Chapter 6 鸽巢原理, Ramsey理论和相异代表系

目录

1 鸽巢原理及应用

鸽巢原理是组合数学中最为古老和经典的原理之一, 也被称为抽屉原理或Dirichlet原理. Diriclet在1834年提出了这一原理. 该原理最简单的描述是, 三只鸽子飞入两个笼子, 则必有某个笼子内至少有两只鸽子. 我们先以传统的"鸽笼"的方式描述这一原理.

定理 1 *(鸽巢原理)设有m只鸽子飞进n个笼子, 则必定存在某个笼子, 其内飞进了至少$\lceil \frac{m}{n} \rceil$只鸽子*

不难用反证法证明. 由读者完成.

上述定理的加强形式为

定理 2 *设有m只鸽子飞进编号分别为$h_1, \ldots, h_n$的n个笼子. 若已知*

$$m \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n + 1,\ a_i \geq 0 (1 \leq i \leq n),$$

则必定存在某个笼子h_i, 其内飞进了至少a_i只鸽子.

证明同样留给读者.

我们用函数和集合论的语言重述上述定理.

定理 3 *设A, B为两个非空有限集, $f : A \to B$为一个映射, 则*

(1)存在$b_1 \in B$, 使得$\left| f^{-1}(b_1) \right| \geq \frac{|A|}{|B|}$.

(2)存在$b_2 \in B$, 使得$\left| f^{-1}(b_2) \right| \leq \frac{|A|}{|B|}$.

定理 4 *设A为非空有限集, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $f : A \to B$为一个映射, 则有下述结论*

(1)若$|A| = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n + 1$, 则存在$b_i \in B$, 使得

$$\left| f^{-1}(b_i) \right| \geq x_i;$$

(2)若$|A| = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n + 1$, 则存在$b_i \in B$, 使得

$$\left| f^{-1}(b_i) \right| \leq x_i;$$

鸽巢原理在表示上直观形象, 内涵也易于理解. 然而我们会发现, 应用该原理是极其具有技巧性的. 我们下面用若干例子来说明.

例 1 从$1, 2, \ldots, 200$中任选101个整数, 其中必存在一个可以被另一个整除.

证明 1 任何正整数都可以写成$n = 2^k a$的形式, 其中a为奇数. 我们将$1, 2, \ldots, 200$写成上述形式, 则每个a都满足$1 \le a \le 199$, 从而这些a构成了100个”鸽笼”. 具体而言, 其为

$$P_a = \left\{2^k a \mid 1 \le 2^k a \le 200, k \in \mathbb{N}\right\}, 1 \le a \le 199, a\text{为奇数}.$$

从$1, 2, \ldots, 199$中任选101个整数, 必有两个数落入同一”鸽笼”中, 不妨设$n_1 = 2^{i_1} a, n_2 = 2^{i_2} a$, 其中指数大的可以被指数小的整除.

在下述问题的证明中我们仅给出抽屉的构造.

例 2 *(*整数环上的**中国剩余定理**, 又称**孙子定理***)* 设$m_1, \ldots, m_k$是两两互素的正整数, 则任给k个整数$a_1, a_2, \ldots, a_k$, 必存在$x \in \mathbb{N}$, 使得

$$x \equiv a_i (\mathrm{mod} m_i), \forall 1 \le i \le k.$$

证明 2 我们先证明*:* 对互素的正整数m_1, m_2和给定的整数a_1, a_2, 存在$x \in \mathbb{N}$*(*事实上有无穷多个*)*满足

$$x \equiv a_i (\mathrm{mod} m_i), i = 1, 2,$$

即$k = 2$的情形. 事实上, 我们只需要证明$a_1, m_1 + a_1, \ldots, (m_2 - 1) m_1 + a_1$这$m_2$个数被$m_2$除的余数各不相同, 即它们构成了模$m_2$的一个完全剩余系, 从而其中必有一个为模$m_2$余$a_2$的. 否则存在$1 \le j < i \le m_2 - 1$, 其满足

