

Chapter 6 鸽巢原理, Ramsey理论和相异代表系

目录

1 鸽巢原理及应用	2
2 Ramsey定理	7
3 相异代表系和Hall定理	13

1 鸽巢原理及应用

鸽巢原理是组合数学中最为古老和经典的原理之一,也被称为抽屉原理或Dirichlet原理. Dirichlet在1834年提出了这一原理. 该原理最简单的描述是,三只鸽子飞入两个笼子,则必有某个笼子内至少有两只鸽子. 我们先以传统的“鸽笼”的方式描述这一原理.

定理 1 (鸽巢原理) 设有 m 只鸽子飞进 n 个笼子, 则必定存在某个笼子, 其内飞进了至少 $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ 只鸽子

不难用反证法证明. 由读者完成.

上述定理的加强形式为

定理 2 设有 m 只鸽子飞进编号分别为 h_1, \dots, h_n 的 n 个笼子. 若已知

$$m \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n - n + 1, \quad a_i \geq 0 (1 \leq i \leq n),$$

则必定存在某个笼子 h_i , 其内飞进了至少 a_i 只鸽子.

证明同样留给读者.

我们用函数和集合论的语言重述上述定理.

定理 3 设 A, B 为两个非空有限集, $f: A \rightarrow B$ 为一个映射, 则

- (1) 存在 $b_1 \in B$, 使得 $|f^{-1}(b_1)| \geq \frac{|A|}{|B|}$.
- (2) 存在 $b_2 \in B$, 使得 $|f^{-1}(b_2)| \leq \frac{|A|}{|B|}$.

定理 4 设 A 为非空有限集, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $f: A \rightarrow B$ 为一个映射, 则有下列结论

- (1) 若 $|A| = x_1 + x_2 + \dots + x_n - n + 1$, 则存在 $b_i \in B$, 使得

$$|f^{-1}(b_i)| \geq x_i;$$

- (2) 若 $|A| = x_1 + x_2 + \dots + x_n - n + 1$, 则存在 $b_i \in B$, 使得

$$|f^{-1}(b_i)| \leq x_i;$$

鸽巢原理在表示上直观形象, 内涵也易于理解. 然而我们会发现, 应用该原理是极其具有技巧性的. 我们下面用若干例子来说明.

例 1 从 $1, 2, \dots, 200$ 中任选101个整数, 其中必存在一个可以被另一个整除.

证明 1 任何正整数都可以写成 $n = 2^k a$ 的形式, 其中 a 为奇数. 我们将 $1, 2, \dots, 200$ 写成上述形式, 则每个 a 都满足 $1 \leq a \leq 199$, 从而这些 a 构成了 100 个“鸽笼”. 具体而言, 其为

$$P_a = \{2^k a \mid 1 \leq 2^k a \leq 200, k \in \mathbb{N}\}, 1 \leq a \leq 199, a \text{ 为奇数}.$$

从 $1, 2, \dots, 199$ 中任选 101 个整数, 必有两个数落入同一“鸽笼”中, 不妨设 $n_1 = 2^{i_1} a, n_2 = 2^{i_2} a$, 其中指数大的可以被指数小的整除.

在下述问题的证明中我们仅给出抽屉的构造.

例 2 (整数环上的中国剩余定理, 又称孙子定理) 设 m_1, \dots, m_k 是两两互素的正整数, 则任给 k 个整数 a_1, a_2, \dots, a_k , 必存在 $x \in \mathbb{N}$, 使得

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, \forall 1 \leq i \leq k.$$

证明 2 我们先证明: 对互素的正整数 m_1, m_2 和给定的整数 a_1, a_2 , 存在 $x \in \mathbb{N}$ (事实上有无穷多个) 满足

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, i = 1, 2,$$

即 $k = 2$ 的情形. 事实上, 我们只需要证明 $a_1, m_1 + a_1, \dots, (m_2 - 1)m_1 + a_1$ 这 m_2 个数被 m_2 除的余数各不相同, 即它们构成了模 m_2 的一个完全剩余系, 从而其中必有一个为模 m_2 余 a_2 的. 否则存在 $1 \leq j < i \leq m_2 - 1$, 其满足

$$im_1 + a_1 \equiv jm_1 + a_1 \pmod{m_2},$$

从而

$$m_2 \mid (im_1 + a_1) - (jm_1 + a_1) = (i - j)m_1.$$

从而得到矛盾. 从而存在这样的 $0 \leq p \leq m_2 - 1$, 使得

$$pm_1 + a_1 \equiv a_2 \pmod{m_2},$$

取 $x = pm_1 + a_1$, 其满足上述条件. 事实上, 对 $x = pm_1 + a_1 + km_1m_2, k \in \mathbb{N}$ 其均满足条件. 这样的 x 满足

$$x \equiv pm_1 + a_1 \pmod{m_1m_2}.$$

下设原命题对 $< k$ 的正整数成立, 下证对 k 成立. 由归纳假设, 存在 $x_0 \in \mathbb{N}$, 对给定的 $k - 1$ 个正整数满足

$$x_0 \equiv a_i \pmod{m_i}, \forall 1 \leq i \leq k - 1.$$

且存在正整数 t , 使得

$$x_0 \equiv t(\text{mod } m_1 m_2 \dots m_{k-1}).$$

而 $m_1 m_2 \dots m_{k-1}$ 与 m_k 互素, 则由 $k = 2$ 时的归纳假设知, 存在 x 满足

$$\begin{cases} x \equiv t(\text{mod } m_1 m_2 \dots m_{k-1}), \\ x \equiv a_k(\text{mod } m_k). \end{cases},$$

