度量空间中的序列收敛

定义（度量空间中的序列）（于品数分讲义中称为点列）(X,d)是一个任意的度量空间，(X,d)中的一个任意的点列就是$\mathbb{Z}_{\geq 1}\to X$的一个映射f：

$$f:\mathbb{Z}_{\geq 1}\longrightarrow X$$
$$n\longmapsto f(n)=x_n$$

记上述由映射f确定的点列为$\{x_n\}_{n\geq 1}$

Remark：度量空间(X,d)中的点列也可以是$\mathbb{Z}_{\geq 0}\to X$的映射或$\mathbb{Z}_{\geq 2}\to X$的映射，没有本质区别。

定义（度量空间中点列的极限）(X,d)是度量空间，$\{x_n\}_{n\geq 1}$是(X,d)中点的序列，如果存在$x\in X$，使得对$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$\exists N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，使得对$\forall n\geq N$，都有$d(x_n,x)<\varepsilon$，那么就称点列$\{x_n\}_{n\geq 1}$在$(X,d)$中有极限，$x\in X$是点列$\{x_n\}_{n\geq 1}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.

例：(X,d)是离散度量空间，$\{x_n\}_{n\geq 1}$是X中的一个点列，则有：

$$\exists x\in X,\ s.t.\ \lim_{n\to+\infty}x_n=x \iff \exists N\in\mathbb{Z}_{\geq 1},\ s.t.\ 对\forall n\geq N，有：x_n=x$$

Proof：$(\Rightarrow)$：$\because \exists x\in X$，s.t. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$

$\therefore$ 对于$\frac{1}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$，$\exists N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，s.t. 对$\forall n\geq N$，有$d(x_n,x)<\frac{1}{2}$

$\therefore$ 对$\forall n\geq N$，有：$d(x_n,x)=0$

$\therefore$ 对$\forall n\geq N$，有：$x_n=x$

$(\Leftarrow)$：对$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，对$\forall n\geq N$，有：$d(x_n,x)=d(x,x)=0<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. $\square$

例：(X_1,d_1)和(X_2,d_2)是两个度量空间，$\{(x_n^{(1)},x_n^{(2)})\}_{n\geq 1}$是$(X_1\times X_2,d)$中的一个点列，$(x^{(1)},x^{(2)})\in X_1\times X_2$，则有：

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n^{(1)},x_n^{(2)})=(x^{(1)},x^{(2)}) \iff \lim_{n\to+\infty}x_n^{(1)}=x^{(1)} \text{ 且 } \lim_{n\to+\infty}x_n^{(2)}=x^{(2)}$$

Proof：$(\Rightarrow)$：对$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，

$\because \lim_{n\to+\infty}(x_n^{(1)},x_n^{(2)})=(x^{(1)},x^{(2)})$ $\therefore \exists N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，对$\forall n\geq N$，有：

$$d((x_n^{(1)},x_n^{(2)}),(x^{(1)},x^{(2)}))<\varepsilon$$

$\therefore$ 对$\forall n\geq N$，有：
$$d_1(x_n^{(1)},x^{(1)})\leq d_1(x_n^{(1)},x^{(1)})+d_2(x_n^{(2)},x^{(2)}) = d((x_n^{(1)},x_n^{(2)}),(x^{(1)},x^{(2)}))<\varepsilon$$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}x_n^{(1)}=x^{(1)}$

$\therefore$ 对$\forall n\geq N$，有：
$$d_2(x_n^{(2)},x^{(2)})\leq d_1(x_n^{(1)},x^{(1)})+d_2(x_n^{(2)},x^{(2)}) = d((x_n^{(1)},x_n^{(2)}),(x^{(1)},x^{(2)}))<\varepsilon$$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}x_n^{(2)}=x^{(2)}$ $\therefore \lim_{n\to+\infty}x_n^{(1)}=x^{(1)}$ 且 $\lim_{n\to+\infty}x_n^{(2)}=x^{(2)}$

$(\Leftarrow)$：对$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，

$\because \lim_{n\to+\infty}x_n^{(1)}=x^{(1)}$，$\frac{\varepsilon}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$ $\therefore \exists N_1\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，对$\forall n\geq N_1$，有：$d_1(x_n^{(1)},x^{(1)})<\frac{\varepsilon}{2}$

$\because \lim_{n\to+\infty}x_n^{(2)}=x^{(2)}$，$\frac{\varepsilon}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$ $\therefore \exists N_2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，对$\forall n\geq N_2$，有：$d_2(x_n^{(2)},x^{(2)})<\frac{\varepsilon}{2}$

