**学士学位论文**

基于梯度的多因子进化算法

求解多任务连续优化问题

|  |  |
| --- | --- |
| **学号：** | **20171002448** |
| **姓名：** | **李延炽** |
| **学科专业：** | **计算机科学与技术** |
| **指导教师：** | **龚文引 教授** |
| **培养单位：** | **计算机学院** |

二〇二一年五月

中国地质大学(武汉)学士学位论文原创性声明

本人郑重声明:本人所呈交的学士学位论文《基于梯度的多因子进化算法求解多任务连续优化问题》，是本人在指导老师的指导下，在中国地质大学(武汉)攻读学士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果，对论文的完成提供过帮助的有关人员已 在文中说明并致以谢意。

本人所呈交的学士学位论文没有违反学术道德和学术规范，没有侵权行为，并愿意承担由此而产生的法律责任和法律后果。

学位论文作者签名:

日期: 年 月 日

摘 要

**关键词：**优化算法、梯度法、元启发式算法、多因子进化、多任务优化、连续优化

Abstract

**Keywords：**Optimization algorithm、Gradient method、Metaheuristic algorithm、Multi-factories evolution、Multi-task optimization、Continuous optimization

目 录

[摘 要 I](#_Toc71721496)

[Abstract II](#_Toc71721497)

[目 录 III](#_Toc71721498)

[第一章 绪论 1](#_Toc71721499)

[1.1 研究背景及国内外研究现状 1](#_Toc71721500)

[1.2 研究目标与研究内容 2](#_Toc71721501)

[1.3 论文的特色与创新 3](#_Toc71721502)

[1.4 论文的组织结构 3](#_Toc71721503)

[第二章 基于梯度的进化算法 4](#_Toc71721504)

[2.1 引言 4](#_Toc71721505)

[2.2 GBO原理及方法论 4](#_Toc71721506)

[2.3 实验结果与分析 10](#_Toc71721507)

[2.4 本章小结 13](#_Toc71721508)

[第三章 基于梯度的多因子进化算法 14](#_Toc71721509)

[3.1 引言 14](#_Toc71721510)

[3.2 MFGBO原理及方法论 14](#_Toc71721511)

[3.3 实验结果与分析 17](#_Toc71721512)

[3.4 本章小结 21](#_Toc71721513)

[第四章 总结与展望 22](#_Toc71721514)

[4.1 总结 22](#_Toc71721515)

[4.2 不足之处及展望 22](#_Toc71721516)

[致 谢 23](#_Toc71721517)

[参考文献 24](#_Toc71721518)

[附 录 26](#_Toc71721519)

# 绪论

## 研究背景及国内外研究现状

### 元启发式算法 Metaheuristic Algorithm

在各类科学和工程领域中的许多实际应用可以转化为优化问题。然而，相关的问题往往是高维复杂的。虽然已经发展了各种各样的优化算法，但它们往往不能为这类具有挑战性的问题提供满意的结果，这就需要针对这些问题的新的优化方法。元启发式算法(Metaheuristic Algorithms, MAs)[1]多是基于一些物理学、群体智能和生物学的原理，擅长于全局优化问题，已成功地用于解决各种复杂现实中的优化问题[2]。

在过去的几十年里，不同的元启发式算法已经被大量地研发和应用。例如，遗传算法(Genetic Algorithm, GA)就是从达尔文的进化论中衍生出来的。差分演化算法(Differential Evolution, DE)[3]采用了与遗传算法类似但具体过程不同的的算子(变异和交叉)，利用两个随机选择的向量之间的差来生成一个新的向量。粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, PSO)[4]是受到鸟群鱼群觅食的社会行为的启发。

上述提到的优化方法都是基于种群的概念，包含了一组解的优化过程。这种优化方法的搜索算子基于上述不同的原理。许多研究已经证明了这些方法在许多现实问题中的成功应用。一般来说，基于种群的优化算法不管本质如何，都会共享共同的信息。在这些算法中，搜索算子实现了两个步骤：探索(Exploration)和开采(Exploitation)。探索即为在整个搜索区域内基于现有位置探索新的位置，而开采的目的是找到附近的最优解的位置。单纯利用探索可能导致新的解精度不高。相反，仅仅利用开采容易陷入局部最优,许多研究强调了在元启发式算法中平衡探索和开采的重要性。因此，在这两个过程之间建立适当的平衡是至关重要的。

### 基于梯度的优化算法 Gradient-based Algorithm

常用的梯度搜索方法包括牛顿法[5]、拟牛顿法[6]和共轭梯度法[7]。这些方法已被应用于许多研究，以解决不同类型的优化问题。基于梯度的元启发式算法融合了梯度搜索方法和元启发式算法中种群和进化的概念，是一种新的元启发式算法。例如，Salejegheh将拟牛顿法和粒子群优化算法结合起来[8]，以提高基本粒子群优化算法的性能和鲁棒性。Ibtissem和Nouredine混合了差分演化算法和共轭梯度法[9]，以增强基本差分演化算法中的局部搜索能力。Iman Ahmadianfar引入梯度搜索和局部逃逸概念，提出了一种新的基于梯度的优化算法(Gradient-Based Optimizer, GBO)[10]。这些研究表明了基于梯度的元启发式算法的重要作用。

### 多因子进化 Multifactorial Evolution

近年来，元启发式进化算法已成功地应用于科学、运筹学和工程领域的各种优化问题。这些问题一般可以分为三类：a)单目标优化问题(Single-Objective Optimization, SOO)[11]，其中搜索空间中的每一点映射到一个标量目标值；b)多目标优化问题(Multi-Objective Optimization, MOO)[12]，其中搜索空间中的每一点映射到一个向量值目标函数；c)多因子优化(Multifactorial Optimization, MFO)[13]，其中搜索空间中的每一点映射到不同任务的标量目标值。

