《奥数教程第七版·高中第一分册》P22 14题.

解：$\because x_1\in[-1,1]$ ， $x_2\in[1,2]$.

$\therefore$ 有如下的9种可能性：

① $x_1=-1$ 且 $x_2=1$

② $x_1=-1$ 且 $x_2\in(1,2)$

③ $x_1=-1$ 且 $x_2=2$

④ $x_1\in(-1,1)$ 且 $x_2=1$

⑤ $x_1\in(-1,1)$ 且 $x_2\in(1,2)$

⑥ $x_1\in(-1,1)$ 且 $x_2=2$

⑦ $x_1=1$ 且 $x_2=1$

⑧ $x_1=1$ 且 $x_2\in(1,2)$

⑨ $x_1=1$ 且 $x_2=2$.

我们来分别讨论这9种情况： （设 $f(x)=x^2-ax+b$ ， $x\in\mathbb{R}$）

①. $\because x_1=-1$ 且 $x_2=1$ 　$\therefore (x+1)(x-1)=0$ ， $x^2-1=0$

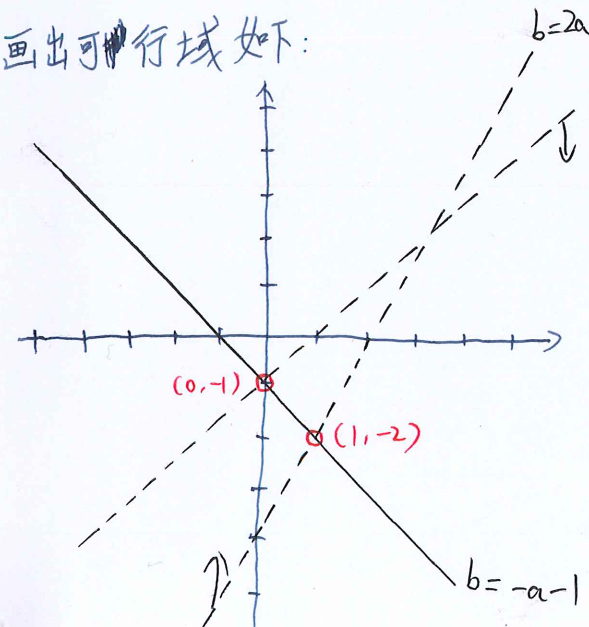
$\therefore a=0$ 且 $b=-1$ 　$\therefore a-2b=2$

②. $\because x_1=-1$ 且 $x_2\in(1,2)$ 　$\therefore f(-1)=0$ 且 $f(1)<0$ 且 $f(2)>0$

$\therefore \begin{cases}1+a+b=0\\1-a+b<0\\4-2a+b>0\end{cases}$ 　$\therefore \begin{cases}b=-a-1\\b<a-1\\b>2a-4\end{cases}$ 　令 $z=a-2b$. 　$\therefore b=-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a$.

$b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}z$

画出可行域如下：



$\therefore z\in(2,5)$

③. $\because x_1=-1$ 且 $x_2=2$ $\quad\therefore (x+1)(x-2)=0$, $\quad x^2-x-2=0$

$\therefore a=1$ 且 $b=-2$ $\quad\therefore a-2b=1+4=5$

④ ~~$x_1\in(-1,1)$ 且 $x_2=1$~~

$x_1\in(-1,1)$ 且 $x_2=1$ $\iff \begin{cases} f(1)=0 \\ f(-1)>0 \\ -\frac{-a}{2}\in(0,1) \end{cases}$ （双方向互推的验证不难）.

$(\Rightarrow)$: $\because x_2=1$ $\quad\therefore f(1)=0$.

$\because x_1\in(-1,1)$. 又$\because f(x)$在$(-\infty,x_1]$上严格单调递减

$\therefore f(-1)>f(x_1)=0$

$\because -\frac{-a}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{2}\in(0,1)$

$(\Leftarrow)$: $\because -\frac{-a}{2}\in(0,1)$ $\quad\therefore -\frac{-a}{2}<1$.

$\because f(x)$在$[-\frac{-a}{2},+\infty)$上是严格单调递增的函数.

$\therefore f(-\frac{-a}{2})<f(1)=0$ $\quad\therefore f(x)=0$有两个不相等的实数根.

$\therefore -\frac{-a}{2}<1$, $f(1)=0$ $\quad\therefore 1$是$f(x)$的较大的零点. $\quad\therefore x_2=1$.

