

Aprendizaje Automatizado

Tarea 1

PCIC - UNAM

20 de febrero de 2020

Diego de Jesús Isla López
(dislalopez@gmail.com)
(diego.isla@comunidad.unam.mx)

Ejercicio 1

Sabemos que de haber dos pelotas rojas, la probabilidad de sacar 3 veces una roja con reemplazo es 1. De igual forma, la probabilidad de que haya dos pelotas rojas es de 0.25; la probabilidad de que haya una de cada color es 0.5 y de que haya dos azules es 0.25.

Entonces:

A = Sacar tres rojas si todas son rojas

B_1 = que ambas sean rojas

B_2 = que haya una de cada color

B_3 = que ambas sean azules

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{16}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

Ejercicio 2

Tenemos los siguientes eventos:

A : que la playera sea roja

B : que la playera sea de talla grande

Calculamos la probabilidad como:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{3}{15}}{\frac{5}{15}} \\ &= \frac{3}{5} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Si aprueba Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que también apruebe Química?

$$P(Q|M) = \frac{P(Q)P(M)}{P(M)} = P(Q) = 70\%$$

¿Cuál es la probabilidad de que apruebe Matemáticas o Química?

Dado que ambos eventos no son mutuamente excluyentes, se calcula la probabilidad como:

$$P(Q \cup M) = P(Q) + P(M) - P(Q \cap M) = 0.6 + 0.7 - 0.5 = 0.8 = 80\%$$

¿Son M y Q independientes?

De ser independientes, se cumpliría que $P(Q \cap M) = P(Q) \cdot P(M)$, sin embargo:

$$\begin{aligned} P(Q \cap M) &\neq P(Q) \cdot P(M) \\ 0.5 &\neq 0.6 \cdot 0.7 \\ 0.5 &\neq 0.42 \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Se tienen los siguientes eventos:

$P(\text{el sistema diga que es una persona honrada}) = 95 \%$

$P(\text{el sistema diga que es un terrorista}) = 95 \%$

Se toma como hecho que hay un terrorista en el avión. Entonces:

$P(\text{ser escogido y ser terrorista}) = \frac{1}{100}$

La probabilidad de que la persona escogida sea realmente un terrorista es:

A : el sistema dijo que la persona es terrorista

B_1 : ser terrorista

B_2 : ser ciudadano honrado

Usando teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} \\ &= \frac{(0.95)(\frac{1}{100})}{(0.95)(\frac{1}{100}) + (0.05)(\frac{99}{100})} \\ &= 0.16 = 16 \% \end{aligned}$$

Ejercicio 5

A : Prueba salió positiva

B_1 : Paciente infectado

B_2 : Paciente no infectado

Usando teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum P(A|B_i)P(B_i)} \\
&= \frac{P(A|B_1)P(A)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} \\
&= \frac{(0.99)(\frac{1}{100})}{(0.99)(\frac{1}{100}) + (0.01)(\frac{99}{100})} \\
&= 0.0901 = 9.01 \%
\end{aligned}$$

Ejercicio 6

La probabilidad de que el último pasajero se siente en su lugar asignado es de 50 %.

Tomando como base el caso en el que solo hay dos pasajeros y dos asientos, la probabilidad de que el último pasajero se siente en su lugar correcto es de 50 %.

Para cualquier caso donde $n > 2$, si la primera persona en la fila se sienta en su lugar asignado, entonces todas las personas irán tomando su lugar asignado y la última persona podrá sentarse en el lugar correcto. Pero si la primera persona se sienta en un lugar que no le corresponde (por ejemplo, en el asiento de la persona 10 en la fila), entonces las personas 2 hasta la 9 pueden sentarse en su lugar correcto y la persona 10 tendrá que buscar un asiento libre. Entonces, la persona 10 podrá sentarse en el asiento de la persona 1 o en el asiento del último de la fila, lo cual da una probabilidad de 50 % de sentarse en cualquiera de dichos asientos. Si escoge alguno diferente, ocurrirá el mismo proceso de decisión para la nueva persona que tenga que buscar un asiento.

