Chapter 6 鸽巢原理, Ramsey理论和相异代表系

目录

1 鸽巢原理及应用

鸽巢原理是组合数学中最为古老和经典的原理之一, 也被称为抽屉原理或Dirichlet原理. Diriclet在1834年提出了这一原理. 该原理最简单的描述是, 三只鸽子飞入两个笼子, 则必有某个笼子内至少有两只鸽子. 我们先以传统的"鸽笼"的方式描述这一原理.

定理 1 *(鸽巢原理)设有m只鸽子飞进n个笼子, 则必定存在某个笼子, 其内飞进了至少$\lceil \frac{m}{n} \rceil$只鸽子*

不难用反证法证明. 由读者完成.

上述定理的加强形式为

定理 2 *设有m只鸽子飞进编号分别为$h_1, \ldots, h_n$的n个笼子. 若已知*

$$m \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n + 1,\ a_i \geq 0 (1 \leq i \leq n),$$

则必定存在某个笼子h_i, 其内飞进了至少a_i只鸽子.

证明同样留给读者.

我们用函数和集合论的语言重述上述定理.

定理 3 *设A, B为两个非空有限集, $f : A \to B$为一个映射, 则*

(1)存在$b_1 \in B$, 使得$\left| f^{-1}(b_1) \right| \geq \frac{|A|}{|B|}$.

(2)存在$b_2 \in B$, 使得$\left| f^{-1}(b_2) \right| \leq \frac{|A|}{|B|}$.

定理 4 *设A为非空有限集, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $f : A \to B$为一个映射, 则有下述结论*

(1)若$|A| = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n + 1$, 则存在$b_i \in B$, 使得

$$\left| f^{-1}(b_i) \right| \geq x_i;$$

(2)若$|A| = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n + 1$, 则存在$b_i \in B$, 使得

$$\left| f^{-1}(b_i) \right| \leq x_i;$$

鸽巢原理在表示上直观形象, 内涵也易于理解. 然而我们会发现, 应用该原理是极其具有技巧性的. 我们下面用若干例子来说明.

例 1 从$1, 2, \ldots, 200$中任选101个整数, 其中必存在一个可以被另一个整除.

证明 1 任何正整数都可以写成$n = 2^k a$的形式, 其中a为奇数. 我们将$1, 2, \ldots, 200$写成上述形式, 则每个a都满足$1 \le a \le 199$, 从而这些a构成了100个”鸽笼”. 具体而言, 其为

$$P_a = \left\{ 2^k a \mid 1 \le 2^k a \le 200, k \in \mathbb{N} \right\}, 1 \le a \le 199, a\text{为奇数}.$$

从$1, 2, \ldots, 199$中任选101个整数, 必有两个数落入同一”鸽笼”中, 不妨设$n_1 = 2^{i_1} a, n_2 = 2^{i_2} a$, 其中指数大的可以被指数小的整除.

在下述问题的证明中我们仅给出抽屉的构造.

例 2 *(*整数环上的**中国剩余定理**, 又称**孙子定理***)* 设$m_1, \ldots, m_k$是两两互素的正整数, 则任给k个整数$a_1, a_2, \ldots, a_k$, 必存在$x \in \mathbb{N}$, 使得

$$x \equiv a_i (\mathrm{mod} m_i), \forall 1 \le i \le k.$$

证明 2 我们先证明*:* 对互素的正整数m_1, m_2和给定的整数a_1, a_2, 存在$x \in \mathbb{N}$*(*事实上有无穷多个*)*满足

$$x \equiv a_i (\mathrm{mod} m_i), i = 1, 2,$$

即$k = 2$的情形. 事实上, 我们只需要证明$a_1, m_1 + a_1, \ldots, (m_2 - 1) m_1 + a_1$这$m_2$个数被$m_2$除的余数各不相同, 即它们构成了模$m_2$的一个完全剩余系, 从而其中必有一个为模$m_2$余$a_2$的. 否则存在$1 \le j < i \le m_2 - 1$, 其满足

