# Chapter 4 特殊计数序列

## 目录

# 1 Catalan数, Dyck路, q-模拟和组合统计量

## 1.1 Catalan数

Catalan理论是计数组合学最经典的范畴之一, 也是当代研究的热点问题.

我们已在第二章定理8中研究过Catalan数的通项公式和生成函数. 下面我们正式地定义Catalan数.

**定义 1** *定义第$n$个**Catalan数**$C_n$为如下长度为$2n$的序列的个数: 序列由$n$个0和$n$个1组成, 且在任意起始序列(即由序列某一元素前的所有元素组成的序列)中, 0的个数大于或等于1的个数. 这样的序列称为n-Catalan序列(简称Catalan序列), 所有n-Catalan序列组成的集合记为$CW_n$.*

对于Catalan数,其满足下述性质.

**定理 1**

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i}.$$

*令$C(x)$表示$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数, 其中$C_0 = 1$, 则*

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

其证明在第二章定理8中给出. 其中对于Catalan数的通项公式, 我们可以用构造"补集"的方法证明.

**证明 1** $n$个0与$n$个1不加限制地排在一起, 共可组成$\binom{2n}{n}$个长度为$2n$的序列, 其中$C_n$个序列是Catalan序列, 其他序列称之为补序列.

对任意补序列$u = u_1 \ldots u_{2n}$, 存在一个最小的$k(1 \le k \le 2n-1)$, 使得在第$k$个位置之前的任意起始序列中, 0的个数都大于或等于1的个数, 但从$u_1$到$u_k$(包括)之间1的个数大于0的个数. 现在定义$\phi(u) = v = v_1v_2\ldots v_{2n}$, 其中

$$v_i = \begin{cases} 1-u_i, & i \le k, \\ u_i, & i > k \end{cases}$$

易知$u_1$到$u_k$之间1的个数为$\frac{k+1}{2}$, 0的个数为$\frac{k-1}{2}$, 从而 $v$中0的个数为$\frac{k+1}{2}+n-\frac{k-1}{2}=n+1$, 即$v$是由$n+1$个0与$n-1$个1拍成的序列, 于是$\phi$是将补序列映射到由$n+1$个0与$n-1$个1排成的序列的映射.

注意到每个由$n+1$个0和$n-1$个1组成的序列$v$, 存在一个最小的$k(1\leq k\leq 2n-1)$, 使得从$v_1$到$v_k$之间的0的个数第一次超过了1的个数, 把前$k$个位置的1换成0, 0换成1, 便恢复了补序列$u$, 且这种恢复方法是唯一的. 从而*phi*是双射.

由$n+1$个0和$n-1$个1排成的序列共有$\binom{2n}{n+1}$个, 故补序列有$\binom{2n}{n+1}$个, 从而*n*-*Catalan*序列的个数为

$$C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

## 1.2 高斯数与q-模拟

我们用一个例子引出一个组合数学中非常重要的概念.

**定理 2 高斯数**(**或高斯系数**,**高斯多项式**)*:* 任意取定素数幂$q$, 设$V_n(q)$是有限域$\mathbb{F}_q$上的一个$n$维线性空间, 则$V_n(q)$的$k$维子空间个数为

$$\frac{(q^n-1)\left(q^{n-1}-1\right)\dots\left(q^{n-k+1}-1\right)}{\left(q^k-1\right)\dots(q-1)}.$$

我们很快就会为高斯数找到一个更为简单的形式.

**证明 2** 令$V=V_n(q)$. $V$的任意一个$k$为子空间可由$V$中的线性无关向量组$\alpha_1,\dots,\alpha_k$生成, 而这样的有序向量组个数可如下计算: $\alpha_1$有$q^n-1$种取法($\alpha_1\neq 0$), $\alpha_2$有$q^n-1$种取法(与$\alpha_1$线性无关),$\dots$, $\alpha_k$有$q^n-q^{k-1}$种取法(与前面$k-1$个线性无关的向量线性无关), 共有$(q^n-1)(q^n-q)\dots\left(q^n-q^{k-1}\right)$个有序向量组. 另一方面, $V$的任意给定的$k$维子空间, 均可由其自身的线性无关向量组$\beta_1,\dots,\beta_k$生成, 由于这时此子空间中共有$q^k$个向量,与上类似地可得有序线性无关向量组$\beta_1,\dots,\beta_k$共有 $\left(q^k-1\right)\left(q^k-q\right)\dots\left(q^k-q^{k-1}\right)$个. 因此$V_n(q)$的$k$维子空间个数为

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\dots\left(q^n-q^{k-1}\right)}{\left(q^k-1\right)\left(q^k-q\right)\dots\left(q^k-q^{k-1}\right)}=\frac{(q^n-1)\left(q^{n-1}-1\right)\dots\left(q^{n-k+1}-1\right)}{\left(q^k-1\right)\dots(q-1)}.$$

证毕.

事实上, 一个有限向量空间的所有子空间的偏序集和一个有限集的所有子集的偏序集之间有许多相似, 我们可以从链的角度重述上述证明, 其留给读者思考.

我们引入如下定义.

**定义 2** ***q*-模拟或*q*-类似(*q-analog*):** 一个非负整数$n$的$q$-模拟即一函数$f(q)$, 其满足

$$\lim_{q\to 1} f(q) = n.$$

$q$-模拟常采用级数或多项式的形式. 我们定义

$$[n]_q = 1 + q + \ldots + q^{n-1}.$$

易知其为$n$的$q$-模拟. 简记为$[n]$. 类似地给出如下定义

$$[n]! = [1]\,[2]\ldots[n], \quad \binom{n}{k}_q = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}.$$

后者也称为***q*-二项式系数**. 更一般地, 定义***q*-多项式系数**:

$$\binom{n}{m_1,\ldots,m_k} = \frac{[n]!}{[m_1]!\ldots[m_k]!}.$$

易知它们分别是相应数的$q$-模拟.

根据上述定义, 高斯数有了一个更简单的形式$\binom{n}{k}_q$. 我们不难发现, 其实际上为一关于q的整系数多项式 (证明见附录, 特别地我们应注意到并不能根据高斯数的证明通过组合意义得到此结论), 这就是为什么它也被称为高斯多项式.

很多组合恒等式可以推广至q-模拟形式, 我们简单地举出一些留给读者.

**定理 3**

$$\binom{n}{k}_q = q^k \binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}.$$

**定理 4** ***q*-二项式定理:**

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + xq^i\right).$$

**定理 5** ***q-Vandermonde*恒等式**

$$\binom{m+n}{k}_q = \sum_{i=0}^{k} q^{(m-i)(k-i)} \binom{m}{i}_q \binom{n}{k-i}_q.$$

我们借助q-模拟, 在格路径理论中研究一些组合统计量. 我们先从非常熟悉的Catalan数开始.

**定义 3** 一条$n$阶***Dyck路***是从$(0,0)$到$(n,n)$的一条经过整点的格路径, 它由$n$个$(0,1)$步和$n$个$(1,0)$步构成, 且从不走到对角线$y=x$的下方. 令$\mathcal{D}_n$表示所有$n$阶*Dyck*路组成的集合.

我们容易发现, 在$n$阶Dyck路集$\mathcal{D}_n$和$n$-Catalan序列$CW_n$之间存在一一对应.

