Chapter 2 递推关系与生成函数

目录

1 线性齐次递推关系与线性非齐次递推关系

1.1 线性齐次递推关系

我们用一个简单而不失趣味的问题引出我们所要讨论的内容.

例 1 *(**Fibonacci序列**)意大利比萨的斐波那契在1202年出版的书《珠算原理》中提出: 假定一对刚出生的小兔一个月就能长成大兔, 再过一个月便能生下一堆小兔, 且每个月都生一对小兔, 若不考虑死亡问题, 则一对刚出生的兔子一年内能繁殖成多少对兔子?*

解 1 设f_n为第n月的兔子数,$n \geq 0$ 则

$$f_0 = 0, f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$$

易知$f_{13} = 233$

满足上述性质的数列称为斐波那契(Fibbonaci)数列, 其具有许多有趣的性质, 在此我们不做具体讨论, 而是关注更一般的问题.

上式中序列的每一项都由其之前的若干项的线性组合给出, 我们考虑其一般情况.

定义 1 我们称数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$满足k**阶常系数线性齐次递推关系**, 若对所有的$n \geq k$, 有

$$h_n = a_1 h_{n-1} + \ldots + a_k h_{n-k}$$

其中$a_k \neq 0$为常数.

观察上式不难得出, 对数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$的任意步, 步长任意的差分Δh_n, 其也满足k阶常系数线性齐次递推关系, 且若数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}, \{g_n\}_{n=0}^{\infty}$均满足此递推关系, 则$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 数列$\{\alpha h_n + \beta g_n\}_{n=0}^{\infty}$也满足此递推关系. 前者启发我们考虑在差分算子作用下具有形式不变的数列$q^n, q \in \mathbb{C}$, 后者启发我们考虑其线性组合.

数列$h_n = q^n$为上述递推关系的解, 当且仅当q为下k次多项式方程

$$g(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \ldots - a_{k-1} x^1 + a_k = 0$$

的解. 我们称这样的$g(x)$为上述常系数线性齐次递推关系的**特征方程**. 由代数基本定理我们易知其特征方程有k个根(其中可能有重根). 若其根互不相同, 我们考虑其线性组合, 有以下结论.

定理 1 若k阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n = a_1 h_{n-1} + \ldots + a_k h_{n-k}, a_k \neq 0, k \geq 1$$

的特征方程$g(x) = 0$有k个互不相同的根$q_1, \ldots, q_k$, 则

$$h_n = c_1 q^1 + \ldots + c_n q^n, n \geq 0$$

是下述意义下的一般解: 无论给定怎样的初始值$h_0, \ldots, h_{k-1}$, 都存在相应的常数$c_1, \ldots, c_k$, 使得上式是满足上述递推关系和初始条件的唯一数列.

证明 1 由$a_k \neq 0$知$g(x) = 0$没有零根. 故

$$h_n = c_1 q^1 + \ldots + c_n q^n, n \geq 0$$

满足上述递推关系. 对于任意给定的初始值$h_0, \ldots, h_{k-1}$, 考虑方程组

$$x_1 q_1^i + \ldots + x_k q_k^i = h_i, 0 \leq i \leq k-1$$

其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ q_1 & \ldots & q_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{k-1} & \ldots & q_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

其为一范德蒙德矩阵, 故其行列式满足

$$|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq k} \left(q_i - q_j\right) \neq 0$$

从而上述方程组有唯一解$x_i = c_i, i = 1, \ldots, k$. 这样我们就找到了满足初始条件和递推关系的数列

$$h_n = c_1 q^1 + \ldots + c_n q^n, n \geq 0$$

证毕.

我们回顾之前思考的内容: 对于满足某递推关系(此时设其特征方程无重根)的所有数列h_n, g_n和任意复数α, β, 有$\alpha h_n + \beta g_n$也满足此递推关系.

我们考虑这样的一个事实: 所有的数列构成一线性空间(事实上数列是定义在非负整数集上的函数), 记为$\mathbb{S}$. 满足某递推关系的数列是$\mathbb{S}$的一个子集$\mathbb{S}_h$, 由上述性质可知其为$\mathbb{S}$的一有限维子空间, 维度为其特征方程的次数.

设特征方程的根为$q_1,\ldots,q_k$, 则数列$q_1^n,\ldots,q_k^n$为此线性空间的一组基(请读者思考在哪一步中我们进行了相应的证明). 从而对此线性空间内的任意向量(某一数列)$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, 其可被这组基唯一地线性表出. 另一方面, 这一向量(数列)$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$又由其前k项唯一确定. 因此, 给定递推关系和前k项可唯一确定这一向量在这组基下的坐标, 即复数$c_1,\ldots,c_k$.

