奥数教程第七版 高中第一分册 P42 13题

当a为何值时，不等式

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5\left(x^2+ax+6\right)+\log_a 3\geqslant 0$$

有且只有一个解？

解：$\begin{cases} a>0\text{且}a\neq 1 \\ \frac{1}{a}>0\text{且}\frac{1}{a}\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow a>0\text{且}a\neq 1$.

$\therefore$ 原不等式左边 $=\dfrac{\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)}{\log_3 a^{-1}}\cdot\log_5\left(x^2+ax+6\right)+\dfrac{\log_3 3}{\log_3 a}$

$$=-\frac{\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)}{\log_3 a}\cdot\log_5\left(x^2+ax+6\right)+\frac{1}{\log_3 a}$$

$$=\frac{-\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5\left(x^2+ax+6\right)+1}{\log_3 a}$$

令 $f(t)=\log_3\left(\sqrt{t}+1\right)\cdot\log_5(t+1)$. $t\in[0,+\infty)$

对 $\forall t_1, t_2\in[0,+\infty)$, $t_1<t_2$.

$\because$ $1\leq\sqrt{t_1}+1<\sqrt{t_2}+1$, $1\leq t_1+1<t_2+1$

$\therefore$ $0\leq\log_3(\sqrt{t_1}+1)<\log_3(\sqrt{t_2}+1)$, $0\leq\log_5(t_1+1)<\log_5(t_2+1)$

$\therefore$ $0\leq\log_3(\sqrt{t_1}+1)\log_5(t_1+1)<\log_3(\sqrt{t_2}+1)\log_5(t_2+1)$.

$\therefore$ $0\leq f(t_1)<f(t_2)$

$\therefore$ $f(t)$在$[0,+\infty)$上严格单调递增，且对$\forall t\in[0,+\infty)$, $f(t)\geqslant 0$.

$f(4)=\log_3 3\cdot\log_5 5=1$.

接下来对 a 分类讨论.

① $a>1$. $\therefore \log_3 a>0$.

$$\therefore \frac{-\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+1}{\log_3 a}\geqslant 0$$

$\Leftrightarrow -\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+1\geqslant 0$

$\Leftrightarrow \log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\leqslant 1$

$\Leftrightarrow f(x^2+ax+5)\leqslant 1=f(4)$

$\Leftrightarrow 0\leqslant x^2+ax+5\leqslant 4$

此时若要不等式有且仅有一个解，只能 $\frac{20-a^2}{4}=4$. 即 $a^2=4$，$a=2$.

此时唯一的解是：$x=-1$.

$\therefore a=2$ 时，原不等式有且只有一个解 $x=-1$.

② $0<a<1$. $\therefore \log_3 a<0$.

$$\therefore \frac{-\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+1}{\log_3 a}\geqslant 0$$

$\Leftrightarrow -\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+1\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\geqslant 1$

$\Leftrightarrow f(x^2+ax+5)\geqslant 1=f(4)$

$\Leftrightarrow x^2+ax+5\geqslant 4$.

$\because y=x^2+ax+5$ 是开口向上的抛物线 $\therefore$ 不等式 $x^2+ax+5\geqslant 4$ 必有无穷多个解.

$\therefore 0<a<1$ 不合题意. 综上，$a=2$.