**定义 4** 对$\mathcal{D}_n$中的每条*Dyck*路$\Pi$, 可以定义统计量area, 表示$Pi$与主对角线$y=x$之间完全小方格的个数. 令$a_i(\Pi)$表示自下至上第$i$行里$\Pi$和主对角线之间的小方格个数, 称之为$\Pi$的第$i$行的长度, 称向量$(a_1(\Pi), a_2(\Pi), \ldots, a_n(\Pi))$为$\Pi$的**面积向量**, 则$\Pi$的area即为面积向量的各分量之和:

$$\operatorname{area}(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\Pi).$$

下图为一条以$(0,1,1,0,0,1)$为面积向量的6阶Dyck路的例子. Carlitz和Riordan引

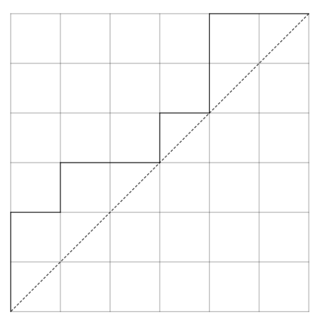


图 1: Dyck路$\Pi \in \mathcal{D}_6$, $\operatorname{area}(\Pi) = 3$

入了第$n$个Catalan数$C_n$的如下q-模拟:

$$C_n(q) = \sum_{\Pi \in \mathcal{D}_n} q^{\operatorname{area}(\Pi)},$$

并证明了下述结论.

**定理 6** 对任意正整数$n$, 有

$$C_n(q) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} C_k(q) C_{n-k}(q).$$

**证明 3** 对$\mathcal{D}_n$中的任意Dyck路$\Pi$, 令$h(\Pi)$表示沿$\Pi$从$(0,0)$出发后第一次回到主对角线时的高度, 点$(h(\Pi), h(\Pi))$把$\Pi$分成的两端Dyck路记为$\Pi_1, \Pi_2$. 易知$\Pi_1$必定经过$(0,1), (k-1,k)$, 其中$k = h(\Pi)$. 记$\Pi_1$中从$(0,1)$到$(k-1,k)$之间的部分为$\Pi_3$, 于是$1 \le k \le n, \Pi_1 \in \mathcal{D}_k, \Pi_2 \in \mathcal{D}_{n-k}, \Pi_3 \in \mathcal{D}_{k-1}$, 且

$$\operatorname{area}(\Pi) = \operatorname{area}(\Pi_1) + \operatorname{area}(\Pi_2) = k - 1 + \operatorname{area}(\Pi_3) + \operatorname{area}(\Pi_2).$$

从而

$$\begin{aligned}
C_n(q) &= \sum_{\Pi\in\mathcal{D}_n} q^{\operatorname{area}(\Pi)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\Pi\in\mathcal{D}_n, h(\Pi)=k} q^{\operatorname{area}(\Pi)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\Pi\in\mathcal{D}_n, h(\Pi)=k} q^{k-1+\operatorname{area}(\Pi)+\operatorname{area}(\Pi_2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \left( \sum_{\Pi_3\in\mathcal{D}_{k-1}} q^{\operatorname{area}(\Pi_3)} \cdot \sum_{\Pi_2\in\mathcal{D}_{n-k}} q^{\operatorname{area}(\Pi_2)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} C_{k-1}(q) C_{n-k}(q).
\end{aligned}$$

证毕.

从此定理中我们可以看到对Catalan数$C_n$的q-模拟的动机.

**定义 5** 对给定的*Catalan*序列$w$, 定义统计量maj如下:

$$\operatorname{maj}(w) = \sum_{i, w_i > w_{i+1}} i.$$

、

**定理 7**

$$\sum_{w\in CW_n} q^{\operatorname{maj}(w)} = \frac{1}{[n]} \binom{2n}{n}_q.$$

**证明 4** 我们将统计量maj推广至$0-1$序列$w = w_1 \dots w_{n+m}$中, 其中有$n$个0, $m$个1. 所有这样的序列的集合记为$S(n,m)$. 定义集合$S_+(n,m) \subseteq S(n,m)$, 其元素为$S(n,m)$中满足任意起始序列中0的个数不少于1的个数的所有序列. 定义$S_-(n,m) = S(n,m) \setminus S_+(n,m)$. 易知$CW_n = S_+(n,n)$.

我们先提出两个引理

**引理 *1***

$$\sum_{w\in S(m,n)} q^{\operatorname{maj}(w)} = \binom{m+n}{n}_q.$$

**引理的证明 *1*** 略.

**引理 *2*** *存在双射$\varphi : S_-(n,n) \to S(n+1,n-1)$, 其满足*

$$\mathrm{maj}(\varphi(w)) = \mathrm{maj}(w) - 1.$$

**引理的证明 *2*** 对任意格路径$w \in S_-(n,n)$, 考虑其首个最"深"的点(即以该元素的起始序列中1的个数比0个数多最多的位置. 易知此位置元素为1), 记为$P$, 记$w$中$P$之前的点为$P'$. 我们将线段$P'P$翻折向上, 之后的部分向上平移, 得到格路径$\varphi(w) \in S(n+1,n-1)$. 从序列的角度描述即为将此位置的1变为0, 其余元素不变. 我们易知$\mathrm{maj}(\varphi(w)) = \mathrm{maj}(w) - 1$.

对于这样的映射$\varphi : S_-(n,n) \to S(n+1,n-1)$, 我们由其定义方式知其为单射. 另一方面, 对任意$w' \in S(n+1,n-1)$, 我们考虑其最后一个最"深"的点, 记为$P'$, 我们可以类似地映射至$S_-(n,n)$中的元素. 这样的映射也是单射.

综上, 存在这样的双射$\varphi$, 其满足所需的性质. 证毕.

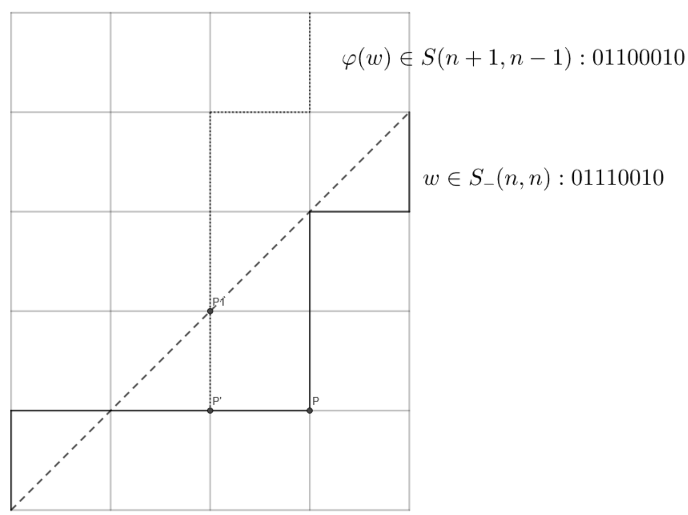



图 2: 双射$\varphi$示意

回到原题, 由引理有

$$\sum_{w \in S_-(n,n)} q^{\mathrm{maj}(w)} = \sum_{w' \in S(n+1,n-1)} q^{\mathrm{maj}(w')+1} = q\binom{2n}{n+1}_q.$$

从而

$$\sum_{w\in CW_n} q^{\operatorname{maj}(w)} = \sum_{w\in S_+(n,n)} q^{\operatorname{maj}(w)} = \sum_{w\in S(n,n)} q^{\operatorname{maj}(w)} - \sum_{w\in S_-(n,n)} q^{\operatorname{maj}(w)} = \binom{2n}{n}_q - q\binom{2n}{n+1}_q = \frac{1}{[n+1]}\binom{2n}{n}_q.$$

证毕.