下面我们考虑更一般的情况:

定理 2 *若k阶常系数线性齐次递推关系*

$$h_n=a_1h_{n-1}+\ldots+a_kh_{n-k},a_k\neq 0,k\geq 1$$

的特征方程$g(x)=0$有k个互不相同的根$q_1,\ldots,q_t,t\leq k$, 其中q_i是s_i重根$1\leq i\leq t,s_1+\ldots+s_t=k$, 则

$$h_n=\sum_{i=1}^{t}P_i(n)\,q_i^n,n\geq 0$$

是该递推关系的一般解, 其中$P_i(n)$是关于n的次数小于s_i的多项式.

我们在给出证明之前先进行一些说明: 在这里我们仍取线性空间的一组基, 但这组基此时形如n^ip^n.

证明 2 *我们先证明两个引理:*

引理 *1* *若一多项式函数$f(x)$有s重根q, 则$\frac{\mathrm{d}^if(x)}{x^i}|_{x=q}=0,i=0,\ldots,s-1$.*

引理的证明 *1* *设$f(x)=g(x)\cdot(x-q)^s$, 其中$g(x)$为一多项式. $i=0$时平凡.*

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=g'(x)(x-q)^s+s(x-q)^{s-1}g(x)=(x-q)^{s-1}(sg(x)+(x-q)g'(x))$$

从而归纳可知

$$\frac{\mathrm{d}^if(x)}{x^i}|_{x=q}=0,i=0,\ldots,s-1$$

证毕.

回到原题证明. 由引理1,

$$\frac{\mathrm{d}^jg(x)}{x^j}|_{x=q_i}=0,0\leq j\leq s_i-1$$

即

$$k\cdot\ldots\cdot(k-j+1)\,p_i^{k-j}-\sum_{x=1}^{k-j}a_xx\cdot\ldots\cdot(x-j+1)\,p_i^{k-j}=0,0\leq j\leq s_i-1$$

下证$\forall 1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq s_i - 1, h_n = n^j q_i^n$满足此常系数线性齐次递推关系, 即

$$n^j q_i^n = \sum_{x=1}^{k} a_x (n-x)^j q_i^{n-x}, \forall n \in \mathbb{N}$$

易知特征方程无零根.

$$\begin{aligned}
LHS - RHS &= n^j q_i^n - \sum_{x=1}^{k} a_x (n-x)^j q_i^{n-x} \\
&= (n-k+k)(n-(k-1)+(k-1))\dots(n-(k-j+1)+(k-j+1))\, q_i^j \\
&+ \sum_{x=1}^{k-j} a_x ((n-k)+(k-x))\dots((n-k+j-1)+(k-j+1-x))\, q_i^{n-x} \\
&+ \sum_{x=k-j+1}^{k} a_x ((n-k)+(k-x))\dots((n-x-1)+(x+1-x))\, q_i^{n-x} \\
&= q^{n-k} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \alpha_m \cdot \frac{\mathrm{d}^m g(x)}{\mathrm{d}x^m} \mid_{x=q_i} \right) = 0
\end{aligned}$$

其中α_m为常数. 从而$h_n = n^j q_i^n, 1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq s_i - 1$满足此常系数线性齐次递推关系. 故

$$h_n = \sum_{i=1}^{t} P_i(n)\, q_i^n, n \geq 0$$

也满足原递推关系. 下证对任意初始值$h_0, \dots, h_{k-1}$, 均存在相应的多项式$P_i, 1 \leq i \leq t$, 使得上式为满足此条件的唯一数列. 设$P_i(n) = \sum_{m=0}^{s_i-1} p_{im} n^m$, 则考虑方程组

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{m=0}^{s_i-1} x_{im} n^m q_i^n = h_n, 0 \leq n \leq k-1$$

其中$n^m \mid_{n=0,m=0} = 1$, 其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
q_1^1 & q_1^1 & \dots & q_1^1 & \dots & q_t^1 & q_t^1 & \dots & q_t^1 \\
2^0 q_1^2 & 2^1 q_1^2 & \dots & 2^{s_1-1} q_1^2 & \dots & 2^0 q_t^2 & 2^1 q_t^2 & \dots & 2^{s_t-1} q_t^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(k-1)^0 q_1^{k-1} & (k-1)^1 q_1^{k-1} & \dots & (k-1)^{s_1-1} q_1^{k-1} & \dots & (k-1)^0 q_t^{k-1} & (k-1)^1 q_t^{k-1} & \dots & (k-1)^{s_t-1} q_t^{k-1}
\end{bmatrix}$$

其行列式不为零(详见广义范德蒙德行列式). 从而原方程组有唯一解$x_{im} = p_{im}$. 证毕.

