Lemma: $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ 是四个彼此不同的点，则有:

M_1, M_2, M_3, M_4 四点共线 $\Leftrightarrow \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{R}^*$ 且 $\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\in\mathbb{R}^*$

proof: ($\Rightarrow$): $\because M_1, M_2, M_3, M_4$ 四点共线

$\therefore M_1, M_2, M_3$ 三点共线且 M_1, M_4, M_3 三点共线.

$\therefore \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{R}^*$ 且 $\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\in\mathbb{R}^*$

($\Leftarrow$): $\because \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{R}^*$ 且 $\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\in\mathbb{R}^*$

$\therefore M_1, M_2, M_3$ 三点共线 且 M_1, M_4, M_3 三点共线.

$\therefore M_1, M_2, M_3, M_4$ 四点共线. $\square$

Lemma: $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ 是四个彼此不同的点，则有:

M_1, M_2, M_3, M_4 四点共圆 $\Leftrightarrow k=\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}:\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\in\mathbb{R}^*$ 且 $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\notin\mathbb{R}$ 且 $\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\notin\mathbb{R}$

Proof: $\because z_3\neq z_2 \quad \therefore z_3-z_2\neq 0 \quad \therefore \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\neq 0$

$\because z_3\neq z_4 \quad \therefore z_3-z_4\neq 0 \quad \therefore \dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\neq 0$

补充证明一个引理:

Lemma: $\forall a, b\in\mathbb{C}^*$, 有: $\dfrac{a}{b}\in\mathbb{C}^*$.

proof: $\because a, b\in\mathbb{C}^* \quad \therefore b$ 可以作分母. $\because \mathbb{C}$ 是一个域 $\quad \therefore \dfrac{a}{b}\in\mathbb{C}$.

假设 $\dfrac{a}{b}=0$. 则 $\because b\in\mathbb{C}^* \quad \therefore \dfrac{a}{b}\cdot b=0\cdot b=0$

$\because \dfrac{a}{b}\cdot b=a \quad \therefore a=0$. 矛盾. $\quad \therefore \dfrac{a}{b}\neq 0. \quad \therefore \dfrac{a}{b}\in\mathbb{C}^* \quad \square$

回到原来引理的证明:

($\Rightarrow$): $\because M_1, M_2, M_3, M_4$ 四点共圆 (设这个圆为 $\odot O$)

$\therefore k=\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}:\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\in\mathbb{R}^*$

假设 $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{R}$. 则有: $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{R}^*$ $\quad \therefore M_1, M_2, M_3$ 三点共线 (设这条直线为 l_1)

$\because$ 直线 l_1 与 $\odot O$ 有三个公共点 M_1, M_2, M_3.

$\because$ 直线与圆至多只能有2个公共点 $\therefore$ 矛盾 $\therefore \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2} \notin \mathbb{R}$.

假设 $\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4} \in \mathbb{R}$，则有：$\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4} \in \mathbb{R}^*$ $\therefore M_1, M_4, M_3$ 三点共线. (设这条直线为 l_2)

$\therefore$ 直线 l_2 与 $\odot O$ 有三个公共点 M_1, M_4, M_3

$\because$ 直线与圆至多只能有2个公共点 $\therefore$ 矛盾 $\therefore \dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4} \notin \mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$: $\because k = \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2} : \dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4} \in \mathbb{R}^*$

$\therefore M_1, M_2, M_3, M_4$ 四点共圆 或 四点共线.

假设 M_1, M_2, M_3, M_4 四点共线，则 M_1, M_2, M_3 三点共线 且 M_1, M_4, M_3 三点共线

$\therefore \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2} \in \mathbb{R}^*$ 且 $\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4} \in \mathbb{R}^*$. 矛盾!

$\therefore M_1, M_2, M_3, M_4$ 不能四点共线.

$\therefore M_1, M_2, M_3, M_4$ 四点共圆 $\square$