**组合统计量**是指从所考虑的组合对象的集合$A$到自然数集$\mathbb{N}$的映射, 这种映射是有组合意义的赋值. 组合统计量是现代组合学的核心观念之一.

下面我们在更一般的词集上给出一些组合统计量的定义.

**定义 6** 定义词$w = w_1w_2\ldots$上的组合统计量inv, maj如下:

$$\operatorname{inv}(w) = \sum_{i<j, w_i>w_j} 1, \quad \operatorname{maj}(w) = \sum_{i, w_i>w_{i+1}} i.$$

下面用$P_n$表示字符集$[n]$上所有长度为$n$的不含重复字符的词的集合, 它是最常被考虑的对象集.

**定理 8**

$$\sum_{\sigma\in P_n} q^{\operatorname{inv}(\sigma)} = [n]! = \sum_{\sigma\in P_n} q^{\operatorname{maj}(\sigma)}.$$

**证明 5** *LHS:* 对$P_n$中的任意词$\sigma$, 令$h(\sigma)$表示$\sigma$中字符$n$右侧的字符个数, 并将$\sigma$去掉$n$后所得词记为$\sigma_1$, 则$0 \le h(\sigma) \le n-1, \sigma_1 \in P_{n-1}, \operatorname{inv}(\sigma) = h(\sigma) + \operatorname{inv}(\sigma_1)$. 从而

$$\sum_{\sigma\in P_n} q^{\operatorname{inv}(\sigma)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma\in P_n, h(\sigma)=k} q^{\operatorname{inv}(\sigma)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma_1\in P_{n-1}} q^{k+\operatorname{inv}(\sigma_1)} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k \sum_{\sigma_1\in P_{n-1}} q^{\operatorname{inv}(\sigma_1)} = [n] \sum_{\sigma_1\in P_{n-1}} q^{\operatorname{inv}(\sigma)}$$

故归纳可得

$$\sum_{\sigma\in P_n} q^{\operatorname{inv}(\sigma)} = [n][n-1]\ldots[2] \sum_{\sigma\in P_1} q^{\operatorname{inv}(\sigma)} = [n]!.$$

*RHS:*将字符$n$依次插入$P_{n-1}$中任意词$\tau$的$n$个位置时, 所得词的maj的增量恰为$0, 1, \ldots, n-1$的一个遍历, 因此归纳地有

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in P_n} q^{\operatorname{maj}(\sigma)} &= \sum_{\tau\in P_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} q^{\operatorname{maj}(\tau)+i} = \sum_{\tau\in P_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} q^i q^{\operatorname{maj}(\tau)} = \sum_{\tau\in P_{n-1}} q^{\operatorname{maj}(\tau)} \sum_{i=0}^{n-1} q^i \\ &= [n] \sum_{\tau\in P_{n-1}} q^{\operatorname{maj}(\tau)} [n] \cdot [n-1]! = [n]!\end{aligned}$$

证毕.

为了纪念MacMahon, 若定义在$P_n$上的组合统计量$f$满足

$$\sum_{\sigma\in P_n} q^{f(\sigma)} = [n]!,$$

则称$f$为**Machonian**的.

我们可以在一般地词集上对上述定理进行推广.

**定理 9** 设$\alpha = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k, n = \sum_{i=1}^k m_i$. 令$M_\alpha$表示多重集$\{m_1 \cdot 1, \ldots, m_k \cdot k\}$上的所有全排列, 则

$$\sum_{w\in M_\alpha} q^{\mathrm{inv}(w)} = \binom{n}{m_1, \ldots, m_k}_q = \sum_{w\in M_\alpha} q^{\mathrm{maj}(w)}.$$

**证明 6** *LHS:* 注意从$P_{m_1} \times \ldots \times P_{m_k} \times M_\alpha$到$P_n$之间有一个明显的双射, 其满足

$$\sum_{i=1}^k \mathrm{inv}\left(\sigma_i\right) + \mathrm{inv}\left(w\right) = \mathrm{inv}\left(\sigma\right),$$

其中$\sigma_i \in P_{m_i}, (1 \le i \le k), w \in M_\alpha, \sigma \in P_n$, 从而易知.

*RHS:* 由

$$\binom{n}{m_1, \ldots m_k}_q = \binom{m_1}{m_1}_q \binom{m_1+m_2}{m_2}_q \cdots \binom{n}{m_k}_q$$

并注意到每个$w \in M_{(m_1,\ldots,m_{k-1})}$对应$\binom{n}{m_1+\ldots+m_{k-1}, m_k}$个$M_\alpha$中的$w'$, 其中每个$w'$去掉文字$k$后就降落到$w$, 下归纳地完成证明. 一般地, 设$\mathrm{maj}^*\left(w'\right) := \mathrm{maj}\left(w'\right) = \mathrm{maj}\left(w\right)$, 下证

$$\sum_{w'} q^{\mathrm{maj}^*(w')} = \binom{l+m_k}{l, m_k},$$

其中$w$在$M_{(m_1,\ldots,m_{k-1})}$中任意取定, $l = m_1 + \ldots + m_{k-1}, w' \in M_{(m_1,\ldots,m_{k-1},m_k)}$, 且当$w'$去掉所有的$m_k$个文字$k$后降落到$w$.

下同时对$l$和$m_k$归纳. 根据最后一个$k$出现的位置分为两部分: *(i)*若$w'_{l+m_k} = k$, 根据归纳假设, 有

$$\sum_{w'} q^{\mathrm{maj}^*(w')} = \binom{l+m_{k-1}}{l, m_k-1}_q.$$

*(ii)*若$w'_{l+m_k} \le k-1$, 可以验证(根据$w_{l-1} > w_l$和$w_{l-1} \le w_l$两种情况讨论, 结论相同, 留给读者)

$$\sum_{w'} q^{\mathrm{maj}^*(w')} = \binom{l-1+m_k}{k-1, m_k}_q q^{m_k}.$$

综合*(i)*,*(ii)*, 由$\binom{l+m_k-1}{m_{k-1}}_q + \binom{l-1+m_k}{m_k} q_q^{m_k} = \binom{l+m_k}{m_k}_q$ 可得原结论成立. 证毕.

特别地, 在这里取$k=2$可得

$$\sum_{w\in M_\alpha} q^{\mathrm{inv}(w)} = \binom{n}{m_1, m_2}_q = \sum_{w\in M_\alpha} q^{\mathrm{maj}(w)}.$$

这正是在定理7中的引理1所需要的结果.

我们在上文证明定理7的时候提出过格路径. 下面正式给出定义

**定义 7** 一条$(m,n)$**格路径**是从$(0,0)$到$(m,n)$的一条经过整点的格路径, 它由$n$个$(0,1)$步和$m$个$(1,0)$步构成. 令$\mathcal{L}_{m,n}$表示所有$(m,n)$格路径组成的集合.

我们定义格路径$L\in\mathcal{L}_{m,n}$的area统计量. 对$L\in\mathcal{L}_{m,n}$, 其面积向量的第$i$个分量$a_i(L)$即在自下而上的第$i$行里$L$与纵坐标轴$x=0$之间的小方格数, 同样有

$$\mathrm{area}(L) = \sum_{i=1}^{n} a_i(L).$$

**定理 10**

$$\sum_{L\in\mathcal{L}_{m,n}} q^{\mathrm{area}(L)} = \binom{m+n}{n}.$$

**证明 7** 每个$L\in\mathcal{L}_{m,n}$对应一个$w_L\in M_{(n,m)}$, 且

$$\mathrm{area}(L) = \mathrm{inv}(w_L).$$

从而易知原结论成立. 证毕.