随着近年来“云计算”的飞速发展，多个用户会同时发出请求，云服务器需要同时处理多个优化任务，如何高效快速地同时解决多个任务成为了一个亟待解决的问题。多因子优化算法就是在此基础上产生的，多因子优化是一种进化多任务(Evolutionary Multitasking)概念，不同任务具有不同的的搜索空间(可能相互依赖，也可能不相互依赖)，每个搜索空间对应相互之间独立的函数，每一项任务都有一个影响单一个体种群进化的独特因子。常规的元启发式算法的设计通常集中在有效地一次解决一个优化问题上，而基于种群的搜索方法具有隐并行性，在多任务优化领域利用好这种隐并行性是高效解决问题的关键，近年来已经有部分研究者提出了不同的多因子进化算法。例如，Abhishek Gupta利用遗传算法的杂交操作在不同因子间传递信息[13]，提出了一种可以在任务间迁移知识的多因子进化范式(Multifactorial Evolutionary Algorithm, MFEA)；Liang Feng在MFEA的基础上相继提出多因子粒子群算法(Multifactorial PSO)、多因子差分演化算法(Multifactorial DE)[14]，并在之后提出了一种基于显式自动编码(Explicit Autoencoding)的进化多任务算法[15]；Zedong Tang提出了一种任务间坐标系自适应映射的算法框架[16]。

由此可见，近年来解决各类多任务优化问题的多因子进化算法正如雨后春笋般涌现。

## 研究目标与研究内容

### 研究目标

基于No Free Lunch(NFL)原则[17]，一种特定优化算法不能在所有问题上都取得非常好的效果，这表明一种特定的算法可以为某些问题提供非常好的结果，但是对于其他的问题集可能效率较低，这促进了多年以来新的元启发式优化算法的发展。

本文的主要目标是提出基于梯度的多因子进化算法来解决多任务连续优化问题。

### 研究内容

首先介绍GBO算法的原理，详述梯度搜索规则(Gradient Search Rule, GSR)和局部逃逸算子(Local Escaping Operator, LEO)。通过6个高维单峰(Unimodal)问题和9个高维多峰(Multimodal)问题[10]来验证GBO算法在连续优化问题上的先进性。

然后将多因子策略引入GBO算法来构建MFGBO算法，详述多因子策略在GBO算法中的实现。通过9个2-Task多任务单目标优化问题[18]、10个2-Task多任务单目标复杂优化问题(WCCI 2020)和10个10-Task超多任务单目标优化问题(WCCI 2020)来验证GBO算法在多任务连续优化问题上的先进性。

## 论文的特色与创新

基于梯度的优化算法因其鲁棒性好及收敛快速的特点，在高维单峰和多峰的连续优化问题上取得了较好的成果；多因子进化策略是在2016年提出的[13]，在近年涌现了大量基于此的算法解决各类多任务优化问题。而在多任务连续优化问题领域，现有的算法多是基于传统的元启发式算法(GA, DE, PSO…)，还没有研究者将最新的基于梯度的优化算法GBO[10]引入其中。

本文考虑到GBO算法在高维连续优化问题上的先进性，引入多因子策略将其改造成可以解决多任务单目标连续优化问题的MFGBO算法，并使用多任务领域的经典测试集[18]、多任务测试集(WCCI 2020)及超多任务测试集(WCCI 2020)来验证此改进。

## 论文的组织结构

本文结构分为以下四个章节：

第一章，介绍基于梯度的优化算法和多因子进化的概念及研究现状，引出本文的研究目标和内容；

第二章，详细介绍基于梯度的优化算法(GBO)的原理，并通过实验来验证算法在连续优化问题上的先进性；

第三章，详细介绍在GBO算法的基础上加入多因子策略，改进为基于梯度的多因子进化算法(MFGBO)，并通过实验来验证算法在多任务连续优化问题上的先进性；

第四章，总结本文内容，并指出现有算法的不足之处及展望。

# 基于梯度的进化算法

## 引言

本章主要介绍基于梯度的优化算法(Gradient-Based Optimizer, GBO)的原理及实验验证其在连续优化问题上的先进性。在本章没有引入多任务和多因素概念，主要目的是单独探讨基础GBO算法处理连续优化问题的能力。

## GBO原理及方法论

### 牛顿法Newton’s method

牛顿法是一种强有力的数值求解方程根的方法[5]，该方法是一种利用泰勒级数初始项的求根算法。这种方法从一个点开始，然后使用点评估的泰勒级数来估计解附近的另一个点。这个过程一直持续到得到最终解为止。泰勒级数可以表示为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

将泰勒级数截断，可以得到一个线性近似的，具体如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

令为0，则有：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

因此，给定，下一代可以表示为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

牛顿法使用了一个迭代过程，经过数次迭代最终得到近似解。

### 种群初始化 Initialization

连续优化问题包括一组决策变量、约束条件和一个目标函数。GBO的控制参数包括从勘探到开采的过渡参数和逃逸概率。根据问题的复杂度和规模来确定迭代次数和种群大小。在GBO算法中，种群的每个个体被称为向量。因此，GBO在一个D维搜索空间中包含N个向量，向量可以表示为：

通常，GBO的初始向量是在D维搜索空间中随机生成，可以定义为：

其中，和是决策变量的上下界；是服从的均匀分布随机数。

### 梯度搜索规则 Gradient Search Rule

在GBO算法的梯度搜索规则中，通过控制向量的运动方向，可以在可行域中进行更好的搜索以到达更好的位置。为了提高GBO的勘探能力，加快GBO的收敛速度，在牛顿法的基础上提出了梯度搜索规则GSR。由于许多优化问题是不可微的，故采用数值梯度来代替函数的直接导数。通常，牛顿法从一个预测的初始解开始，沿着指定的梯度方向向下一个位置移动。为了实现GSR，要利用泰勒级数计算函数的一阶导数。和的泰勒级数可以分别表示为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5-1) |
|  | (5-2) |

根据式(5)，函数的一阶导数可以表示为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

根据式(4)(6)，可以定义为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

梯度搜索规则GSR是GBO算法的核心，需要在牛顿法的基础上修改为基于种群的搜索规则。根据式(7)，的相邻位置是和。在GBO算法中，这些相邻位置被替换为种群中的其他两个位置：被替换为，即最优解位置；被替换为，即最差解位置。此外，由于个体的适应度计算时间较长，因此GBO算法采用解代替适应度。GSR定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

其中，是服从正态分布的随机数；是范围内的一个小数；和 是在优化过程中得到的最优解和最差解。式(8)可以协助当前的个体更新位置。为了提高GBO的搜索能力，平衡全局勘探和局部开采能力，通过在GBO中引入自适应参数对式(8)进行改进：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9-1) |
|  | (9-2) |
|  | (9-3) |

