Floor and ceiling functions

Lemma：对$\forall x\in\mathbb{R}$，有：$\lfloor x\rfloor\leqslant\lceil x\rceil$

Proof：$\because x\in\mathbb{R}$ $\therefore \lfloor x\rfloor\leqslant x\leqslant\lceil x\rceil$ $\therefore \lfloor x\rfloor\leqslant\lceil x\rceil$ $\square$

Lemma：对$\forall n\in\mathbb{Z}$，有：$\lfloor n\rfloor=\lceil n\rceil=n$

Proof：$\because n\in\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$，$n\in\mathbb{Z}$，$n\leqslant n<n+1$

$\therefore \lfloor n\rfloor=n$

$\because n\in\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$，$n\in\mathbb{Z}$，$n-1<n\leqslant n$

$\therefore \lceil n\rceil=n$ $\therefore \lfloor n\rfloor=n=\lceil n\rceil$ $\square$

Lemma：对$\forall x\in\mathbb{R}$，有：$\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor=\begin{cases}0, & 当x\in\mathbb{Z}时\\ 1, & 当x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}时\end{cases}$

Proof：当$x\in\mathbb{Z}$时，有：$\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil=x$ $\therefore \lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor=0$

当$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$时，$\because x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$ $\therefore -x+1>-\lfloor x\rfloor\geqslant -x$

$\therefore -x\leqslant-\lfloor x\rfloor<-x+1$

$\because x\leqslant\lceil x\rceil<x+1$

$\therefore 0\leqslant\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor<2$ $\because \lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ $\therefore \lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor=0$或$1$

若$\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor=0$，则有：$\lceil x\rceil=\lfloor x\rfloor$ $\because \lfloor x\rfloor\leqslant x\leqslant\lceil x\rceil$

$\therefore \lfloor x\rfloor=x=\lceil x\rceil$ $\therefore x=\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ 与$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$矛盾.

$\therefore \lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor\neq0$ $\therefore \lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor=1$ $\square$

Lemma：对 $\forall x \in \mathbb{R}$，有：

① $\lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil = 0$

② $-\lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil$

③ $-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$

Proof：①：$\because x \in \mathbb{R}$ $\therefore x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

$\because -x \in \mathbb{R}$ $\therefore -x \leqslant \lceil -x \rceil < -x+1$

$\therefore -1 < \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil < 1$. $\because \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil \in \mathbb{Z}$

$\therefore \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil = 0$

②. $\because \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil = 0$ $\therefore -\lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil$

③. $\because x \in \mathbb{R}$ $\therefore -x \in \mathbb{R}$ $\therefore \lfloor -x \rfloor + \lceil x \rceil = 0$

$\therefore -\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$ $\square$

Lemma：对 $\forall x \in \mathbb{R}$，有：$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & 当 x \in \mathbb{Z} 时 \\ -1, & 当 x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} 时. \end{cases}$

Proof：$\because x \in \mathbb{R}$ $\therefore x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

$\because -x \in \mathbb{R}$ $\therefore -x-1 < \lfloor -x \rfloor \leqslant -x$

$\therefore -2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \leqslant 0$. $\because \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \in \mathbb{Z}$

$\therefore \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$ 或 0.

当 $x \in \mathbb{Z}$ 时，有：$\because x \in \mathbb{Z}$ $\therefore -x \in \mathbb{Z}$ $\therefore \lfloor x \rfloor = x$，$\lfloor -x \rfloor = -x$

$\therefore \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x + (-x) = 0$.

当 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 时，假设 $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=0$，则有：$\lfloor -x\rfloor=-\lfloor x\rfloor$

$\because \lfloor x\rfloor+\lceil -x\rceil=0$ $\quad\therefore \lceil -x\rceil=-\lfloor x\rfloor$ $\quad\therefore \lceil -x\rceil=\lfloor -x\rfloor$.

$\because -x\in\mathbb{R}$ $\quad\therefore \lfloor -x\rfloor\leqslant -x\leqslant\lceil -x\rceil$ $\quad\therefore \lfloor -x\rfloor=-x=\lceil -x\rceil$

$\therefore -x=\lfloor -x\rfloor\in\mathbb{Z}$. $\quad\therefore x\in\mathbb{Z}$ 与 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 矛盾.

$\therefore \lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor\neq 0$. $\quad\therefore \lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=-1$ $\quad\square$

Lemma：对 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$，有：

① $\lfloor x\rfloor<x<\lfloor x\rfloor+1$

② $x-1<\lfloor x\rfloor<x$

③ $\lceil x\rceil-1<x<\lceil x\rceil$

④ $x<\lceil x\rceil<x+1$

Proof：假设 $x=\lfloor x\rfloor$，则有：$x=\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$. 与 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 矛盾.

$\therefore x\neq\lfloor x\rfloor$.

假设 $x=\lceil x\rceil$，则有：$x=\lceil x\rceil\in\mathbb{Z}$. 与 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 矛盾.

$\therefore x\neq\lceil x\rceil$.

$\therefore$ ①②③④得证. $\quad\square$

Lemma：对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$\lceil x\rceil+\lceil -x\rceil=\begin{cases}0 & \text{当 } x\in\mathbb{Z} \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \text{ 时}\end{cases}$

Proof：当 $x\in\mathbb{Z}$ 时，$-x\in\mathbb{Z}$ $\quad\therefore \lceil x\rceil=x$，$\lceil -x\rceil=-x$

$\therefore \lceil x\rceil+\lceil -x\rceil=x+(-x)=0$.

当 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 时， $\because x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ $\therefore -x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

$\therefore x<\lceil x\rceil<x+1$

$-x<\lceil -x\rceil<-x+1$

$\therefore 0<\lceil x\rceil+\lceil -x\rceil<2$ $\because \lceil x\rceil+\lceil -x\rceil\in\mathbb{Z}$

$\therefore \lceil x\rceil+\lceil -x\rceil=1$ $\square$

Lemma：对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：

① $\lfloor\lfloor x\rfloor\rfloor=\lfloor x\rfloor$

② $\lceil\lceil x\rceil\rceil=\lceil x\rceil$

③ $\lfloor\lceil x\rceil\rfloor=\lceil x\rceil$

④ $\lceil\lfloor x\rfloor\rceil=\lfloor x\rfloor$

Proof: $\because x\in\mathbb{R}$ $\therefore \lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$，$\lceil x\rceil\in\mathbb{Z}$

$\therefore \lfloor\lfloor x\rfloor\rfloor=\lfloor x\rfloor$，$\lceil\lceil x\rceil\rceil=\lceil x\rceil$

$\lfloor\lceil x\rceil\rfloor=\lceil x\rceil$，$\lceil\lfloor x\rfloor\rceil=\lfloor x\rfloor$ $\square$