Ejercicio 7

Definimos la “carga” de la moneda como un valor que modifica la probabilidad de los eventos de la moneda. Por ejemplo, para cargar la moneda para que siempre caiga “sol” tenemos:

$$\begin{aligned}
P(S_c) &= \frac{1}{2} + x \\
P(A_c) &= \frac{1}{2} - x
\end{aligned}$$

Para ver que la apuesta sigue siendo justa, probemos primero el caso donde ambas monedas caen iguales:

$$\begin{aligned}
 P(\text{iguales}) &= P(S_j \cap S_c) + P(A \cap A_c) \\
 &= (P(S) \times P(S_c)) + (P(A_j) \times P(A_c)) \\
 &= \left(\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} + x\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - x\right)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right) \\
 &= \frac{2}{4} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Ahora, probemos la apuesta de que caerán diferentes:

$$\begin{aligned}
 P(\text{diferentes}) &= P(S \cap A_c) + P(A \cap S_c) \\
 &= (P(S) \times P(A_c)) + (P(A) \times P(S_c)) \\
 &= \left(\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - x\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} + x\right)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) \\
 &= \frac{2}{4} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

De esta manera, se puede ver que la carga no afecta las probabilidades de cada apuesta.

Ejercicio 8

A: Mujer prefiere perros

B: Hombre prefiere perros

C: Estudiante prefiera perros

$$P(A) = \frac{20}{20+26+6} = \frac{5}{13}$$

$$P(B) = \frac{36}{36+10+2} = \frac{3}{4}$$

$$P(C) = P(\text{ser mujer})P(A) + P(\text{ser hombre})P(B) = \frac{52}{100} \cdot \frac{5}{13} + \frac{48}{100} \cdot \frac{3}{4} = \frac{14}{25} = 0.56 = 56\%$$

Ejercicio 9

Nombramos los eventos de la siguiente manera:

A : elegir Matemáticas

B : elegir Física

C : elegir Química

Sabemos que $P(A) = P(B)$ y $P(C) = 2P(A)$. Entonces:

$$\begin{aligned}P(\Omega) &= P(A) + P(B) + P(C) \\&= P(A) + P(A) + 2(PA) \\&= 4P(A)\end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{1}{4} \\P(B) &= \frac{1}{4} \\P(C) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ejercicio 10

La probabilidad de ganar aumenta si el concursante decide cambiar de puerta. Esto es debido a que la probabilidad de elegir la puerta ganadora en el primer intento es de $\frac{1}{3}$. Sin embargo, al saber que una de las dos puertas disponibles no tiene el premio, la probabilidad correspondiente a dicha puerta (en este caso, la 3), se asigna a la puerta restante (la 2), por lo que esta última puerta tiene más probabilidad de esconder el premio ($\frac{2}{3}$).

Ejercicio 11

Para hacer el cálculo de la probabilidad del evento A' donde dos personas no comparten su cumpleaños, tenemos:

$$P(A') = \left(\frac{1}{365}\right)^n \cdot (365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 365 - (n - 1)) \quad (1)$$

donde n es el número total de personas. Por lo tanto, la probabilidad de que al menos dos personas compartan cumpleaños es $1 - P(A')$.

De esta manera, para el caso de $n = 10$ tenemos:

$$P(A') = \left(\frac{1}{365}\right)^{10} \cdot (365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 356) = 0.883 \quad (2)$$

por lo que la probabilidad de que al menos dos personas compartan cumpleaños de un total de 10 es:

$$1 - P(A') = 0.11694 \quad (3)$$

Para el caso de $n = 23$ tenemos:

$$P(A') = \left(\frac{1}{365}\right)^{23} \cdot (365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 341) = 0.493 \quad (4)$$

por lo que la probabilidad es:

$$1 - P(A') = 0.507 \quad (5)$$

Para el caso de $n = 50$ tenemos:

$$P(A') = \left(\frac{1}{365}\right)^{50} \cdot (365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 314) = 0.03 \quad (6)$$

por lo que la probabilidad es:

$$1 - P(A') = 0.97 \quad (7)$$

Finalmente, Para el caso de $n = 75$ tenemos:

$$P(A') = \left(\frac{1}{365}\right)^{75} \cdot (365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 289) = 0.003 \quad (8)$$