这样的 x 又满足

$$x \equiv a_i(\text{mod } m_i), \forall 1 \leq i \leq k.$$

从而命题对 k 成立. 由归纳原理知其对所有的 $k \in \mathbb{N}$ 成立. 证毕.

事实上此定理也有构造的证明方式. 这个构造式的证明给出了这样的 x :

$$x = \sum_{i=1}^k a_i \left(\frac{\prod_{i=1}^k m_i}{m_i} \right)^{-1} \frac{\prod_{i=1}^k m_i}{m_i} (\text{mod } \prod_{i=1}^k m_i),$$

其中 x^{-1} 满足 $x^{-1}x \equiv 1(\text{mod } \prod_{i=1}^k m_i)$, $1 \leq x^{-1} \leq \prod_{i=1}^k m_i$.

证明留给读者.

我们回顾第一章中提出的下述问题

例 3 在任一含 $mn+1$ 个元素的偏序集 \mathbf{P} 中, 或有一长度至少为 $m+1$ 的链(即 \mathbf{P} 的高度 $\geq m+1$), 或有一宽度至少为 $n+1$ 的反链(即 \mathbf{P} 的宽度 $\geq n+1$).

证明已在当时留给读者.

例 4 设 α 为一正无理数, 用 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 即

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

则数列 $\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(0, 1)$ 中稠密, 即对 $(0, 1)$ 中任一点的任一邻域中存在此数列中的某一项.

证明 3 我们只需证明对任一 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0 使得

$$\{n_0\alpha\} < \varepsilon.$$

或

$$\{n_0\alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

从而 $\{n\alpha\}$ 存在于 $(0, 1)$ 中每一点的 ε -邻域中. 这是因为设 $\{n_0\alpha\} = \eta < \varepsilon$, 则

$$\{kn_0\alpha\} = \{(k-1)n_0\alpha + n_0\alpha\} = \{(k-1)n_0\alpha\} + \{n_0\alpha\} = \{(k-1)n_0\alpha\} + \eta.$$

对 $k \in \mathbb{N}, k < \frac{1}{\eta}$ 有

$$\{kn_0\alpha\} = \{k\eta\} = k\eta.$$

设 $m = \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor$, 下证明: 对 $(0, 1)$ 中任一元素 x 的任一 ε -邻域, 其记为 $U_\varepsilon(x)$, 存在 $1 \leq k \leq m$, 使得 $\{kn_0\alpha\} \in U_\varepsilon(x)$. 否则对所有 $1 \leq k \leq m$ 均有

$$\{kn_0\alpha\} < x - \varepsilon \vee \{kn_0\alpha\} > x + \varepsilon.$$

集合

$$L = \{k \mid 1 \leq k \leq m, \{kn_0\alpha\} < x - \varepsilon\}$$

为自然数的有限子集, 故由最小数原理, 其或为空集, 或有最大元 k_l . 集合

$$H = \{k \mid 1 \leq k \leq m, \{kn_0\alpha\} > x + \varepsilon\}$$

为自然数的有限子集, 故由最小数原理, 其或为空集, 或有最小元 k_h . 由假设有 $L \cup H = \{1, \dots, m\}$.

若 L 为空集, 则 $H = \{1, \dots, m\}$, 即 $\forall 1 \leq k \leq m, x + \varepsilon < \{kn_0\alpha\} = k\eta$, 从而 $x + \varepsilon < \eta$, 则 $x < \eta - \varepsilon < 0$, 这不可能. 同样的可以证明 H 不为空集. 从而 L 有最大元 k_l , H 有最小元 k_h .

由假设易知 $k_h = k_l + 1$. 从而

$$\begin{cases} \{k_l n_0 \alpha\} = k_l \eta < x - \varepsilon; \\ \{(k_l + 1) n_0 \alpha\} = (k_l + 1) \eta > x + \varepsilon. \end{cases}$$

这说明

$$\eta > 2\varepsilon.$$

得到矛盾. 从而原结论成立.

类似地, 若对任一 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0 使得

$$\{n_0\alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

可以同样证明相应结论.