我们下面关注一些Eulerian类的组合统计量.

**定义 8** 对$w=w_1w_2\ldots w_n\in P_n$, 称

$$\mathrm{DES}(w) := \{i \mid w_i > w_{i+1}\}$$

为词$w$的**降位集**.

$$\mathrm{des}(w) := |\mathrm{DES}(w)|$$

称为词$w$的**降位数**.

根据降位集的大小作划分, 设$A_{n,k} = \{\sigma\in P_n \mid \mathrm{des}(\sigma)=k-1\}, a_{n,k} = |A_{n,k}|$. 容易看出

$$a_{n,k} = a_{n,n-k+1}, \quad a_{n,k} = k a_{n-1,k} + (n-k+1) a_{n-1,k-1}, a_{n,1} = 1.$$

经典的**Eulerian多项式**即

$$E(x)=\sum_{\sigma\in Pn}q^{1+\mathrm{des}(\sigma)}=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}q^{k}.$$

下面考虑降位集DES受到限制时统计量inv的分布.

**定理 11** 令$D=\{d_1,\ldots,d_k\}\subseteq\{1,\ldots,n-1\}$, 则当降位集限制为$D$的子集时,有

$$\sum_{\mathrm{DES}(\sigma)\subseteq D}q^{\mathrm{inv}(\sigma)}=\binom{n}{\Delta(D)}_q,$$

其中$\Delta(D)$表示$d_1,d_2-d_1,\ldots,d_k-d_{k-1},n-d_k$.

**证明 8** 略.

由此定理和偏序集上的Mobius反演可得以下推论

**定理 12**

$$\sum_{\mathrm{DES}(\sigma)=I}q^{\mathrm{inv}(\sigma)}=\sum_{D\subseteq I}(-1)^{|I|-|D|}\binom{n}{\Delta(D)}_q.$$

# 2 Schroder数, Schroder路

Schroder数$S_n$技术了$n$阶Schroder路, 其中我们特别关心恰有$d$个对角线步的Schroder路. 我们首先给出定义.

**定义 9** 一条$n$阶***Schroder路***是从$(0,0)$到$(n,n)$的经过整点的格路径, 它的每一步是$(0,1)$, $(1,0)$或$(1,1)$之一, 且从不走到主对角线之下. 令$\mathcal{S}_n$表示所有$n$阶*Schroder*路组成的集合, $S_n=|\mathcal{S}_n|$, 令$\mathcal{S}_{n,d}$表示恰好含$d$个对角线步的所有$n$阶*Schroder*路组成的集合, $S_{n,d}=\left|\mathcal{S}_{n,d}\right|$.

考察Schroder数和Catalan数的联系, 易知将一个含$d$步对角线步的$n$阶Schroder路去掉所有对角线步后, 得到一个$n-d$阶Catalan路, 且这$d$个对角线步在$n$阶Schroder路中的位置共有$\binom{2n-d}{d}$种方式 (含$d$个对角线步的$n$阶Schroder路共有$2n-d$步), 从而

$$S_{n,d}=\binom{2n-d}{d}C_{n-d}=\frac{1}{n-d+1}\binom{2n-d}{n-d,n-d,d}$$

且

$$S_n=\sum_{d=0}^{n}S_{n,d},\quad S_{n,0}=C_n.$$

**定理 13** *Schroder*数的普通生成函数$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$为

$$G(x)=\frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2x}.$$

**证明 9** 留给读者完成.

对$\Pi\in\mathcal{S}_{n,d}$, 用0表示(0,1)步, 1表示(1,1)步, 2表示(1,0)步, 就得到了由0,1,2组成的序列, 其中由$n-d$个0, $d$个1, $n-d$个2, 且在任意起始序列中, 0的个数不少于2的个数, 这种序列称为$(n,d)$-**Schroder列**(简称为**Schroder列**).

对每个$(n,d)$-Schroder列, 由前面至可以定义统计量maj, 可以认为这就是该Schroder列对应的Schroder路的统计量. 在1993年的一篇经典论文中, Bonin,

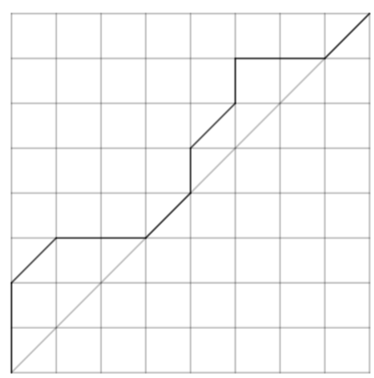


图 3: 一条Schroder路$\Pi\in\mathcal{S}_{8,4}$, $\mathrm{maj}(\Pi)=30$

Shapiro和Simion证明了下面的结果

**定理 14**

$$\sum_{\Pi\in\mathcal{S}_{n,d}}q^{\mathrm{maj}(\Pi)}=\frac{1}{[n-d+1]}\binom{2n-d}{n-d,n-d,d}_q.$$

**证明 10** 略

如果去掉"从不走到主对角线之下"的要求, 那么从(0,0)到$(n,n)$的每一步是$(0,1)$, $(1,0)$或$(1,1)$ *K*Γ的格路径, 称为一条$n$阶**正Delannoy路**. 一般地, 因为不需要主队交心啊的概念, 一条**Delannoy路**可以是从(0,0)到$(m,n)$的, 称其中恰有$d$个对角

线步的Delannoy路的数目为关于参数$(m,n,d)$的Delannoy数, 记为$D(m,n,d)$. 易知

$$D(m,n,d)=\binom{m+n+d}{m-d,n-d,d}.$$

我们注意到$S_{n,d}$与$D(n,n,d)$的关系和$C_n$与$\binom{2n}{n}$的关系有一个有趣的对应.

格路径是当代组合数学中重要的研究对象. 在格路径上引入操作, 可以与Parking函数产生联系.

**定义 10** *假设单行线上依次排列$n$个停车位$1,2,\ldots,n$(行驶方向为从车位1到车位$n$). 现在有$n$辆汽车$C_1,\ldots,C_n$依次试图停车, 每辆车$C_i$有一个最喜欢的停车位$a_i$, 停车时首先开到这个车位, 如果还空着就停在那里, 否则继续行驶停在下一个还空着的车位(否则驶离). 如果序列$P=a_1\ldots a_n$使得每辆汽车都有位子可停, 则称$P$为一个$n$元**Parking函数**. 所有$n$元Parking函数组成的集合为$\mathcal{P}_n$.*

**定理 15** *序列$a_1\ldots a_n$是Parking函数, 当且仅当其按照升序重排后的序列$b_1\ldots b_n$满足对任意$i\in[n]$, 有$b_i\leq i$.*

**证明 11** *在一个环形单行线上考虑类似的停车问题. 设$n+1$个停车位$1,2,\ldots,n+1$在环行线依顺时针排列 (车位1与车位$n+1$相邻), 行驶方向为顺时针方向. $n$辆汽车$C_1,\ldots,C_n$依次从车位1处驶入试图停车, 每辆车$C_i$有一个最喜欢的车位$1\in[n]m$ 停车时首先开到这个车位, 如果还空着就停在那里, 否则继续行驶至下一个还空着的车位. 因为可循环下去, 易知在这种方式下每辆汽车均有位子停, 且序列$P=a_1\ldots a_n$使得在原单行线上每辆汽车都有位子可停, 当且仅当现在停车方式下所有汽车停车后, 车位$n+1$没有汽车停.*