其中，和分别为0.2和1.2；是当前迭代次数；是迭代总次数。为了平衡勘探和开发过程，参数随正弦函数变化。随着迭代次数增加而变化。

|  |
| --- |
|  |
| 1. 随迭代次数的变化 |

图2.1展示了的变化趋势，其中最大迭代次数为100，这个参数可以在具体问题中更改。在早期迭代时有较大的值，以增强种群的多样性，随着迭代次数的增加，其值逐渐减小，以加速收敛。此外，产生的解应当能够探索最优解周围的空间，为此，在从550到750代左右会增加，这有助于提升算法逃脱局部最优的能力。因此，式(8)可以改写为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

其中是根据最优解和随机个体来确定的(见式(11))。为了确保在每次迭代中都发生变化，引入参数(见式(11-3))。此外，为了增强勘探能力，在式(11-3)中引入随机数。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11-1) |
|  | (11-2) |
|  | (11-3) |

其中，是一个维的随机数；是从中随机选取的不同整数；是由和决定的步长。因此，式(7)可以改写为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

### 个体移动方向 Direction of Movement

个体移动方向DM是GBO算法的另一个重要组成部分，是为了更好地开采附近的区域，DM使当前个体朝着方向移动，能够增强局部开采能力以及提升收敛速度。DM定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

其中，是服从的均匀分布随机数；与定义相同，在迭代初始阶段步长在大范围内随机选取，随着迭代的增加，步长会在小范围内随机选取，在[范围内将随机步长范围扩大来增强脱离局部最优的能力。定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

### 生成子代个体

子代个体由多个中间解向量构成，包含。

适合于全局勘探，定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15-1) |
|  | (15-2) |

适合于局部开采，定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

其中，是服从的均匀分布随机数。

|  |
| --- |
|  |
| 1. 的生成图解 |

图2.2描绘了一个个体在二维搜索空间中更新位置的过程。

### 局部逃逸算子 Local Escaping Operator

为了提高GBO算法求解复杂问题的效率，引入了局部逃逸算子LEO。这个算子可以显著改变的位置。LEO通过使用多个位置，包含以及一个新的随机解，生成了表现较优的解。

|  |
| --- |
| 1. 生成过程伪代码 |
|  |

表2.1展示了的生成过程的伪代码，其中，是服从的均匀分布随机数；是服从的均匀分布随机数；是逃逸概率；是3个随机数，定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19-1) |
|  | (19-2) |
|  | (19-3) |

其中，是服从的均匀分布随机数。

定义如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20-1) |
|  | (20-2) |

其中，是新生成的随机解；是在种群中随机选取的解；是服从的均匀分布随机数。

在选择时的这种随机行为有助于增加种群的多样性以及避开局部最优解。

### GBO算法框架

GBO算法的伪代码如表2.2所示。

|  |
| --- |
| 1. GBO算法伪代码 |
| **步骤1. 初始化**  定义迭代次数、种群数量、解的维度、逃逸概率  生成随机初始种群  评价每个个体的函数值  确定  **步骤2. 主循环**        选取  计算      计算      评价个体并进行1对1锦标赛选择  更新      **步骤3. 返回** |

## 实验结果与分析

### 实验设计

**测试集Benchmark**

使用14个数学函数来评价GBO算法在连续优化问题上的性能，这些数学函数在以前的研究中[10]得到了广泛的应用。这些测试函数可分为两种不同类型：单峰函数(f1-f6)、多峰函数(f7-f14)，每个函数在2维空间上的图像展示在附录一中。

**对比算法**

遗传算法(Genetic Algorithm, GA)；

差分演化算法(Differential Evolution, DE)；

粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)。

**参数设置**

种群数量：*50*；

问题维度：*30*；

迭代次数：*500*；

独立运行次数：*30*；

GBO：*pr=0.5*；

GA：*lenChrome=5, pc=0.6, pm=0.05*；

DE：*pc=0.5, F=0.5*；

PSO：*wInital=0.9, wEnd=0.4, c1=0.5, c2=0.5*。

**评价指标**

平均最优解Average Best Cost

标准差 Standard Deviation

收敛速度 Convergence Speed

### 实验结果与分析

表2.3展示了各函数上的GBO、GA、DE和PSO算法的平均最优解；表2.4展示了标准差；图2.3展示了各算法的收敛曲线。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. 平均最优解 | | | | | |
| Function | | GBO | GA | DE | PSO |
| U | 1 | 0.00E+00 | 1.18E+07 | 2.34E+01 | 2.78E+06 |
| 2 | 0.00E+00 | 9.33E+11 | 0.00E+00 | 4.72E+32 |
| 3 | 0.00E+00 | 1.39E+02 | 2.03E+03 | 1.02E+03 |
| 4 | 2.30E+01 | 1.81E+04 | 5.17E+01 | 8.21E+03 |
| 5 | 0.00E+00 | 1.13E+02 | 0.00E+00 | 2.89E+03 |
| 6 | 0.00E+00 | 5.61E+04 | 3.30E-02 | 1.86E+06 |
| M | 7 | 0.00E+00 | 3.77E+00 | 1.07E+01 | 8.47E+00 |
| 8 | 0.00E+00 | 1.33E+01 | 4.00E-03 | 3.02E+02 |
| 9 | 0.00E+00 | 1.96E+00 | 0.00E+00 | 1.23E+01 |
| 10 | 0.00E+00 | 1.62E+00 | 2.00E-03 | 3.52E+00 |
| 11 | 0.00E+00 | 5.20E+00 | 2.13E+01 | 3.63E+01 |
| 12 | 5.98E-01 | 1.35E+00 | 5.72E-01 | 1.05E+01 |
| 13 | 4.84E-01 | 1.61E+01 | 4.63E-01 | 5.46E+02 |
| 14 | 0.00E+00 | 3.36E+00 | 5.18E+00 | 3.99E+01 |
| 1. 标准差 | | | | | |
| Function | | GBO | GA | DE | PSO |
| U | 1 | 0.00E+00 | 1.04E+14 | 1.34E+02 | 3.42E+12 |
| 2 | 0.00E+00 | 1.59E+25 | 0.00E+00 | 5.53E+66 |
| 3 | 0.00E+00 | 7.00E+03 | 3.69E+05 | 3.44E+05 |
| 4 | 1.54E+00 | 3.59E+08 | 1.14E+03 | 3.13E+08 |
| 5 | 0.00E+00 | 1.65E+04 | 0.00E+00 | 1.25E+06 |
| 6 | 0.00E+00 | 1.23E+10 | 0.00E+00 | 1.38E+12 |
| M | 7 | 0.00E+00 | 4.11E-01 | 1.63E-01 | 1.21E+00 |
| 8 | 0.00E+00 | 1.36E+02 | 0.00E+00 | 2.92E+04 |
| 9 | 0.00E+00 | 2.04E+00 | 0.00E+00 | 8.88E+01 |
| 10 | 0.00E+00 | 4.72E-01 | 0.00E+00 | 8.52E-01 |
| 11 | 0.00E+00 | 1.69E-01 | 2.45E+00 | 1.33E+01 |
| 12 | 1.50E-02 | 9.59E-01 | 6.00E-03 | 8.26E+01 |
| 13 | 1.00E-03 | 2.16E+02 | 2.10E-02 | 3.07E+05 |
| 14 | 0.00E+00 | 1.30E+00 | 1.27E+01 | 1.29E+02 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| 1. 各算法在14个连续优化问题上的收敛曲线 | | |