此时我们回顾引题的例子(即Fibonacci数列), 我们易知其特征方程为

$$x^2 = x + 1$$

其有两根$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 根据初值条件易知其通项为

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

例 2 求解线性齐次递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 3h_{n-4}$$

初始条件为$h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 2.$

解 2 其特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

其有一三重根$q_1 = -1$, 一重根$q_2 = 2$, 故

$$h_n = \left(c_1n^2 + c_2n + c_3\right)(-1)^n + c_4 2^n$$

其中c_1, c_2, c_3, c_4为常数. 根据初值条件得

$$c_1 = 0, c_2 = -\frac{3}{9}, c_3 = \frac{7}{9}, c_4 = \frac{2}{9}$$

故

$$h_n = \left(\frac{7}{9} - \frac{3n}{9}\right)(-1)^n + \frac{2}{9}\cdot 2^n$$

1.2 线性非齐次递推关系

定义 2 数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$满足k**阶常系数线性非齐次递推关系**, 若对所有的$n \geq k$, 有

$$h_n = a_1h_{n-1} + \ldots + a_kh_{n-k} + f(n)$$

其中$a_k \neq 0$为常数, $f(n) \neq 0$为关于n的函数.

非线性齐次递推关系的通解=线性齐次递推关系的通解+线性非齐次递推关系的一个特解.

一般地, 其"特解"并不唯一, 且没有固定的求解方式. 然而, 若$f(n) = Cq^n \cdot P(n)$, 其中$P(n)$是关于n的多项式, 则可通过若干步作差将非齐次递推关系转换为齐次递推关系.

2 生成函数理论

生成函数是对给定数列的一个形式级数(在这里我们并不关心级数的取值问题). 其核心思想在于: 用(形式)级数的系数表示数列各项, 并根据级数的运算法则得到数列相应运算的结果. 我们稍后会给出一些例子.

定义 3 数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$的**普通生成函数**是下形式级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

定义 4 数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$的**指数型生成函数**是下形式级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$$

定义 5 数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$的***Dirichlet*生成函数**是下形式级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

这三种生成函数各自对应不同的性质. 我们将在后续部分进行说明.

例 3 考虑数列$\{1\}_{n=0}^{\infty}$, 其普通生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

其指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$$

其*Dirichlet*生成函数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}:=\zeta(s)$$

此即*Riemann-Zeta*函数.

例 4 广义二项式定理:

$$(1-x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

上式中的"="意义是"形式收敛". 从解析上讲, 若级数A, B分别在某一区间收敛至同一形式, 则A, B是同一级数, 此时可通过级数B的表达形式来找到A.我们在附录中进一步地介绍.

常用$[x^n] f(x)$表示$f(x)$第n项系数.

定义 6 我们定义形式级数的加法和乘法运算与级数的运算相同. 若形式级数的系数在域F中, 也称其为域F上的形式级数. 下考虑普通生成函数. 设域F上的形式级数集合为$F[[x]]$. 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

定义

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

其中$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. 则易证明$F[[x]]$在这样的加法和乘法下构成一个环, 称为**形式幂级数环**. 形式幂级数环是一元多项式环在给定度量下的完备化, 详见抽象代数.

类似地, 对指数型生成函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \in F[[x]]$$

有

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n!} x^n$$

$$f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}}{n!} x^n$$

对*Dirichlet*生成函数

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in F[[x]]$$

有

$$f(s) + g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n^s}$$

$$f(s) g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|s} a_d b_{\frac{n}{d}}}{n^s}$$

不同生成函数的性质正体现于它们运算的差异.

定义 7 对形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 定义

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

为$f(x)$的**形式导数**.

定义 8 若形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}$, 是多项式, 即$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$只有有限项不为零, 或形式级数$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$满足$b_0=0$, 则可定义$f(x)$与$g(x)$的**复合**

$$f(g(x))=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(g(x))^n.$$

当相关的复合存在, 且$f(g(x))=g(f(x))$时称g为f的**复合逆**

思考: 定义复合为什么需要这样的条件?

定理 3 设形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$互为复合逆, 且$a_0=0$, 则有$b_0=0$, 且$a_1\neq 0, b_1\neq 0$.