por lo que la probabilidad es:

$$1 - P(A') = 0.997 \quad (9)$$

Ejercicio 12

La probabilidad de cualquier evento al tirar dos dados es de $\frac{1}{36}$. De este modo:

$$P(\max\{a, b\} = 1) = P(\{1, 1\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(\max\{a, b\} = 2) = P(\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}) = 3\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{1}{12}$$

$$P(\max\{a, b\} = 3) = P(\{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}, \{3, 3\}) = 5\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{5}{36}$$

$$P(\max\{a, b\} = 4) = P(\{1, 4\}, \{4, 1\}, \{2, 4\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 4\}) = 7\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{7}{36}$$

$$P(\max\{a, b\} = 5) = P(\{1, 5\}, \{5, 1\}, \{2, 5\}, \{5, 2\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 5\}) = 9\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{9}{36}$$

$$P(\max\{a, b\} = 6) = P(\{1, 6\}, \{6, 1\}, \{2, 6\}, \{6, 2\}, \{6, 3\}, \{3, 6\}, \{6, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 6\}) = 11\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{11}{36}$$

Ejercicio 13

Demostración. Por definición de esperanza matemática de dos variables aleatorias independientes, se tiene que:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Entonces, dado que la covarianza para dos variables aleatorias está definida como $cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$, se sigue:

$$\begin{aligned} cov(XY) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 14

Se utiliza una distribución binomial para resolver este problema.

10, 20, 40 aciertos si el examen tiene 50 preguntas

Para 10 aciertos, tenemos:

$$\begin{aligned}b(10; 50; 0.2) &= \binom{50}{10} \times 0.2^{10} \times (1 - 0.2)^{50-10} \\&= \left(\frac{50!}{10! \times (50-10)!} \right) \times 0.2^{10} \times 0.8^{40} \\&= \left(\frac{50!}{10! \times (40)!} \right) \times 0.2^{10} \times 0.8^{40} \\&= \left(\frac{50!}{10! \times (40)!} \right) \times 0.2^{10} \times 0.8^{40} \\&= 0.13981900517\end{aligned}$$

Para 20 aciertos:

$$\begin{aligned}b(20; 50; 0.2) &= \binom{50}{20} \times 0.2^{20} \times (1 - 0.2)^{50-20} \\&= \left(\frac{50!}{20! \times (50-20)!} \right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{30} \\&= \left(\frac{50!}{20! \times (30)!} \right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{30} \\&= \left(\frac{50!}{20! \times (30)!} \right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{30} \\&= 0.00061177215\end{aligned}$$

Para 40 aciertos:

$$\begin{aligned}b(40; 50; 0.2) &= \binom{50}{40} \times 0.2^{40} \times (1 - 0.2)^{50-40} \\&= \left(\frac{50!}{40! \times (50-40)!} \right) \times 0.2^{40} \times 0.8^{10} \\&= \left(\frac{50!}{40! \times (10)!} \right) \times 0.2^{40} \times 0.8^{10} \\&= \left(\frac{50!}{40! \times (10)!} \right) \times 0.2^{40} \times 0.8^{10} \\&\approx 1.2 \times 10^{-19}\end{aligned}$$

10, 20, 40 aciertos si el examen tiene 40 preguntas

Para 10 aciertos:

$$\begin{aligned}b(10;40;0.2) &= \binom{40}{10} \times 0.2^{10} \times (1-0.2)^{40-10} \\&= \left(\frac{40!}{10! \times (40-10)!}\right) \times 0.2^{10} \times 0.8^{30} \\&= \left(\frac{40!}{10! \times (30)!}\right) \times 0.2^{10} \times 0.8^{30} \\&= \left(\frac{40!}{10! \times (30)!}\right) \times 0.2^{10} \times 0.8^{30} \\&= 0.10745373771\end{aligned}$$

Para 20 aciertos:

$$\begin{aligned}b(20;40;0.2) &= \binom{40}{20} \times 0.2^{20} \times (1-0.2)^{40-20} \\&= \left(\frac{40!}{20! \times (40-20)!}\right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{20} \\&= \left(\frac{40!}{20! \times (20)!}\right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{20} \\&= \left(\frac{40!}{20! \times (20)!}\right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{20} \\&= 0.00001666462\end{aligned}$$

Para 40 aciertos:

$$\begin{aligned}b(40;40;0.2) &= \binom{40}{40} \times 0.2^{40} \times (1-0.2)^{40-40} \\&= \left(\frac{40!}{40! \times (40-40)!}\right) \times 0.2^{40} \times 0.8^0 \\&= \left(\frac{40!}{40! \times (0)!}\right) \times 0.2^{40} \\&= \left(\frac{40!}{40!}\right) \times 0.2^{40} \\&= 0.2^{40} \\&\approx 1.1 \times 10^{-26}\end{aligned}$$

10, 20, 40 errores si el examen tiene 40 preguntas

Cambiando el enfoque a aciertos, tenemos 30, 20 y 0.

Para 30 aciertos:

$$\begin{aligned}b(30; 40; 0.2) &= \binom{40}{30} \times 0.2^{30} \times (1 - 0.2)^{40-30} \\&= \left(\frac{40!}{30! \times (40-30)!} \right) \times 0.2^{30} \times 0.8^{10} \\&= \left(\frac{40!}{30! \times (10)!} \right) \times 0.2^{30} \times 0.8^{10} \\&= \left(\frac{40!}{30! \times (10)!} \right) \times 0.2^{30} \times 0.8^{10} \\&\approx 9 \times 10^{-14}\end{aligned}$$

Para 20 aciertos:

$$\begin{aligned}b(20; 40; 0.2) &= \binom{40}{20} \times 0.2^{20} \times (1 - 0.2)^{40-20} \\&= \left(\frac{40!}{20! \times (40-20)!} \right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{20} \\&= \left(\frac{40!}{20! \times (20)!} \right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{20} \\&= \left(\frac{40!}{20! \times (20)!} \right) \times 0.2^{20} \times 0.8^{20} \\&= 0.00001666462\end{aligned}$$

Para 0 aciertos:

$$\begin{aligned}b(0; 40; 0.2) &= \binom{40}{0} \times 0.2^0 \times (1 - 0.2)^{40-0} \\&= \left(\frac{40!}{0! \times (40-0)!} \right) \times 0.8^{40} \\&= \left(\frac{40!}{40!} \right) \times 0.8^{40} \\&= 0.8^{40} \\&= 0.0001329228\end{aligned}$$

Ejercicio 15

Sabiendo que los datos tienen una distribución normal, se aplican las transformaciones z debido a que la media es diferente de 0 y la desviación estándar es diferente de 1.

Se encuentre entre 160cm y 180cm

Para el límite inferior tenemos:

$$\begin{aligned} z_{\min} &= \frac{160 - 169.83}{4.5} \\ &= -2.18\bar{4} \end{aligned}$$

Para el límite superior:

$$\begin{aligned} z_{\max} &= \frac{180 - 169.83}{4.5} \\ &= 2.26 \end{aligned}$$

Así, la probabilidad es:

$$P(z < 2.26) - P(z < -2.18) = 0.9881 - 0.0145 = 0.9736$$

Sea de al menos 150cm

Obteniendo el valor de z correspondiente, tenemos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{150 - 169.83}{4.5} \\ &= -4.407 \end{aligned}$$

Dado que buscamos la probabilidad de que la estatura sea mayor o igual a 150cm:

$$\begin{aligned} P(z < -4.407) &\approx 0 \\ 1 - P(z < -4.407) &\approx 1 - 0 \\ &\approx 1 \end{aligned}$$

Sea de máximo 180cm

Obteniendo el valor z asociado, se obtiene la probabilidad directamente de la tabla:

$$z = \frac{180 - 169.83}{4.5}$$

$$= 2.26$$

$$P(z < 2.26) = 0.9881$$

Sea mayor a 160cm

Obteniendo el valor z asociado, se obtiene la probabilidad complementaria ($1 - P(z)$):

$$z = \frac{160 - 169.83}{4.5}$$

$$= -2.18\bar{4}$$

$$P(z < -2.18) = 0.0145$$

Por lo tanto, la probabilidad es ($1 - 0.0145 = 0.9855$)

Sea menor a 190cm

Nuevamente obteniendo el valor z asociado, se obtiene la probabilidad directamente de la tabla:

$$z = \frac{190 - 169.83}{4.5}$$

$$= 4.4822$$

Entonces:

$$P(z < 4.4822) \approx 1$$

Ejercicio 16

Denotamos el evento de que llueva hoy como H y el evento de que llueva mañana como M.