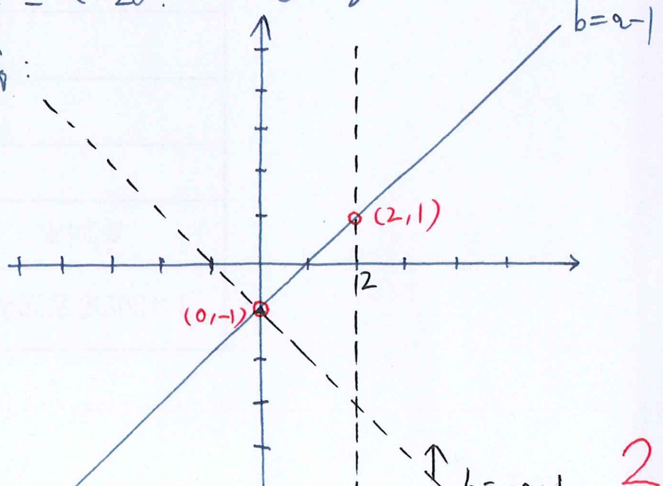
$\because f(-1)>0$, $\quad 0<-\frac{-a}{2}$, $\quad f(-\frac{-a}{2})<0$

~~$x_1\in$~~ 又$\because f(x)$在$(-\infty,-\frac{-a}{2}]$上严格单调递减

$\therefore x_1\in(-1,-\frac{-a}{2})\subseteq(-1,1)$ $\quad$ 双方向互推即证毕.

$\therefore \begin{cases} 1-a+b=0 \\ 1+a+b>0 \\ 0<a<2 \end{cases}$ $\quad\therefore \begin{cases} b=a-1 \\ b>-a-1 \\ 0<a<2 \end{cases}$ $\quad$ 令$z=a-2b$. $\quad\therefore b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}z$.

画可行域：



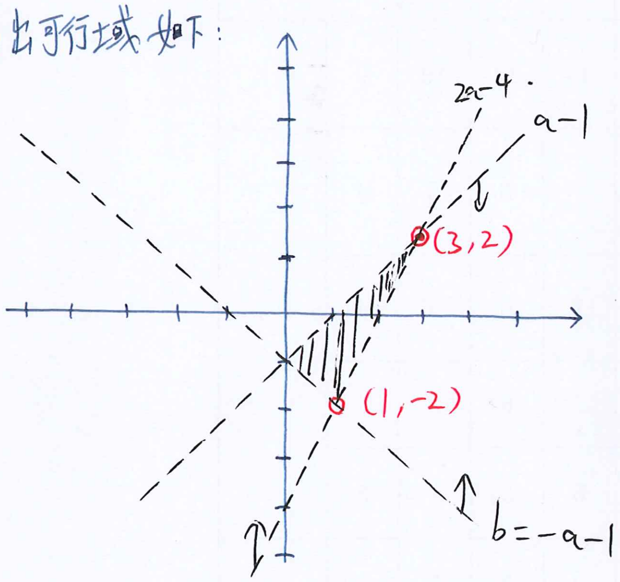
$\therefore z\in(0,2)$

⑤.

$$x_1 \in (-1,1) \text{ 且 } x_2 \in (1,2) \iff \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 1+a+b>0 \\ 1-a+b<0 \\ 4-2a+b>0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b>-a-1 \\ b<a-1 \\ b>2a-4 \end{cases} \quad \text{令 } z=a-2b \quad \therefore b=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}z.$$

画出可行域如下:

