

DOĞRUSAL MODELLERİN İKİLLİĞİ

Problem 1

Bir bilgisayar firması Standart ve Premium olmak üzere iki tip kasa üretmektedir. Üretim planlama iki tip kasa için toplam haftalık 1.hol max 100 saat, 2.hol 80 saat,3.hol 50 saat kullanılacak şekilde planlama yapmıştır. Kasaların üretimi için hollerde geçen süre hafta/sa cinsinden aşağıdaki tabloda verilmiştir.

HOL	STANDART	PREMIUM
1	8	5
2	1	4
3	1	2

Öte yandan depolama kısıtı nedeniyle haftalık 200 adetten fazla kasa üretilmemektedir.

Standart modelin karı 1800 pb, Premium modelin kar oranı 2400 pbdır.

a)Max karı elde etmek için uygun karar modelini geliştiriniz ve çözümleyiniz.

X1:Üretilcek Standart model kasa sayısı

X2:Üretilcek Premium model kasa sayısı

Primal Model

$$\text{Max } Z = 1800x_1 + 2400x_2$$

$$8x_1 + 5x_2 \leq 100 \quad (y_1)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 80 \quad (y_2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 50 \quad (y_3)$$

$$x_1 + x_2 \leq 200 \quad (y_4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual Model

$$\text{Min } M = 100y_1 + 80y_2 + 50y_3 + 200y_4$$

$$8y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 1800$$

$$5y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 2400$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Dual Simpleks

$$\text{Min } M - 100y_1 - 80y_2 - 50y_3 - 200y_4 = 0$$

$$-8y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + S_1 = -1800$$

$$-5y_1 - 4y_2 - 2y_3 - y_4 + S_2 = -2400$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Başlangıç Simpleks Tablosu

Temel	Y1	Y2	Y3	Y4	S1	S2	ÇÖZÜM
Z	-100	-80	-50	-200	0	0	
S1	-8	-1	-1	-1	1	0	-1800
S2	-5	-4	-2	-1	0	1	-2400

1.iterasyon

TEMEL	Y1	Y2	Y3	Y4	S1	S2	ÇÖZÜM
Z	0	0	-10	-180	0	-20	48000
S1	0	-27/5	11/5	3/5	1	-8/5	2040
Y1	1	4/5	2/5	1/5	0	-1/5	480

Optimal çözüm tablosu

TEMEL	Y1	Y2	Y3	Y4	S1	S2	ÇÖZÜM
Z	0	0	-10	-180	0	-20	48000
Y2	0	1	-11/27	-1/9	-5/27	8/27	10200/27=377,7
Y1	1	0	98/135	13/45	4/27	1/27	177,77

b) Her bir kaynağın marjinal katkı, gölge fiyat ve fırsat maliyetini araştırınız.

$y_1=177,7$ $y_2=377,77$ $y_3=0$ $y_4=0$

- 1.hol için kullanılabilir zamanın marjinal katkısı 177,7 pbdir. 1.holde kullanılabilir zamanı bir birim arttırmak karda 177,7 pb(parabirimi) artış sağlayacaktır. İşletme sahibi 1. hol kullanım saatini bir birim arttırmak için en fazla 177,7 pb harcamaya razı olacaktır. En iyi çözüme erişildiğinde bir birim 1.hol zamanı kullanılmaz ise , 177,7 pb daha az kar edeceğinden en iyi çözümde 1.hol kullanım zamanının fırsat maliyeti 177,7 pb olacaktır.
- 2.hol için kullanılabilir zamanın marjinal katkısı 377,7 pbdir. Holde kullanılabilir zamanı bir birim arttırmak karda 377,7 pb artış sağlayacaktır. İşletme sahibi 2. hol kullanım zamanını bir birim arttırmak için en fazla 377,7 pb harcamaya razı olacaktır. Eğer yönetici en iyi çözüme erişildiğinde bir birim 2.hol zamanını kullanmaz ise 377,7 pb daha az kar elde edecektir. Dolayısıyla en iyi çözümde 2.hol kullanım zamanının fırsat maliyeti 377,7 pb olacaktır.
- 3.hol için kullanılabilir zamanın gölge fiyatı sıfırdır. Bu zamanın arttırılmasının kara bir etkisi yoktur.
- Depolama kısıtının da gölge fiyatı sıfır olduğundan bol kaynaktır. Depolanabilir ürün miktarının arttırılmasının kara bir etkisi olmayacaktır.

c) Bol olan kaynakları yorumlayınız.