下面证明对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0 使得

$$\{n_0\alpha\} < \varepsilon.$$

或

$$\{n_0\alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

否则 $\forall n \in \mathbb{N} \{n_0\alpha\} \geq \varepsilon$. 记 $p = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, 考虑 p 个区间

$$(i\varepsilon, (i+1)\varepsilon), 1 \leq i \leq p-1, (p\varepsilon, 1).$$

任取 $p+1$ 个整数, 不妨取 $1, 2, \dots, p+1$, 由鸽巢原理知存在两个相异整数 $1 \leq j < i \leq p+1$, 使得 $\{i\alpha\}, \{j\alpha\}$ 落入同一区间. 此时

$$\{(i-j)\alpha\} = \{i\alpha - j\alpha\}$$

若 $\{i\alpha\} > \{j\alpha\}$, 则

$$\{(i-j)\alpha\} = \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \varepsilon.$$

若 $\{i\alpha\} < \{j\alpha\}$, 则

$$\{(i-j)\alpha\} = 1 + \{i\alpha\} - \{j\alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

若 $\{i\alpha\} = \{j\alpha\}$, 则

$$\{i\alpha\} = \{(i-j)\alpha + j\alpha\} = \{ \{(i-j)\alpha\} + \{j\alpha\} \} = \{j\alpha\}.$$

从而 $\{(i-j)\alpha\} = 0$, 即存在 $q \in \mathbb{N}$, 使得

$$(i-j)\alpha = q,$$

这与 α 为无理数矛盾. 综上所述, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0 使得

$$\{n_0\alpha\} < \varepsilon.$$

或

$$\{n_0\alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

证毕.

下面给出数论中一个有趣的结果利用鸽巢原理的证明.

例 5 证明: 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $p, q \in \mathbb{N}$, 使得 $1 \leq q \leq n$, 且

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

证明 4 证明: 定义映射

$$f: \{1, 2, \dots, n+1\} \rightarrow \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right) \right\},$$

其中 $f(j)$ 为包含 $\alpha j - [\alpha j]$ 的子区间. 由鸽巢原理知存在 $j > k$, 使得 $f(j) = f(k)$, 即

$$|(\alpha j - [\alpha j]) - (\alpha k - [\alpha k])| < \frac{1}{n}.$$

这等价于

$$|(j-k)\alpha - ([\alpha j] - [\alpha k])| < \frac{1}{n}.$$

令 $q = j - k$, $p = [\alpha j] - [\alpha k]$, 则有 $1 \leq q \leq n$, 且

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

证毕.

上述定理为Dirichlet在丢番图逼近理论中得到的成果. 丢番图逼近理论为初等数论的一个分支, 其研究对无理数(包括代数数和超越数)的有理逼近.

2 Ramsey定理

我们用一个简单的问题引入我们所要讨论的内容.

例 6 任意6人中, 或有3人两两相识, 或有3人两两不相识.

其可由第一节所述鸽巢原理解决.

Frank Plumpton Ramsey仅活了27岁, 但他的名字因Ramsey理论而影贝后人铭记. Ramsey理论由鸽巢原理出发, 称为了一门丰富且有影响力的学问, 其涉及问题描述简易, 证明艰难, 诸如概率和代数方法等组合数学的新的工具伴随解决相应地问题而诞生. 本节仅对Ramsey问题进行简要介绍.

定理 5 Ramsey定理 对任意给定的正整数 $p, c, k_1, k_2, \dots, k_c$ ($p \leq k_i, 1 \leq i \leq c$), 存在正整数 n 与集合

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

其满足: 对 V 的所有 $\binom{n}{p}$ 个 p -子集构成集合的任意一个 c -划分 $\{P_1, P_2, \dots, P_c\}$, 必定对某个 $i \in [c]$, 存在 V 的子集 U_i , 使得 $|U_i| = k_i$, 并且 U_i 的所有 p -子集都包含在上述 c -划分的某一个集合 P_i 之中.

上述定理的常见形式为用图论语言描述的等价形式, 其中 $p = c = 2$.

定理 6 Ramsey定理 对任意正整数 $k, l \geq 2$, 存在正整数 n , 使得将 K_n (即 n 个顶点的完全图)的每条边染成红蓝两色之一, 都会产生一个红色的 K_k , 或产生一个蓝色的 K_l . 称最小的这样的 n 为关于 k, l 的**Ramsey数**, 记为 $R(k, l)$.

定理5中的 c 代表所考虑的染色数, p 相当于超图的边上顶点的个数, 当 $p = c = 2$ 时, 满足条件的最小的正整数 n 正是 $R(k_1, k_2)$.

下面给出定理6的证明, 其由一个蕴含更强结论的引理得到.

引理 1

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

引理的证明 1 首先证明递推关系

$$R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1),$$

从而可归纳得到

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}.$$

设 $R(k-1, l) = n_1, R(k, l-1) = n_2$, 任给 $K_{n_1+n_2}$ 的边集的二染色, 可以证明或者存在一个红色的 K_k , 或者存在一个蓝色的 K_l , 从而 $R(k, l) \leq n_1 + n_2$.