*注意到条件$b_i\leq i$等价于偏好车位$1,2,\ldots,i$之一的汽车至少有$i$辆, 从而原命题等价于汽车在环线上停车后车位$n+1$没有汽车停, 当且仅当对任意$i\in[n]$, 偏好车位$1,2,\ldots,i$之一的汽车至少有$i$辆. 下面证明这个结论.*

*充分性: 假设对任意$i\in[n]$, 偏好车位$1,2,\ldots,i$之一的汽车至少有$i$辆, 且此式所有汽车在环线上停车后车位$n+1$有汽车停, 则在环线上必有空车位$i$始终无车停, 从而偏好车位$1,2,\ldots,i-1$之一的汽车均停在车位$1,2,\ldots,i-1$中, 否则车位$i$必有车停. 又因车位$i$无车知没有偏好车位$i$的汽车, 从而偏好车位$1,2,\ldots,i$的汽车至多有$i-1$辆, 与假设矛盾. 从而假设不成立, 充分性证毕.*

*必要性: 假设序列$P=a_1\ldots a_n$使得所有汽车在环线上停车后车位$n+1$没有汽车停, 则对任意$i\in[n]$, 车位1到车位$i$均已停满, 从而偏好车位$1,2,\ldots,i$的汽车至少有$i$辆 (否则车位1到车位$i$至多停$i-1$辆车, 与前矛盾). 必要性证毕.*

综合两方面知结论成立.

**定理 16** $n$元*Parking*函数的个数为

$$\mathrm{Park}\,(n) = (n+1)^{n-1}\,.$$

**证明 12** 将上述过程中的停车方式稍加改变: 对任意$i \in [n]$, 汽车$C_i$最喜欢的车位$a_i \in [n+1]$, 其余停车方式与线路均不变. 在此停车方式下, 易知序列$P = a_1 \dots a_n$是Parking函数当且仅当$n$辆汽车均停车后车位$n+1$空出. 所有满足$i \in [n]\,, a_i \in [n+1]$的序列$a_1 \dots a_n$共有$(n+1)^n$个, 且每个序列对应的停车方式中, 最后必会空出某个车位. 注意到圆周的对称性, 空出任一车位的可能性是均等的, 从而最后使得车位$n+1$空出的序列个数为

$$\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1}\,,$$

即$n$元*Parking*函数的个数为$(n+1)^{n-1}$.

注意到以上结果$(n+1)^{n-1}$正是$\{0, 1, \dots, n\}$上的标记树的个数. 我们在之后的章节会提到.

相关文献中介绍了一种通过Dyck路构造Parking函数的方法. 一个Parking函数可以这样得到: 在Dyck路$D$的每个单位垂直线段($(0,1)$步)的右侧方格放上汽车 $1, 2, \dots, n$(分别代表先前的汽车$C_1, \dots, C_n$)中的一个, 唯一的限制是若汽车$i$放在汽车$j$的正上方, 则必须满足$i > j$.

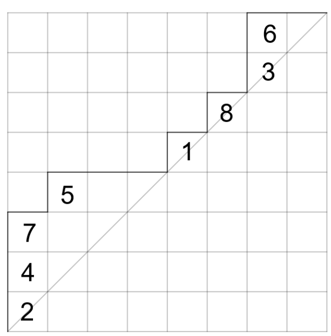



图 4: $\mathcal{P}_8$中的一个Parking函数的例子, 其序列表示形式为51712716

应注意到Parking函数的要求其实暗含了Dyck路的要求, 即所谓的"Catalan性质"这一广泛发生的组合数学现象. Parking函数的以上表示可以看作在Dyck路上赋予了更丰富的结构.

**定义 11** 设$\hat{s} = s_1 \dots s_n$是整数序列, 若其不减重排$z_1 \dots z_n$满足对所有的$1 \le i \le n$ 有$i \le z_i \le n$, 则称$\hat{s}$为**主序列**. 用$\mathbb{M}_n$ 表示所有长度为$n$的主序列组成的集合.

**定义 12** 在主序列$\hat{s} = s_1 \dots s_n$上定义统计量area:

$$\operatorname{area}(\hat{s}) = \sum_{i=1}^{n} s_i - \binom{n+1}{2}.$$

还可以定义主序列的area**计数多项式**:

$$M_n(q) = \sum_{\hat{s} \in \mathbb{M}_n} q^{\operatorname{area}(\hat{s})}.$$

**定理 17** 设$D(P)$表示*Parking*函数$P$通过前述"放汽车"的方式所对应的*Dyck*路, 令

$$R_n(q) = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} q^{\operatorname{are}(D(P))},$$

则有$R_n(q) = M_n(q)$.

**证明 13** 根据定义不难验证. 留给读者完成.

# 3　第一类, 第二类Stirling数

**定义 13** 对于正整数$n, k$, 定义$c(n,k)$为$n$元对称群$S_n$中恰含$k$个轮换(即恰可写成$k$个不交轮换的乘积)的置换个数(不动点也看做一个轮换). 称$s(n,k) = (-1)^{n-k} c(n,k)$为**第一类*Stirling*数**, 也常称$c(n,k)$为**无符号的第一类*Stirling*数**.

令$c(0,0) = 1, c(n,0) = c(0,n) = 0, n \ge 1$.

**引理 3** 对任意$n \ge 1, k \ge 1, c(n,k)$满足下述递推关系

$$c(n,k) = (n-1)\,c(n-1,k) + c(n-1,k-1).$$

**引理的证明 3** 设置换$\sigma$是$S_n$中恰有$k$个轮换的置换. 若$\sigma(n) = n$, 则$n$在$\sigma$中为一个单独的轮换, 从而这样的$\sigma$个数为$c(n-1,k-1)$. 若$\sigma(n) \ne n$, 则将轮换$\sigma$中的$n$去掉得到$S_{n-1}$中含$k$个轮换的置换. 又将$n$插入$S_{n-1}$中含$k$个轮换的置换时, 可得到$n-1$个$S_n$中含$k$个轮换的置换, 从而这样的$\sigma$的个数等于$(n-1)\,c(n-1,k)$. 因此

$$c(n,k) = (n-1)\,c(n-1,k) + c(n-1,k-1).$$

**定理 18** $\{c(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$满足如下的函数方程:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c(n,k)\,x^k = x(x+1)\dots(x+n-1)\,.$$

**证明 14** 对$n$归纳. 当$n=1$时, 命题即$x=x$, 显然成立.

设$n \ge 2$且命题对$n-1$成立, 则对$n$由归纳假设即$c(n,k)$的递推性质可知对任意$1 \le k \le n$有

$$\begin{aligned}\left[x^k\right] x(x+1)\dots(x+n-1) &= \left[x^k\right] x(x+1)\dots(x+n-2)\,x + (n-1)\left(\left[x^k\right] x(x+1)\dots(x+n-2)\right)\\ &= \left[x^{k-1}\right] x(x+1)\dots(x+n-2) + (n-1)\left(\left[x^k\right] x(x+1)\dots(x+n-2)\right)\\ &= c(n-1,k-1) + (n-1)\,c(n-1,k) = c(n,k)\,.\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)\,x^k = x(x+1)\dots(x+n-1)\,.$$

即命题对$n$成立. 由归纳原理, 命题对一切正整数$n$成立. 证毕.

很多情况下, 第一类Stirling数$s(n,k)$往往比无符号的第一类Stirling数$c(n,k)$更容易处理. 我们在后面会发现这一点. 对于$\{s(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$我们有相应的定理.