- $Y_3=0$ Optimum çözüm tablosundaki değeri -10 dur.

3.hol kullanılabilir zamanın gölge fiyatı sıfırdır. 3.holde kullanılabilir 50 saatin 40 saati kullanılmış 10 saat kullanılabilir zaman mevcuttur.

- $Y_4=180$ Optimum çözüm tablosundaki değeri -180dir.

Depolama alanı kısıtının gölge fiyatı sıfır olduğundan bol kaynaktır. Depolama alanı kısıtı sebebiyle 200 birim ürün üretilirken bu miktardan 20 birim ürün üretilmiş ve 180 birim ürün için depolama alanı bulunmaktadır.

d) Max kar için hangi üründen kaç adet üretilmelidir ve max kar kaçtır?

$S_1=0$ $S_2=20$ olduğuna göre

Standart modelden üretilmemesi, Premium modelden 20 birim üretilmesi durumunda max kar elde edilecektir. Max kar 48000 pbdır.

1.PROBLEMİN LINGO ÇÖZÜMÜ

DUAL MODEL

$$\text{MIN} = 100*y_1 + 80*y_2 + 50*y_3 + 200*y_4;$$

$$8*y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 1800;$$

$$5*y_1 + 4*y_2 + 2*y_3 + y_4 \geq 2400;$$

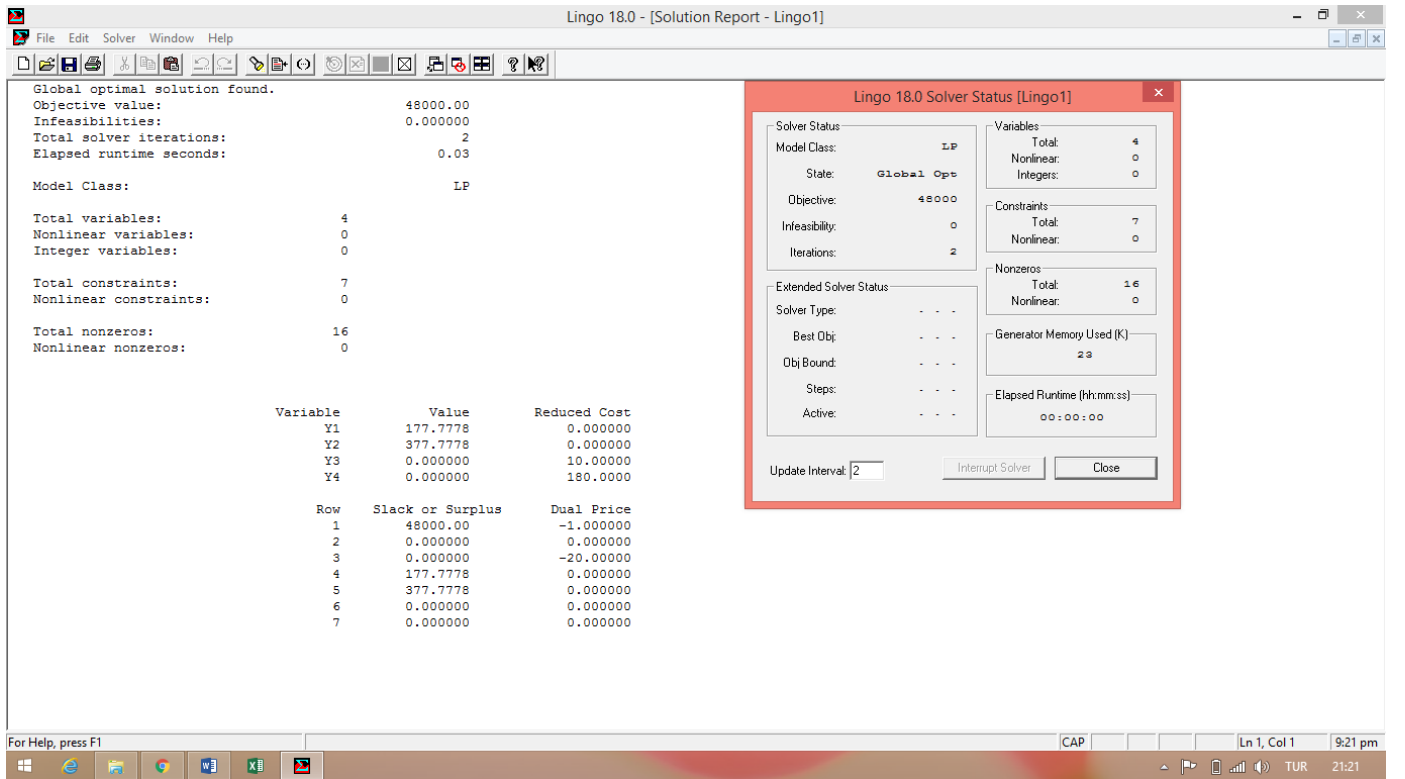
$$y_1 \geq 0;$$

$$y_2 \geq 0;$$

$$y_3 \geq 0;$$

$$y_4 \geq 0;$$

END



Problem 2

Bir firma 3 tip mal üretmekte olup haftalık kullanılabilir hammadde miktarları sırasıyla 50,30,25 birimdir. Haftalık üretim kapasitesi 120 birimdir. Haftalık talep fazlası üretim yapılmayıp 2. ve 3.mallardan toplam talep 75 birimdir.

a) Malların birim karları 1,3,2 birim olduğuna göre max karı bulmak için uygun karar modelini geliştiriniz ve max karı bulunuz.

X1:1.tip maldan üretilecek miktar

X2:2.tip maldan üretilecek miktar

X3:3.tip maldan üretilecek miktar