证明 3 由$0=g(f(0))=g(0)$知$b_0=0$. 设

$$f(x)=\sum_{n\geq r}a_nx^n, g(x)=\sum_{n\geq s}b_nx^n, r\geq 1, s\geq 1, a_rb_s\neq 0$$

则

$$x=f(g(x))=a_rb_s^rx^{rs}+\ldots$$

从而$rs=1, r=1, s=1$. 故$a_1=a_r\neq 0, b_1=b_s\neq 0$. 证毕.

定义 9 若形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$满足$f(x)g(x)=1$, 则称$g(x)$为$f(x)$的**乘法逆**.

我们可以看出: 逆元并不恒存在. 下揭示其存在的充要条件.

定理 4 形式级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$有乘法逆的充要条件是$a_0=0$.

证明 4 一方面, 若$f(x)$有乘法逆, 则$a_0b_0=1$, 从而$a_0\neq 0$; 另一方面若$a_0\neq 0$, 则归纳地作出如下定义

$$b_n=\begin{cases}\frac{1}{a_0}, & n=0;\\ -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}, & n\geq 1\end{cases}$$

此时有

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

从而$f(x)$的乘法逆存在. 证毕.

2.1 普通生成函数

对于普通生成函数我们给出一些简单的性质, 其证明留给读者完成.

定理 5 若$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则$\{a_{n+l}\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数为

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}$$

定理 6 若$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则$\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数为

$$x \frac{\mathrm{d} f(x)}{\mathrm{d} x}$$

定理 7 若$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则$f^k$是数列

$$\left\{ \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_k} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

的普通生成函数.

例 5 令$f(n,k)$表示正整数n写成k个非负整数有序和的方法数, 求$f(n,k)$的显式表达式.

解 3 数列$\{1\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数是$\frac{1}{1-x}$, 故$\frac{1}{(1-x)^k}$是数列

$$\left\{ \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} 1 \right\}_{n=0}^{\infty}$$

的普通生成函数, 而上数列正是$\{f(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$. 故

$$f(n,k) = [x^n] \frac{1}{(1-x)^k} = \binom{n+k-1}{n}$$

下用生成函数方法求解常系数线性齐次递推关系.

解 4 设$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$满足k阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_k h_{n-k}, a_k \neq 0, k \geq 1$$

设h_n的普通生成函数为$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$. 设

$$k(x) = x^k g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i x^i,$$

则$c(x) = k(x) f(x)$中x^{k+r} $(r \geq 0)$的系数为

$$h_{k+r} - a_1 h_{k+r-1} - \ldots - a_k h_r = 0$$

即$c(x)$是一个次数小于k的多项式. 设上述递推关系特征方程的互异根为$q_1, \ldots, q_t$, q_i的重数为$s_i, 1 \leq i \leq t, s_1 + \ldots + s_t = k$, 则

$$g(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \ldots - a_k = (x - q_1)^{s_1} \ldots (x - q_t)^{s_t}.$$

故

$$k(x) = (1 - q_1 x)^{s_1} \ldots (1 - q_t x)^{s_t}$$

有理分式$f(x) = \frac{c(x)}{k(x)}$可表示为部分分式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{l=1}^{s_i} \frac{\beta_{il}}{(1 - q_i x)^l},$$

其中β_{il}为适当的常数. 由广义二项式定理,

$$\sum_{l=1}^{s_i} \frac{\beta_{il}}{(1 - q_i x)^l} = \sum_{l=1}^{s_i} \beta_{il} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{n} q_i^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_i(n) q_i^n\right) x^n$$

其中$P_i(n) = \sum_{l=1}^{s_i} \beta_{il} \binom{n+l-1}{n}$为一个关于$n$的次数至多为$s_i - 1$的多项式. 从而

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{t} P_i(n) q_i^n\right) x^n$$

故$h_n = \sum_{i=1}^{t} P_i(n) q_i^n$, 其系数由初始值给出.

我们容易发现普通生成函数常用于解决组合问题.

例 6 设有三种物体a, b, c, 其中a可以取$0, 1, 2$次, b可以取$0, 1$次, c可以取偶数次. 设b_n为选取n个物体的方法数, 则b_n对应的普通生成函数为

$$\left(1 + x + x^2\right)(1 + x)\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots\right) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x} = 1 + 2x + 3\sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

定理 8 *(Catalan数)考虑以下符合要求的"合法"括号串:n个左括号和 n个右括号从左至右排成一排, 要求在任一位置其左边的左括号不比右括号少. 令f_n表示这样的合法括号串总数, 显然$f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 5$. 定义$f_0 = 1$, 求$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$的生成函数.*