$$im_1 + a_1 \equiv jm_1 + a_1 (\mathrm{mod} m_2),$$

从而

$$m_2 \mid (im_1 + a_1) - (jm_1 + a_1) = (i - j) m_1.$$

从而得到矛盾. 从而存在这样的$0 \le p \le m_2 - 1$, 使得

$$pm_1 + a_1 \equiv a_2 (\mathrm{mod} m_2),$$

取$x = pm_1 + a_1$, 其满足上述条件. 事实上, 对$x = pm_1 + a_1 + km_1 m_2, k \in \mathbb{N}$其均满足条件. 这样的$x$满足

$$x \equiv pm_1 + a_1 (\mathrm{mod} m_1 m_2).$$

下设原命题对$< k$的正整数成立, 下证对k成立. 由归纳假设, 存在$x_0 \in \mathbb{N}$, 对给定的$k - 1$个正整数满足

$$x_0 \equiv a_i (\mathrm{mod} m_i), \forall 1 \le i \le k - 1.$$

且存在正整数t, 使得

$$x_0 \equiv t (\mathrm{mod} m_1 m_2 \dots m_{k-1}).$$

而$m_1 m_2 \dots m_{k-1}$与m_k 互素, 则由$k = 2$时的归纳假设知, 存在x满足

$$\begin{cases} x \equiv t (\mathrm{mod} m_1 m_2 \dots m_{k-1}), \\ x \equiv a_k (\mathrm{mod} m_k). \end{cases},$$

这样的x又满足

$$x \equiv a_i (\mathrm{mod} m_i), \forall 1 \leq i \leq k.$$

从而命题对k成立. 由归纳原理知其对所有的$k \in \mathbb{N}$成立. 证毕.

事实上此定理也有构造的证明方式. 这个构造式的证明给出了这样的x:

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{\prod_{i=1}^{k} m_i}{m_i} \right)^{-1} \frac{\prod_{i=1}^{k} m_i}{m_i} \; (\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{k} m_i),$$

其中x^{-1}满足$x^{-1} x \equiv 1 (\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{k} m_i), 1 \leq x^{-1} \leq \prod_{i=1}^{k} m_i$.

证明留给读者.

我们回顾第一章中提出的下述问题

例 3 在任一含$mn+1$个元素的偏序集$\mathbf{P}$中, 或有一长度至少为$m+1$的链(即$\mathbf{P}$的高度$\geq m+1$), 或有一宽度至少为$n+1$的反链(即$\mathbf{P}$的宽度$\geq n+1$).

证明已在当时留给读者.

例 4 设α为一正无理数, 用$\{x\}$表示x的小数部分, 即

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

则数列$\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^{\infty}$在$(0,1)$中稠密, 即对$(0,1)$中任一点的任一邻域中存在此数列中的某一项.

证明 3 我们只需证明对任一$\varepsilon > 0$, 存在n_0使得

$$\{n_0 \alpha\} < \varepsilon.$$

或

$$\{n_0 \alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

从而$\{n\alpha\}$存在于$(0,1)$中每一点的ε-邻域中. 这是因为设$\{n_0\alpha\}=\eta<\epsilon$, 则

$$\{kn_0\alpha\}=\{(k-1)\,n_0\alpha+n_0\alpha\}=\{\{(k-1)\,n_0\alpha\}+\{n_0\alpha\}\}=\{\{(k-1)\,n_0\alpha\}+\eta\}.$$