**开采能力 Exploitation ability**

通常用单峰函数来评价优化算法的开采能力。这些测试函数只有一个全局最优，没有局部最优。

在平均最优解、最优解、标准差的单峰函数数据中，可以看到GBO算法相较于GA、DE、PSO，在所有问题上都是最优结果，除了f4没有达到全局最优，其他所有问题都到达了全局最优。GBO算法对单峰函数具有非常好的准确度，说明GBO算法比其他3种优化算法具有更好的开采能力。

**勘探和逃离局部最优能力Exploration and escaping from local optima ability**

这里的多峰函数均是使用的多模态测试函数，这些测试函数具有大量的局部最优解，这些局部最优解的数量随着问题维数的增加呈指数增长。因此，用这里的8个多峰函数来评价优化算法的勘探和逃离局部最优能力。

在平均最优解、最优解、标准差的单峰函数数据中，可以看到GBO算法在f7-f11、f14的问题上的平均最优解、最优解均达到了全局最优；在f12、f13上平均最优解、最优解、标准差与DE算法结果相似。结果表明，GBO具有良好的勘探能力，可以提高搜索的效率，有效逃离局部最优。

**收敛行为 Convergence behavior**

采用收敛速度来评估GBO算法的收敛行为。收敛曲线通常用来评价算法的收敛效率，可以明显地看到：在f1、f3-f6、f7-f14上，GBO算法的收敛速度要远远超过其他算法，表明GBO算法在开采效率上远高于其他算法；在f2上，GBO和GA、DE收敛速度接近；在f7上，GBO算法的收敛速度在开始要慢于其他算法，而在后期，GBO算法很快逃离了局部最优，而其他算法均陷入了局部最优，说明了GBO算法在多峰问题的勘探效率也要高于其他算法；在所有的问题上，GBO算法在末期均能收敛到接近全局最优的地方。

## 本章小结

本章介绍了GBO算法的原理及研究了GBO算法在处理连续优化问题上的能力。研究发现GBO算法在处理高维单峰问题时效果非常好，在处理多峰问题上在绝大多数情况下也要优于一些传统的元启发式算法。

# 基于梯度的多因子进化算法

## 引言

本章主要介绍基于梯度的多因子优化算法(Multifactorial Gradient-Based Optimizer, MFGBO)的原理及实验验证其在多任务连续优化问题上的先进性。MFGBO算法是在GBO算法的基础上，引入多因子策略，改造为能够有效处理多任务连续优化问题的算法。

## MFGBO原理及方法论

### 多因子进化概念

多因子进化受到多因子遗传模型的启发，该模型提出后代间复杂的发育性状受到遗传和文化因素相互作用的影响[19][20]。例如，个体的知识可能取决于它的基因型，对基因的选择又会被文化因素修改[21][22]，这些文化因素通常来源于社会学习或父辈习俗。

多因子进化为了有效地进行多任务处理，为每一个优化任务创造独立的文化环境，在这个环境中养育后代。多因子策略允许多个文化共存，每个优化任务对应一个文化环境，通过遗传因子和文化因子的相互作用，模拟了复杂环境中个体随后的进化过程。

### 种群初始化

首先为每个个体定义一组属性，其中，为种群数量。个体编码在的统一搜索空间中，可以解码成针对每个任务的解，任务总数为，的解码形式可以写成，其中。例如，,其编码与解码的方式如图3.1。在其中每一个维度上变量的范围都被定义为[，针对每个任务进行运算时，会将[映射到对应任务的变量范围内

|  |
| --- |
|  |
| 1. 个体编码与解码 |

因为每个任务的函数值不同，不同任务间不能直接用函数值来对比个体的优劣，所以需要一种新的方式来进行任务间个体适应值的比较，需要定义以下几个概念：

**技能因子 Skill Factor**

技能因子表示当前个体最适应的任务。

**因子函数值 Factorial Cost**

当前个体的在第个任务上的函数值。

### 因子杂交机制

MFGBO的一个关键特征是，个体更喜欢与那些属于相同文化背景的其他个体进行杂交，生成新的个体。在MFGBO中，技能因子被看作是个体文化偏好的表象。因此，如果与当前个体技能因子相同，则它们会共同杂交产生新个体。相反地，如果他们的技能因素不同，杂交产生新个体只能按照规定的随机交配概率。根据这些规则生成子代的步骤展示在表3.1中。

|  |
| --- |
| 1. 因子杂交机制 |
| 选取的    随机选取 |

文化偏好交配在自然界的出现被用于多因子策略中。随机交配概率被用来平衡搜索的勘探和开采。如果值接近0则意味着只有相同文化的个体才允许交配；而如果接近1则允许文化间随机交配。在前一种情况下，文化内交配有利于在当前任务上加强搜索能力，但是在当前任务容易陷入局部最优解。较大的值情况下发生的跨文化交配使得算法能够探索每个任务的空间，同时可以学习到其他任务的知识，如果两个任务有相似之处就有助于逃离当前任务的局部最优，但是会导致算法收敛速度下降。因此，必须选择一个合适的值，以确保在勘探和开采之间保持良好的平衡。

### 垂直文化传播机制

|  |
| --- |
| 1. 垂直文化传播机制 |
| 随机变异技能因子    遗传父个体的技能因子 |

在每个任务上评价个体时，第一步是将个体的统一编码解码为对应该任务的变量。对于连续优化问题，直接通过解空间映射来实现。例如，一个问题的第个变量在范围内，个体的第个维度为，则个体到实际问题的搜索空间的映射为。

