

# 人大附中 2023~2024 学年度第二学期高一年级数学期中练习

2024 年 4 月 23 日

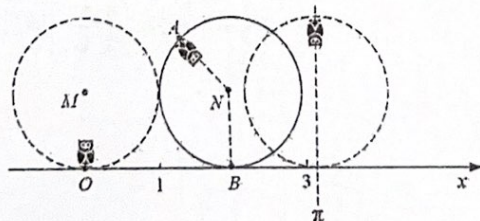
制卷人：宁少华 王鼎 审卷人：吴中才

说明：本试卷共六道大题，共 7 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

## 第 I 卷（共 18 题，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置。）

- 在平行四边形  $ABCD$  中， $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} =$  ( )  
A.  $\overrightarrow{CA}$  B.  $\overrightarrow{AC}$  C.  $\overrightarrow{BD}$  D.  $\overrightarrow{DB}$
- 已知角  $\alpha$  终边一点  $P(1, y)$ ，若  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则  $y$  的值为 ( )  
A.  $\sqrt{5}$  B. 2 C.  $\pm\sqrt{5}$  D.  $\pm 2$
- 下列函数中，既是偶函数又在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  单调递增的是 ( )  
A.  $y = \tan x$  B.  $y = \sin x$  C.  $y = \cos x$  D.  $y = x \sin x$
- 已知  $P$  为  $\triangle ABC$  所在平面内一点， $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CP}$ ，则 ( )  
A.  $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$  B.  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$   
C.  $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  D.  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- 把函数  $f(x) = \sin 2x$  的图像按向量  $m = (-\frac{\pi}{6}, 1)$  平移后，得到新函数的解析式为 ( )  
A.  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$  B.  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1$   
C.  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$  D.  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$
- 在人大附中  $\pi$  节活动的入场券中有如下图形，单位圆  $M$  与  $x$  轴相切于原点  $O$ ，该圆沿  $x$  轴向右滚动，当小猫头鹰位于最上方时，其对应  $x$  轴的位置正好是  $\pi$ ，若在整个运动过程中当圆  $M$  滚动到与出发位置时的圆相外切时（此时记圆心为  $N$ ），此时小猫头鹰位于  $A$  处，圆  $N$  与  $x$  轴相切于  $B$ ，则劣弧  $AB$  所对应的扇形面积是 ( )



A. 1

B. 2

C.  $\frac{\pi}{3}$

D.  $\frac{\pi}{4}$

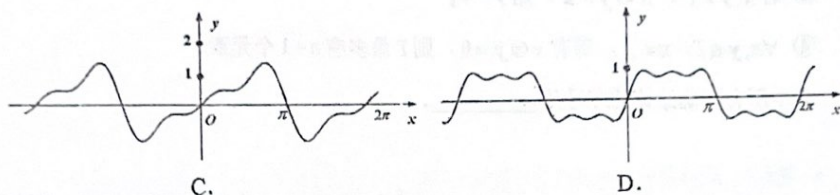
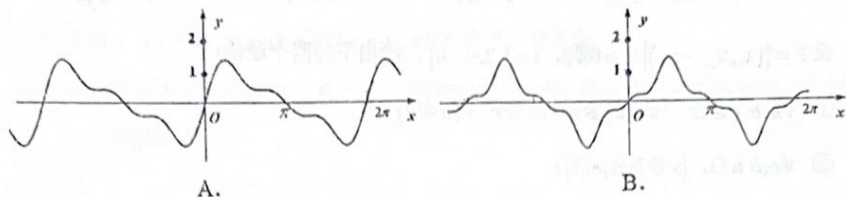
7. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega \neq 0$ ), 则 " $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ " 是 " $f(x)$  为偶函数" 的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

8. 已知  $O$  为坐标原点,  $P$  是  $\alpha$  终边上一点, 其中  $\cos \alpha = \frac{4}{5}, |\vec{OP}| = 4$ , 非零向量  $\vec{a}$  的方向与  $x$  轴正方向相同, 若  $\vec{OQ} = \frac{\lambda}{|\vec{a}|} \vec{a}, \lambda \in [0, 5]$ , 则  $|\vec{OP} - \vec{OQ}|$  取值范围是 ( )

- A.  $[\frac{16}{5}, 3]$       B.  $[\frac{12}{5}, 3]$       C.  $[\frac{16}{5}, 4]$       D.  $[\frac{12}{5}, 4]$

9. 函数  $f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}$  图像可能是 ( )



10. 已知函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , 下列结论错误的是 ( )

- A.  $f(x)$  的图像有对称轴  
B. 当  $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$  时,  $\cos x < f(x) < 1$   
C.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  有最小值  
D. 方程  $f(x) = -\cos x \ln x$  在  $(1, \pi)$  上无解

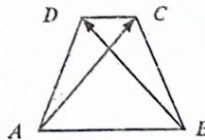
二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

11. 若  $\sin \theta = \frac{3}{4}$ , 则  $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) =$  \_\_\_\_\_.

