Lemma: A是任意的非空集合，对$\forall\, \alpha \in A$，有：$\alpha \subseteq \bigcup A$

Proof: 对$\forall\, \alpha \in A$，有：

对$\forall\, \lambda \in \alpha$，有： $\because \alpha \in A$，$\lambda \in \alpha$ $\therefore \lambda \in \bigcup A$ $\therefore \alpha \subseteq \bigcup A$

$\square$

Lemma: A是任意的非空集合，B是任意的集合，对$\forall\, \alpha \in A$，有：$\alpha \subseteq B$.

则有：$\bigcup A \subseteq B$

Proof: 对$\forall\, \lambda \in \bigcup A$，有：

$\because \lambda \in \bigcup A$ $\therefore \exists\, \alpha \in A$, s.t. $\lambda \in \alpha$.

$\because \alpha \in A$ $\therefore \alpha \subseteq B$ $\because \lambda \in \alpha$, $\alpha \subseteq B$ $\therefore \lambda \in B$

$\therefore \bigcup A \subseteq B$. $\square$

内部，闭包

例：$\mathbb{R}$在绝对值 $d(x,y)=|x-y|$，$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 下是度量空间，则有：

① $\operatorname{cl}\mathbb{Q}=\mathbb{R}$

② $\operatorname{int}\mathbb{Q}=\varnothing$

③ $\operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}$

④ $\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\varnothing$

⑤ $\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}$

⑥ $\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}$

proof：$(\mathbb{R},d)$是度量空间，$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$，则有：$\operatorname{cl}\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

对$\forall x\in\mathbb{R}$，有：对$\forall r\in\mathbb{R}_{>0}$，$B(x;r)\cap\mathbb{Q}=(x-r,x+r)\cap\mathbb{Q}\neq\varnothing$

$\therefore x\in\operatorname{cl}\mathbb{Q}$ $\therefore \mathbb{R}\subseteq\operatorname{cl}\mathbb{Q}$ $\therefore \operatorname{cl}\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ ①得证.

$\because(\mathbb{R},d)$是度量空间，$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ $\therefore \operatorname{int}\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

假设 $\operatorname{int}\mathbb{Q}\neq\varnothing$. 则有：$\exists x_0\in\mathbb{R}$，s.t. $x_0\in\operatorname{int}\mathbb{Q}$

$\therefore \exists r_0\in\mathbb{R}_{>0}$，s.t. $B(x_0;r_0)\subseteq\mathbb{Q}$ $\because B(x_0;r_0)=(x_0-r_0,x_0+r_0)\not\subseteq\mathbb{Q}$

$\therefore$ 矛盾. $\therefore \operatorname{int}\mathbb{Q}=\varnothing$. ②得证.

$\because(\mathbb{R},d)$是度量空间，$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ $\therefore \operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}$，$\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}$

对$\forall x\in\mathbb{R}$，有：对$\forall r\in\mathbb{R}_{>0}$，$B(x;r)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=(x-r,x+r)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\neq\varnothing$

$\therefore x\in\operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ $\therefore \mathbb{R}\subseteq\operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ $\therefore \operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}$ ③得证.

假设 $\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\neq\varnothing$，则有：$\exists x_0\in\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ $\therefore x_0\in\mathbb{R}$

$\therefore \exists r_0\in\mathbb{R}_{>0}$，s.t. $B(x_0;r_0)\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\because B(x_0;r_0)=(x_0-r_0,x_0+r_0)\not\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\therefore$ 矛盾. $\therefore \operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\varnothing$. ④得证.

$\therefore \partial\mathbb{Q}=\operatorname{cl}\mathbb{Q}\cap\operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$.

$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))=\operatorname{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\operatorname{cl}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$. $\square$ 1

Remark: $\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\{x:\ x\in\mathbb{R}$ 且 $x\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$

$=\{x:\ x\in\mathbb{R}$ 且 $(x\notin\mathbb{R}$ 或 $x\in\mathbb{Q})\}$

$=\{x:\ x\in\mathbb{R}$ 且 $x\in\mathbb{Q}\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

A,B 是任意的集合，则有：$A\setminus(A\setminus B)=\{x:\ x\in A$ 且 $x\notin A\setminus B\}$

$=\{x:\ x\in A$ 且 $(x\notin A$ 或 $x\in B)\}$

$=\{x:\ x\in A$ 且 $x\in B\}=A\cap B$

Lemma（开球的闭包含于闭球）(X,d) 是度量空间，对 $\forall\, x\in X$，$\forall\, r>0$，有：

$$cl(B(x;r))\subseteq\overline{B}(x;r)$$

Proof：对 $\forall\,\lambda\in cl(B(x;r))$，有：$\lambda\in X$.