如果对每个个体在每个任务上都进行评价，那这样会极大增加计算量，显然这样做是不可取的，为了使MFGBO计算更有效率，算法必须减少评价的总数量。一个重要特征是，在MFGBO中生成的个体一般不会在所有任务中都表现非常好，因此，只对选定的最有可能表现良好的任务对个体进行评价会大大增强算法的效率。利用垂直文化传播的概念，根据表3.2让子代遗传父本的技能因子(文化特性)以及进行一定概率的变异，仅对子代在技能因子对应的任务上进行评价。

### 选择操作

使用1对1锦标赛策略进行选择，让子代个体只和自己的父代个体评比，选取其中较好的留存到下一代。因为子代和父代的技能因子相同，所以不需要再进行一次大规模排序选择，将基础MFEA算法[13]中选择操作的时间复杂度降低到了。

### MFGBO算法框架

|  |
| --- |
| 1. MFGBO算法伪代码 |
| **步骤1. 初始化**  定义迭代次数、种群数量、逃逸概率、杂交概率、变异概率  生成初始种群  评价每个个体在每个任务上的因子函数值  计算每个个体的技能因子，选出每个任务上的  **步骤2. 主循环**      根据表3.1选取  计算    计算      根据表3.2遗传或变异的技能因子  只评价在任务上的因子函数值  在对应对任务上根据因子函数值进行1对1锦标赛选择  更新 |

## 实验结果与分析

### 实验设计

**测试集Benchmark**

第一个，B. Da在2016年提出的单目标多任务测试集Single-Objective MFO benchmark problems[18]，这是多任务处理中非常经典的一个测试集，其中包含了9个多任务问题，分为3类：全局最优完全相交Complete Intersection of Global Optima、全局最优部分相交Partial Intersection of Global Optima、全局最优无相交No Intersection of Global Optima。在每一类中都有两个问题组成多任务组合，又分为：高相似、中相似、低相似。

第二个，WCCI 2020 Competition on Evolutionary Multi-task Optimization中的复杂2任务测试集。

第三个，WCCI 2020 Competition on Evolutionary Multi-task Optimization中的10任务(超多任务优化Many-Task Optimization)测试集。

