Lemma：A, B, C, D 是任意集合，则有：~~$(A\times C)\setminus(B\times D)$~~

$$(A\times C)\setminus(B\times D)=((A\setminus B)\times C)\cup(A\times(C\setminus D))$$

Proof：对 $\forall (x,y)\in$ 左，有：$(x,y)\in A\times C$ 且 $(x,y)\notin B\times D$

$\because (x,y)\notin B\times D$ $\quad\therefore x\notin B$ 或 $y\notin D$.

若 $x\notin B$，则有：$x\in A\setminus B$ 且 $y\in C$ $\quad\therefore (x,y)\in(A\setminus B)\times C$ $\quad\therefore (x,y)\in$ 右

若 $y\notin D$，则有：$x\in A$ 且 $y\in C\setminus D$ $\quad\therefore (x,y)\in A\times(C\setminus D)$ $\quad\therefore (x,y)\in$ 右

$\therefore (x,y)\in$ 右 $\quad\therefore$ 左 $\subseteq$ 右

对 $\forall (x,y)\in$ 右，有：$(x,y)\in(A\setminus B)\times C$ 或 $(x,y)\in A\times(C\setminus D)$

若 $(x,y)\in(A\setminus B)\times C$，则有：$x\in A$ 且 $x\notin B$ 且 $y\in C$

$\therefore (x,y)\in A\times C$ 且 $(x,y)\notin B\times D$ $\quad\therefore (x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times D)$ $\quad\therefore (x,y)\in$ 左

若 $(x,y)\in A\times(C\setminus D)$，则有：$x\in A$ 且 $y\in C$ 且 $y\notin D$

$\therefore (x,y)\in A\times C$ 且 $(x,y)\notin B\times D$ $\quad\therefore (x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times D)$ $\quad\therefore (x,y)\in$ 左

$\therefore (x,y)\in$ 左 $\quad\therefore$ 右 $\subseteq$ 左 $\quad\therefore$ 左 $=$ 右 $\quad\square$

乘积空间，可分性

Lemma（乘积空间的开集，闭集）(X_1, d_1) 和 (X_2, d_2) 是度量空间，则有：

① 对 $\forall (X_1, d_1)$ 的开集 G_1，$\forall (X_2, d_2)$ 的开集 G_2，有：$G_1 \times G_2$ 是 $(X_1 \times X_2, d)$ 的开集

② 对 $\forall (X_1, d_1)$ 的闭集 F_1，$\forall (X_2, d_2)$ 的闭集 F_2，有：$F_1 \times F_2$ 是 $(X_1 \times X_2, d)$ 的闭集

③ 对 $\forall (X_1 \times X_2, d)$ 的开集 G，$\forall (x_1, x_2) \in G$，$\exists r \in \mathbb{R}_{>0}$，s.t.

$$B_r(x_1; d_1) \times B_r(x_2; d_2) \subseteq G$$

Proof：① $\because G_1 \subseteq X_1$，$G_2 \subseteq X_2$ $\quad\therefore G_1 \times G_2 \subseteq X_1 \times X_2$

对 $\forall (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$，$\because x_1 \in G_1$，$G_1$ 是 (X_1, d_1) 的开集

$\therefore \exists r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$，s.t. $B_{r_1}(x_1; d_1) \subseteq G_1$

$\because x_2 \in G_2$，G_2 是 (X_2, d_2) 的开集 $\therefore \exists r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$，s.t. $B_{r_2}(x_2; d_2) \subseteq G_2$

$\because r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ 且 $r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\quad\therefore \min\{r_1, r_2\} \in \mathbb{R}_{>0}$.

任取 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，s.t. $\varepsilon < \min\{r_1, r_2\}$，则有：$B_\varepsilon((x_1, x_2); d) \subseteq G_1 \times G_2$

（对 $\forall (\lambda, \mu) \in B_\varepsilon((x_1, x_2); d)$，有：$(\lambda, \mu) \in X_1 \times X_2$，$d((x_1, x_2), (\lambda, \mu)) < \varepsilon$.

$\because \lambda \in X_1$，$d_1(x_1, \lambda) \leqslant d_1(x_1, \lambda) + d_2(x_2, \mu) = d((x_1, x_2), (\lambda, \mu)) < \varepsilon < r_1$

$\therefore \lambda \in B_{r_1}(x_1; d_1) \subseteq G_1$

$\because \mu \in X_2$，$d_2(x_2, \mu) \leqslant d_1(x_1, \lambda) + d_2(x_2, \mu) = d((x_1, x_2), (\lambda, \mu)) < \varepsilon < r_2$

$\therefore \mu \in B_{r_2}(x_2; d_2) \subseteq G_2$

$\therefore (\lambda, \mu) \in G_1 \times G_2$ $\quad\therefore B_\varepsilon((x_1, x_2); d) \subseteq G_1 \times G_2$ ）

$\therefore G_1 \times G_2$ 是 $(X_1 \times X_2, d)$ 的开集.