对$k\in\mathbb{N},k<\frac{1}{\eta}$有

$$\{kn_0\alpha\}=\{k\eta\}=k\eta.$$

设$m=\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor$, 下证明: 对$(0,1)$中任一元素$x$的任一$\varepsilon$-邻域, 其记为$U_\varepsilon(x)$, 存在$1\leq k\leq m$, 使得$\{kn_0\alpha\}\in U_\varepsilon(x)$. 否则对所有$1\leq k\leq m$均有

$$\{kn_0\alpha\}<x-\varepsilon\vee\{kn_0\alpha\}>x+\varepsilon.$$

集合

$$L=\{k\mid 1\leq k\leq m,\{kn_0\alpha\}<x-\varepsilon\}$$

为自然数的有限子集, 故由最小数原理, 其或为空集, 或有最大元k_l. 集合

$$H=\{k\mid 1\leq k\leq m,\{kn_0\alpha\}>x+\varepsilon\}$$

为自然数的有限子集, 故由最小数原理, 其或为空集, 或有最小元k_h. 由假设有$L\cup H=\{1,\ldots,m\}$.

若L为空集, 则$H=\{1,\ldots,m\}$, 即$\forall 1\leq k\leq m$, $x+\varepsilon<\{kn_0\alpha\}=k\eta$, 从而$x+\varepsilon<\eta$, 则$x<\eta-\varepsilon<0$, 这不可能. 同样的可以证明$H$不为空集. 从而$L$有最大元$k_l$, H有最小元k_h.

由假设易知$k_h=k_l+1$. 从而

$$\begin{cases}\{k_ln_0\alpha\}=k_l\eta<x-\varepsilon;\\ \{(k_l+1)\,n_0\alpha\}=(k_l+1)\,\eta>x+\varepsilon.\end{cases}$$

这说明

$$\eta>2\varepsilon.$$

得到矛盾. 从而原结论成立.

类似地, 若对任一$\varepsilon>0$, 存在n_0使得

$$\{n_0\alpha\}>1-\varepsilon.$$

可以同样证明相应结论.

下面证明对任意$\varepsilon>0$, 存在n_0使得

$$\{n_0\alpha\}<\varepsilon.$$

或

$$\{n_0\alpha\} > 1-\varepsilon.$$

否则$\forall n \in \mathbb{N}\,\{n_0\alpha\} \geq \varepsilon$. 记$p = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, 考虑$p$个区间

$$(i\varepsilon, (i+1)\,\varepsilon)\,, 1 \leq i \leq p-1, (p\epsilon, 1)\,.$$

任取$p+1$个整数, 不妨取$1, 2, \ldots, p+1$, 由鸽巢原理知存在两个相异整数$1 \leq j < i \leq p+1$, 使得$\{i\alpha\}\,, \{j\alpha\}$落入同一区间. 此时

$$\{(i-j)\,\alpha\} = \{i\alpha - j\alpha\}$$

若$\{i\alpha\} > \{j\alpha\}$, 则

$$\{(i-j)\,\alpha\} = \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \varepsilon.$$

若$\{i\alpha\} < \{j\alpha\}$, 则

$$\{(i-j)\,\alpha\} = 1 + \{i\alpha\} - \{j\alpha\} > 1-\varepsilon.$$

若$\{i\alpha\} = \{j\alpha\}$, 则

$$\{i\alpha\} = \{(i-j)\,\alpha + j\alpha\} = \{\{(i-j)\,\alpha\} + \{j\alpha\}\} = \{j\alpha\}\,.$$

从而$\{(i-j)\,\alpha\} = 0$, 即存在$q \in \mathbb{N}$, 使得

$$(i-j)\,\alpha = q,$$

这与α为无理数矛盾. 综上所述, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在n_0使得

$$\{n_0\alpha\} < \varepsilon.$$

或

$$\{n_0\alpha\} > 1-\varepsilon.$$

证毕.

下面给出数论中一个有趣的结果利用鸽巢原理的证明.