Que llueva hoy o mañana

Dado que sabemos que la probabilidad de que no llueva ninguno de los dos días es 0.3, calculamos la probabilidad complemento:

$$1 - P(\overline{H} \cap \overline{M}) = 1 - 0.3 = 0.7 = 70\%$$

Que llueva hoy y mañana

Para calcular la probabilidad de ambos eventos, tenemos:

$$\begin{aligned}P(H \cup M) &= P(H) + P(M) - P(H \cap M) \\P(H \cup M) + P(H \cap M) &= P(H) + P(M) \\P(H \cap M) &= P(H) + P(M) - P(H \cup M)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}P(H \cap M) &= 0.6 + 0.5 - 0.7 \\&= 0.4\end{aligned}$$

Que llueva hoy pero no mañana

Utilizando la probabilidad encontrada en el punto anterior, tenemos:

$$P(H) - P(H \cap M) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

Que llueva hoy o mañana, pero no ambas

Con las probabilidades conocidas para el evento de que llueva en alguno de los dos días y para el evento de que llueva ambos días, tenemos:

$$P(H \cup M) - P(H \cap M) = 0.7 - 0.4 = 0.3 \quad (10)$$

Ejercicio 17

¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

Dado que el promedio para 100 horas es de 8 eventos, para 25 horas tenemos que el promedio es de $\lambda = 2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \\
 &= \frac{2e^{-2}}{1} \\
 &= 2e^{-2} \\
 &\approx 0.2711
 \end{aligned}$$

¿Cuál es la probabilidad de que fallen no más de 2 componentes en 50 horas?

En este caso, se tiene $\lambda = 4$. Se expresa como la suma de las probabilidades de que no falle ningún componente, que falle uno y que fallen dos:

$$\begin{aligned}
 P(x \leq 2) &= \sum_{n=0}^2 \frac{4^n e^{-4}}{n!} \\
 &= \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!} \\
 &= \frac{1e^{-4}}{1} + \frac{4e^{-4}}{1} + \frac{4^2 e^{-4}}{2} \\
 &= e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4} \\
 &\approx 0.238
 \end{aligned}$$

¿Cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos 10 en 125 horas?

En este caso, se tiene $\lambda = 10$. Se expresa como el complemento de la suma de las probabilidades de que no falle ningún componente hasta 9:

$$\begin{aligned}
 P(x \geq 10) &= 1 - P(x < 10) \\
 P(x < 10) &= \sum_{n=0}^9 \frac{10^n e^{-10}}{n!} \\
 &\approx 0.54207
 \end{aligned}$$

Ejercicio 18

La probabilidad de sacar un maestro la primera vez y un maestro la segunda vez se expresa como:

$$\frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{20}{182} = 0.1098$$

Ejercicio 19

Para escoger la primera partición, tenemos:

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12} \quad (11)$$

Para la segunda partición, tenemos:

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{36}{12} \quad (12)$$

Para la tercera partición:

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{24}{12} \quad (13)$$

La cuarta partición es igual a:

$$\binom{1}{1} \cdot \binom{12}{12} = 1 \quad (14)$$

Por lo tanto, la probabilidad total es:

$$\frac{4 \cdot \binom{48}{12} + 3 \cdot \binom{36}{12} + 2 \cdot \binom{24}{12}}{\binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13}} = 0.105 \quad (15)$$

Ejercicio 20

Dado que se sabe que si la persona sospechosa tiene la característica es culpable, entonces:

$$P(\text{culp}|\text{caract}) = \frac{P(\text{caract}|\text{culp})P(\text{culp})}{P(\text{caract}|\text{culp})P(\text{culp}) + P(\text{caract}|\text{inoc})P(\text{inoc})}$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{3}{5}}{1 \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5}}$$

$$= \frac{15}{17}$$