人大附中练册 高中数学必修三 P46 . 13题.

解: 法1: $\because \tan A=\dfrac{\cos B-\cos C}{\sin C-\sin B}$

$\therefore \tan A$ 有意义且 $\sin C-\sin B\neq 0$

$\therefore A\neq \frac{\pi}{2}$ 且 $\sin B\neq \sin C$

$\because \dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\cos B-\cos C}{\sin C-\sin B}$ $\therefore \sin A(\sin C-\sin B)=\cos A(\cos B-\cos C)$

$\therefore \sin A\sin C-\sin A\sin B=\cos A\cos B-\cos A\cos C$

$\therefore \cos A\cos C+\sin A\sin C=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\therefore \cos(A-C)=\cos(A-B)$

$\because A\in(0,\pi)$, $B\in(0,\pi)$, $C\in(0,\pi)$

$\therefore A\in(0,\pi)$, $-B\in(-\pi,0)$, $-C\in(-\pi,0)$

$\therefore A-B\in(-\pi,\pi)$, $A-C\in(-\pi,\pi)$

$\therefore A-C=A-B$ 或 $A-C=-(A-B)$.

若 $A-C=A-B$, 则 $-C=-B$, $B=C$. $\therefore \sin B=\sin C$. 矛盾.

$\therefore A-C=-(A-B)=B-A$. $\therefore 2A=B+C$.

$\because B+C=\pi-A$. $\therefore 2A=\pi-A$. $\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$ 且 $B\neq C$ (假设 $B=C$, 则 $\sin B=\sin C$. 矛盾. $\therefore B\neq C$).

假设 $B=\frac{\pi}{3}$. 则 $\because A=\frac{\pi}{3}$ $\therefore C=\pi-A-B=\frac{\pi}{3}$ $\therefore$ ~~sinB=~~ $B=C$

$\therefore \sin B=\sin C$ 矛盾. $\therefore B\neq\frac{\pi}{3}$. 同理可证: $C\neq\frac{\pi}{3}$.

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$ 且 $B\neq C$ 且 $B\neq\frac{\pi}{3}$ 且 $C\neq\frac{\pi}{3}$.

$\therefore \triangle ABC$ 是 $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 的三角形, 且不是等边三角形, 不是等腰三角形.

法2：先推导和差化积公式.

设 $x+y=A$， $x-y=B$. 则：$x=\frac{A+B}{2}$， $y=\frac{A-B}{2}$

$$\cos x-\cos y=\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$
$$=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)-\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)$$
$$=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\therefore \cos B-\cos C=-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}=-2\sin\frac{\pi-A}{2}\sin\frac{B-C}{2}=-2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$\sin C-\sin B=2\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}=2\cos\frac{\pi-A}{2}\sin\frac{C-B}{2}=\cancel{2\sin\frac{A}{2}}\ 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}$$
$$=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$\because$ $B\in(0,\pi)$ ，$C\in(0,\pi)$ $\therefore -C\in(-\pi,0)$ $\therefore B-C\in(-\pi,\pi)$

$\therefore \frac{B-C}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\because A\in(0,\pi)$ $\therefore \frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore \sin\frac{A}{2}>0$， $\cos\frac{A}{2}>0$ ， $\tan\frac{A}{2}>0$

$\because \sin C-\sin B\neq 0$ $\therefore -2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\neq 0$. $\therefore \sin\frac{B-C}{2}\neq 0$ $\therefore \frac{B-C}{2}\neq 0$ $\therefore B\neq C$.

$$\therefore \frac{\cos B-\cos C}{\sin C-\sin B}=\frac{-2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$$

$\therefore \tan A=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$ $\cancel{\therefore 1=\tan A\cdot\tan\frac{A}{2}=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}\cdot\tan\frac{A}{2}=\frac{2\tan^2\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}}$

$\therefore \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$ 假设 $1-\tan^2\frac{A}{2}=0$. 则 $\tan^2\frac{A}{2}=1$. $\therefore \tan\frac{A}{2}=\pm 1$

$\because \frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore \frac{A}{2}=\frac{\pi}{4}$， $\tan\left(\frac{A}{2}\right)=1$. $\therefore A=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \tan A$ 无意义. 矛盾. $\therefore 1-\tan^2\frac{A}{2}\neq 0$

$\therefore 2\tan^2\frac{A}{2}=1-\tan^2\frac{A}{2}$ $\therefore 3\tan^2\frac{A}{2}=1$ $\therefore \tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ （注意 $\tan\frac{A}{2}>0$）

$\because \frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore \frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$ $\therefore A=\frac{\pi}{3}=60^\circ$. 同样可用反证法证明 $B\neq\frac{\pi}{3}$ 且 $C\neq\frac{\pi}{3}$.