Primal Model	Dual Model
Max z= $X_1+3X_2+2X_3$	Min M=50Y₁+30Y₂+25Y₃+120Y₄+75Y₅
$X_1 \leq 50$ (Y ₁)	$Y_1+Y_4 \geq 1$
$X_2 \leq 30$ (Y ₂)	$Y_2+Y_4+Y_5 \geq 3$
$X_3 \leq 25$ (Y ₃)	$Y_3+Y_4+Y_5 \geq 2$
$X_1+X_2+X_3 \leq 120$ (Y ₄)	
$X_2+X_3 \leq 75$ (Y ₅)	
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$	$Y_j \geq 0$ j:1,2,3,4,5

Dual Simpleks

Min M=50Y₁-30Y₂-25Y₃-120Y₄-75Y₅

$-Y_1-Y_4+S_1=-1$

$-Y_2-Y_4-Y_5+S_2=-3$

$-Y_3-Y_4-Y_5+S_3=-2$

$Y_j \geq 0, j:1..5$

Başlangıç Simpleks Tablosu

Temel	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	S ₁	S ₂	S ₃	Çözüm
Z	-50	-30	-25	-120	-75	0	0	0	
S ₁	-1	0	0	-1	0	1	0	0	-1
S ₂	0	-1	0	-1	-1	0	1	0	-3
S ₃	0	0	-1	-1	-1	0	0	1	-2

Temel	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	S ₁	S ₂	S ₃	Çözüm
Z	-50	0	-25	-90	-45	0	-30	0	90
S ₁	-1	0	0	-1	0	1	0	0	-1
S ₂	0	1	0	1	1	0	-1	0	3
S ₃	0	0	-1	-1	-1	0	0	1	-2

Temel	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	S1	S2	S3	Çözüm
Z	-50	0	0	-65	-20	0	-30	-25	140
S1	-1	0	0	-1	0	1	0	0	-1
Y2	0	1	0	1	1	0	-1	0	3
Y3	0	0	1	1	1	0	0	-1	2

OPTİMAL ÇÖZÜM TABLOSU

Temel	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	S1	S2	S3	Çözüm
Z	0	0	0	-15	-20	-50	-30	-25	190
y1	1	0	0	1	0	-1	0	0	1
y2	0	1	0	1	1	0	-1	0	3
Y3	0	0	1	1	1	0	0	-1	2

Max kar 190 pb(parabirimi)dir.

b)1.ürün için kullanılabilir hammadde miktarıyla ilgili değişiklik yapmak isteyen karar vericiler bu değişikliklerden karın nasıl etkileneceğini araştırmak istemektedir.1.kaynağın marjinal fayda ve gölge fiyatını araştırınız.