解 5 令g_n为满足任一非尽头位置左括号数总比右括号多的括号串数. 满足这样条件的括号串左端为左括号, 右段为右括号, 且去掉这两个括号后为一"合法"括号串, 故$g_1 = f_1, g_n = f_{n-1}$. 设k为一合法括号串中从左开始第一次到达左右括号相等的左右括号数, 则$1 \le k \le n$, 且有

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k f_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} f_{k-1} f_k, n \ge 1.$$

设$f(x)$为$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$的普通生成函数, 令$b_0 = 0, b_k = f_{k-1}, k \ge 1$, 则

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k}$$

故

$$\begin{aligned}
f(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k} \right) x^n + b_0 f_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k f_{n-k} \right) x^n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^n \right) f(x) \\
&= x f^2(x).
\end{aligned}$$

从而$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$(由初值条件).

进一步计算有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} x^n$$

从而$f_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, 此即Catalan数.

2.2 指数型生成函数

对于指数型生成函数我们给出一些简单的性质, 其证明留给读者完成.

定理 9 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$, 则$\{a_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数是$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

定理 10 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$, 则$\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数是$x\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

定理 11 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$, 则$f^k$是数列

$$\left\{\sum_{n_1+\ldots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}a_{n_1}\ldots a_{n_k}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

容易发现指数型生成函数常用于解决排列问题. 下给出一些例子.

例 7 *(Bell数)* 令B_n表示$[n]$上所有划分的个数, 求B_n的公式.

解 6 考虑$[n]$中包含元素n的那个子集, 设其含有$k(1\le k\le n)$个元素, 则剩余的$k-1$个元素是从$[n-1]$中选区的. 剩余的那些子集为$n-k$个元素的一个划分, 故

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}, n\ge 1.$$

初始值$B_0=1, B_1=1$. 设B_n的指数型生成函数是$B(x)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}\right)x^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\frac{B_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n\ge k}\frac{B_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{i\ge 0}\frac{B_i x^i}{i!}\\&=e^x B(x)\end{aligned}$$

解微分方程, 得

$$B(x)=C\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$$

由初值条件得$C=\mathrm{e}^{-1}$, 即

$$B(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}$$

故

$$\begin{aligned}B(x)&=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^x)^k}{k!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n x^n}{n!}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

从而$B_n = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$.

定理 12 令h_n表示多重集$S=\{n_1\cdot t_1,\ldots,n_k\cdot t_k\}$,得满足某种选择规则$P$得$n-$排列数, 其中$n_i\geq 0, 1\leq i\leq k$, 即仅由$t_i$组成的满足性质$P$的$n-$排列数为$a_n^{(i)}$, 数列$\left\{a_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数为$f_i(x), 1\leq i\leq k$, 则数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数为

$$h(x)=\prod_{i=1}^{k}f_i(x).$$

证明 5 设$f_i(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j^{(i)}}{j!}x^j, 1\leq i\leq k$, 则

$$\begin{aligned}h_n &= \sum_{m_1+\ldots+m_k=n,0\leq m_i\leq n_i}\binom{n}{m_1,\ldots,m_k}\prod_{i=1}^{k}a_{m_i}^{i}\\ &= \sum_{m_1+\ldots+m_k=n,0\leq m_i\leq n_i} n!\frac{\prod_{i=1}^{k}a_{m_i}^{(i)}}{\prod_{i=1}^{k}m_i!}=\left[\frac{x^n}{n!}\right]\prod_{i=1}^{k}f_i(x).\end{aligned}$$

从而$h(x)=\prod_{i=1}^{k}f_i(x)$.

由上述定理可解决以下问题:

例 8 确定每位数字都是奇数且1和3出现偶数次的n位数个数h_n

解 7 设$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$的指数型生成函数为$h(x)$, 则

$$\begin{aligned}h(x) &= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)^2\left(1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)^3\\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{e}^{3x}=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{5x}+2\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

故$h_n=\frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}$.

2.3 Dirichlet生成函数

对于Dirichlet生成函数我们给出一些简单的性质, 其证明留给读者完成.

定理 13 若$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$是数列$\{a_n\}$的*Dirichlet*生成函数, 则$f^k$是数列

$$\left\{\sum_{n_1\ldots n_k=n}a_{n_1}\ldots a_{n_k}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

的*Dirichlet*生成函数.

例 9 已知数列$\{1\}_{n=0}^{\infty}$的*Dirichlet*生成函数是*Riemann-Zeta*函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

求以$\zeta^2(s)$为其*Dirichlet*生成函数的数列.