例 5 证明*:*对任意$\alpha \in \mathbb{R}$和$n \in \mathbb{N}$, 存在$p, q \in \mathbb{N}$, 使得$1 \leq q \leq n$, 且

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

证明 4 证明: 定义映射

$$f:\{1,2,\ldots,n+1\}\to\left\{\left[0,\frac{1}{n}\right),\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right),\ldots,\left[\frac{n-1}{n},1\right)\right\},$$

其中$f(j)$为包含$\alpha j-\lfloor\alpha j\rfloor$的子区间. 由鸽巢原理知存在$j>k$, 使得$f(j)=f(k)$, 即

$$|(\alpha j-\lfloor\alpha j\rfloor)-(\alpha k-\lfloor\alpha k\rfloor)|<\frac{1}{n}.$$

这等价于

$$|(j-k)\,\alpha-(\lfloor\alpha j\rfloor-\lfloor\alpha k\rfloor)|<\frac{1}{n}.$$

令$q=j-k, p=\lfloor\alpha j\rfloor-\lfloor\alpha k\rfloor$, 则有$1\le q\le n$, 且

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{nq}\le\frac{1}{q^2}.$$

证毕.

上述定理为Dirichlet在丢番图逼近理论中得到的成果. 丢番图逼近理论为初等数论的一个分支, 其研究对无理数(包括代数数和超越数)的有理逼近.

2 Ramsey定理

我们用一个简单的问题引入我们所要讨论的内容.

例 6 任意6人中,或有3人两两相识, 或有3人两两不相识.

其可由第一节所述鸽巢原理解决.

Frank Plumpton Ramsey仅活了27岁, 但他的名字因Ramsey理论而影贝后人铭记. Ramsey理论由鸽巢原理出发, 称为了一门丰富且有影响力的学问, 其涉及问题描述简易, 证明艰难, 诸如概率和代数方法等组合数学的新的工具伴随解决相应地问题而诞生. 本节仅对Ramsey问题进行简要介绍.

定理 5 ***Ramsey*定理** 对任意给定的正整数$p,c,k_1,k_2,\ldots,k_c(p\le k_i,1\le i\le c)$, 存在正整数$n$与集合

$$V=\{v_1,\ldots,v_n\}$$

其满足:对V的所有$\binom{n}{p}$个$p-$子集构成集合的任意一个$c-$划分$\{P_1,P_2,\ldots,P_c\}$, 必定对某个$i\in[c]$, 存在V的子集U_i, 使得$|U_i|=k_i$, 并且U_i的所有$p-$子集都包含在上述$c-$划分的某一个集合P_i之中.

上述定理的常见形式为用图论语言描述的等价形式, 其中$p = c = 2$.

定理 6 ***Ramsey*定理** 对任意正整数$k, l \geq 2$, 存在正整数n, 使得将K_n(即n个顶点的完全图)的每条边染成红蓝两色之一, 都会产生一个红色的K_k, 或产生一个蓝色的K_l. 称最小的这样的n为关于k, l的***Ramsey*数**, 记为$R(k, l)$.

定理5中的c代表所考虑的染色数, p相当于超图的边上顶点的个数, 当$p = c = 2$时, 满足条件的最小的正整数n正是$R(k_1, k_2)$.

下面给出定理6的证明, 其由一个蕴含更强结论的引理得到.

引理 1

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

引理的证明 1 首先证明递推关系

$$R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1),$$

从而可归纳得到

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}.$$

设$R(k-1, l) = n_1, R(k, l-1) = n_2$, 任给$K_{n_1+n_2}$的边集的二染色, 可以证明或者存在一个红色的$K_k$, 或者存在一个蓝色的$K_l$, 从而$R(k, l) \leq n_1 + n_2$.

考虑$K_{n_1+n_2}$的任一顶点u, 其与其他$n_1 + n_2 - 1$个顶点都相连, 由鸽巢原理知其或连至少n_1条红边, 或连至少n_2条蓝边, 不失一般性地设连有n_1条红边, 下考虑所连的红边对应地这$n1$个点, 其构成一个K_{n_1}, 若这个K_{n_1}中存在一个红色的K_{k-1}, 则连同点u得到一个红色的K_k; 否则, 由$R(k-1, l) = n_1$知其必存在一个蓝色的K_l. 证毕.