考虑 $K_{n_1+n_2}$ 的任一顶点 u , 其与其他 $n_1 + n_2 - 1$ 个顶点都相连, 由鸽巢原理知其或连至少 n_1 条红边, 或连至少 n_2 条蓝边, 不失一般性地设连有 n_1 条红边, 下考虑所连的红边对应地这 n_1 个点, 其构成一个 K_{n_1} , 若这个 K_{n_1} 中存在一个红色的 K_{k-1} , 则连同点 u 得到一个红色的 K_k ; 否则, 由 $R(k-1, l) = n_1$ 知其必存在一个蓝色的 K_l . 证毕.

下介绍Ramsey数的一些简单性质.

定理 7 对任意正整数 $k, l \geq 2$, 有

$$R(k, l) = R(l, k).$$

定理 8 对任意正整数 $l \geq 2$, 有

$$R(2, l) = l.$$

定理 9

$$R(3, 3) = 6.$$

下给出一个例题.

例 7 求 $R(5, 5)$.

留作课后习题.

事实上, Ramsey数的求值是不容易的. 人们因此开始寻找其上下界. 在上文中1式给出了一个上界.(此外存在一平凡下界0). 如何寻找一个接近的上下界也是一件困难的事情. 事实上, 仅当 $k = 3$ 时找到了Ramsey数的阶.

定理 10 对任意 $l \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$R(3, l) = \Theta\left(\frac{l^2}{\ln l}\right).$$

证明见相关文献. 对于 $R(k, k)$, 已知的最好的上界为

$$R(k, k) \leq \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{\sqrt{k-1}}.$$

最好的下界为

$$R(k, k) \geq \frac{\sqrt{2}}{e} (1 + o(1)) k 2^{\frac{k}{2}}.$$

其证明均见相关文献.

下考虑这样一个问题: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{R(k, k)}$ 是否存在. Erdos猜想这个极限是存在的, 并以100美元奖励这个问题的解决者. 由上文给出的上下界和stirling公式, 我们可以得到

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{R(k, k)} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{R(k, k)} \leq 4.$$

目前, 这100美元有待获取.

我们下面关注其一个下界的具体证明, 并由此引入组合数学中的概率方法.

定理 11 若 $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, 则 $n < R(k, k)$.

证明 5 随机地将 K_n 的边集二染色, 每条边被染成红色的概率和被染成蓝色的概率都是 $\frac{1}{2}$, 且各条边之间相互独立. 对 K_n 的顶点集的每个 k -子集 R , 令 A_R 表示 R 是单色的这一事件, 则

$$Pr(A_R) = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

我们注意到有 $\binom{n}{k}$ 种方式得到 R , 从而至少产生一个单色 k -子集的概率至多为 $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$. 从而若

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

则至少存在一种二染色, 使得集无红色也无蓝色的 K_k 产生, 故

$$n < R(k, k).$$

证毕.

Erdos的上述方法是概率方法在组合数学中应用的开端. 概率方法的思想可概括为: 为证明满足某些性质的组合结构的存在性, 构建一个合适的概率空间, 说明其对应事件发生的概率大于零.

读者应深刻认识概率论的内容, 以免在应用概率方法时出现疏漏.

由定理11可得下述结论.

定理 12 当 $k \geq 3$ 时, 有

$$2^{\frac{k}{2}} < R(k, k).$$

下面我们加强这一结论.

定义 1 对事件 A_1, \dots, A_n , 我们定义**相关性图**为指标集 $[n]$ 上的一个图 G , 其满足: 对任意 $1 \leq i \leq n$, 事件 A_i 独立于 $\{A_j \mid \{i, j\} \notin E(G)\}$ 的每个子集.

我们注意到此时比 A_i 独立于这个子集中的每个 A_j 要求更多.

定理 13 设 G 是关于事件 A_1, \dots, A_n 的某个相关性图. 设 $Pr(A_i) \leq p, 1 \leq i \leq n$, 且 G 的每一个顶点的度不大于 d . 若 $4dp < 1$, 则 $\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \neq \emptyset$.

证明 6 首先证明: 对指标集 $[n]$ 的每一个子集 $\{i_1, \dots, i_m\}$, 有

$$Pr(A_{i_1} | \bar{A}_{i_2} \dots \bar{A}_{i_m}) \leq \frac{1}{2d}. \quad (1)$$

当 $m = 1$ 时结论平凡. 当 $m = 2$ 时, 有

$$Pr(A_1 | A_2) \leq \frac{p_1}{1 - p_2} \leq \frac{1}{4d - 1} < \frac{1}{2d},$$

为了符号上的方便, 我们取 $i_j = j, p_i := Pr(A_i)$. 下面我们归纳证明.

