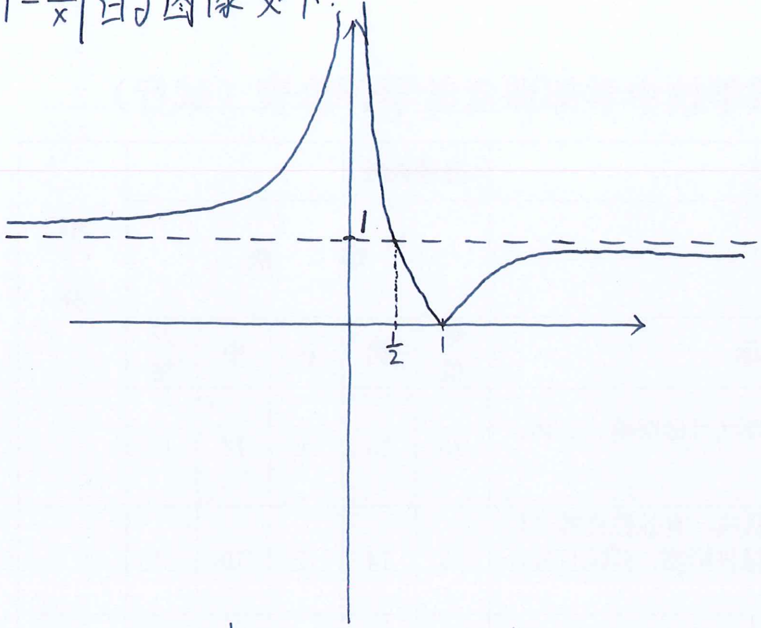
奥数教程第七版:高中第一分册 P31 例13.

解: (1). 函数 $f(x)=\left|1-\frac{1}{x}\right|$ 的定义域为: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

函数 $f(x)=\left|1-\frac{1}{x}\right|$ 的图像如下:



$$f(x)=\left|1-\frac{1}{x}\right|=\begin{cases}1-\frac{1}{x}, & x\in(-\infty,0)\\ \frac{1}{x}-1, & x\in(0,1]\\ 1-\frac{1}{x}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的值域为: $[0,+\infty)$

$\therefore$ ~~f(x)在~~ 假设存在实数 $a,b\ (a<b)$,使得函数 $f(x)$ 的定义域和值域都是 $[a,b]$.

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[a,b]$. $\therefore [a,b]\subseteq[0,+\infty)$

$\therefore 0\leq a<b$. $\because [a,b]\subseteq(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $\therefore 0<a<b$.

$\therefore$ 分如下的三种情况讨论:

① $1\leq a$. ② $a<1<b$ ③ $b\leq 1$

情况①: 此时有: $1\leq a<b$. $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增.

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为: $\left[1-\frac{1}{a},1-\frac{1}{b}\right]$

$\therefore \begin{cases}a=1-\frac{1}{a}\\ b=1-\frac{1}{b}\end{cases}$ $\because 0<1\leq a<b$ $\therefore \begin{cases}a^2-a+1=0\\ b^2-b+1=0.\end{cases}$ $\because$ 方程 $x^2-x+1=0$ 的 $\Delta=-3<0$

$\therefore$ 方程 $x^2-x+1=0$ 无实数根.

$\therefore$ 矛盾.

情况②：此时有：$0<a<1<b$. ∵$f(x)$在$[a,1]$上严格单调递减，在$[1,b]$上严格单调递增

∴$f(x)$在$[a,b]$上的值域为：$[0,\max\{\frac{1}{a}-1,1-\frac{1}{b}\}]$

∴$a=0$. 矛盾

情况③：此时有：$0<a<b\leq 1$. ∵$f(x)$在$[a,b]$上严格单调递减

∴$f(x)$在$[a,b]$上的值域为：$[\frac{1}{b}-1,\frac{1}{a}-1]$

∴$\begin{cases} a=\frac{1}{b}-1 \\ b=\frac{1}{a}-1 \end{cases}$ ∵$0<a<b$ ∴$\begin{cases} ab=1-b \\ ab=1-a \end{cases}$ ∴$1-b=1-a$，$a=b$. 矛盾

∴不存在实数a,b $(a<b)$，使得函数$f(x)$的定义域和值域都是$[a,b]$.

(2) ∵$f(x)$的定义域是$[a,b]$，值域是$[ma,mb]$ $(m\neq 0)$

∴$[ma,mb]\subseteq[0,+\infty)$

假设$m<0$，则：∵$a<b$ ∴$ma>mb$ ∴$[ma,mb]=\varnothing$. 矛盾. ∴$m>0$

∴$ma<mb$ ∴$0\leq ma<mb$

假设$ma=0$. 则∵$m\neq 0$ ∴$a=0$ ∴$f(x)$的定义域是$[0,b]$. 矛盾. ∴$ma\neq 0$

∴$0<ma<mb$

∴$m>0$且$0<ma<mb$

∵$ma>0$且$m>0$ ∴$a>0$ ∴$0<a<b$

∴分三种情况讨论

① $1\leq a$. 此时有：$1\leq a<b$ ∴$f(x)$在$[a,b]$上严格单调递增.