下介绍Ramsey数的一些简单性质.

定理 7 对任意正整数$k, l \geq 2$, 有

$$R(k, l) = R(l, k).$$

定理 8 对任意正整数$l \geq 2$, 有

$$R(2, l) = l.$$

定理 9

$$R(3,3)=6.$$

下给出一个例题.

例 7 求$R(5,5)$.

留作课后习题.

事实上, Ramesy数的求值是不容易的. 人们因此开始寻找其上下界. 在上文中1式给出了一个上界.(此外存在一平凡下界0). 如何寻找一个接近的上下界也是一件困难的事情. 事实上, 仅当$k=3$时找到了Ramsey数的阶.

定理 10 对任意$l\in\mathbb{Z}^{+}$,有

$$R(3,l)=\Theta\left(\frac{l^2}{\ln l}\right).$$

证明见相关文献. 对于$R(k,k)$, 已知的最好的上界为

$$R(k,k)\le\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{\sqrt{k-1}}.$$

最好的下界为

$$R(k,k)\ge\frac{\sqrt{2}}{e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{2}}.$$

其证明均见相关文献.

下考虑这样一个问题:$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{R(k,k)}$是否存在. Erdos猜想这个极限是存在的, 并以100美元奖励这个问题的解决者. 由上文给出的上下界和stirling公式, 我们可以得到

$$\sqrt{2}\le\liminf_{k\to\infty}\sqrt[k]{R(k,k)}\le\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{R(k,k)}\le 4.$$

目前, 这100美元有待获取.

我们下面关注其一个下界的具体证明, 并由此引入组合数学中的概率方法.

定理 11 若$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}<1$, 则$n<R(k,k)$.

证明 5 随机地将K_n的边集二染色, 每条边被染成红色的概率和被染成蓝色的概率都是$\frac{1}{2}$, 且各条边之间相互独立. 对K_n的顶点集的每个$k-$子集R, 令A_R表示R是单色的这一事件, 则

$$Pr(A_R)=2^{1-\binom{k}{2}}.$$

我们注意到有$\binom{n}{k}$种方式得到R, 从而至少产生一个单色k–子集的概率至多为$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$. 从而若

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

则至少存在一种二染色, 使得集无红色也无蓝色的K_k产生, 故

$$n < R(k,k).$$

证毕.

Erdos的上述方法是概率方法在组合数学中应用的开端. 概率方法的思想可概括为: 为证明满足某些性质的组合结构的存在性, 构建一个合适的概率空间, 说明其对应事件发生的概率大于零.

读者应深刻认识概率论的内容, 以免在应用概率方法时出现疏漏.

由定理11可得下述结论.

定理 12 当$k \geq 3$时, 有

$$2^{\frac{k}{2}} < R(k,k).$$

下面我们加强这一结论.

定义 1 对事件$A_1, \ldots, A_n$, 我们定义**相关性图**为指标集$[n]$上的一个图G, 其满足: 对任意$1 \leq i \leq n$, 事件A_i独立于$\left\{A_j \mid \{i,j\} \notin E(G)\right\}$的每个子集.

我们注意到此时比A_i独立于这个子集中的每个A_j要求更多.

定理 13 设G时关于事件$A_1, \ldots, A_n$的某个相关性图. 设$Pr(A_i) \leq p, 1 \leq i \leq n$, 且$G$的每一个顶点的度不大于$d$. 若$4dp < 1$, 则$\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \neq \emptyset$.

