^i = h_i, 0 \leq i \leq k-1$$

其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ q_1 & \ldots & q_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{k-1} & \ldots & q_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

其为一范德蒙德矩阵, 故其行列式满足

$$|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq k} \left(q_i - q_j\right) \neq 0$$

从而上述方程组有唯一解$x_i = c_i, i = 1, \ldots, k$. 这样我们就找到了满足初始条件和递推关系的数列

$$h_n = c_1q^1 + \ldots + c_nq^n, n \geq 0$$

证毕.

我们回顾之前思考的内容: 对于满足某递推关系(此时设其特征方程无重根)的所有数列h_n, g_n和任意复数α, β, 有$\alpha h_n + \beta g_n$也满足此递推关系.

我们考虑这样的一个事实: 所有的数列构成一线性空间(事实上数列是定义在非负整数集上的函数), 记为$\mathbb{S}$. 满足某递推关系的数列是$\mathbb{S}$的一个子集$\mathbb{S}_h$, 由上述性质可知其为S的一有限维子空间, 维度为其特征方程的次数.

设特征方程的根为$q_1, \ldots, q_k$, 则数列$q_1^n, \ldots, q_k^n$为此线性空间的一组基(请读者思考在哪一步中我们进行了相应的证明). 从而对此线性空间内的任意向量(某一数列)$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, 其可被这组基唯一地线性表出. 另一方面, 这一向量(数列)$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$又由其前k项唯一确定. 因此, 给定递推关系和前k项可唯一确定这一向量在这组基下的坐标, 即复数$c_1, \ldots, c_k$.

下面我们考虑更一般的情况:

定理 2 *若k阶常系数线性齐次递推关系*

$$h_n = a_1 h_{n-1} + \ldots + a_k h_{n-k}, a_k \neq 0, k \geq 1$$

的特征方程$g(x) = 0$有k个互不相同的根$q_1, \ldots, q_t, t \leq k$, 其中$q_i$是$s_i$重根$1 \leq i \leq t, s_1 + \ldots + s_t = k$, 则

$$h_n = \sum_{i=1}^{t} P_i(n) q_i^n, n \geq 0$$

是该递推关系的一般解, 其中$P_i(n)$是关于n的次数小于s_i的多项式.

我们在给出证明之前先进行一些说明: 在这里我们仍取线性空间的一组基, 但这组基此时形如$n^i p^n$.

证明 2 *我们先证明两个引理.*

引理 *1* *若一多项式函数$f(x)$有s重根q, 则$\frac{\mathrm{d}^i f(x)}{x^i}|_{x=q} = 0, i = 0, \ldots, s-1$.*

引理的证明 *1* *设$f(x) = g(x) \cdot (x-q)^s$, 其中$g(x)$为一多项式. $i = 0$时平凡.*

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = g'(x)(x-q)^s + s(x-q)^{s-1} g(x) = (x-q)^{s-1}(sg(x) + (x-q) g'(x))$$

从而归纳可知

$$\frac{\mathrm{d}^i f(x)}{x^i}|_{x=q} = 0, i = 0, \ldots, s-1$$

证毕.

回到原题证明. 由引理1,

$$\frac{\mathrm{d}^j g(x)}{x^j}|_{x=q_i} = 0, 0 \leq j \leq s_i - 1$$

即

$$k \cdot \ldots \cdot (k-j+1) p_i^{k-j} - \sum_{x=1}^{k-j} a_x x \cdot \ldots \cdot (x-j+1) p_i^{k-j} = 0, 0 \leq j \leq s_i - 1$$

下证$\forall 1 \le i \le t, 0 \le j \le s_i - 1, h_n = n^j q_i^n$满足此常系数线性齐次递推关系，即

$$n^j q_i^n = \sum_{x=1}^{k} a_x (n-x)^j q_i^{n-x}, \forall n \in \mathbb{N}$$

易知特征方程无零根.

