含绝对值的三角函数的周期性.

1. $f(x)=|\sin x|$, $x\in\mathbb{R}$. 求证：$f(x)$的最小正周期是π.

proof: $\pi\neq 0$. 对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有:

$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x).$$

$\therefore$ π是$f(x)$的一个周期.

对$\forall T\in(0,\pi)$. 假设T是$f(x)$的周期，则有：对$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+T)=f(x)$

$\therefore$ $f(0+T)=f(0)$, 即: $|\sin T|=|\sin 0|=0$ $\quad\therefore \sin T=0$.

$\because T\in(0,\pi)$ $\quad\therefore \sin T>0$ 矛盾.

$\therefore$ T不是$f(x)$的周期.

$\therefore$ $f(x)$的最小正周期是π. $\square$

2. $f(x)=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|$. $x\in\mathbb{R}$. 求证：$f(x)$的最小正周期是2π.

proof: $2\pi>0$, 对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有: $f(x+2\pi)=\left|\sin(x+2\pi)+\frac{1}{2}\right|=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|=f(x)$

$\therefore$ 2π是$f(x)$的一个周期.

对$\forall T\in(0,2\pi)$. 假设T是$f(x)$的周期，则有：对$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+T)=f(x)$

$\therefore$ $f(0+T)=f(0)$ 且 $f(\frac{\pi}{2}+T)=f(\frac{\pi}{2})$

$\therefore$ $\left|\sin(T)+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ 且 $\left|\cos(T)+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$

$\because$ $\left|\sin(T)+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \sin(T)+\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \sin(T)=0$或$-1$.

若$\sin(T)=0$, 则: $\because T\in(0,2\pi)$ $\quad\therefore T=\pi$ $\quad\therefore \left|\cos(T)+\frac{1}{2}\right|=\left|\cos(\pi)+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\neq\frac{3}{2}$ 矛盾.

若$\sin(T)=-1$, 则: $\because T\in(0,2\pi)$ $\quad\therefore T=\frac{3}{2}\pi$ $\quad\therefore \left|\cos(T)+\frac{1}{2}\right|=\left|\cos(\frac{3}{2}\pi)+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\neq\frac{3}{2}$ 矛盾.

$\therefore$ 矛盾. $\therefore$ T不是$f(x)$的周期 $\quad\therefore$ $f(x)$的最小正周期是2π. $\square$

3. $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$, $x\in\mathbb{R}$. 求证：$f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$.

proof: $\frac{\pi}{2}>0$. 对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有：$f(x+\frac{\pi}{2})=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|+|\cos(x+\frac{\pi}{2})|=|\cos x|+|-\sin x|$

$=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$. $\therefore$ $\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的一个周期.

对$\forall T\in(0,\frac{\pi}{2})$，假设T是$f(x)$的周期，则有：对$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+T)=f(x)$

$\therefore f(0+T)=f(0)$. 即：$|\sin T|+|\cos T|=1$

$\because T\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\therefore \sin T>0$ 且 $\cos T>0$

$\therefore 1=|\sin T|+|\cos T|=\sin T+\cos T=\sqrt{2}\sin(T+\frac{\pi}{4})$

$\because T\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\therefore T+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ $\therefore \sin(T+\frac{\pi}{4})\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

$\therefore \sqrt{2}\sin(T+\frac{\pi}{4})\in(1,\sqrt{2}]$ $\therefore \sqrt{2}\sin(T+\frac{\pi}{4})>1$ 矛盾.

$\therefore$ T不是$f(x)$的周期. $\therefore f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$ $\square$