证明 6 首先证明: 对指标集 $[n]$的每一个子集$\{i_1, \ldots, i_m\}$, 有

$$Pr\left(A_{i_1} \mid \bar{A_{i_2}} \ldots \bar{A_{i_m}}\right) \leq \frac{1}{2d}. \tag{1}$$

当$m = 1$时结论平凡. 当$m = 2$时, 有

$$Pr(A_1 \mid A_2) \leq \frac{p_1}{1-p_2} \leq \frac{1}{4d-1} < \frac{1}{2d},$$

为了符号上的方便, 我们取$i_j = j, p_i := Pr(A_i)$. 下面我们归纳证明.

设G中1相邻于$2, 3, \ldots, q$, 且不相邻于$q+1, \ldots, m$. 我们有

$$Pr\left(A_1 \mid \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_m\right) = \frac{Pr\left(A_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_q \mid \bar{A_{q+1}} \ldots \bar{A}_m\right)}{Pr\left(\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_q \mid \bar{A_{q+1}} \ldots \bar{A}_m\right)}$$

其中

$$Pr\left(A_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_q|\bar{A_{q+1}}\dots\bar{A_m}\right) \le Pr\left(A_1|\bar{A_{q+1}}\dots\bar{A_m}\right) \le Pr\left(A_1\right) \le \frac{1}{4d},$$

由归纳假设,

$$Pr\left(\bar{A}_2\dots\bar{A}_q|\bar{A_{q+1}}\dots\bar{A_m}\right) \ge 1-\sum_{i=2}^{q} Pr\left(A_1|\bar{A_{q+1}}\dots\bar{A_m}\right) \ge 1-\frac{q-1}{2d} \ge \frac{1}{2},$$

从而式*1*得证. 由此可得

$$Pr\left(\bar{A}_1\dots\bar{A}_n\right) = \prod_{i=1}^{n} Pr\left(\bar{A}_i|\bar{A}_1\dots\bar{A_{i-1}}\right) \ge \left(1-\frac{1}{2d}\right)^n > 0.$$

从而原命题得证.

我们用这个方法得到$N(k,k)$的一个更好的下界.

定理 14

$$N(k,k) \ge c \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}}.$$

其中c为一个常数.

证明 7 对K_n随机二染色, 对点集的每一个$k-$子集R, 用A_R表示R为单色的这一事件. 我们定义一个相关性图, 使点集的$k-$子集R_1, R_2相邻当且仅当$|R_1 \cap R_2| \ge 2$, 即R_1与R_2至少有一条公共边.

图G的点的度至多为$\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$. 事件$A_R$出现的概率均为$2^{1-\binom{k}{2}}$. 由定理*13*, 当

$$4 \cdot \binom{k}{2}\binom{n}{k-2} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

时$\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i \ne \emptyset$, 即至少存在一种二染色使得不存在红色或蓝色的$K_k$. 由斯特林公式易验证当$n <\ge c \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}}$时满足上述条件, 从而

$$N(k,k) \ge c \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}}.$$

此下界与最优下界仅有常数项上的差异.

现在我们回顾定理5并考虑其中p的含义. 当$p = 2$时, 其表示每条边有两个顶点. 若$p > 2$, 则对应的是边包含顶点数大于2, 此时对应的K_n为超图. 下面用染色的语言重述定理5.

定理 15 对任意给定点正整数$p, c, k_1, \ldots, k_c.(p \le k_i, i = 1, \ldots, c)$, 存在正整数$n$和集合$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, 其满足: 给$V$的每个$p-$子集涂上$c$中颜色$a_1, \ldots, a_c$中的一种(即$c-$染色), 则任何这样的一种染色方案都会产生$V$的一个$k_1$子集$U_1$, 其所有的$p-$子集都被染成$a_1$色, 或$V$的一个$k_2$子集$U_2$, 其所有的$p-$子集均被染成$a_2$色,..., 或$V$的一个$k_c$子集$U_c$, 其所有的$p-$子集均被染成$a_c$色. 满足上述条件的最小的$n$被称为**广义Ramsey数**, 记为$R(k_1, \ldots, k_c; p)$.