设 G 中1相邻于 $2, 3, \dots, q$, 且不相邻于 $q+1, \dots, m$. 我们有

$$Pr(A_1 | \bar{A}_2 \dots \bar{A}_m) = \frac{Pr(A_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_q | \bar{A}_{q+1} \dots \bar{A}_m)}{Pr(\bar{A}_2 \dots \bar{A}_q | \bar{A}_{q+1} \dots \bar{A}_m)}$$

其中

$$Pr(A_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_q | A_{q+1}^- \dots \bar{A}_m) \leq Pr(A_1 | A_{q+1}^- \dots \bar{A}_m) \leq Pr(A_1) \leq \frac{1}{4d},$$

由归纳假设,

$$Pr(\bar{A}_2 \dots \bar{A}_q | A_{q+1}^- \dots \bar{A}_m) \geq 1 - \sum_{i=2}^q Pr(A_i | A_{q+1}^- \dots \bar{A}_m) \geq 1 - \frac{q-1}{2d} \geq \frac{1}{2},$$

从而式I得证. 由此可得

$$Pr(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) = \prod_{i=1}^n Pr(\bar{A}_i | \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{i-1}) \geq \left(1 - \frac{1}{2d}\right)^n > 0.$$

从而原命题得证.

我们用这个方法得到 $N(k, k)$ 的一个更好的下界.

定理 14

$$N(k, k) \geq c \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}}.$$

其中 c 为一个常数.

证明 7 对 K_n 随机二染色, 对点集的每一个 k -子集 R , 用 A_R 表示 R 为单色的这一事件. 我们定义一个相关性图, 使点集的 k -子集 R_1, R_2 相邻当且仅当 $|R_1 \cap R_2| \geq 2$, 即 R_1 与 R_2 至少有一条公共边.

图 G 的点的度至多为 $\binom{k}{2} \binom{n}{k-2}$. 事件 A_R 出现的概率均为 $2^{1-\binom{k}{2}}$. 由定理13, 当

$$4 \cdot \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

时 $\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \neq \emptyset$, 即至少存在一种二染色使得不存在红色或蓝色的 K_k . 由斯特林公式易验证当 $n \leq c \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}}$ 时满足上述条件, 从而

$$N(k, k) \geq c \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}}.$$

此下界与最优下界仅有常数项上的差异.

现在我们回顾定理5并考虑其中 p 的含义. 当 $p = 2$ 时, 其表示每条边有两个顶点. 若 $p > 2$, 则对应的是边包含顶点数大于2, 此时对应的 K_n 为超图. 下面用染色的语言重述定理5.

定理 15 对任意给定点正整数 p, c, k_1, \dots, k_c ($p \leq k_i, i = 1, \dots, c$), 存在正整数 n 和集合 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, 其满足: 给 V 的每个 p -子集涂上 c 中颜色 a_1, \dots, a_c 中的一种(即 c -染色), 则任何这样的一种染色方案都会产生 V 的一个 k_1 子集 U_1 , 其所有的 p -子集都被染成 a_1 色, 或 V 的一个 k_2 子集 U_2 , 其所有的 p -子集均被染成 a_2 色, ..., 或 V 的一个 k_c 子集 U_c , 其所有的 p -子集均被染成 a_c 色. 满足上述条件的最小的 n 被称为广义 **Ramsey数**, 记为 $R(k_1, \dots, k_c; p)$.

读者可参照定理6的证明归纳地给出此定理的证明.

证明 8 先考虑 $p = 2$ 的情况, 此时对 c 归纳证明. 当 $c = 2$ 时已证. 设对 c 种颜色时结论成立, 下考虑 $c + 1$ 种颜色的情况. 由归纳假设, 存在最小的正整数 $R(k_1, k_2, \dots, k_c; 2)$ 满足题述要求. 下类似定理6地证明:

$$R(k_1, \dots, k_c, k_{c+1}; p) \leq \binom{\sum_{i=1}^{c+1} k_i - 2}{\sum_{i=1}^c k_i - 1}$$

事实上只需将前 c 种颜色视为“一种颜色”即可. 其证明留给读者.

从而当 $p = 2$ 时对任意正整数 c , 原命题成立.

下面对任意的 c , 设命题对 p 成立, 下考虑 $p + 1$ 的情况. 事实上, 只需在上述证明中改为类似地考虑所有广义边所连的点即可.

我们下面严格地说明染色. 设集合 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 为颜色集, 函数

$$f: [m] \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\},$$

称为 $[m]$ 的一个 k -染色. 若对某个 i 有 m 的子集 $A \in f^{-1}(y_i)$, 则称 A 是单色的.

我们根据此可以得到著名的 Schur 定理. Schur 提出此定理之初并未考虑过其在 Ramsey 理论中的应用, 而是将其作为研究有限域上的费马大定理的一个前置结论. 然而, 这一定理成为了 Ramsey 理论的源头之一.

定理 16 Schur 定理 对任意 $k \geq 1$, 都有正整数 m , 满足: 对任一函数 $f: [m] \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$, 存在某个 y_i ($1 \leq i \leq k$), 使得 $f^{-1}(y_i)$ 中包含三个数 a, b, c , 且 $a + b = c$, 即 $a + b = c$ 有单色解 (a, b, c 未必互不相同).