**SOGBO、MFGBO对比**

使用多因子进化算法执行多个任务优化，对比使用单任务GBO算法分别对每个任务进行优化。

**对比多因子算法**

用MFGBO和其他3个经典多因子算法进行对比：

多因子遗传算法(Multifactorial Genetic Algorithm, MFGA)[13]；

多因子差分演化算法(Multifactorial Differential Evolution, MFDE)[14]；

多因子粒子群算法(Multifactorial Particle Swarm Optimization, MFPSO)[14]。

**参数设置**

种群数量MF/SO：*100*；

问题维度：*50*；

最大评价次数：*100 \* 500*；

独立运行次数：*30*；

MFGBO：*pr=0.5, rmp=0.3, pm=0.1*；

MFGA：*lenChrome=10, rmp=0.3*；

MFDE：*pc=0.9, F=0.5, rmp=0.3*；

MFPSO：*wInital=0.9, wEnd=0.4, c1=0.2, c2=0.2, c3=0.2, rmp=0.3*。

**评价指标**

平均最优解 Average Best Cost

标准差 Standard Deviation

运行速度 Running Speed

### SOGBO、MFGBO对比实验结果与分析

表3.4展示了SOCO2016-2T、WCCI2020-Complex、WCCI2020-ManyTask测试集上SOGBO、MFGBO的平均最优解、标准差、运行时间。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. 各测试集SO/MF平均最优解、标准差、运行时间 | | | | | | | | | |
|  |  | 平均最优解 | |  | 标准差 | |  | 运行时间 | |
| Benchmark | | MFGBO | SOGBO |  | MFGBO | SOGBO |  | MFGBO | SOGBO |
| SOCO2016-2T | | | | | | | | | |
| CI\_H | 1 | 0.00E+00 | 1.09E-01 |  | 0.00E+00 | 4.63E-02 |  | 1.07E+02 | 9.65E+01 |
| 2 | 1.62E-04 | 4.83E+02 |  | 2.50E-04 | 9.75E+01 |  |
| CI\_M | 1 | 3.43E-04 | 5.81E+00 |  | 2.80E-04 | 1.19E+00 |  | 1.24E+02 | 1.07E+02 |
| 2 | 1.32E-04 | 5.15E+02 |  | 3.04E-04 | 1.11E+02 |  |
| CI\_L | 1 | 3.67E-04 | 1.71E+01 |  | 2.45E-04 | 7.32E+00 |  | 1.13E+02 | 1.10E+02 |
| 2 | 6.57E-04 | 1.12E+04 |  | 3.90E-05 | 7.27E+02 |  |
| PI\_H | 1 | 3.55E-01 | 4.92E+02 |  | 4.49E-01 | 1.23E+02 |  | 1.10E+02 | 9.10E+01 |
| 2 | 3.79E+03 | 1.22E+00 |  | 1.42E+02 | 9.37E-01 |  |
| PI\_M | 1 | 3.27E+00 | 5.77E+00 |  | 6.08E-02 | 1.02E+00 |  | 1.15E+02 | 1.29E+02 |
| 2 | 2.45E+00 | 5.21E+02 |  | 1.08E+01 | 3.61E+02 |  |
| PI\_L | 1 | 2.82E-04 | 5.80E+00 |  | 2.05E-04 | 1.25E+00 |  | 2.27E+02 | 1.76E+02 |
| 2 | 1.37E-02 | 1.23E+01 |  | 6.52E-03 | 4.44E+00 |  |
| NI\_H | 1 | 1.04E-01 | 5.05E+02 |  | 1.32E-01 | 2.95E+02 |  | 1.14E+02 | 1.03E+02 |
| 2 | 1.62E-02 | 5.07E+02 |  | 2.31E-02 | 1.19E+02 |  |
| NI\_M | 1 | 3.32E-04 | 1.00E-01 |  | 3.63E-04 | 3.86E-02 |  | 2.28E+02 | 2.16E+02 |
| 2 | 5.15E-01 | 2.99E+01 |  | 2.29E-01 | 3.51E+00 |  |
| NI\_L | 1 | 7.02E+00 | 4.47E+02 |  | 7.74E+00 | 8.75E+01 |  | 1.06E+02 | 9.39E+01 |
| 2 | 8.06E-01 | 1.12E+04 |  | 6.85E-01 | 5.42E+02 |  |
| WCCI2020-Complex | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 6.88E+02 | 6.87E+02 |  | 1.35E-01 | 3.00E-01 |  | 1.95E+02 | 1.96E+02 |
| 2 | 6.88E+02 | 6.87E+02 |  | 1.46E-01 | 2.73E-01 |  |
| 2 | 1 | 2.54E+03 | 2.54E+03 |  | 1.19E+00 | 4.03E-01 |  | 1.08E+02 | 9.19E+01 |
| 2 | 2.54E+03 | 2.54E+03 |  | 7.65E-01 | 3.29E-01 |  |
| 3 | 1 | 3.76E+09 | 3.74E+09 |  | 6.05E+06 | 8.75E+04 |  | 1.00E+02 | 9.53E+01 |
| 2 | 3.76E+09 | 3.74E+09 |  | 5.11E+06 | 5.34E+04 |  |
| 4 | 1 | 1.31E+03 | 1.31E+03 |  | 4.83E-03 | 1.48E-03 |  | 1.10E+02 | 9.32E+01 |
| 2 | 1.31E+03 | 1.31E+03 |  | 5.19E-03 | 1.73E-03 |  |
| 5 | 1 | 2.38E+07 | 2.35E+07 |  | 7.26E+04 | 1.15E+04 |  | 1.18E+02 | 1.26E+02 |
| 2 | 2.38E+07 | 2.35E+07 |  | 7.37E+04 | 1.45E+04 |  |
| 6 | 1 | 1.72E+09 | 1.71E+09 |  | 3.21E+06 | 7.48E+01 |  | 1.07E+02 | 9.63E+01 |
| 2 | 1.72E+09 | 1.71E+09 |  | 3.09E+06 | 8.63E+01 |  |
| 7 | 1 | 5.89E+06 | 5.88E+06 |  | 6.17E+03 | 2.48E+02 |  | 1.10E+02 | 9.63E+01 |
| 2 | 5.88E+06 | 5.88E+06 |  | 6.20E+03 | 4.06E+01 |  |
| 8 | 1 | 5.21E+02 | 5.20E+02 |  | 4.74E-02 | 1.17E-01 |  | 1.04E+02 | 9.45E+01 |
| 2 | 5.21E+02 | 5.20E+02 |  | 3.41E-02 | 1.27E-01 |  |
| 9 | 1 | 1.85E+04 | 1.79E+04 |  | 6.14E+01 | 3.89E+01 |  | 4.87E+02 | 8.61E+01 |
| 2 | 1.62E+03 | 1.62E+03 |  | 6.67E-02 | 4.31E-02 |  |
| 10 | 1 | 3.14E+09 | 3.13E+09 |  | 2.96E+06 | 2.70E+03 |  | 4.40E+02 | 7.55E+01 |
| 2 | 1.72E+09 | 1.71E+09 |  | 4.90E+06 | 9.05E+01 |  |
| WCCI2020-ManyTask | | | | | | | | | |
| 1 | | 1.55E+03 | 1.42E+03 |  | 1.55E+03 | 1.42E+03 |  | 1.54E+02 | 1.30E+02 |
| 2 | | 6.74E+05 | 4.74E+05 |  | 6.74E+05 | 4.74E+05 |  | 1.41E+02 | 9.75E+01 |
| 3 | | 7.28E+02 | 4.95E+02 |  | 7.28E+02 | 4.95E+02 |  | 1.16E+02 | 1.01E+02 |
| 4 | | 3.05E+07 | 2.75E+07 |  | 3.05E+07 | 2.75E+07 |  | 1.15E+02 | 9.77E+01 |
| 5 | | 1.68E+03 | 1.57E+03 |  | 1.68E+03 | 1.57E+03 |  | 1.81E+02 | 1.70E+02 |
| 6 | | 3.32E+07 | 2.90E+07 |  | 3.32E+07 | 2.90E+07 |  | 1.13E+02 | 9.58E+01 |
| 7 | | 1.21E+03 | 1.12E+03 |  | 1.21E+03 | 1.12E+03 |  | 1.78E+02 | 1.62E+02 |
| 8 | | 1.55E+08 | 1.45E+08 |  | 1.55E+08 | 1.45E+08 |  | 1.59E+02 | 1.41E+02 |
| 9 | | 1.88E+08 | 1.76E+08 |  | 1.88E+08 | 1.76E+08 |  | 1.37E+02 | 1.21E+02 |
| 10 | | 6.79E+03 | 6.70E+03 |  | 6.79E+03 | 6.70E+03 |  | 1.62E+02 | 1.48E+02 |

