Lemma：对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

proof：分三种情况讨论：

① $x>0$. $\therefore |x|=x>0>-x=-|x|$.

$\therefore |x|\geqslant x\geqslant -|x|$. $\therefore -|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

② $x=0$ $\therefore |x|=|0|=0$. $-|x|=-0=0$

$\therefore -|x|=x=|x|$. $\therefore -|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

③. $x<0$ $\therefore -x>0$. $|x|=-x>0>x=-(-x)=-|x|$

$\therefore -|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

$\therefore$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$. $\square$.

Lemma：对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，有：$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

proof：$\because -|x|\leqslant x\leqslant|x|$，$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$.

$\therefore -(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|$.

$\therefore |x+y|\leqslant|x|+|y|$. $\square$.

Lemma：对 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$，有：

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

proof：当 $n=1$ 时，$|x_1|\leqslant|x_1|$ 显然成立.

当 $n=2$ 时，$|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|$ 已证！

当 $n=3$ 时，$|x_1+x_2+x_3|\leqslant|x_1+x_2|+|x_3|\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|$

假设当 $n=k$ 时，有：$|x_1+x_2+\cdots+x_k|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|$. $(k\in\mathbb{N}_+,\ k\geqslant3)$

则当 $n=k+1$ 时，有：

$$|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}| \le |x_1+x_2+\cdots+x_k| + |x_{k+1}|$$
$$\le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|$$

$\therefore$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，有：$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$. $\square$.

现在我们来解决此题：

设 $f(x)=x^2+px+q$，$p,q\in\mathbb{R}$. 若 $|f(x)|$ 在 $-1\le x\le 1$ 时的最大值为 M，求 M 的最小值.

解：$\because$ $|f(x)|$ 在 $-1\le x\le 1$ 时的最大值为 M

$\therefore |f(-1)|\le M$，$|f(0)|\le M$，$|f(1)|\le M$

$\therefore |1-p+q|\le M$，$|q|\le M$，$|1+p+q|\le M$

$\therefore |1-p+q|\le M$，$|-q|=|q|\le M$，$|1+p+q|\le M$.

$\therefore |1-p+q|+|-q|+|-q|+|1+p+q|\le 4M$

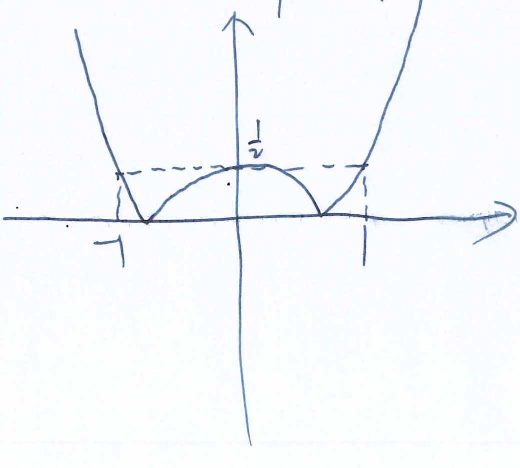
$\cancel{\therefore 4M}$

$\therefore 4M \ge |1-p+q|+|-q|+|-q|+|1+p+q|$

$\ge |1-p+q-q-q+1+p+q| = |2| = 2$ $\qquad \frac{1}{4}>0$

$\therefore M\ge \frac{1}{2}$

当 $p=0$，$q=-\frac{1}{2}$ 时，$|f(x)|$ 的图像如下：



此时 $|f(x)|$ 在 $-1\le x\le 1$ 时的最大值为 $M=\frac{1}{2}$.

$\therefore M$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.