Chapter 1 预备知识

目录

1 集合, 关系, 函数

1.1 集合

定义 1 *康托尔集合论(朴素集合论):*

1. *集合可由任何有区别的对象组成;*

2. *集合由其组成对象整体唯一确定;*

3. *任何性质都确定一个具有该性质的对象的集合.*

朴素集合论因其定义的不严格性受到攻击, 此即第三次数学危机. 第三次数学危机以公理化集合论(ZFC公理集合论系统, 详见附录)的提出得到解决. 在组合数学中, 我们通常并不关心那些引起悖论的"集合"(如所有集合的集合等). 一定程度上我们可以接受集合的"朴素"的定义.

定义 2 *多重集是元素可重复出现的集合. 某个元素a_i出现的次数n_i称为该元素的重数.常将k个元素的多重集记作*

$$\{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_k \cdot a_k\}$$

定义 3 *若存在集合X到集合Y的双射(见下文), 则称集合X与Y等势. 由此得到的关系为等价关系. 所有与某集合X等势的集合确定一个等价类, 称为X的基数类, 记为$cardX$.*

关于集合基数类的相关结论,可先阅读第二节了解函数和关系的相关内容后阅读.

对于有限集X, 设其有n个元素, 则$cardX = n$. 若$X \sim N_0$, 则记$cardX = \aleph_0$; 若$X \sim R$, 则记$cardX = \aleph$.

若集合X与集合Y的某个子集等势, 则说集合X的基数类不大于集合Y的基数类, 记为$cardX \leq cardY$.

$$(cardX \leq cardY) := (\exists Z \subset Y \mid cardX = cardZ)\,.$$

集合与自身的一部分等势是无穷集的特征. 戴德金曾以此为无穷集的定义.

上述不等关系可证明有以下性质:

1. $(cardX \leq cardY) \wedge (cardY \leq cardZ) \Rightarrow (cardX \leq cardZ)$(显然);

2. $(cardX \leq cardY) \wedge (cardY \leq cardx) \Rightarrow (cardX = cardY)$(施罗德-伯恩斯坦定理);

3. $\forall X \forall Y\,(cardX \leq cardY) \vee (cardY \leq cardX)$(康托尔定理).

故基数类是线性有序的(见下文). 施罗德-伯恩斯坦定理的证明:

证明 1 先证明一个引理:

引理 *1* *(集合在映射下的分解定理):*若有映射$f: X \to Y, g: Y \to X$, 则存在分解

$$X = A \cup \tilde{A}, Y = B \cup \tilde{B}, \text{其中} f(A) = B, g\left(\tilde{B}\right) = \tilde{A}, A \cap \tilde{A} = \varnothing, B \cap \tilde{B} = \varnothing$$

证明 *2* 设$M = \{E \subset X \mid E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing\}$, 易知$\varnothing \in M$. 令$A = \cup_{E \in M}$, 先证$A \in M$. 事实上$\forall E \in M\,(E \subseteq A)$, 故由 $E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing$ 可知 $E \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing$ 故

$$A \cap g(Y \setminus f(A)) = (\cup_{E \in M} \cap g(Y \setminus f(A))) = \cup_{E \in M}(E \cap g(Y \setminus f(A))) = \varnothing$$

从而$A \in M$且为M中关于包含关系的最大元. 令$f(A) = B, \tilde{B} = Y \setminus B, \tilde{A} = g\left(\tilde{B}\right)$, 此时$A \cap \tilde{A} = A \cap g\left(\tilde{B}\right) = A \cap g(Y \setminus B) = A \cap g(Y \setminus f(A))\,\varnothing$.