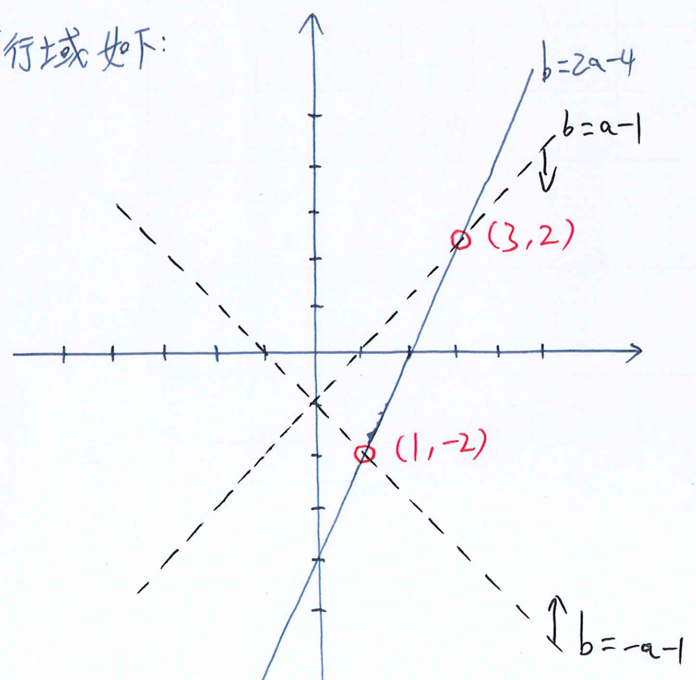


$\therefore z \in (-1,5)$

⑥

$$x_1 \in (-1,1) \text{ 且 } x_2 = 2 \iff \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 1+a+b>0 \\ 1-a+b<0 \\ 4-2a+b=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b>-a-1 \\ b<a-1 \\ b=2a-4 \end{cases}$$

画出可行域如下:



$\therefore z \in (-1,5)$

⑦. $\because x_1=1$ 且 $x_2=1$ $\therefore (x-1)^2=0$ $x^2-2x+1=0$ $\therefore a=2$ 且 $b=1$

$\therefore a-2b=0$

⑧.

$$x_1=1 \text{ 且 } x_2\in(1,2) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)>0 \\ -\frac{-a}{2}\in(1,\frac{3}{2}) \end{cases}$$

$(\Rightarrow)$: $\because x_1=1$ $\therefore f(1)=0$

$\because x_2\in(1,2)$ $\therefore x_2<2$

$\because f(x)$ 在 $[x_2,+\infty)$ 上严格单调递增 $\therefore 0=f(x_2)<f(2)$ $\therefore f(2)>0$

$\therefore -\frac{-a}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{x_2}{2}\in(1,\frac{3}{2})$

$(\Leftarrow)$: $\because f(1)=0$ 且 $1<-\frac{-a}{2}$ $\therefore 1$ 是 $f(x)$ 的较小的零点 $\therefore x_1=1$.

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{-a}{2}]$ 上严格单调递减 $\therefore f(1)>f(-\frac{-a}{2})$

$\therefore f(-\frac{-a}{2})<f(1)=0$ $\therefore f(x)$ 有两个不同的零点.

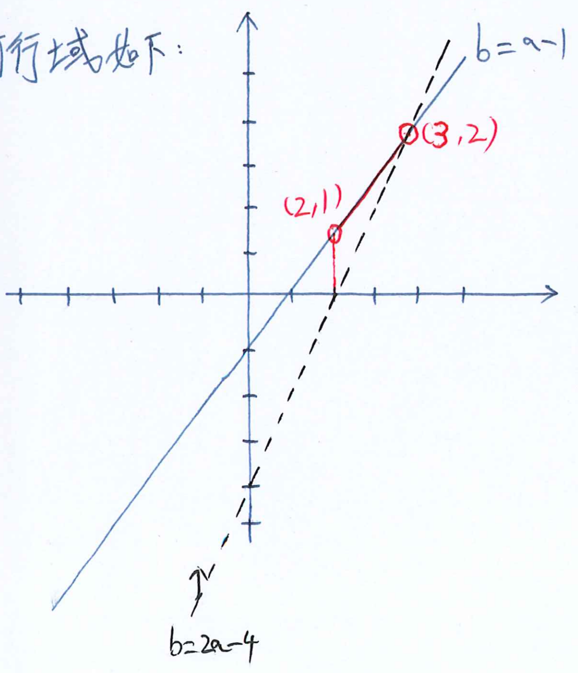
$\because f(x)$ 在 $[-\frac{-a}{2},+\infty)$ 上严格单调递增, $f(-\frac{-a}{2})<0$, $f(2)>0$, $-\frac{-a}{2}<\frac{3}{2}<2$.

$\therefore x_2\in(-\frac{-a}{2},2)\subseteq(1,2)$ $\therefore$ 双向互推证毕.

$z=a-2b$ $b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}z$

$$\begin{cases} 1-a+b=0 \\ 4-2a+b>0 \\ 2<a<3 \end{cases} \therefore \begin{cases} b=a-1 \\ b>2a-4 \\ 2<a<3. \end{cases}$$

画出可行域如下:



$\therefore z\in(-1,0)$

⑨. $\because x_1=1$ 且 $x_2=2$ $\therefore (x-1)(x-2)=0$ $x^2-3x+2=0$

$\therefore a=3, b=2$ $\therefore a-2b=3-4=-1$

综上, $a-2b\in\{2\}\cup(2,5)\cup\{5\}\cup(0,2)\cup(-1,5)\cup(-1,5)\cup\{0\}\cup(-1,0)\cup\{-1\}$

$\therefore a-2b\in[-1,5]$