解 8 由上述性质有

$$\left[n^{-s}\right]\zeta^2(s)=\sum_{d|n}1=d(n)$$

其中$d(n)$是n的正因子个数.

例 10 类似地,ζ^k生成了n的可分解为k个有序正因子积的方法数, $(\zeta(s)-1)^k$生成了n的可分解为k个有序非平凡正因子(每个都大于1)积的方法数.

Dirichlet生成函数相较于其他两种具有较为特别的形式, 在性质上也有其特点. 我们从上述性质和给出的例子中可以看出其与整数的乘积和整数的因子有关. 我们下面进一步地分析其在数论方面的性质.

定义 10 **数论函数**是指定义域为$\mathbb{Z}^+$的函数. 如果数论函数$f(x)$对任意互素的正整数m,n, 有$f(mn)=f(m)f(n)$, 则称$f(x)$有**积性**.

从而对具有积性的数论函数$f(x)$, 有

$$f(n)=f\left(p_1^{\alpha_1}\right)\dots f\left(p_r^{a_r}\right)$$

其中$n=p_1^{a_1}\dots p_r^{a_r}$为$n$的素因子分解. 特别地, $f(1)=1$.

下除特殊说明, p均为素数.

定理 14 若f是积性数论函数, 则$\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$的*Dirichlet*生成函数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}f\left(p^k\right)p^{-ks}\right)$$

证明 6 当$n\geq 2$时, 设n的素因子分解为$n=p_1^{a_1}\dots p_r^{a_r}$, 则

$$\begin{aligned}\left[n^{-s}\right]\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}f\left(p^k\right)p^{-ks}\right)&=\left[n^{-s}\right]\prod_{i=1}^{r}f\left(p_i^{a_i}\right)p_i^{-a_is}\\&=\prod_{i=1}^{r}f\left(p_i^{a_i}\right)=f\left(\prod_{i=1}^{r}p_i^{a_i}\right)=f(n)\end{aligned}$$

上式对$n=1$也成立, 从而结论成立. 证毕.

我们可以通过积性数论函数的性质将其Dirichlet生成函数化为乘积形式.

例 11 常值函数$f:\mathbb{Z}^{+}\to 1$是一个积性数论函数, 从而

$$\zeta(s)=\prod_{p}\left(\sum_{k=0}^{\infty}p^{-ks}\right)=\frac{1}{\prod_{p}(1-p^{-s})}$$

例 12 熟知级数$\sum_{n=1}^{\infty}$发散的, 证明: 级数$\sum_{p}$为素数$\frac{1}{p}$也是发散的(从而素数有无限个).

证明 7

$$\zeta(1)=\frac{1}{\prod_{p}\left(1-p^{-1}\right)}\leq \mathrm{e}^{\sum_{p}\frac{2}{p}}.$$

证毕.

我们考虑一个数论中常用的积性函数, 并通过生成函数方法给出它的一些性质.

定义 11 ***Mobius*函数**是一个积性数论函数, 其在素数幂上如下定义:

$$\mu\left(p^{a}\right)=\begin{cases}1, & a=0,\\ -1, & a=1\\ 0, & a\geq 2.\end{cases}$$

例 13 设数列$\{\mu(n)\}_{n=1}^{\infty}$的生成函数为$\tilde{\mu}(s)$, 由

$$\tilde{\mu}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{s}}=\prod_{p}(1-p^{s})$$

从而$\tilde{\mu}(s)\zeta(s)=1$, 也即

$$\tilde{\mu}(s)=\frac{1}{\zeta(s)}$$

此例说明:经典的Mobius函数是数列$\{1\}_{n=1}^{\infty}$关于Dirichlet卷积的逆. 我们将在第三章详述此性质.

我们通过生成函数的方法得到一个经典的性质.

定理 15 经典的*Mobius*反演 若两数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$满足对任意$n\geq 1$, 有

$$a_n=\sum_{d|n}b_d$$

则对任意$n\geq 1$, 有

$$b_n=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)a_d$$

证明 8 设$A(s)$, $B(s)$分别为$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$的*Dirichlet*生成函数, 则有

$$A(s) = B(s)\zeta(s)$$

从而

$$B(s) = \frac{A(s)}{\zeta(s)} = A(s)\tilde{\mu}(s)$$

此即

$$b_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d$$

证毕.

我们可以看出Mobius反演定理是基于数列$\{1\}_{n=0}^{\infty}$与数列$\{\mu(n)\}_{n=0}^{\infty}$的Dirichlet生成函数的性质. 我们在后面章节会进一步说明.

下面我们关注Mobius反演定理的一些简单应用.

例 14 一个由0和1组成的序列称为**本原**的, 当且仅当其不能写成个数多于1的完全相同的子列的并置. 例如: 全长为4的非本原序列有4个:0000, 1111, 0101, 1010. 令f_n表示长度为n的0, 1本原序列的个数, 求f_n.

解 9 解: 令a_n表示长度为n的所有0, 1序列的个数, 则$a_n = 2^n$. 易知对任意长度为n的序列, 存在唯一的$d|n$, 使得序列可以写成$\frac{n}{d}$个长度为d的本原序列的并置; 反之亦然. 从而当$n \geq 1$时

$$a_n = \sum_{d|n} f_d$$

故当$n \geq 1$时

$$f_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^d.$$

例 15 如果复数ξ是方程$x^n - 1 = 0$的一个根, 且满足$\xi^m - 1 \neq 0, 1 \leq m \leq n-1$, 则称$xi$为$n$次**本原单位根**. 一般地, 全部$n$次本原单位根为

$$\left\{ \mathrm{e}^{\frac{2\pi ik}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1, \gcd(n,k) = 1 \right\}.$$

定义**分圆多项式**为以所有n次本原单位根为全部根的多项式

$$\phi_n(x) = \prod_{0 \leq k \leq n-1, \gcd(n,k)=1} \left(x - \mathrm{e}^{\frac{2\pi ik}{n}} \right),$$

试用$\left\{x^d - 1\right\}_{d=0}^{\infty}$中的多项式表示$\phi_n(x)$.

解 10 对于任一n次单位根ξ, 存在n的唯一的正因子d, 使得ξ是d次本原单位根, 从而ξ是$\phi_d(x)$的根; 另一方面, 对n的任一正因子d, $\phi_d(x)$的根为一n次单位根, 且不同的$\phi_d(x)$的没有相同的根. 因此

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{2\pi ik}{n}}\right)=x^n-1=\prod_{d|n}\phi_d(x).$$

取对数, 得

$$\ln(x^n-1)=\sum_{d|n}\ln\phi_d(x)$$

由经典得*Mobius*反演定理, 有

$$\ln\phi_n(x)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\ln\left(x^d-1\right).$$

从而

$$\phi_n(x)=\prod_{d|n}\left(x^d-1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}.$$

例 16 称一个数论函数$f(n)$具有**强积性**, 如果对任一$m,n\in\mathbb{N}$, $f(m)f(n)=f(mn)$. 令λ为在所有素数上取值为-1的强积性数论函数, 求$\{\lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$的*Dirichlet*生成函数, 并由此证明:

$$\sum_{d|n}\lambda(d)=\begin{cases}1, & n\text{为完全平方数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 9 设n的素因子分解为$n=p_1^{a_1}\dots p_r^{a_r}$, $\{\lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$的*Dirichlet*生成函数为$\tilde{\lambda}(s)$. 易知强积性数论函数具有积性, 故

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(s)&=\sum_{n=1}^{s}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda\left(p^k\right)p^{-ks}\right)=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda(p)^k p^{-ks}\right)=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k p^{-ks}\right)\\&=\prod_p\frac{1}{1+p^s}=\prod_p\frac{1-p^s}{1-p^{2s}}=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.\end{aligned}$$

故

$$\zeta(2s)=\zeta(s)\tilde{\lambda}(s).$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}1\cdot\lambda(d)}{n^s}.$$

从而根据对应项系数可得

$$\sum_{d|n}\lambda(d)=\begin{cases}0, & n\text{不为完全平方数},\\ 1, & n\text{为完全平方数}.\end{cases}$$

证毕.

A 形式幂级数

我们已在正文中提及, 在域F内形式幂级数在给定的运算下构成一个环$F[[z]]$, 其称为形式幂级数环. 我们一般地取$F=\mathbb{C}$. 形式幂级数环是一个整环(即无零因子含幺交换环), 其证明留给读者完成.

$\mathbb{C}[[z]]$中的正则元素, 即存在逆元(更严格地, 称为**伪逆元**)的元素是$a_0\neq 0$的幂级数$a(z)$(已在正文中给出证明), 设其伪逆元为$b(z)$, 则$a(z)b(z)=1$. 由此式可得$b(z)$各项系数从而$\mathbb{C}[[z]]$的商域(即包含此整环的最小域)与**洛朗级数**$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$等同. 我们特别地记此级数中$z^{-1}$项的系数$a_{-1}$为$a(z)$的**留数**, 记作$\operatorname{Res}a(z)$.

留数的具体定义详见复变函数.