下证$A \cup \tilde{A} = X$. 否则$\exists x_0 \in X\left(x_0 \notin A \cup \tilde{A}\right)$. 设$A_0 = A \cup \{x_0\}$, 则$\tilde{B} = Y \setminus f(A) \supseteq Y \setminus f(A_0)$. 故$\tilde{A} = g\left(\tilde{B}\right) \supseteq g(Y \setminus f(A_0))$.

$$\varnothing = A \cap \tilde{A} \supseteq A \cap g(Y \setminus f(A_0)) \Rightarrow A \cap g(Y \setminus f(A_0)).$$

$x_0 \notin \tilde{A} \Rightarrow x_0 \notin g(Y \setminus f(A_0)) \Rightarrow A_0 \cap g(Y \setminus f(A_0)) = (A \cup \{x_0\}) \cap g(Y \setminus f(A_0) = \varnothing)$

故$A_0 \in M$. 这与A是M中关于包含关系的最大元矛盾. 从而引理证毕.

回到题目. $\exists f: X \to Y, g: Y \to X$均为单射, 由引理,存在这样的分解 $X = A \cup \tilde{A}, Y = B \cup \tilde{B}, f(A) = B, g\left(\tilde{B}\right) = \tilde{A}$. 此时$f: A \to B, g: B \to A$均为双射.此时可作双射$F: X \to Y$, 其满足

$$x \to F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A; \\ g^{-1}(x), & x \in \tilde{A}. \end{cases}$$

从而$X \sim Y$. 原命题证毕.

定义

$$(cardX < cardY) := (cardX \leq cardY) \wedge (cardX \neq cardY).$$

定理 1

$$cardX < card\mathcal{P}(X)$$

证明 3 该结论对空集$\varnothing$显然成立.下考虑$X \neq \varnothing$. 因为$\mathcal{P}(X)$有X的所有单元素子集, 故$cardX \leq card\mathcal{P}(X)$. 下证$cardX \neq card\mathcal{P}(X)$.

否则存在$f : X \to \mathcal{P}(X)$, 考虑由不属于对应集合$f(x) \in \mathcal{P}(X)$的元素$x \in X$所组成的集合$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. 由$A \in \mathcal{P}(X)$知$\exists a \in X\,(f(a) = A)$, 对这样的$a$,有$a \notin A \wedge a \in A$, 矛盾.

1.2 关系, 函数

设A, B为两个集合, 其**笛卡尔积(Cartesion product)**定义为:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \tag{1}$$

当$|A| = m, |B| = n$时,易知$|A \times B| = mn$.

一个从A到B的**二元关系**R, 记为$R : A \to B$, 定义为$A \times B$的一个子集. 若有$A \subseteq A', B \subseteq B'$, 则$R \subseteq A \times B \subseteq A' \times B'$. 同一个关系可以作为不同集合的子集给出.

包含某关系的定义域的集合称为该关系的出发域, 包含某关系值域的集合称为该关系的的到达域. $(x, y) \in R$常写为xRy, 称为x与y的关系为R.

$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$称为关系$\mathcal{R}$的逆关系.

对于一个关系$\mathcal{R}$, 若其满足以下性质:

- $a\mathcal{R}a$(自反性);
- $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$(对称性);
- $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$(传递性)

则关系$\mathcal{R}$为等价关系. $a\mathcal{R}b$可记为$a \sim b$.相互等价的元素的全体构成等价类.

常见的等价关系: 相等关系; 模同余关系; 同余关系(代数);函数局部相等关系(此时等价类为在某点的函数芽).

对于一个关系$\mathcal{R}$, 若其满足以下性质:

- $a\mathcal{R}a$(自反性);
- $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$(反对称性);

- $(a\mathcal{R}b)\wedge(b\mathcal{R}c)\Rightarrow a\mathcal{R}c$(传递性)

则关系$\mathcal{R}$为偏序关系.$a\mathcal{R}b$可记为$a\leq b$.

若也有

$$\forall a\forall b\left((a\mathcal{R}b)\vee(b\mathcal{R}a)\right)$$

即X中任意两元素可比, 则$\mathcal{R}$称为序关系, 定义序关系的集合X称为线性序集

常见的偏序关系:集合的包含关系, 数的不小(大)于关系; 整数的整除关系, 线性空间的包含关系.

