Über eine Frage von G. Hanani aus der additiven Zahlentheorie

Von *L. Danzer* in Göttingen

Herrn Professor Helmut Hasse zum 25. August 1963

Zuerst in [1] und später noch einmal in [3] wies P. Erdös auf folgende, mündlich geäußerte Vermutung von G. Hanani hin:

(1) *Es seien* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *zwei unendliche Folgen natürlicher Zahlen mit* $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, *und derart, daß* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *bis auf endlich viele (etwa bis auf* c_1*) alle natürlichen Zahlen enthält.*

Für die Anzahlen $A(x), B(x)$ der Zahlen in $\mathfrak{A} \cap [0; x]$ beziehungsweise in $\mathfrak{B} \cap [0; x]$ gilt dann trivialerweise

$$A(x)B(x) \geqq x + 1 - c_1. \tag{2}$$

Vermutung: Es gilt sogar $\limsup\limits_{x \to \infty} \frac{A(x)\,B(x)}{x+1} > 1$.

In [2] ging W. Narkiewicz noch einen Schritt weiter und vermutete:

(3) *Stellt* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *mit endlich vielen Ausnahmen jede natürliche Zahl mindestens m mal dar, und ist*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)\,B(x)}{x+1} \leqq m \qquad \textit{(also gleich m)},$$

(4) *so ist entweder* $\mathfrak{A}$ *oder* $\mathfrak{B}$ *endlich.*

Er bewies (unter etwas schwächeren Voraussetzungen), daß, wenn (3) erfüllt ist, und beide Mengen unendlich sind, jedenfalls eine von ihnen (etwa $\mathfrak{A}$) recht dünn ist. Genauer: Es ist $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{A(2x)}{A(x)} = 1$, woraus $A(x) = o(x^{\varepsilon})$ für jedes positive ε folgt.

In dieser Note sollen zwei *unendliche* Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ konstruiert werden, für die folgendes gilt:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{N}^{1)}, \tag{5}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)\,B(x)}{x+1} = 1. \tag{6}$$

Wir setzen $a_n := (n^2 + 1)! + n - 1$ und $\mathfrak{A} := \{a_n \mid n \in \mathfrak{N}\}$. Dann ist $a_n \equiv n - 1 \bmod d$, falls $d \leqq n^2 + 1$. Für jedes n aus $\mathfrak{N}$ wählen wir nun

$$d_n := \left[\frac{2n + 3 - \sqrt{4n+1}}{2}\right]$$

---

1) $\mathfrak{N}$ bezeichne die Menge aller natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

und erreichen damit, daß die Zahlen

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-d_n+1} \tag{7}$$

ein volles Restklassensystem modulo d_n bilden (denn es ist $d_n \leqq (n - d_n + 1)^2 + 1$). — Schließlich setzen wir für jedes n aus $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{B}_n := \left\{ kd_n \,\middle|\, \frac{(n-1)\,a_n}{d_n} \leqq k < \frac{(n+1)\,a_{n+1}}{d_n} \right\}$$

und

$$\mathfrak{B} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n .$$

Nun gibt es zu jedem x aus $\mathfrak{N}$ (genau) einen Index $n(x)$, so daß

$$n(x)a_{n(x)} \leqq x < (n(x)+1)a_{n(x)+1}$$

gilt. $a_{k(x)}$ sei diejenige der Zahlen (7), die kongruent x modulo $d_{n(x)}$ ist. Dann ist

$$x - a_{k(x)} \in \mathfrak{B}_{n(x)},$$

denn so war $\mathfrak{B}_n$ gerade konstruiert worden. Es folgt

$$x \in a_{k(x)} + \mathfrak{B}_{n(x)} < \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

und damit (5).

Ferner ist für $n \geqq 3$ und $x < n(x)a_{n(x)+1}$

$$B(x) \leqq \operatorname{card}\left(\mathfrak{B}_{n(x)} \frown [(n(x)-1)a_{n(x)}; x]\right) + \operatorname{card}(\mathfrak{B}_{n(x)-1}) + \operatorname{card}\left(\bigcup_{\nu=0}^{n(x)-2} \mathfrak{B}_\nu\right)$$

$$\leqq \frac{x + d_{n(x)} - (n(x)-1)a_{n(x)}}{d_{n(x)}} + \frac{n(x)a_{n(x)} + d_{n(x)-1} - (n(x)-2)a_{n(x)-1}}{d_{n(x)-1}} + n(x)\, a_{n(x)-1}$$

$$\leqq \frac{x + a_{n(x)}}{d_{n(x)-1}} + n(x)a_{n(x)-1},$$

während im Falle $n(x)a_{n(x)+1} \leqq x < (n(x)+1)a_{n(x)+1}$ auch noch $\mathfrak{B}_{n(x)+1}$ zu berücksichtigen ist. Das bringt jedoch höchstens im ersten Summanden den Faktor $\dfrac{n(x)+1}{n(x)}$, so daß wir in jedem Falle

$$B(x) \leqq \frac{x}{d_{n(x)-1}} \cdot \left(\frac{n(x)+1}{n(x)}\right)^2 + n(x)a_{n(x)-1}$$

haben. Schließlich ist $A(x) \leqq n(x) + 2$. Damit ergibt sich

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)\,B(x)}{x+1} \leqq \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{(n(x)+2)(n(x)+1)^2}{d_{n(x)-1}\; n(x)^2} + \frac{(n(x)+2)\,n(x)a_{n(x)-1}}{n(x)a_{n(x)}} \right) = 1,$$

denn mit x strebt auch $n(x)$ gegen unendlich, also der erste Summand gegen eins und der zweite gegen null.

Mit Rücksicht auf (2) folgt jetzt (6), w. z. b. w.

Setzt man noch $\mathfrak{A}_m := \mathfrak{A} + \{0, 1, \ldots, m-1\}$, so stellt $\mathfrak{A}_m + \mathfrak{B}$ oberhalb der übernächsten auf m folgenden Zahl aus $\mathfrak{A}$ jede natürliche Zahl mindestens m mal dar, womit gezeigt ist, daß (4) für kein m eine Folge von (3) ist.

Als ich dieses Beispiel kürzlich Herrn Erdös vortrug, stellte er die Frage, wie weit man $A(x)B(x) - x$ unter den Voraussetzungen (1) abschätzen könne, insbesondere nach unten. Eine unmittelbare Folge des erwähnten Satzes von Narkiewicz ist

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)\,B(x) - x}{x^{1-\varepsilon}} = \infty \text{ für jedes positive } \varepsilon.$$

Wählt man nämlich x aus $\mathfrak{A}$, so hat man

$$A(x)B(x) - x \geqq B(x) - 1 \geqq \frac{x + 1 - c_1}{A(x)} - 1 \qquad \text{(cf. (2))}.$$

Wir vermuten, daß auf der anderen Seite aus (1) mindestens

$$\liminf_{x \to \infty} \big(A(x)B(x) - x\big) = \infty$$

folgt.

Herrn H. T. Croft möchte ich für den Hinweis sowohl auf die ursprüngliche Frage von Hanani, wie auch auf [2] sehr vielmals danken.

Literaturverzeichnis

[1] *P. Erdös*, Some unsolved problems. Mich. J. Math. **4** (1957), 291—300.

[2] *W. Narkiewicz*, Remarks on a conjecture of Hanani in additive number theory. Colloqu. Math. **VII** (1960), 161—165.

[3] *P. Erdös*, Some unsolved problems. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Ser A **6** (1961), 221—254.

Eingegangen 7. Juni 1963