设$f_n(z)=\sum_{i=0}^{\infty}c_{n_i}z^i\ (n=0,1,\ldots)$是$\mathbb{C}[[z]]$的元素, 其具有性质

$$\forall i\exists n_i\left(n>n_i\Rightarrow c_{n_i}=0\right),$$

则可形式地定义

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{n_i}c_{n_i}\right)z^i.$$

这一定义允许我们对幂级数$a(z)$的形式变量z引入幂级数$b(z)$的代换. 如果此时有$b_0=0$, 则可写成$b(0)=0$, 则幂$b^n(z):=(b(z))^n$满足形式加法的条件, 即

$$a(b(z)):=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb^n(z)$$

有意义.

例 17 设$f(z)=(1-z)^{-1}$, $g(z)=2z-z^2$, 则形式上

$$h(z):=f(g(z))=1+\left(2z-z^2\right)+\left(2z-z^2\right)^2+\ldots=1+2z+3z^2+\ldots.$$

从微分学上易知其为$(1-z)^2$的幂级数展开.

我们常用幂级数表示常用的函数, 并在很多情况下反函数也用幂级数表示, 这可由$f_0 = 0, f_1 \neq 0$的级数$f(z)$形式地加以解释. 设其反函数为幂级数g, 由代换"解"方程$f(g(z)) = z$, 可得$f_1 g_1 = 1, f_1 g_2 + g_1^2 = 0$, 且一般地, z^n的系数的表示以$f_1 g_n$开始,其他项仅涉及系数f_i和$k < n$的g_k, 从而可以求出g_n.

下面引入幂级数的形式导数

定义 12 若$f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, 则定义导数

$$(Df)(z) = f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n z^{n-1}$$

其为一幂级数.

我们给出其下述性质(证明留给读者)

定理 16

$$\begin{aligned}
&(f(z) + g(z))' = f(z)' + g(z)'. \\
&(f(z) g(z))' = f'(z) g(z) + f(z) g'(z). \\
&\left(f^k(z)\right)' = k f^{k-1}(z) f(z)'. \\
&(f(g(z)))' = f'(g(z)) g'(z).
\end{aligned}$$

其中第四条是下述性质的特例:

$$D\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} D(f_n(z)).$$

熟知的商的求导法则易证, 从而可将此理论推至洛朗级数. 我们先给出以下事实(证明留给读者).

定理 17 若$w(z)$为洛朗级数, 则

$$\operatorname{Res}(w'(z)) = 0; \quad \frac{w'(z)}{w(z)}\text{的留数是使得}w(z)\text{中系数}z^l\text{不为零的最小整数}l.$$

我们下面给出"反函数"系数的具体表示

定理 18 设$W(z) = w_1 z + w_2 z^2 + \ldots$是一个$w_1 \neq 0$的幂级数, 又设$Z(\omega) = c_1 \omega + c_2 \omega^2 + \ldots$是$\omega$的幂级数, 使得$Z(W(z)) = z$, 则

$$c_n = Res\left(\frac{1}{nW^n(z)}\right).$$

证明 10 观察到$c_1 = w_1^{-1}$. 将形式导数用于关系是$Z(W(z)) = z$, 有

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k W^{k-1}(z) W'(z).$$

考虑右式除以$nW^n(z)$得到的级数. 若$n \neq k$, 则项$W^{k-1-n}(z) W'(z)$为某洛朗级数导数, 其留数为1; 对于$n = k$, 由上述事实中第二条可得原结论. 证毕.

我们下面利用这一结论, 在只依靠形式幂级数理论的基础上可以证明下述定理:

定理 19 拉格朗日反演公式:设f在$z = 0$的一个邻域内是解析的, 且$f(0) \neq 0$, 若$\omega = \frac{z}{f(z)}$, 则z可以表示为具有正收敛半径的幂级数$z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega^k$, 其中

$$c_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^{k-1} (f(z))^k \right\}_{z=0}.$$

证明 11 应用上述定理,观察到

$$c_n = \operatorname{Res}\left(\frac{f^n(z)}{n z^n} \right) = \frac{1}{n!} \left(D^{n-1} f^n \right)(0).$$

证毕

拉格朗日反演公式在组合数学中应用广泛. 我们会在之后章节关于标号树的生成函数中涉及.

定义 13 定义

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad \log(1+z) =:= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$$

l由相关性质可以得知上述形式幂级数具有与相应函数一致的性质, 即$\exp(-z)$为环$\mathbb{C}[[z]]$中的逆元, $\log\left(\exp(z)\right) = z$.