若关系$\mathcal{R}$满足

$$(x\mathcal{R}y_1)\wedge(x\mathcal{R}y_2)\Rightarrow(y_1=y_2)$$

则其称为函数关系.常用符号f表示函数, 用记号$y=f(x)$或$x\overset{f}{\mapsto}y$. 此时X称为函数的定义域, x为函数的自变量, Y称为函数的值域, y为函数的函数值. 若两个函数f_1,f_2具有相同的定义域, 且在每个$x\in X$上$f_1(x)=f_2(x)$, 则两个函数相同.

函数也称为映射.若$\forall x_1,x_2\in X\left(f(x_1)\neq f(x_2)\right)$,则$f$为单射; 若$f(X)=Y$, 则$f$为满射.若$f$既为单射也为满射, 则称$f$为双射.

2 偏序集

2.1 偏序关系

2.2 链, 反链

2.3 Dilworth引理, 反链分解算法

3 初等计数方法

3.1 排列组合与多重排列组合

3.2 十二重技术方法

3.3 排列和组合的生成算法

4 组合恒等式

4.1 二项式定理

4.2 比较系数法, 组合恒等式

5 习题及参考解答

A 附录:公理化集合论

A.0.1 外延公理

任何集合A与集合B相等,当且仅当它们所具有的各元素是相同的.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\,((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$$

A.0.2 分离公理

任何集合A和性质P都对应一个集合B, 其元素是且仅是A中具有性质P的各元素.

$$A\text{为一集合} \Rightarrow B\,\{x \in A \mid P\,(x)\}\text{ 为一集合}$$

由分离公理, 任何集合X都有空子集$\varnothing_X = \{x \in X \mid x \neq x\}$, 而由外延公理, 对任意集合$X, Y$, $\varnothing_X = \varnothing_Y$, 即空集是唯一的.

由分离公理, 如果A, B为集合, 则$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$也是集合.

A.0.3 并集公理

对于集合的任何集合M(集合族 M), 存在一个被成为集合M的并集的集合$\cup M$, 其元素是且仅是M的各元素包含的那些元素.

$$x \in \cup M \Leftrightarrow \exists X\,((X \in M) \wedge (x \in X))$$

由并集公理和分离公理, 可以定义集合(族)M的交集为集合

$$\cap M := \{x \in \cup M \mid \forall X\,((X \in M) \Rightarrow (x \in X))\}$$

A.0.4 配对公理

对于任何集合X, Y, 存在一个集合Z, 其元素仅为X, Y.

集合Z记为$\{X, Y\}$, 成为集合X, Y的无序偶. 若$X = Y$, 则Z由一个元素组成.

A.0.5 子集之集公理

对于任何集合X, 存在一个集合$\mathcal{P}(X)$, 其元素是且仅是X的各子集.

设$x \in X, y \in Y$, 序偶(x, y)确实构成集合

$$X \times Y := \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)) \mid p = (x, y) \wedge (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$$

上述公理限制了形成新集合的可能性, 例如由康托尔定理 $cardX < card\mathcal{P}(X)$, 故一切集合的集合并不存在.

A.0.6 无穷公理

定义$X^+ = X \cup \{X\}$, 称为集合X的后继集. 若一个集合包含空集以及自身任何一个元素的后继集, 则称该集合为归纳集. 无穷公理:归纳集存在.

可根据上述公理建立自然数集$\mathbb{N}_0$的标准模型(冯·诺伊曼方案). $\mathbb{N}_0$的元素是集合

$$\varnothing, \varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}, \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}$$

我们用符号$0, 1, 2 \ldots$表示它们, 称它们为自然数.

A.0.7 替换公理

设$\mathcal{F}(x, y)$是以下命题(确切地说是一个公式):对于集合X中的任何元素x_0,存在唯一的对象y_0, 使得$\mathcal{F}(x_0, y_0)$成立. 你们满足以下条件的对象y组成一个集合:存在$x \in X$, 使得$\mathcal{F}(x, y)$成立.

A.0.8 选择公理

对于任何由互不相交非空集合组成的集合族, 存在集合C,使得对于该集合族中的任何集合X, 集合$X \cap C$只由一个元素组成.

前7个公理构成ZF(策梅洛-弗伦克尔)公理系统, 加上选择公理构成ZFC公理系统. 选择公理曾引起激烈讨论.

图 1: 不得已.jpg