∴$f(x)$在$[a,b]$上的值域为：$[1-\frac{1}{a},1-\frac{1}{b}]$

∴$\begin{cases} ma=1-\frac{1}{a} \\ mb=1-\frac{1}{b} \end{cases}$ ∵$0<1\leq a<b$ ∴$\begin{cases} ma^2-a+1=0 \\ mb^2-b+1=0 \end{cases}$ 令$g(x)=mx^2-x+1$ $(m>0)$

∴方程$mx^2-x+1=0$在$[1,+\infty)$上有2个不相等的实数根$\Leftrightarrow\begin{cases} \Delta=1-4m>0 \\ -\frac{-1}{2m}>1 \\ g(1)\geq 0 \end{cases}$

(⇒)：∵方程 $mx^2-x+1=0$ 在 $[1,+\infty)$ 上有2个不相等的实数根.

∴设这两个不相等的实数根为 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ ∴ $1\le x_1<x_2$.

∴ $\Delta=1-4m>0$ 且 $-\frac{-1}{2m}>x_1\ge 1$

∴ $g(x)=mx^2-x+1$ 在 $(-\infty,-\frac{-1}{2m}]$ 上严格单调递减，$1\le x_1<-\frac{-1}{2m}$

∴ $g(1)\ge g(x_1)=0$

(⇐)：∵ $\Delta=1-4m>0$ ∴方程 $mx^2-x+1=0$ 在R上有2个不相等的实数根.

∵ $-\frac{-1}{2m}>1$，$g(-\frac{-1}{2m})<0$，$m>0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{-1}{2m}]$ 上严格减，在 $[-\frac{-1}{2m},+\infty)$ 上严格增

∴ $g(x)$ 在 $(-\frac{-1}{2m},+\infty)$ 上有唯一的一个零点.

若 $g(1)>0$. 则 $g(x)$ 在 $(1,-\frac{-1}{2m})$ 上有唯一的一个零点

若 $g(1)=0$ 则 $g(x)$ 在 $[1,-\frac{-1}{2m})$ 上有唯一的一个零点 1.

∴ $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有两个不相同的零点

∴方程 $mx^2-x+1=0$ 在 $[1,+\infty)$ 上有2个不相等的实数根 证毕.

∴ $m\in(0,\frac{1}{4})$ 此时 $a=\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2m}$，$b=\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2m}$

② $a<1<b$ ∴ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为：$[0,\max\{\frac{1}{a}-1, 1-\frac{1}{b}\}]$.

∴ $ma=0$ ∵ $m\ne 0$ ∴ $a=0$ ∴ $f(x)$ 的定义域是 $[0,b]$. 矛盾. ∴ $a<1<b$ 不合题意.

③ $b\le 1$. ∴ $0<a<b\le 1$. ∴ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递减.

∴ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为：$[\frac{1}{b}-1,\frac{1}{a}-1]$.

∴ $\begin{cases} ma=\frac{1}{b}-1 \\ mb=\frac{1}{a}-1 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} mab=1-b \\ mab=1-a \end{cases}$ ∴ $1-b=1-a$. $a=b$ 矛盾. ∴ $b\le 1$ 不合题意.

综上，$m\in(0,\frac{1}{4})$. 此时 $a=\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2m}$，$b=\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2m}$ 满足 $a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[ma,mb]$.

番外篇：我们来验证一下，$m\in(0,\frac{1}{4})$，$a=\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2m}$，$b=\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2m}$ 的确满足(2)的题意.

$\because m\in(0,\frac{1}{4})$ $\therefore 0<m<\frac{1}{4}$ $\therefore 0<4m<1$ $-1<-4m<0$ $0<1-4m<1$

$\therefore \sqrt{1-4m}\in(0,1)$

$\because b-a=\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2m}-\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2m}=\frac{2\sqrt{1-4m}}{2m}=\frac{\sqrt{1-4m}}{m}>0$ $\therefore a<b$.

$\because a-1=\frac{1-\sqrt{1-4m}-2m}{2m}=\frac{1-2m-\sqrt{1-4m}}{2m}=\frac{((1-2m)-\sqrt{1-4m})((1-2m)+\sqrt{1-4m})}{2m((1-2m)+\sqrt{1-4m})}=\frac{(1-2m)^2-1+4m}{2m-4m^2+2m\sqrt{1-4m}}$

$(\frac{1}{2}<1-2m+\sqrt{1-4m}<2)$

$=\frac{4m^2}{2m(1-2m+\sqrt{1-4m})}=\frac{2m}{1-2m+\sqrt{1-4m}}>0$

$\therefore a>1$ $\therefore 1<a<b$. $\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增.

$\because f(a)=1-\frac{1}{a}=1-\frac{2m}{1-\sqrt{1-4m}}=\frac{1-\sqrt{1-4m}-2m}{1-\sqrt{1-4m}}=\frac{(1-\sqrt{1-4m})(1+\sqrt{1-4m})-2m(1+\sqrt{1-4m})}{(1-\sqrt{1-4m})(1+\sqrt{1-4m})}$

$=\frac{1-1+4m-2m-2m\sqrt{1-4m}}{1-1+4m}=\frac{2m(1-\sqrt{1-4m})}{4m}=\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2}=ma$.

$f(b)=1-\frac{1}{b}=1-\frac{2m}{1+\sqrt{1-4m}}=\frac{1+\sqrt{1-4m}-2m}{1+\sqrt{1-4m}}=\frac{(1+\sqrt{1-4m})(1-\sqrt{1-4m})-2m(1-\sqrt{1-4m})}{(1+\sqrt{1-4m})(1-\sqrt{1-4m})}$

$=\frac{1-1+4m-2m+2m\sqrt{1-4m}}{1-1+4m}=\frac{2m(1+\sqrt{1-4m})}{4m}=\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}=mb$

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为：$[f(a),f(b)]=[ma,mb]$

验证完毕！