证明 9 对任意 $k \geq 1$, 令 $n = R(3, 3, \dots, 3; 2)$ (内有 k 个 3), $m = n - 1$, 则从 $[m]$ 到 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 的函数 f 确定了一个 K_n 的边集的 k -差色, 其中边 ij 被染成颜色 $f(|i - j|)$.

由 $n = R(3, 3, \dots, 3; 2)$ 知存在一个单色的三角形, 设其顶点为 j_1, j_2, j_3 . 不失一般性地设 $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n$, 则有

$$f(j_2 - j_1) = f(j_3 - j_2) = f(j_3 - j_1) = y_i$$

取 $a = j_2 - j_1, b = j_3 - j_2, c = j_3 - j_1$ 即可.

在本节的最后我们继续关注Ramesy定理的一些应用.

定理 17 给定正整数 n , 存在正整数 $N(n)$, 使得当 $N \geq N(n)$ 时, 平面上任意 N 个点, 若其中任意三个点不共线, 则有这些点的一个 n -子集, 其构成一个凸 n 边形.

证明 10 首先指出, 任意三点不共线的 n 个点构成一个凸 n 边形, 当且仅当其中任意四个点均组成凸四边形.

下面我们证明: $N(n) = R(n, n; 3)$ 满足要求. 设 S 为平面上 $N(n)$ 个点的集合, 并给点编号, 然后按下述方式给每个小三角形(广义边)染红色或蓝色: 如果三角形的编号由小至大为顺时针, 则将其染红色; 否则染蓝色. 从而存在 n -子集, 其所有的三角形是单色的, 不妨设其为红色. 下面证明这个集合中不存在构成凹四边形的四个点.

否则设其凸包的三角形三点顺时针地分别为 a, b, c , 三角形内的点为 d , 不失一般性地设 $a < b < c$, 则由红色三角形 abc, abd, bcd, adc 可知 $a < b < c, a < b < d, b < c < d, a < d < c$, 矛盾. 从而这样的凹四边形不存在.

3 相异代表系和Hall定理

相异代表系理论与离散数学的许多分支都有关联, 甚至在经济学, 选举政治学中也有应用.

我们以一个有趣的例子引出所要研究的内容.

例 8 一群男孩和女孩在一起. 加入每个女孩都喜欢一些男孩(可能有交集), 怎样的条件能够保证每个女孩都能和某个自己喜欢的男孩在一起?

我们暂且不因自己不在任意一个这样的集合内而感到愤懑. 下面我们关注这个问题对应的结构.

定义 2 设 S_1, \dots, S_m 是一族集合, 他们的一个相异代表系(简记为SDR, system of distinct representatives)是一个 m 维向量 (x_1, \dots, x_m) , 其满足:

- (1) $x_i \in S_i (1 \leq i \leq m)$ (这些 x_i 是"代表");
- (2) $x_i \neq x_j (1 \leq i < j \leq m)$ (代表互不相同, 尽管可能有 $x_i \in S_j$).

在上述问题中, 设有 m 个女孩, 令 S_i 表示第 i 个女孩喜欢的男孩集合. 只要存在 S_1, \dots, S_m 的一个相异代表系, 就可以保证每个女孩都能与某个自己喜欢的男孩在一起, 且他们互不相同.

对一族指标 $J \subseteq [m]$, 定义

$$S(J) = \bigcup_{j \in J} S_j.$$

若集合族 S_1, \dots, S_m 有一个相异代表系, 则自然地, 对每组指标 $J \subseteq [m]$, 都有 $|S(J)| \geq |J|$. 这是因为对每个 $j \in J$, $S(J)$ 都包含了 S_j 的代表 x_j .

Hall定理即将说明, 这个条件也是充分的.

定理 18 Hall定理(霍尔定理) 有限集族 S_1, \dots, S_m 存在相异代表系当且仅当下面的**Hall条件**(简记为**HC**)成立: 对任意 $J \subseteq [m]$, 有

$$|S(J)| \geq |J|.$$

证明 11 必要性已经说明. 下对 m 归纳地证明充分性.

首先定义指标族 J 是**临界**的, 若 $\{S_j \mid j \in J\}$ 有相异代表系, 且 $|S(J)| = |J|$.

从而若 J 是临界的, 则 $S(J)$ 的每个元素都必须恰好是某个 S_j 的代表. 空集和全集 $[m]$ (若是的话)称为平凡的临界指标集.

当 $m = 1$ 时, **HC**要求即 $|S_1| \geq 1$, 从而可从 S_1 中选出一个代表 x_1 , 集族 S_1 存在相异代表系, 即**HC**充分性成立.

当 $m \geq 2$ 时, 假设充分性结论对 $< m$ 的情况成立, 则下对 m , 设 S_1, \dots, S_m 满足**HC**, 欲证其存在相异代表系. 下对 S_1, \dots, S_m 是否存在非平凡的临界指标族, 分下面两种情况考虑.