$$\begin{aligned}
LHS - RHS &= n^j q_i^n - \sum_{x=1}^{k} a_x (n-x)^j q_i^{n-x} \\
&= (n-k+k)(n-(k-1)+(k-1))\dots(n-(k-j+1)+(k-j+1))\, q_i^j \\
&+ \sum_{x=1}^{k-j} a_x ((n-k)+(k-x))\dots((n-k+j-1)+(k-j+1-x))\, q_i^{n-x} \\
&+ \sum_{x=k-j+1}^{k} a_x ((n-k)+(k-x))\dots((n-x-1)+(x+1-x))\, q_i^{n-x} \\
&= q^{n-k} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \alpha_m \cdot \frac{\mathrm{d}^m g(x)}{\mathrm{d}x^m} \mid_{x=q_i} \right) = 0
\end{aligned}$$

其中α_m为常数. 从而$h_n = n^j q_i^n, 1 \le i \le t, 0 \le j \le s_i - 1$满足此常系数线性齐次递推关系. 故

$$h_n = \sum_{i=1}^{t} P_i(n)\, q_i^n, n \ge 0$$

也满足原递推关系. 下证对任意初始值$h_0, \dots, h_{k-1}$, 均存在相应的多项式$P_i, 1 \le i \le t$, 使得上式为满足此条件的唯一数列. 设$P_i(n) = \sum_{m=0}^{s_i-1} p_{im} n^m$, 则考虑方程组

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{m=0}^{s_i-1} x_{im} n^m q_i^n = h_n, 0 \le n \le k-1$$

其中$n^m \mid_{n=0,m=0} = 1$, 其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
q_1^1 & q_1^1 & \dots & q_1^1 & \dots & q_t^1 & q_t^1 & \dots & q_t^1 \\
2^0 q_1^2 & 2^1 q_1^2 & \dots & 2^{s_1-1} q_1^2 & \dots & 2^0 q_t^2 & 2^1 q_t^2 & \dots & 2^{s_t-1} q_t^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(k-1)^0 q_1^{k-1} & (k-1)^1 q_1^{k-1} & \dots & (k-1)^{s_1-1} q_1^{k-1} & \dots & (k-1)^0 q_t^{k-1} & (k-1)^1 q_t^{k-1} & \dots & (k-1)^{s_t-1} q_t^{k-1}
\end{bmatrix}$$

其行列式不为零(详见广义范德蒙德行列式). 从而原方程组有唯一解$x_{im} = p_{im}$. 证毕.

此时我们回顾引题的例子(即Fibonacci数列), 我们易知其特征方程为

$$x^2 = x + 1$$

其有两根$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 根据初值条件易知其通项为

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

例 2 求解线性齐次递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 3h_{n-4}$$

初始条件为$h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 2.$

解 2 其特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

其有一三重根$q_1 = -1$, 一重根$q_2 = 2$, 故

$$h_n = \left(c_1n^2 + c_2n + c_3\right)(-1)^n + c_4 2^n$$

其中c_1, c_2, c_3, c_4为常数. 根据初值条件得

$$c_1 = 0, c_2 = -\frac{3}{9}, c_3 = \frac{7}{9}, c_4 = \frac{2}{9}$$

故

$$h_n = \left(\frac{7}{9} - \frac{3n}{9}\right)(-1)^n + \frac{2}{9} \cdot 2^n$$

1.2 线性非齐次递推关系

定义 2 数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$满足k**阶常系数线性非齐次递推关系**, 若对所有的$n \geq k$, 有

$$h_n = a_1h_{n-1} + \ldots + a_kh_{n-k} + f(n)$$

其中$a_k \neq 0$为常数, $f(n) \neq 0$为关于n的函数.

非线性齐次递推关系的通解=线性齐次递推关系的通解+线性非齐次递推关系的一个特解.