### 多因子算法横向对比实验结果与分析

表3.5展示了SOCO2016-2T、WCCI2020-Complex测试集上MFGBO、MFGA、MFDE、MFPSO的平均最优解、标准差。表3.6展示了各测试集上各算法的运行时间。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. 各测试集各算法平均最优解、标准差 | | | | | | | | | | |
|  |  | 平均最优解 | | | |  | 标准差 | | | |
| Benchmark | | MFGBO | MFGA | MFDE | MFPSO |  | MFGBO | MFGA | MFDE | MFPSO |
| SOCO2020-2T | | | | | | | | | | |
| CI\_H | 1 | 0.00E+00 | 1.15E+00 | 7.18E-02 | 1.08E+00 |  | 0.00E+00 | 2.37E-02 | 3.36E-02 | 2.88E-02 |
| 2 | 1.62E-04 | 4.58E+02 | 1.41E+02 | 4.55E+02 |  | 2.50E-04 | 3.76E+01 | 8.32E+01 | 4.12E+01 |
| CI\_M | 1 | 3.43E-04 | 8.71E+00 | 7.39E-01 | 8.11E+00 |  | 2.80E-04 | 5.05E-01 | 3.54E-01 | 1.01E+00 |
| 2 | 1.32E-04 | 5.49E+02 | 8.44E+01 | 6.12E+02 |  | 3.04E-04 | 6.23E+01 | 6.23E+01 | 9.55E+01 |
| CI\_L | 1 | 3.67E-04 | 2.11E+01 | 2.12E+01 | 2.13E+01 |  | 2.45E-04 | 9.50E-02 | 2.37E-02 | 4.45E-02 |
| 2 | 6.57E-04 | 1.01E+04 | 1.37E+04 | 1.58E+04 |  | 3.90E-05 | 7.95E+02 | 1.10E+03 | 9.70E+02 |
| PI\_H | 1 | 3.55E-01 | 8.19E+02 | 2.93E+02 | 1.05E+03 |  | 4.49E-01 | 6.93E+01 | 7.86E+01 | 1.66E+02 |
| 2 | 3.79E+03 | 4.45E+02 | 1.33E+00 | 5.74E+03 |  | 1.42E+02 | 8.09E+01 | 1.18E+00 | 1.27E+03 |
| PI\_M | 1 | 3.27E+00 | 8.14E+00 | 6.44E-01 | 7.39E+00 |  | 6.08E-02 | 4.43E-01 | 1.74E-01 | 6.62E-01 |
| 2 | 2.45E+00 | 1.92E+05 | 1.75E+02 | 1.89E+05 |  | 1.08E+01 | 6.15E+04 | 3.15E+01 | 1.07E+05 |
| PI\_L | 1 | 2.82E-04 | 2.09E+01 | 3.11E+00 | 1.38E+01 |  | 2.05E-04 | 1.30E-01 | 8.54E-01 | 2.65E+00 |
| 2 | 1.37E-02 | 2.17E+01 | 1.72E+00 | 1.14E+01 |  | 6.52E-03 | 3.31E+00 | 8.90E-01 | 4.03E+00 |
| NI\_H | 1 | 1.04E-01 | 1.98E+05 | 3.64E+02 | 6.84E+05 |  | 1.32E-01 | 5.10E+04 | 1.35E+02 | 2.90E+05 |
| 2 | 1.62E-02 | 5.81E+02 | 3.34E+02 | 6.04E+02 |  | 2.31E-02 | 8.44E+01 | 4.02E+01 | 8.26E+01 |
| NI\_M | 1 | 3.32E-04 | 1.11E+00 | 9.08E-02 | 1.22E+00 |  | 3.63E-04 | 2.02E-02 | 3.65E-02 | 1.09E-01 |
| 2 | 5.15E-01 | 3.00E+01 | 6.04E+00 | 3.34E+01 |  | 2.29E-01 | 2.09E+00 | 1.00E+00 | 2.19E+00 |
| NI\_L | 1 | 7.02E+00 | 8.22E+02 | 4.65E+02 | 2.79E+03 |  | 7.74E+00 | 8.11E+01 | 3.29E+01 | 7.43E+02 |
| 2 | 8.06E-01 | 1.00E+04 | 4.40E+03 | 1.58E+04 |  | 6.85E-01 | 6.60E+02 | 6.30E+02 | 7.72E+02 |
| WCCI2020-Complex | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 6.88E+02 | 6.88E+02 | 6.85E+02 | 6.87E+02 |  | 1.35E-01 | 3.40E-01 | 1.45E-01 | 2.90E-01 |
| 2 | 6.88E+02 | 6.88E+02 | 6.85E+02 | 6.87E+02 |  | 1.46E-01 | 3.40E-01 | 1.51E-01 | 2.90E-01 |
| 2 | 1 | 2.54E+03 | 2.54E+03 | 2.54E+03 | 2.54E+03 |  | 1.19E+00 | 6.83E-01 | 1.06E-03 | 2.47E+00 |
| 2 | 2.54E+03 | 2.54E+03 | 2.54E+03 | 2.54E+03 |  | 7.65E-01 | 6.89E-01 | 1.06E-03 | 2.47E+00 |
| 3 | 1 | 3.76E+09 | 3.74E+09 | 3.74E+09 | 3.75E+09 |  | 6.05E+06 | 1.66E+06 | 1.33E+00 | 1.02E+07 |
| 2 | 3.76E+09 | 3.74E+09 | 3.74E+09 | 3.75E+09 |  | 5.11E+06 | 1.69E+06 | 1.39E+00 | 1.02E+07 |
| 4 | 1 | 1.31E+03 | 1.31E+03 | 1.31E+03 | 1.31E+03 |  | 4.83E-03 | 1.77E-03 | 4.00E-06 | 8.29E-03 |
| 2 | 1.31E+03 | 1.31E+03 | 1.31E+03 | 1.31E+03 |  | 5.19E-03 | 1.76E-03 | 4.00E-06 | 8.29E-03 |
| 5 | 1 | 2.38E+07 | 2.36E+07 | 2.35E+07 | 2.36E+07 |  | 7.26E+04 | 2.16E+04 | 2.09E+01 | 9.19E+04 |
| 2 | 2.38E+07 | 2.36E+07 | 2.35E+07 | 2.36E+07 |  | 7.37E+04 | 2.19E+04 | 2.00E+01 | 9.19E+04 |
| 6 | 1 | 1.72E+09 | 1.72E+09 | 1.71E+09 | 1.71E+09 |  | 3.21E+06 | 5.60E+05 | 2.29E-01 | 1.98E+06 |
| 2 | 1.72E+09 | 1.72E+09 | 1.71E+09 | 1.71E+09 |  | 3.09E+06 | 5.62E+05 | 2.24E-01 | 1.98E+06 |
| 7 | 1 | 5.89E+06 | 5.88E+06 | 5.88E+06 | 5.88E+06 |  | 6.17E+03 | 5.22E+02 | 1.03E-01 | 3.44E+03 |
| 2 | 5.88E+06 | 5.88E+06 | 5.88E+06 | 5.88E+06 |  | 6.20E+03 | 5.25E+02 | 1.03E-01 | 3.44E+03 |
| 8 | 1 | 5.21E+02 | 5.20E+02 | 5.20E+02 | 5.20E+02 |  | 4.74E-02 | 8.96E-02 | 6.32E-02 | 1.31E-01 |
| 2 | 5.21E+02 | 5.20E+02 | 5.20E+02 | 5.20E+02 |  | 3.41E-02 | 8.95E-02 | 6.31E-02 | 1.31E-01 |
| 9 | 1 | 1.85E+04 | 1.80E+04 | 1.78E+04 | 1.81E+04 |  | 6.14E+01 | 3.04E+01 | 1.19E+00 | 8.50E+01 |
| 2 | 1.62E+03 | 1.62E+03 | 1.62E+03 | 1.62E+03 |  | 6.67E-02 | 4.44E-02 | 1.52E-03 | 7.23E-02 |
| 10 | 1 | 3.14E+09 | 3.14E+09 | 3.13E+09 | 3.14E+09 |  | 2.96E+06 | 6.68E+05 | 1.49E+00 | 2.29E+06 |
| 2 | 1.72E+09 | 1.72E+09 | 1.71E+09 | 1.71E+09 |  | 4.90E+06 | 1.08E+06 | 2.55E+00 | 7.79E+01 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. 各测试集各算法运行时间 | | | | |
| Benchmark | MFGBO | MFGA | MFDE | MFPSO |
| SOCO2016-2T | | | | |
| CI\_H | 1.07E+02 | 1.53E+02 | 1.58E+02 | 1.49E+02 |
| CI\_M | 1.24E+02 | 1.67E+02 | 1.69E+02 | 1.13E+02 |
| CI\_L | 1.13E+02 | 1.51E+02 | 1.42E+02 | 1.08E+02 |
| PI\_H | 1.10E+02 | 1.47E+02 | 1.64E+02 | 1.17E+02 |
| PI\_M | 1.15E+02 | 1.69E+02 | 1.68E+02 | 1.51E+02 |
| PI\_L | 2.27E+02 | 2.19E+02 | 2.18E+02 | 1.73E+02 |
| NI\_H | 1.14E+02 | 1.53E+02 | 1.52E+02 | 1.10E+02 |
| NI\_M | 2.28E+02 | 2.74E+02 | 2.79E+02 | 2.10E+02 |
| NI\_L | 1.06E+02 | 1.42E+02 | 1.43E+02 | 1.05E+02 |
| WCCI2020-Complex | | | | |
| 1 | 1.95E+02 | 2.94E+02 | 2.70E+02 | 2.21E+02 |
| 2 | 1.08E+02 | 1.66E+02 | 1.47E+02 | 1.00E+02 |
| 3 | 1.00E+02 | 1.42E+02 | 1.42E+02 | 1.13E+02 |
| 4 | 1.10E+02 | 1.67E+02 | 1.73E+02 | 1.15E+02 |
| 5 | 1.18E+02 | 1.94E+02 | 1.83E+02 | 1.09E+02 |
| 6 | 1.07E+02 | 1.51E+02 | 1.49E+02 | 1.08E+02 |
| 7 | 1.10E+02 | 1.49E+02 | 1.48E+02 | 1.07E+02 |
| 8 | 1.04E+02 | 1.48E+02 | 1.49E+02 | 1.08E+02 |
| 9 | 4.87E+02 | 4.73E+02 | 6.00E+02 | 2.56E+02 |
| 10 | 4.40E+02 | 4.56E+02 | 6.51E+02 | 2.78E+02 |

