Lemma：对$\forall x\in\mathbb{R}$. 有：$|x|\geqslant x$，$|x|\geqslant -x$.

proof：分三种情况讨论.

①若$x>0$，则$|x|=x$ $\therefore |x|\geqslant x$.

$|x|=x>0>-x$ $\therefore |x|\geqslant -x$.

②若$x=0$，则$|x|=0$，$x=0$，$-x=0$. $\therefore |x|=x=-x$.

$\therefore |x|\geqslant x$，$|x|\geqslant -x$.

③若 $x<0$. 则$|x|=-x>0>x$ $\therefore |x|\geqslant x$.

$|x|=-x$ $\therefore |x|\geqslant -x$.

$\therefore$对$\forall x\in\mathbb{R}$，有：$|x|\geqslant x$，$|x|\geqslant -x$. □

Lemma：对$\forall a,b,c\in\mathbb{R}$，$a\leqslant c\leqslant b$，求证：$|c|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$

proof：$\because c\leqslant b$ $\therefore c\leqslant b\leqslant |b|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$

$\because a\leqslant c$ $\therefore -c\leqslant -a\leqslant |a|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$.

$\therefore |c|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$. □

P17 例2：已知$a,b,c\in\mathbb{R}$. $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当$x\in[-1,1]$时，$|f(x)|\leqslant 1$. 求证：

(1) $|c|\leqslant 1$

(2) $x\in[-1,1]$时，$|g(x)|\leqslant 2$

(3) $a>0$，当$x\in[-1,1]$时，$g(x)$的最大值为2. 求$f(x)$.

proof：(1) $\because$当$x\in[-1,1]$时，$|f(x)|\leqslant 1$ $\therefore |f(0)|\leqslant 1$. $\therefore |c|\leqslant 1$

(2). 分三种情况讨论.

① $a>0$. 此时有：对$\forall x\in[-1,1]$. $g(-1)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$ （左边不等式取等号当且仅当$x=-1$）（右边不等式取等号当且仅当$x=1$）（此时$g(x)$严格单调增）

$\therefore |g(x)|\leqslant\max\{|g(-1)|,|g(1)|\}$.

$\because |g(-1)|=|b-a|=|a-b|=|f(-1)-c|\leqslant|f(-1)|+|c|\leqslant 1+1=2$.

$|g(1)| = |a+b| = |f(1)-c| \leq |f(1)|+|c| \leq 1+1 = 2$

$\therefore \max\{|g(-1)|, |g(1)|\} \leq 2$.

$\therefore |g(x)| \leq \max\{|g(-1)|, |g(1)|\} \leq 2$.

② $a=0$. 此时有：$g(x)=b$，$f(x)=bx+c$.

$\therefore$ 对 $\forall x\in[-1,1]$，有：$|g(x)| = |b| = |f(1)-c| \leq |f(1)|+|c| \leq 1+1=2$.

③. $a<0$ 此时有：$g(x)$ 在 R 上严格单调递减.

$\therefore$ 对 $\forall x\in[-1,1]$，有：$g(-1)\geq g(x)\geq g(1)$. 即：$g(1)\leq g(x)\leq g(-1)$

$\therefore |g(x)| \leq \max\{|g(1)|, |g(-1)|\}$.

$\because |g(1)| = |a+b| = |f(1)-c| \leq |f(1)|+|c| \leq 1+1 = 2$.

$|g(-1)| = |b-a| = |a-b| = |f(-1)-c| \leq |f(-1)|+|c| \leq 1+1 = 2$.

$\therefore |g(x)| \leq \max\{|g(1)|, |g(-1)|\} \leq 2$.

综上，~~对 $\forall a\in R$，有~~ 当 $x\in[-1,1]$ 时，$|g(x)|\leq 2$.

(3) $\because a>0$ $\therefore g(x)$ 在 R 上严格单调递增.

$\because$ 当 $x\in[-1,1]$ 时，$g(x)$ 的最大值为 2. $\therefore g(1)=2$ $\therefore a+b=2$

$\because$ 当 $x\in[-1,1]$ 时，$|f(x)|\leq 1$. ~~$|f(-1)|\leq 1$ $\therefore |a-b+c|\leq 1$~~

$\because |f(1)|\leq 1$ $\therefore |a+b+c|\leq 1$ $\therefore |2+c|\leq 1$ $\therefore -1\leq 2+c\leq 1$，$-3\leq c\leq -1$

$\because |c|\leq 1$ $\therefore -1\leq c\leq 1$ $\therefore c=-1$.

$\because |f(-1)|\leq 1$ $\therefore |a-b+c|\leq 1$ $\therefore |2a-3|\leq 1$ $\therefore a\in[1,2]$

$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{2-a}{2a} = \frac{a-2}{2a} = \frac{1}{2}-\frac{1}{a} = -\frac{1}{a}+\frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, 0]$ （注意：$\because a>0$ $\therefore a\neq 0$）
（a 可以作分母！）

$\therefore |f(-\frac{b}{2a})|\leq 1$ $\therefore \left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|\leq 1$ $\therefore \frac{4a+b^2}{4a}\leq 1$ $\therefore b^2\leq 0$ $b=0$

$\therefore a=2$ $\therefore f(x)=2x^2-1$，$x\in R$. □