奥数教程第七版·高中第一分册. P27 例6.

解：设 $A=\{x \mid f(x)=0, x\in\mathbb{R}\}$, $B=\{x \mid f(f(x))=0, x\in\mathbb{R}\}$.

$\because A\neq\emptyset$ $\therefore \exists x_0\in A$ $\therefore x_0\in\mathbb{R}$ 且 $f(x_0)=0$.

$\because A=B$ $\therefore x_0\in B$ $\therefore x_0\in\mathbb{R}$ 且 $f(f(x_0))=0$.

$\therefore f(0)=0$ $\therefore b=0$. $\therefore f(x)=x^2+ax=x(x+a)$.

$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$A=\{0\}$

当 $a\neq 0$ 时，$A=\{0,-a\}$

$\because f(x)=x^2+ax$ $\therefore f(f(x))=f(x^2+ax)=(x^2+ax)^2+a(x^2+ax)=x(x+a)(x^2+ax+a)$

对方程 $x^2+ax+a=0$, $\Delta=a^2-4a=a(a-4)$

$\therefore$ 分四种情况讨论.

① $a\in(0,4)$. 此时 $\Delta<0$. 方程 $x^2+ax+a=0$ 无实根.

$\therefore f(f(x))=0$ 的全部实根为：$0, -a$ $\therefore B=\{0,-a\}$. $A=\{0,-a\}$. $A=B$

$\therefore a\in(0,4)$, $b=0$ 符合题意.

② $a=0$. 此时 $\Delta=0$. $f(f(x))=x^4$ $\therefore B=\{0\}$. $A=\{0\}$. $A=B$

$\therefore a=0$, $b=0$ 符合题意

③ $a=4$. 此时 $f(f(x))=x(x+4)(x^2+4x+4)=x(x+4)(x+2)^2$

$\therefore B=\{0,-2,-4\}$. $A=\{0,-4\}$. $A\neq B$. 不合题意

④ $a\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$. 此时方程 $x^2+ax+a=0$ 有两个不相等的实根. 且：

$0^2+a\times 0+a=a\neq 0$. $(-a)^2+a\times(-a)+a=a\neq 0$.

$\therefore 0$ 和 $-a$ 都不是方程 $x^2+ax+a=0$ 的根.

$\therefore B=\left\{0, -a, \dfrac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2a}, \dfrac{-a+\sqrt{a^2-4a}}{2a}\right\}$. $|B|=4$.

$\therefore A\subsetneqq B$. 不合题意.

综上，$a\in[0,4)$, $b=0$