## 本章小结

# 总结与展望

## 总结

## 不足之处及展望

致 谢

参考文献

* 1. Yang X . Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms: Second Edition[J]. 2010.
  2. Ahmadianfar I , Khajeh Z , Pari S , et al. Developing optimal policies for reservoir systems using a multi-strategy optimization algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2019.
  3. Stron R , Price K . Differential Evolution- A simple. 1995.
  4. Shi Y H , Eberhart R C . Empirical study of particle swarm optimization[C]// Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2002.
  5. Ypma T J . Historical Development of the Newton–Raphson Method[J]. Siam Review, 1995, 37(4):531-551.
  6. Bazaraa M S , Sherali H D , Shetty C M . Nonlinear programming. Theory and algorithms. 2. ed[M]. Wiley, 1993.
  7. Hestenes M R , Steifel E . Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. J.res.nat.standards, 1952.
  8. Salajegheh F , Salajegheh E . PSOG: Enhanced particle swarm optimization by a unit vector of first and second order gradient directions[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2019.
  9. Liouane N . A hybrid method based on conjugate gradient trained neural network and differential evolution for non linear systems identification[C]// International Conference on Electrical Engineering & Software Applications. IEEE, 2013.
  10. Ahmadianfar I, Bozorg-Haddad O, Chu X. Gradient-based optimizer: A new Metaheuristic optimization algorithm[J]. Information Sciences, 2020, 540: 131-159.
  11. Guo S M , Yang C C . Enhancing Differential Evolution Utilizing Eigenvector-Based Crossover Operator[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 19(1):31-49.
  12. Fonseca C M , Fleming P J . An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization[J]. Evolutionary Computation, 1999, 3(1):1-16.
  13. Gupta A, Ong Y S, Feng L. Multifactorial evolution: toward evolutionary multitasking[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 20(3): 343-357.
  14. Feng L , Zhou W , Zhou L , et al. An empirical study of multifactorial PSO and multifactorial DE[C]// 2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). IEEE, 2017.
  15. Feng L , Zhou L , Zhong J , et al. Evolutionary Multitasking via Explicit Autoencoding[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018:1-14.
  16. Tang Z , Gong M , Wu Y , et al. A Multifactorial Optimization Framework Based on Adaptive Intertask Coordinate System[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, PP(99):1-14.
  17. Wolpert D H, Macready W G. No free lunch theorems for optimization[J]. IEEE transactions on evolutionary computation, 1997, 1(1): 67-82.
  18. Da B, Ong Y S, Feng L, et al. Evolutionary multitasking for single-objective continuous optimization: Benchmark problems, performance metric, and baseline results[J]. arXiv preprint arXiv:1706.03470, 2017.
  19. Rice J, Cloninger C R, Reich T. Multifactorial inheritance with cultural transmission and assortative mating. I. Description and basic properties of the unitary models[J]. American journal of human genetics, 1978, 30(6): 618.
  20. Cloninger C R, Rice J, Reich T. Multifactorial inheritance with cultural transmission and assortative mating. II. a general model of combined polygenic and cultural inheritance[J]. American journal of human genetics, 1979, 31(2): 176.
  21. Cavalli-Sforza L L, Feldman M W. Cultural versus biological inheritance: phenotypic transmission from parents to children.(A theory of the effect of parental phenotypes on children's phenotypes)[J]. American journal of human genetics, 1973, 25(6): 618.
  22. Feldman M W, Laland K N. Gene-culture coevolutionary theory[J]. Trends in ecology & evolution, 1996, 11(11): 453-457.

附 录

### 连续优化问题的14个测试函数在2维空间的图像

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |