一元二次方程根的分布

Lemma：对$\forall x, y \in \mathbb{R}$，求证：

$$x>0 \text{ 且 } y>0 \iff xy>0 \text{ 且 } x+y>0$$

proof：($\Rightarrow$)：$\because x>0$ 且 $y>0$ $\quad\therefore xy>0$ 且 $x+y>0$ （两个正数的和与积都是正数）.

($\Leftarrow$)：若$x=0$，则$xy=0$. 矛盾. $\quad\therefore x\neq 0$.

若$y=0$，则$xy=0$. 矛盾. $\quad\therefore y\neq 0$

$\therefore x\neq 0$ 且 $y\neq 0$.

$\because xy>0$

$\therefore (x>0$ 且 $y>0)$ 或 $(x<0$ 且 $y<0)$

$\because x+y>0$

$\therefore x>0$ 且 $y>0$ $\quad\square$

Lemma：对$\forall x, y \in \mathbb{R}$，求证：

$$x<0 \text{ 或 } y<0 \iff x+y<0 \text{ 或 } xy<0$$

proof：($\Rightarrow$)：$\because x<0$ 或 $y<0$

$\therefore$ 当$x<0$时，有如下的三种可能性：

① $x<0$ 且 $y<0 \Rightarrow x+y<0$

② $x<0$ 且 $y=0 \Rightarrow x+y=x<0$

③ $x<0$ 且 $y>0 \Rightarrow xy<0$

当$y<0$时，有如下的三种可能性：

① $y<0$ 且 $x<0 \Rightarrow x+y<0$

② $y<0$ 且 $x=0 \Rightarrow x+y=y<0$

③ $y<0$ 且 $x>0 \Rightarrow xy<0$

$\therefore x+y<0$ 或 $xy<0$

$(\Leftarrow)$：假设 $x\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0$. 则有如下的4种可能性：

① $x>0$ 且 $y>0 \Rightarrow x+y>0$ 且 $xy>0 \Rightarrow x+y\geqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$

② $x>0$ 且 $y=0 \Rightarrow x+y=x>0$ 且 $xy=0 \Rightarrow x+y\geqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$

③ $x=0$ 且 $y>0 \Rightarrow x+y=y>0$ 且 $xy=0 \Rightarrow x+y\geqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$

④ $x=0$ 且 $y=0 \Rightarrow x+y=0$ 且 $xy=0 \Rightarrow x+y\geqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$

$\therefore x+y\geqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$ 矛盾.

$\therefore x<0$ 或 $y<0$ $\square$

Lemma：对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，求证：

$$x>0 \text{ 或 } y>0 \iff x+y>0 \text{ 或 } xy<0$$

proof：$(\Rightarrow)$：$\because x>0$ 或 $y>0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，有如下的三种可能性：

① $x>0$ 且 $y>0 \Rightarrow x+y>0$

② $x>0$ 且 $y=0 \Rightarrow x+y=x>0$

③ $x>0$ 且 $y<0 \Rightarrow xy<0$

当 $y>0$ 时，有如下的三种可能性：

① $y>0$ 且 $x>0 \Rightarrow x+y>0$

② $y>0$ 且 $x=0 \Rightarrow x+y=y>0$

③ $y>0$ 且 $x<0 \Rightarrow xy<0$

$\therefore x+y>0$ 或 $xy<0$

$(\Leftarrow)$：假设 $x\leqslant 0$ 且 $y\leqslant 0$，则有如下的四种可能性：

① $x<0$ 且 $y<0 \Rightarrow x+y<0$ 且 $xy>0 \Rightarrow x+y\leqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$

② $x<0$ 且 $y=0 \Rightarrow x+y=x<0$ 且 $xy=0 \Rightarrow x+y\leqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$

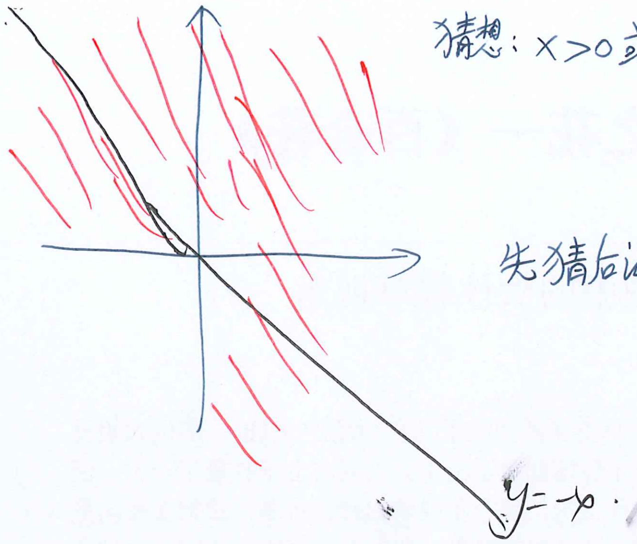
③ $x=0$ 且 $y<0 \Rightarrow x+y=y<0$ 且 $xy=0 \Rightarrow x+y\leqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$

④ $x=0$ 且 $y=0 \Rightarrow x+y=0$ 且 $xy=0 \Rightarrow x+y\leqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$

$\therefore x+y\leqslant 0$ 且 $xy\geqslant 0$ 矛盾.