$$i m_1 + a_1 \equiv j m_1 + a_1 (\mathrm{mod} m_2),$$

从而

$$m_2 \mid (i m_1 + a_1) - (j m_1 + a_1) = (i - j) m_1.$$

从而得到矛盾. 从而存在这样的$0 \le p \le m_2 - 1$, 使得

$$p m_1 + a_1 \equiv a_2 (\mathrm{mod} m_2),$$

取$x = p m_1 + a_1$, 其满足上述条件. 事实上, 对$x = p m_1 + a_1 + k m_1 m_2, k \in \mathbb{N}$其均满足条件. 这样的$x$满足

$$x \equiv p m_1 + a_1 (\mathrm{mod} m_1 m_2).$$

下设原命题对$< k$的正整数成立, 下证对k成立. 由归纳假设, 存在$x_0 \in \mathbb{N}$, 对给定的$k - 1$个正整数满足

$$x_0 \equiv a_i (\mathrm{mod} m_i), \forall 1 \le i \le k - 1.$$

且存在正整数t, 使得

$$x_0 \equiv t(\mathrm{mod} m_1 m_2 \ldots m_{k-1}).$$

而$m_1 m_2 \ldots m_{k-1}$与m_k 互素, 则由$k = 2$时的归纳假设知, 存在x满足

$$\begin{cases} x \equiv t(\mathrm{mod} m_1 m_2 \ldots m_{k-1}), \\ x \equiv a_k(\mathrm{mod} m_k). \end{cases},$$

这样的x又满足

$$x \equiv a_i(\mathrm{mod} m_i), \forall 1 \leq i \leq k.$$

从而命题对k成立. 由归纳原理知其对所有的$k \in \mathbb{N}$成立. 证毕.

事实上此定理也有构造的证明方式. 这个构造式的证明给出了这样的x:

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{\prod_{i=1}^{k} m_i}{m_i} \right)^{-1} \frac{\prod_{i=1}^{k} m_i}{m_i} \ (\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{k} m_i),$$

其中x^{-1}满足$x^{-1}x \equiv 1(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{k} m_i), 1 \leq x^{-1} \leq \prod_{i=1}^{k} m_i$.

证明留给读者.

我们回顾第一章中提出的下述问题

例 3 在任一含$mn+1$个元素的偏序集$\mathbf{P}$中, 或有一长度至少为$m+1$的链(即$\mathbf{P}$的高度$\geq m+1$), 或有一宽度至少为$n+1$的反链(即$\mathbf{P}$的宽度$\geq n+1$).

证明已在当时留给读者.

例 4 设α为一正无理数, 用$\{x\}$表示x的小数部分, 即

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

则数列$\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^{\infty}$在$(0,1)$中稠密, 即对$(0,1)$中任一点的任一邻域中存在此数列中的某一项.

证明 3 我们只需证明对任一$\varepsilon > 0$, 存在n_0使得

$$\{n_0\alpha\} < \varepsilon.$$

或

$$\{n_0\alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

从而$\{n\alpha\}$存在于$(0,1)$中每一点的ε-邻域中. 这是因为设$\{n_0\alpha\}=\eta<\epsilon$, 则

$$\{kn_0\alpha\}=\{(k-1)\,n_0\alpha+n_0\alpha\}=\{\{(k-1)\,n_0\alpha\}+\{n_0\alpha\}\}=\{\{(k-1)\,n_0\alpha\}+\eta\}.$$

对$k\in\mathbb{N}, k<\frac{1}{\eta}$有

$$\{kn_0\alpha\}=\{k\eta\}=k\eta.$$

设$m=\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor$, 下证明: 对$(0,1)$中任一元素$x$的任一$\varepsilon$-邻域, 其记为$U_\varepsilon(x)$, 存在$1\le k\le m$, 使得$\{kn_0\alpha\}\in U_\varepsilon(x)$. 否则对所有$1\le k\le m$均有

$$\{kn_0\alpha\}<x-\varepsilon\vee\{kn_0\alpha\}>x+\varepsilon.$$

集合

$$L=\{k\mid 1\le k\le m,\{kn_0\alpha\}<x-\varepsilon\}$$

为自然数的有限子集, 故由最小数原理, 其或为空集, 或有最大元k_l. 集合

$$H=\{k\mid 1\le k\le m,\{kn_0\alpha\}>x+\varepsilon\}$$

为自然数的有限子集, 故由最小数原理, 其或为空集, 或有最小元k_h. 由假设有$L\cup H=\{1,\ldots,m\}$.