② $\because F_1$是(X_1,d_1)的闭集 $\therefore X_1\setminus F_1$是$(X_1,d_1)$的开集

$\because F_2$是(X_2,d_2)的闭集 $\therefore X_2\setminus F_2$是$(X_2,d_2)$的开集

$\because F_1\times F_2\subseteq X_1\times X_2$，且有：

$(X_1\times X_2)\setminus(F_1\times F_2)=\big((X_1\setminus F_1)\times X_2\big)\cup\big(X_1\times(X_2\setminus F_2)\big)$是$(X_1\times X_2,d)$的开集

$\therefore F_1\times F_2$是$(X_1\times X_2,d)$的闭集

③ $\because G$是$(X_1\times X_2,d)$的开集，$(x_1,x_2)\in G$

$\therefore \exists\,\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B_\varepsilon((x_1,x_2);d)\subseteq G$

$\because \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ $\therefore \frac{\varepsilon}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$ 任取$r\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $r<\frac{\varepsilon}{2}$. 则有：

$B_r(x_1;d_1)\times B_r(x_2;d_2)\subseteq G$

(对$\forall(\lambda,\mu)\in B_r(x_1;d_1)\times B_r(x_2;d_2)$，有：$\lambda\in B_r(x_1;d_1)$且$\mu\in B_r(x_2;d_2)$

$\because \lambda\in B_r(x_1;d_1)$ $\therefore \lambda\in X_1$，且$d_1(x_1,\lambda)<r$

$\because \mu\in B_r(x_2;d_2)$ $\therefore \mu\in X_2$，且$d_2(x_2,\mu)<r$

$\therefore (\lambda,\mu)\in X_1\times X_2$，且$d((x_1,x_2),(\lambda,\mu))=d_1(x_1,\lambda)+d_2(x_2,\mu)<r+r=2r<\varepsilon$

$\therefore (\lambda,\mu)\in B_\varepsilon((x_1,x_2);d)\subseteq G$

$\therefore B_r(x_1;d_1)\times B_r(x_2;d_2)\subseteq G$) $\square$

Lemma（开集与闭集的对偶）(X,d)是度量空间，$A\subseteq X$，则有：

~~① A是开集 $\Longleftrightarrow$ X\A是闭~~

① A是(X,d)的开集 $\Longleftrightarrow X\setminus A$是$(X,d)$的闭集

② A是(X,d)的闭集 $\Longleftrightarrow X\setminus A$是$(X,d)$的开集

Proof: $\because A \subseteq X$

$\therefore X\setminus(X\setminus A) = (X\setminus X)\cup(X\cap A) = \emptyset\cup(X\cap A) = X\cap A = A$

$\therefore$ A是(X,d)的开集 $\Longleftrightarrow$ $X\setminus(X\setminus A)$是(X,d)的开集

$\Longleftrightarrow$ $X\setminus A$是(X,d)的闭集

A是(X,d)的闭集 $\Longleftrightarrow$ $X\setminus A$是(X,d)的开集. $\square$

定义(稠密子集，可分度量空间)(X,d)是度量空间，$E\subseteq X$. 若$\mathrm{cl}E=X$，则称度量空间(X,d)的子集E为稠密的. 如果度量空间(X,d)有可数的稠密子集，则称(X,d)是可分度量空间.

Lemma: (X,d)是度量空间，$E\subseteq X$，则有:

E是(X,d)的稠密子集 $\Longleftrightarrow$ 对$\forall x\in X$，$\forall r\in\mathbb{R}_{>0}$，$B(x;r)\cap E\neq\emptyset$.

Proof: E是(X,d)的稠密子集

$\Longleftrightarrow \mathrm{cl}E = X$

$\Longleftrightarrow X\subseteq \mathrm{cl}E$

$\Longleftrightarrow$ 对$\forall x\in X$，有: $x\in\mathrm{cl}E$

$\Longleftrightarrow$ 对$\forall x\in X$，有: 对$\forall r\in\mathbb{R}_{>0}$，$B(x;r)\cap E\neq\emptyset$

$\Longleftrightarrow$ 对$\forall x\in X$，$\forall r\in\mathbb{R}_{>0}$，$B(x;r)\cap E\neq\emptyset$. $\square$

例: (X,d)是度量空间，$X\subseteq X$. $\mathrm{cl}X\subseteq X\subseteq \mathrm{cl}X$ $\therefore \mathrm{cl}X = X$

$\therefore X$是度量空间(X,d)的稠密子集.

例: X是任意非空集合，d是X上的离散度量，则有: X是度量空间(X,d)的唯一稠密子集.

Proof: 已经证明了: X是度量空间(X,d)的稠密子集.

对$\forall E\subseteq X$. 若E是度量空间(X,d)的稠密子集, 则有: $\mathrm{cl}E=X$.

$\therefore$ 对$\forall x\in X$, 有: $x\in \mathrm{cl}E$.

$\therefore$ 对于$\frac{1}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$, 有: $B(x;\frac{1}{2})\cap E\neq\emptyset$.

$$\because B(x;\tfrac{1}{2})=\{\lambda\in X:\ d(x,\lambda)<\tfrac{1}{2}\}$$
$$=\{\lambda\in X:\ d(x,\lambda)=0\}$$
$$=\{\lambda\in X:\ x=\lambda\}=\{\lambda\in X:\ \lambda=x\}=\{x\}$$

$\therefore \{x\}\cap E\neq\emptyset$ $\quad\therefore x\in E$ $\quad\therefore X\subseteq E$ $\quad\therefore E=X$ $\quad\square$