假设 $\lambda\notin\overline{B}(x;r)$，则有：$d(x,\lambda)>r$

$\because d(x,\lambda)>r$ $\quad\therefore d(x,\lambda)-r>0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}(d(x,\lambda)-r)>0$

任取 $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，满足 $\varepsilon<\frac{1}{2}(d(x,\lambda)-r)$

$\because \lambda\in cl(B(x;r))$ $\quad\therefore$ 对于 $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，有：$B(\lambda;\varepsilon)\cap B(x;r)\neq\emptyset$

$\therefore \exists\,\alpha\in B(\lambda;\varepsilon)\cap B(x;r)$ $\quad\therefore \alpha\in X$，且有 $d(\lambda,\alpha)<\varepsilon$，$d(x,\alpha)<r$

$$\therefore d(x,\lambda)\leqslant d(x,\alpha)+d(\alpha,\lambda)=d(x,\alpha)+d(\lambda,\alpha)<r+\varepsilon$$

$$<r+\frac{1}{2}(d(x,\lambda)-r)=r+\frac{1}{2}d(x,\lambda)-\frac{1}{2}r$$

$$=\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}d(x,\lambda)$$

$\therefore \frac{1}{2}d(x,\lambda)<\frac{1}{2}r$ $\quad\therefore d(x,\lambda)<r$ $\quad\therefore r<d(x,\lambda)<r$

矛盾. $\quad\therefore \lambda\in\overline{B}(x;r)$ $\quad\therefore cl(B(x;r))\subseteq\overline{B}(x;r)$ $\quad\square$

Lemma（集合的闭包是包含该集合的最小闭集）(X,d) 是度量空间，$A\subseteq X$，$B\subseteq X$ 且 B 是 (X,d) 的闭集，$A\subseteq B$，则有：$clA\subseteq B$

Proof：$\because$ B 是 (X,d) 的闭集且 $A\subseteq B$

$\therefore$ $B\in\{F: F$ 是 (X,d) 的闭集且 $A\subseteq F\}$

$\because$ X 是 (X,d) 的闭集且 $A\subseteq X$

$\therefore$ $X\in\{F: F$ 是 (X,d) 的闭集且 $A\subseteq F\}$

$\therefore$ $\{F: F$ 是 (X,d) 的闭集且 $A\subseteq F\}\neq\emptyset$

$\therefore$ $clA=\bigcap\{F: F$ 是 (X,d) 的闭集且 $A\subseteq F\}\subseteq B$ $\square$

Lemma（集合的内部是含于该集合的最大开集）(X,d) 是度量空间，$A\subseteq X$，$B\subseteq X$ 且 B 是 (X,d) 的开集，$B\subseteq A$，则有：$B\subseteq intA$

proof：$\because$ $\emptyset$ 是 (X,d) 的开集且 $\emptyset\subseteq A$

$\therefore$ $\emptyset\in\{G: G$ 是 (X,d) 的开集且 $G\subseteq A\}$

$\therefore$ $\{G: G$ 是 (X,d) 的开集且 $G\subseteq A\}\neq\emptyset$

$\because$ B 是 (X,d) 的开集且 $B\subseteq A$

$\therefore$ $B\in\{G: G$ 是 (X,d) 的开集且 $G\subseteq A\}$

$\therefore$ $B\subseteq\bigcup\{G: G$ 是 (X,d) 的开集且 $G\subseteq A\}=intA$ $\square$

例（开球的闭包不等于闭~~集~~球的例子）. ~~$X=\{(0,0)\}\cup\{(a,b)\}^2$~~

$X=\{(0,0)\}\cup\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a^2+b^2=1\}$. $X\subseteq\mathbb{R}^2$，取 d 为 $\mathbb{R}^2$ 上通常的欧氏距离 ~~$d(x,y)$~~ $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

则有：(X,d) 是度量空间.

考虑 (X,d) 中的开球 $B((0,0);1)$

$\because B((0,0);1)=\{(x,y)\in X : d((0,0),(x,y))<1\}$

$$=\{(x,y)\in X : \sqrt{x^2+y^2}<1\}=\{(0,0)\}$$

$$\overline{B}((0,0);1)=\{(x,y)\in X : d((0,0),(x,y))\leq 1\}$$

$$=\{(x,y)\in X : \sqrt{x^2+y^2}\leq 1\}=X$$

$\because B((0,0);1)\subseteq X \qquad \therefore cl(B((0,0);1))\subseteq X$

对于 $(0,0)\in X$，对 $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$B((0,0);\varepsilon)\cap B((0,0);1)\neq\phi$

（因为 $(0,0)\in B((0,0);\varepsilon)\cap B((0,0);1)$ ）

$\therefore (0,0)\in cl(B((0,0);1))$

对 $\forall(a,b)\in X$ 满足 $a^2+b^2=1$，存在 $\frac{1}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$，s.t.

$B((a,b);\frac{1}{2})\cap B((0,0);1)=\phi \qquad \therefore (a,b)\notin cl(B((0,0);1))$

（ $\because B((0,0);1)=\{(0,0)\}$,

$\because (0,0)\in X$, $d((a,b),(0,0))=\sqrt{a^2+b^2}=1>\frac{1}{2}$

$\therefore (0,0)\notin B((a,b),\frac{1}{2})$

$\therefore B((a,b);\frac{1}{2})\cap B((0,0);1)=\phi$ ）

$\therefore cl(B((0,0);1)) = \{(0,0)\} = B((0,0);1)$

$\therefore cl(B((0,0);1)) \subsetneq \overline{B}((0,0);1)$ $\square$