**定理 19** $\{s(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$满足如下的函数方程:

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)\,x^k = (x)_n\,,$$

其中$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

**证明 15** 略. 留给读者完成.

**定义 14** 对于正整数$n,k$, 定义$S(n,k)$为把$[n]$分成$k$个非空子集的划分个数, 称为***第二类Stirling数***.

令$S(n,0) = S(0,n) = 0\ (n \ge 1), S(0,0) = 1$.

第二类Stirling数与第一类Stirling数有着对偶的递推关系.

**引理 4** 对于任意$n \ge 1, k \ge 1$, 第二类*Stirling*数$S(n,k)$满足如下递推关系:

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)\,.$$

**引理的证明 4** 证明与第一类*Stirling*数思路相同. 留给读者完成.

**定理 20** $\{S(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$满足如下的函数方程:

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k = x^n.$$

其中$(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$.

**证明 16** 略. 留给读者完成.

在这里提供一个组合意义的证明: 设$x$为一个正整数, 则存在$x^n$个从$[n]$到$[x]$的映射; 对$[x]$的每一个$k$-子集$Y$, 有$k!S(n,k)$个从$[n]$到$Y$的满射, 从而

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{x}{k} k! S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k .$$

下面我们关注两类Stirling数的联系.

**定理 21** 由两类*Stirling*数, 定义$n$阶矩阵$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m} := (s(i,j))_{n\times n}, \mathbf{B} = \left(b_{ij}\right)_{n\times n} := (S(i,j))_{n\times n}$, 则

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

**证明 17** 考虑复数域上次数小于$n+1$且常数项为0的多项式关于加法和数量乘法构成的线性空间

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\right\}.$$

$\left\{x, x^2, \dots, x^n\right\}, \{(x)_1, (x)_2, \dots, (x)_n\}$为其两组基, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$恰为这两组基之间的过渡矩阵(或过渡矩阵的转置, 视定义方式而定).

从而立即有以下推论

**定理 22** 两类*Stirling*数满足如下关系式:

$$\sum_{l=1}^{n} s(i,l) S(l,j) = \delta(i,j), \quad \sum_{l=1}^{n} S(i,l) s(l,j) = \delta(i,j).$$

我们下面通过容斥原理得到$S(n,k)$的显式公式.

**定理 23** 对任意正整数$n, k$, 有

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} j^n (-1)^{k-j}.$$

**证明 18** 构造$k$个有标记的"篮子", 将$[n]$中的元素分到这$k$个有区别的"篮子"里, 用$S$表示这样的分法的集合, 显然$|S| = k^n$. 对任意$1 \le i \le k$, 定义$P_i$为性质:第$i$个"篮子"是空的. $A_i$是$S$中满足性质$P_i$的分法组成的集合, $\mathcal{P}$是所有这些性质组成的集合, 则

$$S(n,k) = \frac{\left|\left\{A \in S \mid A\text{不满足}\mathcal{P}\text{中的任何性质}\right\}\right|}{k!} = \frac{\left|\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_k}\right|}{k!}.$$

注意到对任意$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le k$, $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}$表示的意义是$S$中满足性质$P_{i_1}, \ldots, P_{i_s}$的分法组成的集合. 在这些分法中, 标号为$i_1, \ldots, i_s$的"篮子"为空, 所有元素只能放进其余$k-s$个"篮子"中, 从而$\left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s}\right| = (k-s)^n$. 由容斥原理得

$$\begin{aligned}
k!S(n,k) &= |S| - \sum_i |A_i| + \ldots + (-1)^k |A_1 \cap \ldots \cap A_k| \\
&= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (k-r)(-1)^r \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} j^n (-1)^{k-j}.
\end{aligned}$$

回忆第$n$个Bell数$B_n$, 其表示$[n]$的所有划分个数, 由上述讨论即得

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} j^n (-1)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j^n}{j!} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{(k-j)!} (-1)^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{j^n}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{1}{i!} (-1)^i \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j^n}{j!} \exp|_{n-j}(-1).
\end{aligned}$$

对比最初的结果

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

其更加便于计算. 现在可以找到第二类Stirling数的指数型生成函数.

**定理 24** $\{S(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n,k)}{n!} x^n = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

**证明 19**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(n,k)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}j^{n}(-1)^{k-j}\frac{x^{n}}{n!}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}\sum_{n=0}^{\infty}j^{n}\frac{x^{n}}{n!}$$
$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}\mathrm{e}^{jx}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\mathrm{e}^{x})^{j}(-1)^{k-j}$$
$$=\frac{1}{k!}(\mathrm{e}^{x}-1)^{k}.$$

对于第一类Stirling数, 其生成函数不易求得. 我们可以通过两类Stirling数的关系得到. 我们现在考虑以下事实.

**定理 25** 令$A(x)$, $B(x)$分别表示数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数, 则下列三个命题等价:

(1)对任意$n\geq 0$, 有$b_n=\sum_{i=0}^{n}S(n,i)a_i$;

(2)对任意$n\geq 0$, 有$a_n=\sum_{i=0}^{n}s(n,i)b_i$;

(3)$B(x)=A(\mathrm{e}^x-1)$, 也即$A(x)=B(\ln(1+x))$.

**证明 20** 若(2)成立, 则由定理22有

$$\sum_{j=0}^{n}S(n,j)a_j=\sum_{j=0}^{n}S(n,j)\sum_{i=0}^{j}s(j,i)b_i=\sum_{i=0}^{n}b_i\sum_{j=i}^{n}S(n,j)s(j,i)=\sum_{i=0}^{n}b_i\sum_{j=1}^{n}S(n,j)s(j,i)$$
$$\sum_{i=0}^{n}b_i\delta(n,i)=b_n,$$

即(1)成立. 同理, 若(1)成立, 则(2)成立. 从而(1)与(2)等价.

若(1)成立, 由定义有

$$\begin{aligned}B(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}S(n,i)a_i\frac{x^n}{n!}=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\sum_{n\geq i}S(n,i)\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\sum_{n\geq 0}S(n,i)\frac{x^n}{n!}=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\frac{(\mathrm{e}^x-1)^i}{i!}=A(\mathrm{e}^x-1).\end{aligned}\tag{1}$$

从而(3)成立. 易见推导过程可逆, 从而(1)与(3)等价.

综上, (1),(2),(3)等价.

**定理 26** $\{s(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s(n,k)}{n!}x^n=\frac{(\ln(1+X))^k}{k!}.$$

**证明 21** 略. 留给读者完成.

# 4 分拆数

**定义 15** 对任意正整数$n$, 将其写成递降的正整数和的一个表示:

$$n = r_1 + r_2 + \ldots + r_k, r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_k \geq 1.$$

称之为$n$的一个**分拆**, 和式中的每个正整数称为一个**部分**. 令$p(n)$表示$n$的所有分拆个数, $p(n,k)$表示其中恰有$k$个部分的分拆个数.

例如,5有7种分拆形式

$$5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

从而$p(5) = 7$. 此外有$p(5,3) = 2$.

