Equivalence of metrics

记号：(X,d)是度量空间，对$\forall x\in X$，$\forall r\in\mathbb{R}_{>0}$，以$x$为中心，$r$为半径的开球记为：$B_r(x;d):=B(x;r)=\{\lambda\in X:d(x,\lambda)<r\}$.

定理（连续映射的刻画）X和Y都是拓扑空间，$f:X\to Y$是一个映射，则以下各条件互相等价：

① f是连续映射

② Y的任一开集在f下的原像是X的开集

③ Y的任一闭集在f下的原像是X的闭集.

定义（同胚）X和Y都是拓扑空间，$f:X\to Y$是一个映射. 如果$f:X\to Y$是一一对应，并且$f:X\to Y$及其逆$f^{-1}:Y\to X$都是连续的，则称$f:X\to Y$是一个同胚映射，或称拓扑变换，或简称同胚.

当存在从X到Y的同胚映射时，就称拓扑空间X与拓扑空间Y同胚，记作$X\cong Y$.

定理（一个集合上的两个不同的度量拓扑等价的充要条件）X是一个任意的非空集合，$d_1:X\times X\longrightarrow[0,+\infty)$和$d_2:X\times X\longrightarrow[0,+\infty)$是$X$上的两个度量，则以下三个条件等价：

① 对$\forall A\subseteq X$，A是度量空间(X,d_1)的开集$\Longleftrightarrow$ A是度量空间(X,d_2)的开集

② 对$\forall x\in X$，$\forall r\in\mathbb{R}_{>0}$，$\exists r',r''\in\mathbb{R}_{>0}$，s.t.

$B_{r'}(x;d_1)\subseteq B_r(x;d_2)$ 且 $B_{r''}(x;d_2)\subseteq B_r(x;d_1)$

③ $id_X:(X,d_1)\to(X,d_2)$是同胚映射.

Proof: ①⇒②: 对$\forall x\in X$, $\forall r\in\mathbb{R}_{>0}$.

$\because B_r(x;d_2)$是(X,d_2)的开集 $\therefore B_r(x;d_2)$是(X,d_1)的开集.

$\because x\in B_r(x;d_2)$ $\therefore \exists r'\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B_{r'}(x;d_1)\subseteq B_r(x;d_2)$

$\because B_r(x;d_1)$是(X,d_1)的开集 $\therefore B_r(x;d_1)$是(X,d_2)的开集

$\because x\in B_r(x;d_1)$ $\therefore \exists r''\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B_{r''}(x;d_2)\subseteq B_r(x;d_1)$

$\therefore r',r''\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B_{r'}(x;d_1)\subseteq B_r(x;d_2)$且$B_{r''}(x;d_2)\subseteq B_r(x;d_1)$

②⇒①: 对$\forall A\subseteq X$.

若A是(X,d_1)的开集, 则有:

对$\forall x\in A$. $\because A$是(X,d_1)的开集 $\therefore \exists r\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B_r(x;d_1)\subseteq A$

$\because x\in X$, $r\in\mathbb{R}_{>0}$ $\therefore \exists r''\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B_{r''}(x;d_2)\subseteq B_r(x;d_1)$

$\therefore B_{r''}(x;d_2)\subseteq A$ $\therefore A$是(X,d_2)的开集.

若A是(X,d_2)的开集, 则有:

对$\forall x\in A$. $\because A$是(X,d_2)的开集 $\therefore \exists r\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B_r(x;d_2)\subseteq A$

$\because x\in X$, $r\in\mathbb{R}_{>0}$ $\therefore \exists r'\in\mathbb{R}_{>0}$, s.t. $B_{r'}(x;d_1)\subseteq B_r(x;d_2)$

$\therefore B_{r'}(x;d_1)\subseteq A$ $\therefore A$是(X,d_1)的开集

$\therefore$ A是(X,d_1)的开集 $\Longleftrightarrow$ A是(X,d_2)的开集

①⇒③: $\because id_X: X\to X$是集合~~X~~ X到自身的恒等映射.

$\therefore id_X^{-1}=id_X$, 且$id_X: X\to X$是双射.

$\therefore id_X^{-1}=id_X:(X,d_2)\longrightarrow(X,d_1)$

对$\forall (X,d_2)$的开集G，$id_X^{-1}(G)=\{x\in X \mid id_X(x)\in G\}$

$=\{x\in X \mid x\in G\}=G$

$\because G$是(X,d_2)的开集　$\therefore G$是(X,d_1)的开集

$\therefore id_X^{-1}(G)=G$是$(X,d_1)$的开集

$\therefore id_X:(X,d_1)\longrightarrow(X,d_2)$是连续映射.

对$\forall (X,d_1)$的开集G，

$id_X^{-1}(G)=\{x\in X \mid id_X(x)\in G\}=\{x\in X \mid x\in G\}=G$

$\because G$是(X,d_1)的开集　$\therefore G$是(X,d_2)的开集

$\therefore id_X^{-1}(G)=G$是$(X,d_2)$的开集

$\therefore id_X:(X,d_2)\longrightarrow(X,d_1)$是连续映射

$\therefore id_X^{-1}:(X,d_2)\longrightarrow(X,d_1)$是连续映射.

$\therefore id_X:(X,d_1)\longrightarrow(X,d_2)$是同胚映射.　$(X,d_1)\cong(X,d_2)$

③$\Rightarrow$①　对$\forall A\subseteq X$.

若A是(X,d_1)的开集，则有：$\because id_X:(X,d_1)\rightarrow(X,d_2)$是同胚映射

$\therefore id_X^{-1}:(X,d_2)\longrightarrow(X,d_1)$是连续映射

$\therefore id_X^{-1}=id_X:(X,d_2)\longrightarrow(X,d_1)$是连续映射

$\therefore id_X^{-1}(A)$是(X,d_2)的开集

$\because id_X^{-1}(A)=\{x\in X \mid id_X(x)\in A\}=\{x\in X \mid x\in A\}=A$

$\therefore A$是(X,d_2)的开集

若A是(X,d_2)的开集，则有：$\because id_X:(X,d_1)\to(X,d_2)$是同胚映射

$\therefore id_X:(X,d_1)\longrightarrow(X,d_2)$是连续映射

$\therefore id_X^{-1}(A)$是(X,d_1)的开集

$\because id_X^{-1}(A)=\{x\in X \mid id_X(x)\in A\}=\{x\in X\mid x\in A\}=A$

$\therefore A$是(X,d_1)的开集.

$\therefore A$是(X,d_1)的开集 $\Longleftrightarrow$ A是(X,d_2)的开集. $\square$