第4题. 如果我们把相等的角视为同一个角，则弧度制建立了一个从任意角的集合到实数集的一一对应的关系.

角度相等

proof：设集合 A 为任意角的集合，映射 $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ 为弧度制. 则：

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\angle\alpha \longmapsto f(\angle\alpha) = \angle\alpha\text{的弧度}.$$

接下来我们证明 f 是一个双射.

对 A 中任一元 $\angle\alpha$，$f(\angle\alpha) = \angle\alpha$ 的弧度 $\in \mathbb{R}$ $\quad \therefore f(A) \subseteq \mathbb{R}$

对 A 中任意两个元素 $\angle\alpha, \angle\beta$.

(i). 若 $\angle\alpha = \angle\beta$. 则 $\angle\alpha$ 的角度 $= \angle\beta$ 的角度.

$\because \angle\alpha\text{的弧度} = \dfrac{\angle\alpha\text{的角度}}{180^\circ}\pi$，$\angle\beta\text{的弧度} = \dfrac{\angle\beta\text{的角度}}{180^\circ}\pi$

$\therefore \angle\alpha$ 的弧度 $= \angle\beta$ 的弧度

$\therefore f(\angle\alpha) = f(\angle\beta)$ $\quad \therefore f$ 是 $A \longrightarrow \mathbb{R}$ 的映射.

(ii). 若 $f(\angle\alpha) = f(\angle\beta)$，则 $\angle\alpha$ 的弧度 $= \angle\beta$ 的弧度.

$\because \angle\alpha\text{的角度} = \dfrac{\angle\alpha\text{的弧度}}{\pi}\cdot 180^\circ$，$\angle\beta\text{的角度} = \dfrac{\angle\beta\text{的弧度}}{\pi}\cdot 180^\circ$

$\therefore \angle\alpha$ 的角度 $= \angle\beta$ 的角度

$\therefore \angle\alpha = \angle\beta$ $\quad \therefore f$ 是 $A \longrightarrow \mathbb{R}$ 的单射.

对 $\forall y \in \mathbb{R}$. 构造一个 $\angle\alpha$，使得：$\angle\alpha\text{的角度} = \dfrac{y}{\pi}\cdot 180^\circ$.

$\therefore \angle\alpha$ 的弧度 $= y$

$\therefore$ ~~$f(\alpha)$~~ $f(\angle\alpha) = y$ $\quad \therefore f$ 是 $A \longrightarrow \mathbb{R}$ 的满射.

$\therefore f$ 是 $A \longrightarrow \mathbb{R}$ 的双射. $\quad \square$

Remark：这是以映射的观点看待弧度制. 对我们看待弧度制有一定启发作用.

第6题. $M=\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}\}$. $N=\{x \mid x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}\}$. 求证: $M=N$.

Proof: 对M中任一元x, $\exists k\in\mathbb{Z}$. s.t. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$.

①若k为偶数, 则$\exists n_1\in\mathbb{Z}$, s.t. $k=2n_1$. $\therefore x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=n_1\pi+\frac{\pi}{4}$, $n_1\in\mathbb{Z}$

$\therefore x\in N$

②若k为奇数, 则$\exists n_2\in\mathbb{Z}$, s.t. $k=2n_2-1$ $\therefore x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=n_2\pi-\frac{\pi}{4}$, $n_2\in\mathbb{Z}$

$\therefore x\in N$.

$\therefore x\in N$ $\therefore M\subseteq N$.

对N中任一元x. 有两种可能性:

①若$\exists k_1\in\mathbb{Z}$, s.t. $x=k_1\pi+\frac{\pi}{4}$. 则 $x=k_1\pi+\frac{\pi}{4}=2k_1\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$. $2k_1\in\mathbb{Z}$

$\therefore x\in M$.

② 若$\exists k_2\in\mathbb{Z}$, s.t. $x=k_2\pi-\frac{\pi}{4}$. 则 $x=k_2\pi-\frac{\pi}{4}=(2k_2-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, $2k_2-1\in\mathbb{Z}$

$\therefore x\in M$

$\therefore x\in M$. $\therefore N\subseteq M$ $\therefore M=N$. $\square$