若其不存在非平凡的临界指标族, 由**HC**知 S_m 不可能为空集. 取 S_m 中的一个元素 x_m . 对 $1 \leq j \leq m-1$, 定义 $S'_j = S_j \setminus \{x_m\}$. 注意到 S_1, \dots, S_m 的任何子族 $\{S_j \mid j \in J\}$ 是满足**HC**的. 进一步地, 对 $[m-1]$ 的任意非空子集 J , 有

$$|S'(J)| \geq |S(J)| - 1 \geq |J| + 1 - 1 \geq |J|.$$

其中第二个不等式是因为 $J \subseteq [m-1]$ 不临界. 从而集族 S'_1, \dots, S'_{m-1} 满足**HC**. 由归纳假设知, S'_1, \dots, S'_{m-1} 有相异代表系, 不妨设为 (x_1, \dots, x_{m-1}) . 由于

$$x_i \in S'_i \subseteq S_i, q \leq i \leq m-1$$

$$x_m \in S_m, x_m \notin \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$$

从而 $(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$ 就是集族 S_1, \dots, S_m 的相异代表系.

若 S_1, \dots, S_m 存在非平凡的临界指标族 $J \subseteq [m]$. 由于 $|J| < m$, 且 S_1, \dots, S_m 满足HC, 知 $\{S_j \mid j \in J\}$ 也满足HC, 从而由归纳假设知 $\{S_j \mid j \in J\}$ 有相异代表系 $(x_j \mid j \in J)$. 对 $i \notin J$, 令 $S_i^* = S_i \setminus S(J)$. 由于对任意与 J 不交的指标族 K , 都满足

$$\begin{aligned} |S^*(K)| &= |S(J \cup K) \setminus S(J)| = |S(J \cup K)| - |S(J)| \\ &= |S(J \cup K)| - |J| \quad (J \text{ 是临界的}) \\ &\geq |J \cup K| - |J| = |K|. \end{aligned}$$

从而 $\{S_i^* \mid i \notin J\}$ 满足HC. 由归纳假设知, 可设 $\{S_i^* \mid i \notin J\}$ 的相异代表系为 $(x_i \mid i \notin J)$, 其也为 $\{S_i \mid i \notin J\}$ 的一个相异代表系. 由 S_i^* 的定义知 $x_i \notin S(J), \forall i \notin J$. 从而 $(x_i \mid i \in [m])$ 是 S_1, \dots, S_m 的一个相异代表系.

下面我们对集合族 S_1, \dots, S_m 估计其相异代表系的个数. 首先对于 $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m$, 我们定义

$$F_m(s_1, \dots, s_m) := \prod_{i=1}^{n-1} \max\{(s_i - i + 1), 1\}.$$

并证明下述引理.

引理 2 对 $m \geq 1$, 令 $f_m : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{N}$ 为

$$f_m(a_1, \dots, a_m) := F_n(s_1, \dots, s_m)$$

其中 (s_1, \dots, s_m) 是 (a_1, \dots, a_m) 的不减重新排列, 则 f_n 关于变量 a_i 不减, $1 \leq i \leq m$.

证明 12 令 $a_i = s_k$. 若 $a'_i \geq a_i$, 且 $s_l \leq a'_i \leq s_{l+1}$ 设 $s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_l, a'_i, s_{l+1}, \dots, s_m$ 为 $(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$ 的不减重新排列, 则

$$\begin{aligned} & \frac{f_n(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_m)}{f_m(a_1, \dots, a_m)} \\ &= \frac{\max\{(s_{k+1} - k + 1), 1\}}{\max\{(a_i - k + 1), 1\}} \cdot \frac{\max\{(a'_i - l + 1), 1\}}{\max\{(s_l - l + 1), 1\}} \prod_{j=k+1}^{l-1} \frac{\max\{(s_{j+1} - j + 1), 1\}}{\max\{(s_j - j + 1), 1\}} \geq 1 \end{aligned}$$

这是因为对 $j = k+1, \dots, l-1$, 有 $a_i \leq s_{k+1}, a'_i \geq s_l, m_{j+1} \geq m_j$.

记 $s_j = |S_j|$, 并不失一般性地设 s_j 关于 j 不减. 记 $N(S_1, \dots, S_m)$ 为 S_1, \dots, S_m 的相异代表系的个数. 我们得到一下结论.

定理 19 若 S_1, \dots, S_m 满足HC, 则

$$N(S_1, \dots, S_m) \geq F_m(s_1, \dots, s_m).$$

证明 13 与上述证明思路类似地归纳并分类讨论. 下仅简述归纳递推.