若L为空集, 则$H=\{1,\ldots,m\}$, 即$\forall 1\le k\le m$, $x+\varepsilon<\{kn_0\alpha\}=k\eta$, 从而$x+\varepsilon<\eta$, 则$x<\eta-\varepsilon<0$, 这不可能. 同样的可以证明$H$不为空集. 从而$L$有最大元$k_l$, H有最小元k_h.

由假设易知$k_h=k_l+1$. 从而

$$\begin{cases}\{k_ln_0\alpha\}=k_l\eta<x-\varepsilon;\\ \{(k_l+1)\,n_0\alpha\}=(k_l+1)\,\eta>x+\varepsilon.\end{cases}$$

这说明

$$\eta>2\varepsilon.$$

得到矛盾. 从而原结论成立.

类似地, 若对任一$\varepsilon>0$, 存在n_0使得

$$\{n_0\alpha\}>1-\varepsilon.$$

可以同样证明相应结论.

下面证明对任意$\varepsilon>0$, 存在n_0使得

$$\{n_0\alpha\}<\varepsilon.$$

或

$$\{n_0\alpha\} > 1-\varepsilon.$$

否则$\forall n \in \mathbb{N}\,\{n_0\alpha\} \geq \varepsilon$. 记$p = \lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor$, 考虑$p$个区间

$$(i\varepsilon, (i+1)\,\varepsilon)\,, 1 \leq i \leq p-1, (p\epsilon, 1)\,.$$

任取$p+1$个整数, 不妨取$1, 2, \ldots, p+1$, 由鸽巢原理知存在两个相异整数$1 \leq j < i \leq p+1$, 使得$\{i\alpha\}\,, \{j\alpha\}$落入同一区间. 此时

$$\{(i-j)\,\alpha\} = \{i\alpha - j\alpha\}$$

若$\{i\alpha\} > \{j\alpha\}$, 则

$$\{(i-j)\,\alpha\} = \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \varepsilon.$$

若$\{i\alpha\} < \{j\alpha\}$, 则

$$\{(i-j)\,\alpha\} = 1 + \{i\alpha\} - \{j\alpha\} > 1-\varepsilon.$$

若$\{i\alpha\} = \{j\alpha\}$, 则

$$\{i\alpha\} = \{(i-j)\,\alpha + j\alpha\} = \{\{(i-j)\,\alpha\} + \{j\alpha\}\} = \{j\alpha\}\,.$$

从而$\{(i-j)\,\alpha\} = 0$, 即存在$q \in \mathbb{N}$, 使得

$$(i-j)\,\alpha = q,$$

这与α为无理数矛盾. 综上所述, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在n_0使得

$$\{n_0\alpha\} < \varepsilon.$$

或

$$\{n_0\alpha\} > 1-\varepsilon.$$

证毕.

下面给出数论中一个有趣的结果利用鸽巢原理的证明.

例 5 证明*:*对任意$\alpha \in \mathbb{R}$和$n \in \mathbb{N}$, 存在$p, q \in \mathbb{N}$, 使得$1 \leq q \leq n$, 且

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

证明 4 证明*:* 定义映射

$$f:\{1,2,\ldots,n+1\}\to\left\{\left[0,\frac{1}{n}\right),\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right),\ldots,\left[\frac{n-1}{n},1\right)\right\},$$

其中$f(j)$为包含$\alpha j-\lfloor\alpha j\rfloor$的子区间. 由鸽巢原理知存在$j>k$, 使得$f(j)=f(k)$, 即

$$|(\alpha j-\lfloor\alpha j\rfloor)-(\alpha k-\lfloor\alpha k\rfloor)|<\frac{1}{n}.$$

这等价于

$$|(j-k)\,\alpha-(\lfloor\alpha j\rfloor-\lfloor\alpha k\rfloor)|<\frac{1}{n}.$$

令$q=j-k$, $p=\lfloor\alpha j\rfloor-\lfloor\alpha k\rfloor$, 则有$1\le q\le n$, 且

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{nq}\le\frac{1}{q^2}.$$

证毕.

上述定理为Dirichlet在丢番图逼近理论中得到的成果. 丢番图逼近理论为初等数论的一个分支, 其研究对无理数(包括代数数和超越数)的有理逼近.

2 Ramsey定理

3 相异代表系和Hall定理