奥数教程第七版高中第一分册. P42. 14题.

设 $a=\lg z+\lg\left(\frac{x}{yz}+1\right)$，$b=\lg\left(\frac{1}{x}\right)+\lg(xyz+1)$，$c=\lg y+\lg\left(\frac{1}{xyz}+1\right)$

记a, b, c中的最大数为M. 求M的最小值.

解：~~设~~ ∵ $\lg z$ 有意义 ∴ $z>0$.

∵ $\lg\left(\frac{1}{x}\right)$ 有意义 ∴ $x>0$.

∵ $\lg y$ 有意义 ∴ $y>0$.

$a=\lg z+\lg\left(\frac{x}{yz}+1\right)=\lg\left(\frac{x}{y}+z\right)$，$b=\lg\left(yz+\frac{1}{x}\right)$，$c=\lg\left(\frac{1}{xz}+y\right)$

设 $\lambda=\max\left\{\frac{x}{y}+z,\ yz+\frac{1}{x},\ \frac{1}{xz}+y\right\}$ ∴ $\lambda\geqslant\frac{x}{y}+z>0$ 且 $\lambda\geqslant\frac{1}{xz}+y>0$.

∴ $\lambda^2\geqslant\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{1}{xz}+y\right)=\frac{1}{yz}+x+\frac{1}{x}+yz=x+\frac{1}{x}+yz+\frac{1}{yz}\geqslant2+2=4$.

∵ $\lambda=\max\left\{\frac{x}{y}+z,\ yz+\frac{1}{x},\ \frac{1}{xz}+y\right\}>0$ ∴ $\lambda\geqslant2$.

∴ $M=\max\{a,b,c\}=\max\left\{\lg\left(\frac{x}{y}+z\right),\lg\left(yz+\frac{1}{x}\right),\lg\left(\frac{1}{xz}+y\right)\right\}$

$=\lg\left(\max\left\{\frac{x}{y}+z,\ yz+\frac{1}{x},\ \frac{1}{xz}+y\right\}\right)$

$=\lg\lambda\geqslant\lg2$.

当 $x=y=z=1$ 时，$a=\lg2$，$b=\lg2$，$c=\lg2$. $M=\lg2$.

∴ M的最小值为 $\lg2$.

Remark：关键是注意到 $\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{1}{xz}+y\right)=\frac{1}{yz}+x+\frac{1}{x}+yz\geqslant2+2=4$.

通过一步很不紧的放缩，得到一个下界，再验证等号能取到即可！