$\therefore x>0$ 或 $y>0$ $\square$

Remark：上面的结论是怎么得到的？用平面直角坐标系中的区域来猜想，然后再严格论证：



猜想：$x>0$ 或 $y>0 \iff xy<0$ 或 $y>-x$

$\iff x+y>0$ 或 $xy<0$

先猜后证！

Lemma：对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$，求证：

$$x<0 \text{ 且 } y<0 \iff x+y<0 \text{ 且 } xy>0$$

proof：$(\Rightarrow)$：$\because x<0$ 且 $y<0$

$\therefore x+y<0$ 且 $xy>0$（两负数的和为负数，两负数的积为正数）

$(\Leftarrow)$：若 $x=0$，则 $xy=0$. 矛盾！ $\therefore x\neq 0$

若 $y=0$，则 $xy=0$. 矛盾！ $\therefore y\neq 0$

$\therefore x\neq 0$ 且 $y\neq 0$

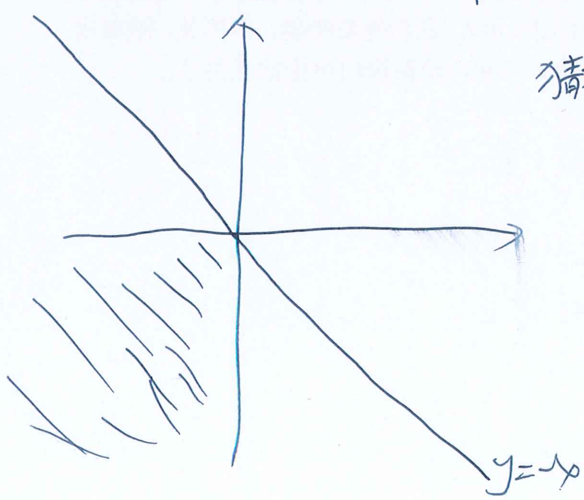
$\because xy>0$

$\therefore (x>0$ 且 $y>0)$ 或 $(x<0$ 且 $y<0)$

$\because x+y<0$

$\therefore x<0$ 且 $y<0$ $\square$

Remark：还是用平面直角坐标系中的区域来猜想，然后再严格论证！



猜想：$x<0$ 且 $y<0 \iff y<-x$ 且 $xy>0$

$\iff x+y<0$ 且 $xy>0$.

先猜后证！

Lemma：对$\forall x,y\in\mathbb{R}$，求证：

$x\geqslant 0$且$y\geqslant 0 \iff xy\geqslant 0$且$x+y\geqslant 0$

proof：($\Rightarrow$)：$\because x\geqslant 0$且$y\geqslant 0$

$\therefore$有如下的4种可能性：

① $x>0$且$y>0 \Rightarrow xy>0$且$x+y>0 \Rightarrow xy\geqslant 0$且$x+y\geqslant 0$

② $x>0$且$y=0 \Rightarrow xy=0$且$x+y=x>0 \Rightarrow xy\geqslant 0$且$x+y\geqslant 0$

③ $x=0$且$y>0 \Rightarrow xy=0$且$x+y=y>0 \Rightarrow xy\geqslant 0$且$x+y\geqslant 0$

④ $x=0$且$y=0 \Rightarrow xy=0$且$x+y=0 \Rightarrow xy\geqslant 0$且$x+y\geqslant 0$

$\therefore xy\geqslant 0$且$x+y\geqslant 0$

($\Leftarrow$)：假设$x<0$或$y<0$，则$x+y<0$或$xy<0$ 矛盾.

$\therefore x\geqslant 0$且$y\geqslant 0$ $\square$

Lemma：对$\forall x,y\in\mathbb{R}$，求证：

$x\leqslant 0$且$y\leqslant 0 \iff x+y\leqslant 0$且$xy\geqslant 0$

proof：($\Rightarrow$)：$\because x\leqslant 0$且$y\leqslant 0$

$\therefore$有如下的4种可能性：

① $x<0$且$y<0 \Rightarrow x+y<0$且$xy>0 \Rightarrow x+y\leqslant 0$且$xy\geqslant 0$

② $x<0$且$y=0 \Rightarrow x+y=x<0$且$xy=0 \Rightarrow x+y\leqslant 0$且$xy\geqslant 0$

③ $x=0$且$y<0 \Rightarrow x+y=y<0$且$xy=0 \Rightarrow x+y\leqslant 0$且$xy\geqslant 0$

④ $x=0$且$y=0 \Rightarrow x+y=0$且$xy=0 \Rightarrow x+y\leqslant 0$且$xy\geqslant 0$

$\therefore x+y\leqslant 0$且$xy\geqslant 0$

($\Leftarrow$)：假设$x>0$或$y>0$，则$x+y>0$或$xy<0$ 矛盾.

$\therefore x\leqslant 0$且$y\leqslant 0$ $\square$

另外两个已证结论的逆否命题不再论证，直接叙述如下：

Lemma：对$\forall x,y\in\mathbb{R}$，则有：$x\leqslant 0$或$y\leqslant 0 \iff x+y\leqslant 0$或$xy\leqslant 0$

Lemma：对$\forall x,y\in\mathbb{R}$，则有：$x\geqslant 0$或$y\geqslant 0 \iff x+y\geqslant 0$或$xy\leqslant 0$