Y1=1 olduğundan

1.ürün için kullanılabilir hammaddenin marjinal faydası 1 birimdir. 1. Ürün için kullanılabilir hammadde miktarı 1 birim arttırıldığında karda 1 birim artış meydana gelecektir. Üretim planlama hammadde miktarını 1 birim arttırmak isterse karar vericilerin 1.ürün hammadde miktarını 1 birim arttırmak için 1 pb harcamaya razı olması gerekmektedir.

c)Karar vericiler en iyi çözüme erişildiğinde 2.veya 3.ürün için kullanılan hammaddeden 1 birim kullanılmazsa karın nasıl etkileneceğini merak etmektedir.2.ve 3. Kaynağın fırsat maliyetini bulunuz.

Y2=3 y3=2 olduğundan

2.ürün için kullanılabilir hammaddenin fırsat maliyeti 3 pb, 3.ürün için kullanılabilir hammaddenin fırsat maliyeti 2 pbdır. 2.ürün için kullanılan hammaddeden 1 birim daha az kullanılması durumunda 3 pb, 3.ürün için kullanılan hammaddeden 1 birim daha az kullanılması durumunda 2 pb daha az kar elde edilecektir.

d)Bol kaynakları yorumlayınız.

Y4=0 y5=0

Haftalık üretim kapasitesinin gölge fiyatı sıfır olduğundan bol kaynaktır. Optimal tabloda y4 'e karşılık gelen değer 15 tir. 120 birimlik kapasiteden 15 birim daha kullanılabilir üretim kapasitesi bulunmaktadır.

2.ve 3. mallardan toplam talebin gölge fiyatı sıfır olduğundan bol kaynaktır. Optimal tabloda y_5 'e karşılık gelen değer 20dir. 75 birimlik talep kısıtında 20 birimlik bolluk bulunmaktadır.

e)Max kar elde edilebilmesi için hangi üründen ne kadar üretilmelidir?

$S_1=50$ $s_2=30$ $s_3=25$ olduğundan 1.tip üründen 50br, 2.tip üründen 30 br, 3.tip üründen 25 birim üretilmesi durumunda 190 pbyle max kar elde edilmektedir.