一般地, 其"特解"并不唯一, 且没有固定的求解方式. 然而, 若$f(n) = Cq^n \cdot P(n)$, 其中$P(n)$是关于n的多项式, 则可通过若干步差分非齐次递推关系转换为齐次递推关系.

2 生成函数理论

生成函数是对给定数列的一个形式级数(在这里我们并不关心级数的取值问题). 其核心思想在于: 用(形式)级数的系数表示数列各项, 并根据级数的运算法则得到数列相应运算的结果. 我们稍后会给出一些例子.

定义 3 数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$的**普通生成函数**是下形式级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

定义 4 数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$的**指数型生成函数**是下形式级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

定义 5 数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$的***Dirichlet*生成函数**是下形式级数

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

这三种生成函数各自对应不同的性质. 我们将在后续部分进行说明.

例 3 考虑数列$\{1\}_{n=0}^{\infty}$, 其普通生成函数为

$$\sum n = 0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

其指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

其*Dirichlet*生成函数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} := \zeta(s)$$

此即*Riemann-Zeta*函数.

例 4 广义二项式定理*:*

$$(1-x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

上式中的"="意义是"形式收敛". 从解析上讲, 若级数A, B分别在某一区间收敛至同一形式, 则A, B是同一级数, 此时可通过级数B的表达形式来找到A. 常用$[x^n]\,f(x)$表示$f(x)$第n项系数.

定义 6 我们定义形式级数的加法和乘法运算与级数的运算相同. 若形式级数的系数在域F中, 也称其为域F上的形式级数. 下考虑普通生成函数. 设域F上的形式级数集合为$F[[x]]$. 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

定义

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$$

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$. 则易证明$F[[x]]$在这样的加法和乘法下构成一个环, 称为**形式幂级数环**. 形式幂级数环是一元多项式环在给定度量下的完备化, 详见抽象代数.

类似地, 对指数型生成函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n\in F[[x]]$$

有

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n+b_n}{n!}x^n$$

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}}{n!}x^n$$

对*Dirichlet*生成函数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}, g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}\in F[[x]]$$

有

$$f(s)+g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+b_n}{n^s}$$

$$f(s)g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|s}a_db_{\frac{n}{d}}}{n^s}$$

不同生成函数的性质正体现于它们运算的差异.

定义 7 对形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}$, 定义

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{\infty} na_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n$$

为$f(x)$的**形式导数**.

定义 8 若形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}$, 是多项式, 即$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$只有有限项不为零, 或形式级数$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$满足$b_0=0$, 则可定义$f(x)$与$g(x)$的**复合**

$$f(g(x))=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(g(x))^n\,.$$

当相关的复合存在, 且$f(g(x))=g(f(x))$时称g为f的**复合逆**

思考: 定义复合为什么需要这样的条件?

定理 3 设形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$互为复合逆, 且$a_0=0$, 则有$b_0=0$, 且$a_1\neq 0, b_1\neq 0$.

证明 3 由$0=g(f(0))=g(0)$知$b_0=0$. 设

$$f(x)=\sum_{n\geq r} a_n x^n, g(x)=\sum_{n\geq s} b_n x^n, r\geq 1, s\geq 1, a_r b_s\neq 0$$

则

$$x=f(g(x))=a_r b_s^r x^{rs}+\dots$$

从而$rs=1, r=1, s=1$. 故$a_1=a_r\neq 0, b_1=b_s\neq 0$. 证毕.

定义 9 若形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$满足$f(x)\,g(x)=1$, 则称$g(x)$为$f(x)$的**乘法逆**.

我们可以看出: 逆元并不恒存在. 下揭示其存在的充要条件.

定理 4 形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$有乘法逆的充要条件是$a_0=0$.

证明 4 一方面, 若$f(x)$有乘法逆, 则$a_0 b_0=1$, 从而$a_0\neq 0$; 另一方面若$a_0\neq 0$, 则归纳地作出如下定义

$$b_n=\begin{cases}\frac{1}{a_0}, & n=0;\\ -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}, & n\geq 1\end{cases}$$

此时有

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\geq 1.\end{cases}$$

从而$f(x)$的乘法逆存在. 证毕.