任取$N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，满足$N>\max\{N_1,N_2\}$，对$\forall n\geq N$，有：

$$d((x_n^{(1)},x_n^{(2)}),(x^{(1)},x^{(2)}))=d_1(x_n^{(1)},x^{(1)})+d_2(x_n^{(2)},x^{(2)})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}(x_n^{(1)},x_n^{(2)})=(x^{(1)},x^{(2)})$ $\square$

Lemma (用点列的极限来刻画闭集) (X,d) 是度量空间，$F\subseteq X$，则有：

F 是 (X,d) 的闭集 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall$ F 中的点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$，则有 $x\in F$

Proof：$(\Longrightarrow)$：对 $\forall$ F 中的点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$，则有：

假设 $x\notin F$，则 $\because$ $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 F 中的点列，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ $\quad\therefore x\in X \quad \therefore x\in X\setminus F$

$\because$ F 是 (X,d) 的闭集 $\quad\therefore$ $X\setminus F$ 是 (X,d) 的开集

$\because x\in X\setminus F \quad \therefore \exists r\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B(x;r)\subseteq X\setminus F$

$\because \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$，$r\in\mathbb{R}_{>0}$ $\quad\therefore \exists N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，对 $\forall n\geq N$，有：$d(x_n,x)<r$

$\therefore$ 对 $\forall n\geq N$，有：$x_n\in B(x;r)\subseteq X\setminus F$. 这与 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 F 中的点列矛盾.

$\therefore x\in F$

$(\Longleftarrow)$：$\because$ (X,d) 是度量空间，$F\subseteq X$ $\quad\therefore F\subseteq \mathrm{cl}F$

对 $\forall x\in \mathrm{cl}F$，有：对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，有：$\frac{1}{n}\in\mathbb{R}_{>0}$

$\because x\in\mathrm{cl}F$，$\frac{1}{n}\in\mathbb{R}_{>0}$ $\quad\therefore B(x;\frac{1}{n})\cap F\neq\emptyset$.

$\therefore \exists x_n\in B(x;\frac{1}{n})\cap F \quad \therefore x_n\in B(x;\frac{1}{n})$ 且 $x_n\in F$

$\cancel{x_n\in}$ $\because$ 对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，$x_n\in F$ $\quad\therefore$ $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 F 中的点列

对 $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，取 $N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足 $N>\frac{1}{\varepsilon}$ $\quad\therefore \frac{1}{N}<\varepsilon$

对 $\forall n\geq N$，有：$\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$ $\quad\therefore d(x_n,x)<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \quad \therefore x\in F \quad \therefore \mathrm{cl}F\subseteq F \quad \therefore F=\mathrm{cl}F$

$\therefore$ F 是 (X,d) 的闭集 $\quad\square$

定义（度量空间中子集的极限点）(X,d) 是度量空间，$A\subseteq X$，$x\in X$。

若对 $\forall\, \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$\exists\, a\in B(x;\varepsilon)\cap A$ 满足 $a\neq x$，则称 x 是 A 的极限点。

若 x 不是 A 的极限点，且 $x\in A$，则称 x 是 A 的孤立点。

例：取 $\mathbb{R}$ 上的度量为通常的绝对值 $d(x,y)=|x-y|$，$\forall\, x,y\in\mathbb{R}$。

$A=(0,1)\cup\{2\}$。则有：A 的所有极限点组成的集合为 $[0,1]$。

A 的所有孤立点组成的集合为 $\{2\}$。

Proof：对 $\forall\, x\in[0,1]$，有：$x\in\mathbb{R}$。

对 $\forall\, \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$B(x;\varepsilon)=\{\lambda\in\mathbb{R}: d(x,\lambda)<\varepsilon\}=\{\lambda\in\mathbb{R}: |\lambda-x|<\varepsilon\}$

$=\{\lambda\in\mathbb{R}: -\varepsilon<\lambda-x<\varepsilon\}=\{\lambda\in\mathbb{R}: x-\varepsilon<\lambda<x+\varepsilon\}=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$（开区间）

当 $x=0$ 时，有如下的示意图：

$\because\ x+\varepsilon=0+\varepsilon=\varepsilon>0$ $\quad\therefore\ B(x;\varepsilon)\cap A=(0,x+\varepsilon)$

$\therefore\ \exists\, a\in B(x;\varepsilon)\cap A$ 满足 $a\neq x$。

当 x 为其他值时，类似地可证 $\exists\, a\in B(x;\varepsilon)\cap A$ 满足 $a\neq x$。

$\therefore$ x 是 A 的极限点。

对 $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$，若 $x\neq 2$，则 $\exists$ 充分小的 $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，s.t. $B(x;\varepsilon)\cap A=\emptyset$

$\therefore$ x 不是 A 的极限点。

若 $x=2$，则 $\exists$ 充分小的 $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，s.t. $B(x;\varepsilon)\cap A=\{2\}$ 而 $2=x$。

$\therefore$ x 不是 A 的极限点。

$\therefore$ A 的所有极限点组成的集合为 $[0,1]$

$\therefore$ A 的所有孤立点组成的集合为 $\{2\}$。 $\square$

定义(点列的子列) (X,d) 是度量空间，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 X 中的一个点列，则有：
对 $\forall n_1, n_2, \cdots \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$n_1 < n_2 < \cdots$，$\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 是 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 的一个子列.