PROBLEM 2 LİNGO ÇÖZÜMÜ

$$\text{MIN}=50*Y1+30*Y2+25*Y3+120*Y4+75*Y5;$$

$$Y1+Y4 \geq 1;$$

$$Y2+Y4+Y5 \geq 3;$$

$$Y3+Y4+Y5 \geq 2;$$

$$Y1 \geq 0;$$

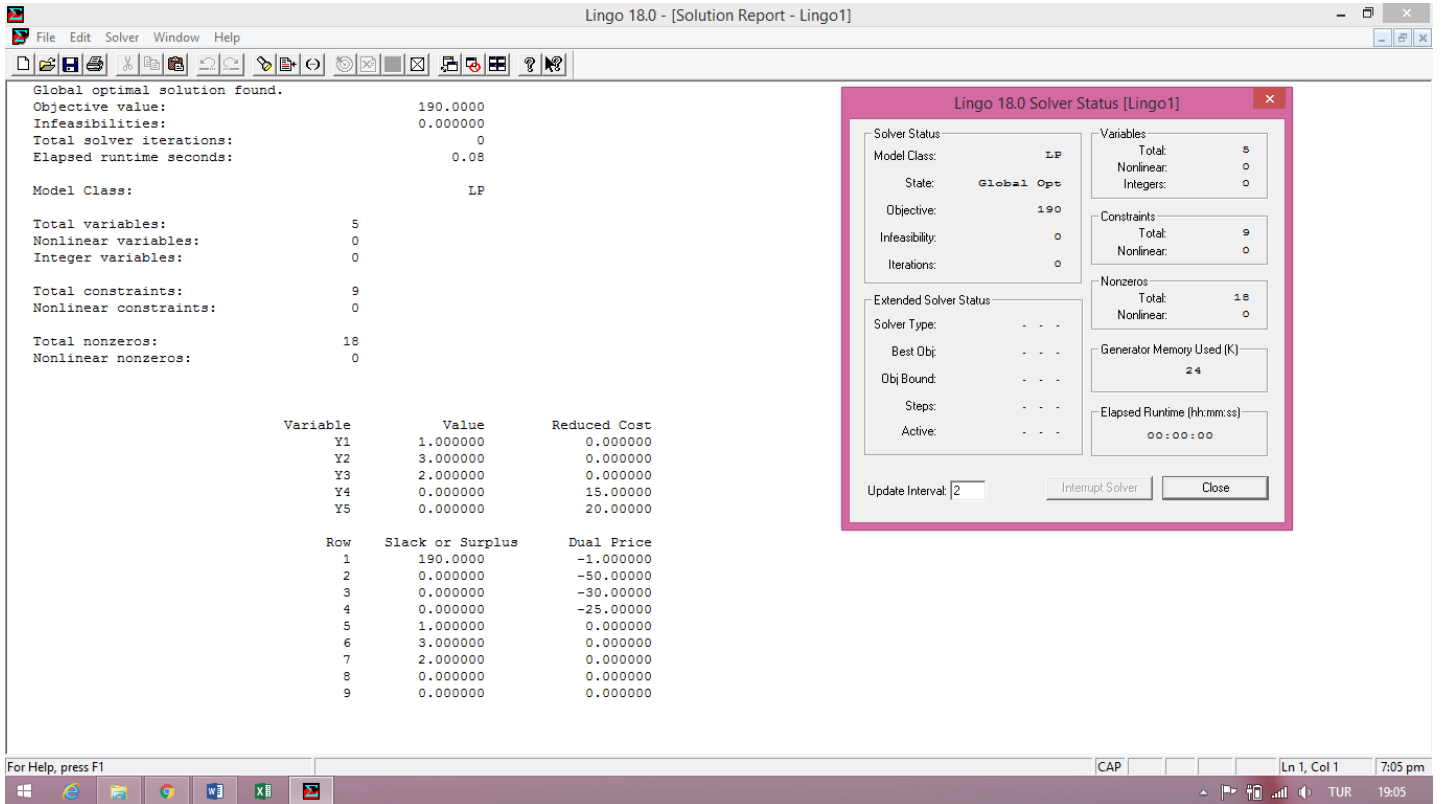
$$Y2 \geq 0;$$

$$Y3 \geq 0;$$

$$Y4 \geq 0;$$

$$Y5 \geq 0;$$

END



Problem 3

Günlük 18 makina saat kapasitesi olan bir işletmede iki tip mal üretilmektedir. Bir birim 1.tip mal için 3 makine saat, 2. Tip mal için 2 makine saat gerekmektedir. A firması 1. tip için 10 br, 2. Tip için 30 birimlik talepte bulunmuştur. B firması da 1.tip ve 2.tip üründen toplam 45 birimlik talepte bulunmuştur. Birim başına 1.üründen 4 br ,2.üründen 6 br kar elde edecek şekilde anlaşma yapılmıştır.

a)Max kar elde edilmesi için gerekli karar modelini oluşturunuz ve max kar için hangi üründen ne kadar üretilmesi gerektiğini bulunuz.

