3. 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+\sqrt{2013})^2+\sin(2013x)}{x^2+2013}$，$x\in R$ 的最大值为 $M$，最小值为 $m$. 求 $M+m=$ ？

解：$f(x)=\dfrac{(x+\sqrt{2013})^2+\sin(2013x)}{x^2+2013}=\dfrac{x^2+2\sqrt{2013}\,x+2013+\sin(2013x)}{x^2+2013}$

$=\dfrac{x^2+2013}{x^2+2013}+\dfrac{2\sqrt{2013}\,x+\sin(2013x)}{x^2+2013}=1+g(x)$.

其中 $g(x)=\dfrac{2\sqrt{2013}\,x+\sin(2013x)}{x^2+2013}$，$x\in R$.

$g(-x)=\dfrac{-2\sqrt{2013}\,x-\sin(2013x)}{x^2+2013}=-\dfrac{2\sqrt{2013}\,x+\sin(2013x)}{x^2+2013}=-g(x)$.

$\therefore g(x)$ 是 $R$ 上的奇函数.

设 $x=\alpha$ 时，$f(x)$ 取最大值 $f(\alpha)$. $x=\beta$ 时，$f(x)$ 取最小值 $f(\beta)$.

$\therefore x=\alpha$ 时，$g(x)$ 取最大值 $g(\alpha)$，$x=\beta$ 时，$g(x)$ 取最小值 $g(\beta)$

$\therefore$ 对 $\forall x\in R$，$g(x)\leq g(\alpha)$. $\therefore$ 对 $\forall x\in R$，~~$g(x)\geq$~~ $g(-x)\leq g(\alpha)$

$\therefore -g(x)\leq g(\alpha)$ $\therefore g(x)\geq -g(\alpha)=g(-\alpha)$.

$\therefore g(x)$ 的最小值为：~~$g(-\alpha)=g($~~ $-g(\alpha)=g(\beta)$.

$\therefore g(\alpha)+g(\beta)=0$.

$\therefore f(\alpha)+f(\beta)=1+g(\alpha)+1+g(\beta)=2+g(\alpha)+g(\beta)=2+0=2$.

$\therefore M+m=2$.

Remark：奇函数的最大值与最小值和必为 0 !

4. $x,y\in\mathbb{R}_+$. 求 $f(x,y)=\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的最小值.

解: $\because x,y\in\mathbb{R}_+$ $\therefore x,y$ 都可以作分母.

$$\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2=\frac{x^4}{y^4}-2\frac{x^2}{y^2}+1 \qquad \left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)^2=\frac{x^4}{y^4}-2+\frac{y^4}{x^4}$$

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2=\frac{y^4}{x^4}-2\cdot\frac{y^2}{x^2}+1 \qquad \left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)^2=\frac{x^4}{y^4}+2+\frac{y^4}{x^4} \qquad \left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}$$

$$\therefore \left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)^2=2\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+4$$

$$\therefore f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2-4\geqslant -4$$

但是等号取不到!

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+2\geqslant 2.$$

iff $x=y$ 时"$=$". $\therefore f(x,y)$ 的最小值为 2.

或: $$f(x,y)=\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+2\geqslant 2.$$

iff $x=y$ 时"$=$". $\therefore f(x,y)$ 的最小值为 2.

Remark: 这种配方的技巧性较高, 确实不容易想到. 我也不知道该怎么内化这种方法.

5. 已知 $x, y$ 为实数，则 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y$ 的最小值为 ______ ?

解：令 $A=x+y$， $B=x-y$. $\therefore x=\frac{A+B}{2}$， $y=\frac{A-B}{2}$.

$$\therefore f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y$$

$$=\left(\frac{A+B}{2}\right)^2+\frac{(A+B)(A-B)}{4}+\frac{(A-B)^2}{4}-\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}$$

$$=\frac{A^2+2AB+B^2+A^2-B^2+A^2-2AB+B^2-2A-2B-2A+2B}{4}$$

$$=\frac{3A^2-4A+B^2}{4}=\frac{3}{4}A^2-A+\frac{1}{4}B^2$$

$$=\frac{3}{4}\left(A^2-\frac{4}{3}A\right)+\frac{1}{4}B^2=\frac{3}{4}\left(\left(A-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{4}B^2$$

$$=\frac{3}{4}\left(A-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{4}B^2-\frac{1}{3}\geqslant-\frac{1}{3}.$$

"=" iff $\begin{cases}A=\frac{2}{3}\\B=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{2}{3}\\x-y=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\therefore f(x,y)$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$.

Remark：之后查一下高代中的对称多项式基本定理.

6．求函数 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$ 在区间 $[-6,6]$ 上的最大值和最小值．

解：$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$

$$=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+5$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+5$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+4+2)+5$$

$$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)+5$$

当 $x\in[-6,6]$ 时，$x^2+5x+4\in\left[-\frac{9}{4},70\right]$． $f(x)\in[4,5045]$．

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[-6,6]$ 上的最小值为 4，当 $x^2+5x+4=-1$，即 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ 时取到．

$f(x)$ 在 $[-6,6]$ 上的最大值为 5045，当 $x^2+5x+4=70$ 时取到．