2.1 普通生成函数

对于普通生成函数我们给出一些简单的性质,其证明留给读者完成.

定理 5 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则$\{a_{n+l}\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数为

$$\frac{f(x)-a_0-a_1x-\ldots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$$

定理 6 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则$\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数为

$$x\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

定理 7 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则$f^k$是数列

$$\left\{\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k}a_{n_1}a_{n_2}\ldots a_{n_k}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

的普通生成函数.

例 5 令$f(n,k)$表示正整数n写成k个非负整数有序和的方法数, 求$f(n,k)$的显式表达式.

解 3 数列$\{1\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数是$\frac{1}{1-x}$, 故$\frac{1}{(1-x)^k}$是数列

$$\left\{\sum_{n_1+\ldots+n_k=n}1\right\}_{n=0}^{\infty}$$

的普通生成函数, 而上数列正是$\{f(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$. 故

$$f(n,k)=[x^n]\frac{1}{(1-x)^k}=\binom{n+k-1}{n}$$

下用生成函数方法求解常系数线性齐次递推关系.

解 4 设$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$满足k阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k},a_k\neq 0,k\geq 1$$

设h_n的普通生成函数为$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}h_nx^n$. 设

$$k(x)=x^kg\left(\frac{1}{x}\right)=1-\sum_{i=1}^{k}a_ix^i,$$

则$c(x)=k(x)f(x)$中$x^{k+r}\ (r\geq 0)$的系数为

$$h_{k+r}-a_1h_{k+r-1}-\ldots-a_kh_r=0$$

即$c(x)$是一个次数小于k的多项式. 设上述递推关系特征方程的互异根为$q_1,\ldots,q_t$, q_i的重数为$s_i, 1\leq i\leq t, s_1+\ldots+s_t=k$, 则

$$g(x)=x^k-a_1x^{k-1}-\ldots-a_k=(x-q_1)^{s_1}\ldots(x-q_t)^{s_t}.$$

故

$$k(x)=(1-q_1x)^{s_1}\ldots(1-q_tx)^{s_t}$$

有理分式$f(x)=\frac{c(x)}{k(x)}$可表示为部分分式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{l=1}^{s_i}\frac{\beta_{il}}{(1-q_ix)^l},$$

其中β_{il}为适当的常数. 由广义二项式定理,

$$\sum_{l=1}^{s_i}\frac{\beta_{il}}{(1-q_ix)^l}=\sum_{l=1}^{s_i}\beta_{il}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+l-1}{n}q_i^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(P_i(n)\,q_i^n\right)x^n$$

其中$P_i(n)=\sum_{l=1}^{s_i}\beta_{il}\binom{n+l-1}{n}$为一个关于$n$的次数至多为$s_i-1$的多项式. 从而

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{t}P_i(n)\,q_i^n\right)x^n$$

故$h_n=\sum_{i=1}^{t}P_i(n)\,q_i^n$, 其系数由初始值给出.

我们容易发现普通生成函数常用于解决组合问题.

例 6 设有三种物体a,b,c, 其中a可以取$0,1,2$次, b可以取$0,1$次, c可以取偶数次. 设b_n为选取n个物体的方法数, 则b_n对应的普通生成函数为

$$\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)=\frac{1+x+x^2}{1-x}=1+2x+3\sum_{n=2}^{\infty}x^n$$

定理 8 *(Catalan数)*考虑以下符合要求的"合法"括号串:n个左括号和 n个右括号从左至右排成一排, 要求在任一位置其左边的左括号不比右括号少. 令f_n表示这样的合法括号串总数, 显然$f_1=1, f_2=2, f_3=5$. 定义$f_0=1$, 求$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$的生成函数.