**定理 27** 数列$\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数为

$$\tilde{p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}.$$

**证明 22** 对任意非负整数$n$, 易知$\prod_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(x^i\right)^j$ 对$x^n$的每一个贡献对应了$n$的一个分拆:

$$n = j_{i_1} i_1 + j_{i_2} i_2 + \ldots + j_{i_s} i_s,$$

其中$i_1 > i_2 > \ldots > i_s \geq 1, j_{i_1}, \ldots, j_{i_s} \geq 1$, 而

$$k = j_{i_1} + \ldots + j_{i_s}.$$

即该分拆的部分数. 从而

$$p(n) = [x^n] \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(x^i\right)^j = [x^n] \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}.$$

从而数列$\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数为

$$\tilde{p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}.$$

**定理 28** 对任意正整数$n$, $n$的奇分拆(每个部分都是奇数)后地个数等于互异分拆(各部分互不相同)的个数.

**证明 23** 略. 留给读者完成.

我们在前面提到q-二项式系数(即高斯多项式)$\binom{r}{k}_q$. 下面我们类似广义二项式系数地将$r$地定义范围推广至$\mathbb{R}$, 这对研究分拆理论很有帮助.

**定义 16** 设$r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, 定义推广了的$q$-二项式系数如下:

$$\binom{r}{k}_q = \begin{cases} \frac{\left(q^{r-k+1};q\right)_k}{(q;q)_k}, & k \geq 1, \\ 1, & k = 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

其中$(a,q)_k := (1-a)(1-qa)\ldots\left(1-q^{k-1}a\right)$ 称为$q$-**升阶乘**. 为避免冗赘, 仍将$\binom{r}{k}$称为$q$-二项式系数. 记$[r] = [r]_q = \binom{r}{1}_q$.

容易验证这种定义在$r$取非负值时确实与前面的定义吻合.

令$(a;q)_\infty = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\ldots$, 则$\{p(n)\}_{n=0}^\infty$的普通生成函数为

$$\sum_{n=0}^\infty p(n)\, x^n = \prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1-x^i} = \frac{1}{(x;x)_\infty}.$$

**定理 29**

$$\sum_{n,k=0}^\infty p(n,k)\, x^n y^k = \prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1-x^i y} = \frac{1}{(xy;x)_\infty}.$$

**证明 24** 由于

$$\prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1-x^i y} = \prod_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty \left(x^i y\right)^j\right),$$

故对于任意非负整数$n,k$, 易知$\prod_{i=1}^\infty\left(\sum_{j=0}^\infty\left(x^i y\right)^j\right)$ 对$x^n y^k$的每一个贡献对应了$n$的一个分拆:

$$n = j_{i_1} i_1 + \ldots + j_{i_s} i_s,$$

其中$i_1 > i_2 > \ldots > i_s \geq 1, j_{i_1}, j_{i_2}, \ldots, j_{i_s} \geq 1$, 而

$$k = j_{i_1} + \ldots + j_{i_s}$$

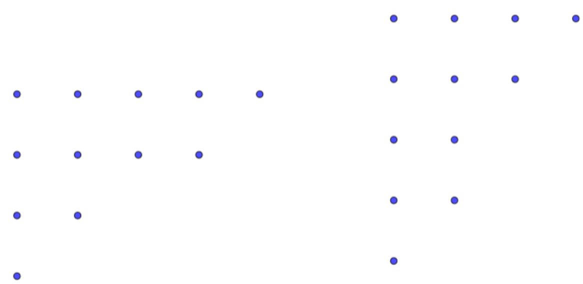
记为分拆的部分数. 故

$$p(n,k) = \left[x^n y^k\right] \prod_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty \left(x^i y\right)^j\right),$$

从而

$$\sum_{n,k=0}^\infty p(n,k)\, x^n y^k = \prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1-x^i y} = \frac{1}{(xy;x)_\infty}.$$

很多有关分拆的定理可以用Ferres图来证明. 一个分拆的**Ferres图**, 实质把分拆的每一项用点组成的行来表示, 其中每一行的点的个数即此行所表示的项的大小. 每个分拆都可用一个Ferres图表示, 每个Ferres图表示一个分拆. 通过都一个Ferres图的列得到的分拆称为原分拆的**共轭**.



(a) 分拆$12 = 5 + 4 + 2 + 1$　　(b) 左分拆的共轭

图 5: 分拆的Ferres图及其共轭

**定理 30** *最大部分为$k$的$n$的分拆个数等于$p(n,k)$.*

**证明 25** *考察Ferres图共轭即可.*

下面考察分拆数$p(n)$的普通生成函数的逆

$$\tilde{p}(x)^{-1} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - x^i\right).$$

在这个乘积的展开式中, 若$n$的互异分拆中其部分个数为偶数, 则其对$x^n$贡献为1; 若部分的个数为奇数, 则其贡献为$-1$. 从而它的$x^n$的系数为$p_e(n) - p_o(n)$, 其中$p_e(n)$和$p_o(n)$分别是$n$分成偶数个或奇数个部分的互异分拆数.

注意到$n$的互异分拆个数为$p_e(n)+p_o(n)$, 其普通生成函数为$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + x^i\right)$.

Euler证明了除了$n = \omega(m) = \frac{3m^2-m}{2}$和$n = \omega(-m) = \frac{3m^2+m}{2}$外, 都有$p_e(n) = p_o(n)$, 而当$n = \omega(m) = \frac{3m^2-m}{2}$或$n = \omega(-m) = \frac{3m^2+m}{2}$时, 有

$$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^m.$$

因为$\omega(m) = \sum_{k=0}^{m-1}(3k+1)$, 所以数 $\omega(m)$和$\omega(-m)$ 有时也成为**五角星数**.

**定理 31**

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-x^{i}\right)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\left(x^{\omega(m)}+x^{\omega(-m)}\right).$$

**证明 26** 考察$n$的一个互异分拆的*Ferres*图, 其最后一行称为这个图的**底**, 底上的点的个数记为$b$; 连接此图最上面一行的最后一个点与这个图中某一点的最长的45°角线段称为这个图的**坡**, 坡中点的个数记为$s$. 下面再这个*Ferres*图

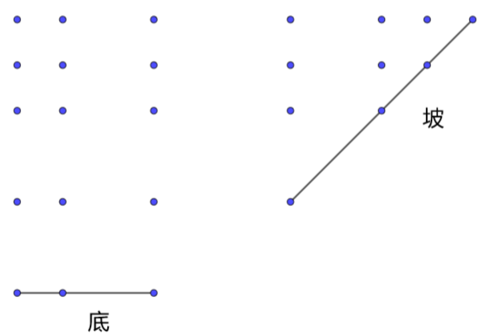



图 6: 互异分拆的Ferres图的底和坡

上定义两种变换, 分别称为变换$A$和变换$B$.

变换$A$: 若$b\le s$, 则把底移到这个图的右边使之称为一个与原来坡平行的新坡, 除非$b=s$且底与坡有一个公共点.

变换$B$: 若$b>s$, 则把坡移到这个图的最下面使之称为一个新底, 除非$b=s+1$且底与坡有一个公共点.

$A$的例外情形只发生于

$$n=b+(b+1)+\ldots+(b+b-1)=\frac{3b^{2}-b}{2}=\omega(b),$$

$B$的例外情形只发生于

$$n=(s+1)+(s+2)+\ldots+(s+s)=\frac{3s^{2}+s}{2}=\omega(-s).$$

其他情形恰有一种变换可以进行, 所以有$n$分成偶数个部分的互异分拆和$n$分成奇数个部分的互异分拆之间的一一对应, 即对于这样的$n$, 有$p_{e}(n)-p_{o}(n)=0$. 当$n=\omega(b)$时, 展开式中$x^{n}$项为

$$\prod_{i=0}^{b-1}(-x)^{b+i}=(-1)^{b}\prod_{i=0}^{b-1}x^{b+i}=(-1)^{b}x^{n},$$

即当$n = \omega(b)$时，$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^b$. 同样可证，当$n = \omega(-s)$时，$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^s$.