若不存在非平凡的临界指标族, 则任取 S_1 (其元素数最少, 但易知不为空)中一元素 x 为代表, 其余集合去除此元素(易知他们也非空)后的集合记为 $S_j^x = S_j \setminus \{x\}$, 其满足HC, 从而根据归纳假设和引理, 有

$$\begin{aligned} N(S_1, \dots, S_m) &\geq \sum_{x \in S_1} f_{m-1}(|S_2^x|, \dots, |S_m^x|) \\ &\geq \sum_{x \in S_1} f_{m-1}(s_2 - 1, \dots, s_m - 1) \\ &= s_0 \cdot \sum_{x \in S_1} f_{m-1}(s_2 - 1, \dots, s_m - 1) = F_m(s_1, \dots, s_m) \end{aligned}$$

若其不存在非平凡的临界指标族 $J \subseteq [m]$, 令 $S_i^* = S_i \setminus S(J)$. 则 $\{S_j \mid j \in J\} =: \{S_{v_1}, \dots, S_{v_k}\}$, $\{S_i^* \mid i \notin J\} =: \{S_{u_1}, \dots, S_{u_l}\}$ 存在两不交的相异代表系, 其中 $k+l = m$. 由归纳假设和引理有

$$\begin{aligned} N(S_1, \dots, S_m) &= N(S_{v_1}, \dots, S_{v_k}) N(S_{u_1}, \dots, S_{u_l}) \\ &\geq f_k(s_{v_1}, \dots, s_{v_k}) f_l(s_{u_1} - k, \dots, s_{u_l} - k) \\ &\geq f_k(s_1, \dots, s_k) f_l(s_{u_1} - k, \dots, s_{u_l} - k) \end{aligned}$$

由

$$s_{v_k} \leq |S(J)| = k$$

有

$$\begin{aligned} \max\{(s_r - r + 1), 1\} &= 1, k \leq r \leq v_k; \\ \max\{(m_{u_i} - k - i + 1), 1\} &= 1, u_i \leq v_k. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f_k(s_1, \dots, s_k) f_l(s_{u_1} - k, \dots, s_{u_l} - k) &= \prod_{1 \leq i \leq v_k} \max\{(s_i - i + 1), 1\} \cdot \prod_{v_k < j \leq m} \max\{(s_j - j + 1), 1\} \\ &= F_m(s_1, \dots, s_m) \end{aligned}$$

我们可以通过构造的方式证明, 这样的下界是最好的. 证明留给读者.

我们下面关注Hall定理的一些应用.

定理 20 Birkhoff定理(伯克霍夫定理) 设 $l \geq 1$, 若矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 a_{ij} 为非负整数且每行每列元素之和都为 l , 则 \mathbf{A} 可写为 l 个置换矩阵之和, 其中置换矩阵为每行每列都恰有一个 1 的 $(0, 1)$ -矩阵.

证明 14 令 $S_i = \{j \mid a_{ij} > 0\}, i \in [n]$. 取 $[n]$ 的任意子集 $K = \{i_1, \dots, i_k\}$. 从而 \mathbf{A} 在 $\{i_1, \dots, i_k\}$ 这些行上的元素之和为 kl . 因其每列之和也为 l , 则在每列的这些行上的元素之和不超过 l . 由鸽巢原理可知, 总和为 kl 的这些非零元素分布在至少 k 列上, 从而

$$|S(K)| = \left| \bigcup_{j=1}^k S_{i_j} \right| \geq k = |K|$$

即 S_i 满足 HC. 从而存在 S_1, \dots, S_n 的一个相异代表系 $(j_i \mid i \in [n])$. 此时有 $a_{ij_i} > 0$ 且 $\{a_{ij_i} \mid i \in [n]\}$ 分布在 n 行 n 列. 从而对 l 归纳即可.

定理 21 Konig定理(柯尼希定理) 设 \mathbf{A} 为一个 $(0, 1)$ -矩阵, 则包含 \mathbf{A} 中所有元素 1 的线(行或列)的条数 m (称为元素 1 的覆盖数) 等于 \mathbf{A} 中两两不在一条线上的 1 的个数的最大值 M (称为元素 1 的匹配数)

证明 15 显然 $m \geq M$. 下设这个最小的覆盖中含有 r 行, s 列, $r + s = m$. 下构造一个含有 m 个 1 的匹配. 不失一般性地设为前 r 行, 前 s 列.

对 $1 \leq i \leq r$, 定义 $A_i = \{j \mid a_{ij} = 1, j > s\}$. 若这些 A_i 中的某 k 个值并中少于 k 个元素, 则可用这些列(不多于 $k-1$)来代替所对应的这 k 行, 这与最小覆盖矛盾, 从而 A_1, \dots, A_r 满足 HC, 从而存在它们的一个相异代表系, 这表示有 r 个 1 任意两两不共线. 这些 1 在前 r 行但不在前 s 列. 对列进行类似考虑可得存在 s 个 1 两两不共线, 其在前 s 行但不在前 r 列, 从而 $M \geq r + s = m$

综上所述, $m = M$.

定理 22 Konig定理(柯尼希定理) 如果二部图 G 存在一个匹配 M_1 覆盖 X 的一个子集 X_0 , 也存在一个匹配 M_2 覆盖 Y 的一个子集 Y_0 , 则 G 有一个匹配 M_3 覆盖顶点集 $X_0 \cup Y_0$.

证明略.