解 5 令g_n为满足任一非尽头位置左括号数总比右括号多的括号串数. 满足这样条件的括号串左端为左括号, 右段为右括号, 且去掉这两个括号后为一"合法"括号串, 故$g_1 = f_1, g_n = f_{n-1}$. 设k为一合法括号串中从左开始第一次到达左右括号相等的左右括号数, 则$1 \le k \le n$, 且有

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k f_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} f_{k-1} f_k, n \ge 1.$$

设$f(x)$为$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数, 令$b_0 = 0, b_k = f_{k-1}, k \ge 1$, 则

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k}$$

故

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k} \right) x^n + b_0 f_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k} \right) x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^n \right) f(x) \\ &= x f^2(x). \end{aligned}$$

从而$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$(由初值条件).

进一步计算有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} x^n$$

从而$f_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, 此即Catalan数.

2.2 指数型生成函数

对于指数型生成函数我们给出一些简单的性质, 其证明留给读者完成.

定理 9 若$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, 则$\{a_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数是$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

定理 10 若$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, 则$\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数是$x \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

定理 11 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$, 则$f^k$是数列

$$\left\{\sum_{n_1+\ldots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}a_{n_1}\ldots a_{n_k}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

容易发现指数型生成函数常用于解决排列问题. 下给出一些例子.

例 7 *(Bell数)* 令B_n表示$[n]$上所有划分的个数, 求B_n的公式.

解 6 考虑$[n]$中包含元素n的那个子集, 设其含有$k(1\leq k\leq n)$个元素, 则剩余的$k-1$个元素是从$[n-1]$中选区的. 剩余的那些子集为$n-k$个元素的一个划分, 故

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}, n\geq 1.$$

初始值$B_0=1, B_1=1$. 设B_n的指数型生成函数是$B(x)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}\right)x^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\frac{B_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n\geq k}\frac{B_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{i\geq 0}\frac{B_i x^i}{i!}\\&=e^xB(x)\end{aligned}$$

解微分方程, 得

$$B(x)=C\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$$

由初值条件得$C=\mathrm{e}^{-1}$, 即

$$B(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}$$

故

$$\begin{aligned}B(x)&=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^x)^k}{k!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^nx^n}{n!}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

从而$B_n=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$.

定理 12 令h_n表示多重集$S=\{n_1\cdot t_1,\dots,n_k\cdot t_k\}$,得满足某种选择规则$P$得$n-$排列数，其中$n_i\geq 0,1\leq i\leq k$，即仅由$t_i$组成的满足性质$P$的$n-$排列数为$a_n^{(i)}$，数列$\left\{a_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数为$f_i(x),1\leq i\leq k$，则数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数为

$$h(x)=\prod_{i=1}^{k}f_i(x).$$

证明 5 设$f_i(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j^{(i)}}{j!}x^j,1\leq i\leq k$，则

$$\begin{aligned}h_n&=\sum_{m_1+\ldots+m_k=n,0\leq m_i\leq n_i}\binom{n}{m_1,\dots,m_k}\prod_{i=1}^{k}a_{m_i}^{i}\\&=\sum_{m_1+\ldots+m_k=n,0\leq m_i\leq n_i}n!\frac{\prod_{i=1}^{k}a_{m_i}^{(i)}}{\prod_{i=1}^{k}m_i!}=\left[\frac{x^n}{n!}\right]\prod_{i=1}^{k}f_i(x).\end{aligned}$$

从而$h(x)=\prod_{i=1}^{k}f_i(x)$.

由上述定理可解决以下问题:

例 8 确定每位数字都是奇数且1和3出现偶数次的n位数个数h_n

解 7 设$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数为$h(x)$，则

$$\begin{aligned}h(x)&=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)^2\left(1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^3\\&=\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{e}^{3x}=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{5x}+2\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{x}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

故$h_n=\frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}$.

2.3 Dirichlet生成函数