X1:1.tip üründen üretilecek miktar

X2:2.tip üründen üretilecek miktar

Primal Model

$$\text{Max} z = 4x_1 + 6x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

MODELİN STANDART HALİ

$$\text{MAX} Z - 4X_1 - 6X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 = 0$$

$$3X_1 + 2X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 18$$

$$X_1 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 10$$

$$X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 + 0S_4 = 30$$

$$X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1S_4 = 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Başlangıç Simpleks Tablosu

TEMEL	X1	X2	S1	S2	S3	S4	ÇÖZÜM	ORAN
Z	-4	-6	0	0	0	0		
S1	3	2	1	0	0	0	18	9
S2	1	0	0	1	0	0	10	10/0
S3	0	1	0	0	1	0	30	30
S4	1	1	0	0	0	1	45	45

Optimal Çözüm Tablosu

TEMEL	X1	X2	S1	S2	S3	S4	ÇÖZÜM
Z	5	0	3	0	0	0	54
X2	3/2	1	1/2	0	0	0	9
S2	1	0	0	1	0	0	10
S3	-3/2	-1	-1/2	0	0	0	21
S4	-1/2	0	-1/2	0	0	1	36

X2=9 2.tip üründen 9 br üretilmesi durumunda 54 pbyle max kar elde edilecektir.

b)Optimal çözüm tablosundan kaynakların marjinal faydasını bulunuz ve yorumlayınız.

Optimal çözüm tablosunda $s_1=3$ $s_2=0$ $s_3=0$ $s_4=0$ olduğundan karşılık gelen kaynakların gölge fiyatları $y_1=3$ $y_2=0$ $y_3=0$ $y_4=0$ şeklindedir.

Günlük 18 makine saat kaynağının marjinal faydası 3 brdir. Günlük kullanılabilir makine saatte 1 brlik artış karda 3 br TL artış meydana getirecektir. Günlük kullanılabilir makine saati 1 br arttırmaya karar veren karar vericiler 1 brlik makine saatte artış için 3 br TL ödemeye razı olacaktır. Fırsat maliyeti 3 br TLdir; en iyi çözüme erişildiğinde kullanılabilir makine saatten 1 br daha az kullanılması durumunda 1 br TL daha az kar elde edilecektir.

Diğer kaynakların gölge fiyatı sıfır olduğundan bu kaynaklar boldur. Bu kaynaklarda artış yapılması durumunda optimum çözüme etki etmez.

c)Bol kaynaklardan kullanılan miktar ve bu kaynakların bolluk miktarı hakkında bilgi veriniz.

Optimal çözüm tablosunda $S_2=10$ $s_3=21$ $s_4=36$ olarak çözümde yer aldığından

1.tip ürün için 10birimlik talep kısıtında $s_2=10$ dir. 1.üründen hiç üretilmemiş ve 10 birim üretilebilir talep bulunmaktadır.

2.tip ürün için 30 birimlik talep kısıtında $s_3=21$ dir. 2.üründen 9 br üretilmiş ve 21 birim üretilebilir talep bulunmaktadır.

1.ve 2.tip üründen toplam 45 brimlik talep kısıtında $s_4=36$ dir. 2.üründen 9 br üretilmiş ve iki ürün toplamından üretilebilir 36 br talep bulunmaktadır.

PROBLEM 3 LINGO ÇÖZÜMÜ

Max=4*x1+6*x2;

3*X1+2*x2<=18;

X1<=10;

X2<=30;

X1+x2<=45;

X1>=0;

x2>=0;

END

Lingo 18.0 - [Solution Report - Lingo1]

File Edit Solver Window Help

Global optimal solution found.
Objective value: 54.00000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 0
Elapsed runtime seconds: 0.03

Model Class: LP

Total variables: 2
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0

Total constraints: 7
Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 10
Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	5.000000
X2	9.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	54.00000	1.000000
2	0.000000	3.000000
3	10.00000	0.000000
4	21.00000	0.000000
5	36.00000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	9.000000	0.000000

Lingo 18.0 Solver Status [Lingo1]

Solver Status

Model Class: LP

State: Global Opt

Objective: 54

Infeasibility: 0

Iterations: 0

Variables

Total: 2

Nonlinear: 0

Integers: 0

Constraints

Total: 7

Nonlinear: 0

Nonzeros

Total: 10

Nonlinear: 0

Generator Memory Used (K)

23

Elapsed Runtime (hh:mm:ss)

00:00:00

Extended Solver Status

Solver Type: - - -

Best Obj: - - -

Obj Bound: - - -

Steps: - - -

Active: - - -

Update Interval: 2

Interrupt Solver

Close

For Help, press F1

CAP

Ln