根据上述定理, 可以找到关于$p(n)$的一个递推关系.

**定理 32** 对于$n < 0$, 令$p(n) = 0$, 则对$n \geq 1$有

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} (p(n - \omega(m)) + p(n - \omega(-m))).$$

**证明 27** 由

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n\right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(x^{\omega(m)} + x^{\omega(-m)}\right)\right) = 1,$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (p(n - \omega(m)) + p(n - \omega(-m))) x^n = 1,$$

立得结论.

上述递推关系为

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \ldots,$$

其中$p(0) = 1$. 应注意到这个和式是有限的.

附录

# A q-二项式为关于q的整系数多项式证明

**证明 28**

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)\left(q^{n-1}-1\right)\ldots\left(q^{n-k+1}-1\right)}{\left(q^k-1\right)\ldots(q-1)}.$$

设$\phi_d(q)$为关于$q$的$d$次单位根的分圆多项式(详见第二章例15), 则对任意$m$, 有

$$q^m-1=\prod_{d|m}\phi_d(q).$$

从而

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)\left(q^{n-1}-1\right)\ldots\left(q^{n-k+1}-1\right)}{\left(q^k-1\right)\ldots(q-1)} = \frac{\prod_{d|n}\phi_d(q)\prod_{d|n-1}\phi_d(q)\ldots\prod_{d|n-k+1}\phi_d(q)}{\prod_{d|k}\phi_d(q)\ldots\prod_{d|1}\phi_d(q)}.$$

对任意$1\le d\le k$, 分母中$\phi_d(q)$的次数即为数$1,2,\ldots,k$中能整除$d$的数的个数, 即为 $\left[\frac{k}{d}\right]$, 即不大于$\frac{k}{d}$的最大整数. 从而其分母为

$$\prod_{d|k}\phi_d(q)\ldots\prod_{d|1}\phi_d(q)=\prod_{d=1}^{k}\phi_d^{\left[\frac{k}{d}\right]}(q)$$

类似地, 其分子中$\phi_d(q)$的次数为$\left[\frac{n}{d}\right]-\left[\frac{n-k}{d}\right]$. 又由

$$\left[\frac{k}{d}\right]+\left[\frac{n-k}{d}\right]\le\left[\frac{n}{d}\right]$$

知分子可整除分母. 证毕.

由上述证明可知, 此多项式为

$$\prod_{d=1}^{n}\phi_d^{\left[\frac{n}{d}\right]-\left[\frac{k}{d}\right]-\left[\frac{n-k}{d}\right]}(q).$$

# B q-模拟的拉格朗日反演

形式幂级数的拉格朗日反演详见第二章附录定理19.

给定形式幂级数

$$F(z)=\sum_{k\ge1}F_kz^k\quad(F_1=1)$$

下面我们寻找形式幂级数

$$f(z)=\sum_{k\geq 1} f_k z^k \quad (f_1=1)$$

其满足

$$\sum_{k\geq 1} F_k f(z) f(zq)\dots f\left(zq^{k-1}\right)=z. \quad (*)$$

我们注意到对$n\geq 2$, 其$f(z)$中$z^n$项系数为

$$f_n=-\sum_{k\geq 2}^{n} F_k f(z) f(zq)\dots f\left(zq^{k-1}\right)|_{z^n}.$$

从而可递归地求得各项系数. 从而这样的解存在且唯一. 我们下面再$\Lambda-$环中重写上述等式.

我们先考虑以下事实

**定理 33** 对任意两序列$\{\theta_n\}, \{\phi_n\}$, 有

$$\sum_{n\geq 0}\theta_n f(z) f(zq)\dots f\left(zq^{n-1}\right)=\sum_{n\geq 0}\phi_n z^n$$

当且仅当

$$\sum_{n\geq 0}\theta_n z^n=\sum_{n\geq 0}\phi_n f(z) f\left(\frac{z}{q}\right)\dots f\left(\frac{z}{q^{n-1}}\right)$$

**证明 29** 略

我们接下来考虑这样的形式幂级数集合$\mathcal{FP}(q)$, 其元素

$$\theta(z)=\sum_{n\geq 0}\theta_n(q) z^n$$

中每项系数均为关于$q$的有理函数. 这个集合对于形式幂级数的常见操作均封闭.

特别地, 我们考虑下述映射

$$\theta(z)\to\theta^*(z)=\exp\sum_{k\geq 1}\frac{p_k}{k}\frac{z^k}{1-q^k}.$$

$$\theta(z)\to^*\theta(z)=\exp\sum_{k\geq 1}\frac{p_k}{k}\frac{z^k}{1-\left(\frac{1}{q}\right)^k}.$$

其将$\theta(z) \in \mathcal{FP}(q)$中满足$\theta_0 = 1$的元素映射为另一个这样的元素. 对于这样的$\theta(z)$, 有

$$\theta(z)\theta(zq)\ldots\theta\left(zq^{n-1}\right) = \frac{\theta^*(z)}{\theta^*(zq^n)}$$

$$\theta(z)\theta\left(\frac{z}{q}\right)\ldots\theta\left(\frac{z}{q^{n-1}}\right) = \frac{{}^*\theta(z)}{{}^*\theta\left(\frac{z}{q^n}\right)}$$

在$\mathcal{FP}(q)$中引入roofing映射和unroofing映射, 其分别为

$${}^\wedge\theta(z) = \sum_{n\geq 0}\theta_n q^{-\binom{n}{2}}z^n, \quad {}^\vee\theta(z) = \sum_{n\geq 0}\theta_n q^{\binom{n}{2}}z^n.$$

其中unroofing用于下述q-乘积, 其形如

$$A\otimes_q B(z) = \sum_{h\geq 0}A_h z^h B\left(\frac{z}{q^h}\right).$$

进一步地, 有

$${}^\vee\left(A\otimes_q B\right)(z) = \left({}^\vee A\right)(z)\left({}^\vee B\right)(z).$$

事实上, 比较两侧$z^n$项系数并由

$$\binom{h+k}{2} = \binom{h}{2} + \binom{k}{2} + hk$$

可得.

我们回顾对形式幂级数的拉格朗日反演, 有

$$F(z) = \frac{z}{E(z)} = \frac{z}{\sum_{n\geq 0}E_n z^n},\ E_0 = 1.$$

类似地, 可将(*)式改写为

$$f(z) = z\frac{{}^{\vee *}E(zq)}{{}^{\vee *}E(z)}.$$

我们稍后给出证明.

我们将此式用对称函数进行改写. 对于初等对称函数$e_n(x)$, 由其系数的代数无关性, 对文字集$x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, 我们不失一般性地将其系数写为

$$E_n = e_n(x_1, x_2, \ldots) = e_n(x).$$

我们将所求的形式幂级数$f(z)$写为

$$f(z) = zK(zq) = z\sum_{n\geq 0}k_n(q)z^n q^n.$$

相当于令

$$f_n = k_{n-1}\left(q\right) q^{n-1}.$$

下面我们对上式给出证明.

**定理 34** 对$n = 1, 2, \ldots,$, 有

$$k_n\left(q\right) = \sum_{\mu \vdash n} \left( \prod_i q^{\binom{\mu_i}{2}} h_{\mu_i} \left[ \frac{X}{1-q} \right] \right) f_\mu \left[1-q\right].$$

其中为对$[n]$的所有划分求和, $f_\mu$表示划分$\mu$以外的基元.

**证明 30** 略. 详见相关文献.

# C Catalan数的q,t-模拟