读者可参照定理6的证明归纳地给出此定理的证明.

证明 8 先考虑$p = 2$的情况, 此时对c归纳证明. 当$c = 2$时已证. 设对c种颜色时结论成立, 下考虑$c + 1$种颜色的情况. 由归纳假设, 存在最小的正整数$R(k_1, k_2, \ldots, k_c; 2)$满足题述要求. 下类似定理6地证明:

$$R(k_1, \ldots, k_c, k_{c+1}; p) \le \binom{\sum_{i=1}^{c+1} k_i - 2}{\sum_{i=1}^{c} k_i - 1}$$

事实上只需将前c种颜色视为"一种颜色"即可. 其证明留给读者.

从而当$p = 2$时对任意正整数c, 原命题成立.

下面对任意的c, 设命题对p成立, 下考虑$p + 1$的情况. 事实上, 只需在上述证明中改为类似地考虑所有广义边所连的点即可.

我们下面严格地说明染色. 设集合$\{y_1, \ldots, y_k\}$为颜色集, 函数

$$f : [m] \to \{y_1, \ldots, y_k\},$$

称为$[m]$的一个$k-$染色. 若对某个i有m的子集$A \in f^{-1}(y_i)$, 则称A是**单色的**.

我们根据此可以得到著名的Schur定理. Schur提出此定理之初并未考虑过其在Ramsey理论中的应用, 而是将其作为研究有限域上的费马大定理的一个前置结论. 然而, 这一定理成为了Ramsey理论的源头之一.

定理 16 ***Schur*定理** 对任意$k \ge 1$, 都有正整数m, 满足: 对任一函数$f : [m] \to \{y_1, \ldots, y_k\}$, 存在某个$y_i(1 \le i \le k)$, 使得$f^{-1}(y_i)$中包含三个数$a, b, c$, 且$a + b = c$, 即$a + b = c$有单色解($a, b, c$未必互不相同).

证明 9 对任意$k \ge 1$, 令$n = R(3, 3, \ldots, 3; 2)$(内有$k$个3), $m = n-1$, 则从$[m]$到$\{y_1, \ldots, y_k\}$的函数f确定了一个K_n的边集的$k-$差色, 其中边ij被染成颜色$f(|i - j|)$.

由$n = R(3, 3, \ldots, 3; 2)$知存在一个单色的三角形, 设其顶点为$j_1, j_2, j_3$. 不失一般性地设$1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le n$, 则有

$$f(j_2 - j_1) = f(j_3 - j_2) = f(j_3 - j_1) = y_i$$

取$a = j_2 - j_1, b = j_3 - j_2, c = j_3 - j_1$即可.

在本节的最后我们继续关注Ramesy定理的一些应用.

定理 17 给定正整数n, 存在正整数$N(n)$, 使得当$N \geq N(n)$时, 平面上任意N个点, 若其中任意三个点不共线, 则有这些点的一个$n-$子集, 其构成一个凸n边形.

证明 10 首先指出, 任意三点不共线的n个点构成一个凸n边形, 当且仅当其中任意四个点均组成凸四边形.

下面我们证明:$N(n) = R(n, n; 3)$满足要求. 设S为平面上$N(n)$个点的集合, 并给点编号, 然后按下述方式给每个小三角形(广义边)染红色或蓝色: 如果三角形的编号由小至大为顺时针, 则将其染红色; 否则染蓝色. 从而存在$n-$子集, 其所有的三角形是单色的, 不妨设其为红色. 下面证明这个集合中不存在构成凹四边形的四个点.

否则设其凸包的三角形三点顺时针地分别为a, b, c, 三角形内的点为d,不失一般性地设$a < b < c$, 则由红色三角形abc, abd, bcd, adc可知 $a < b < c, a < b < d, b < c < d, a < d < c$, 矛盾. 从而这样的凹四边形不存在.

3 相异代表系和Hall定理