Lemma：(X,d) 是度量空间，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 X 中的一个点列，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$，$x\in X$.
则有：对 $\forall \{x_n\}_{n\geq 1}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$，有：$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$.

Proof：对 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，

$\because \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ $\quad\therefore \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，对 $\forall n \geq N$，有：$d(x_n, x) < \varepsilon$

$\therefore$ 对 $\forall k \geq N$，有：$n_k \geq k \geq N$ $\quad\therefore d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$. $\quad\square$

Remark：$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是序列，$\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 是 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 的任一子列，则有：对 $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，
$n_k \geq k$

Proof：$\because 1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$，$n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$\therefore n_1 \geq 1$，$n_2 \geq 2$，$\cdots$，$n_k \geq k$，$\cdots$ $\quad\square$

Lemma：(X,d) 是度量空间，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 X 中的一个点列，$x\in X$，则有：

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \iff \lim_{k\to+\infty} x_{2k} = x \text{ 且 } \lim_{k\to+\infty} x_{2k-1} = x$$

Proof：$(\Rightarrow)$：由上一引理立得.

$(\Leftarrow)$：对 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，

$\because \lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k} = x$ $\quad\therefore \exists K_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，对 $\forall k \geq K_1$，有：$d(x_{2k}, x) < \varepsilon$

$\because \lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k-1} = x$ $\quad\therefore \exists K_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，对 $\forall k \geq K_2$，有：$d(x_{2k-1}, x) < \varepsilon$

$\therefore$ 任取 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，s.t. $N > \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$，对 $\forall n > N$，有：

① 若 n 为偶数，则：$\because n>N$，$N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ $\therefore n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$

$\because n$ 为偶数 $\therefore \exists \lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, s.t. $n=2\lambda$

$\therefore 2\lambda = n > N > \max\{2K_1, 2K_2-1\} \geq 2K_1$ $\therefore \lambda \geq K_1$

$\therefore d(x_n, x) = d(x_{2\lambda}, x) < \varepsilon$

② 若 n 为奇数，则：$\because n>N$，$N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ $\therefore n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$

$\because n$ 为奇数 $\therefore \exists \mu\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, s.t. $n=2\mu-1$

$\therefore 2\mu-1 = n > N > \max\{2K_1, 2K_2-1\} \geq 2K_2-1$ $\therefore \mu \geq K_2$

$\therefore d(x_n, x) = d(x_{2\mu-1}, x) < \varepsilon$

$\therefore d(x_n, x) < \varepsilon$

$\therefore \lim_{n\to+\infty} x_n = x$ $\square$

定义（度量空间中子集的极限点，另一表述）(X,d) 是度量空间，$A\subseteq X$，$x\in X$，若对 $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$B(x;\varepsilon)\cap(A\backslash\{x\})\neq\emptyset$，则称 x 是 A 的极限点.

Remark: $\exists a\in B(x;\varepsilon)\cap A$ 满足 $a\neq x$ $\Longleftrightarrow$ $B(x;\varepsilon)\cap(A\backslash\{x\})\neq\emptyset$

Proof: $(\Rightarrow)$: $\because \exists a\in B(x;\varepsilon)\cap A$ 满足 $a\neq x$

$\therefore a\in B(x;\varepsilon)$，$a\in A$，$a\notin\{x\}$

$\therefore a\in B(x;\varepsilon)$ 且 $a\in A\backslash\{x\}$

$\therefore B(x;\varepsilon)\cap(A\backslash\{x\})\neq\emptyset$

$(\Leftarrow)$: $\because B(x;\varepsilon)\cap(A\backslash\{x\})\neq\emptyset$

$\therefore \exists a\in B(x;\varepsilon)\cap(A\backslash\{x\})$

$\therefore a\in B(x;\varepsilon)$ 且 $a\in A\backslash\{x\}$

$\therefore a\in B(x;\varepsilon)$ 且 $a\in A$ 且 $a\neq x$

$\therefore a\in B(x;\varepsilon)\cap A$ 且 $a\neq x$. $\square$