12. 能使 " $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sin \alpha$ " 成立的一个  $\alpha$  的值为 \_\_\_\_\_.

13. 四边形  $ABCD$  中,  $\vec{AB} = t\vec{DC}$ , 且  $\vec{AB} = \lambda\vec{AC} + \mu\vec{BD}$ ,

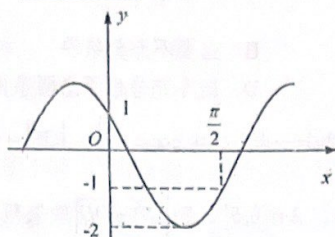
若  $\lambda - \mu = \frac{4}{3}$ , 则  $t =$  \_\_\_\_\_.





14. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$ ) 的部分图像如图所示,

则  $\omega =$  \_\_\_\_\_,  $\varphi =$  \_\_\_\_\_.



15. 已知  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . 在  $\Omega = \{x | x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$  中,

设  $0 = (0, 0, \dots, 0), e = (1, 1, \dots, 1), \forall a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \Omega$ ,

定义:  $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n); a \otimes b = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n); |a| = \sum_{i=1}^n |a_i|$ .

设  $T = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i = 0 \text{ 或 } 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ . 给出下列四个结论:

- ①  $\forall a, b, c \in \Omega, (a + b) \otimes c = (a \otimes c) + (b \otimes c);$
- ②  $\forall a, b \in \Omega, |a \otimes b| \leq |a| |b|;$
- ③ 若  $x, y \in T, x \otimes y = x$ , 则  $y = e;$
- ④  $\forall x, y \in T, x \neq y$ , 都有  $x \otimes y = 0$ , 则  $T$  最多有  $n+1$  个元素.

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 35 分, 解答应写出文字说明过程或演算步骤, 请将答案写在答题纸上的相应位置.)

16. (本小题 11 分)

已知函数  $y = \cos x + a$  的最大值为 2, 将其图像向右平移  $\frac{\pi}{6}$  得到函数  $y = f(x)$  的图像; 把

$y = f(x)$  图像上的所有点纵坐标不变, 横坐标变为原来的  $\frac{1}{2}$ , 得到  $y = g(x)$  的图像.

(I) 求  $y = g(x)$  的解析式和最小正周期;

(II) 求  $y = g(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上的单调递减区间.

17. (本小题 12 分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ).

(I) 若  $f(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 求  $\varphi$  的值;

(II) 已知  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$  上单调递增,  $f(\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{2}$ , 再从条件 ①, 条件 ②, 条件

③ 这三个条件中选择一个作为已知, 使函数  $f(x)$  存在, 求  $\omega, \varphi$  的值.

条件 ①:  $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ ;

条件 ②:  $f(\frac{\pi}{6}) = 0$ ;

条件 ③:  $\forall a \in \mathbb{R}, f(x)$  在区间  $[a, a+2\pi]$  上至少 2 个零点.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题 12 分)

在平面直角坐标系中,  $O$  为坐标原点,  $A(2,4)$ ,  $B(3,1)$ ,  $C(1,2)$ ,  $\overline{CD} \parallel \overline{OB}$ ,  $|\overline{OD}| = 5$ .

(I) 求  $\overline{OD}$  的坐标;

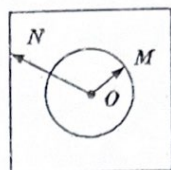
(II) 已知  $\overline{OM} = \lambda \overline{OA} + (1-\lambda) \overline{OB}$ , 且  $|\overline{OM}| - |\overline{MD}| = |\overline{OD}|$ , 求  $\lambda$  的值.



## 第 II 卷 (共 11 道题, 满分 50 分)

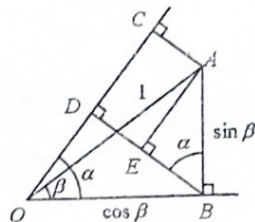
一、选择题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.)

19. 如图, 边长为 4 的正方形中心与单位圆圆心  $O$  重合,  $M, N$  分别在圆周上, 正方形的四条边上运动, 则  $|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}|$  的取值范围是 ( )



- A.  $[1, 2\sqrt{2}]$                       B.  $[1, 2\sqrt{2}+1]$   
C.  $[\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$                       D.  $[\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+1]$

20. 古希腊数学家帕普斯 (Pappus, 约 A.D.290—A.D.350) 利用如图所示的几何图形, 由  $|OC| = |OD| + |CD|$  直观简洁地证明了当  $\alpha, \beta$  为锐角时的一个三角函数公式, 这个公式是 ( )



- A.  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$   
B.  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$   
D.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$   
C.  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

21. 已知函数  $f(x) = \tan x (\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)$ , 下列说法正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  图像关于原点对称, 且最小值为 0  
B.  $f(x)$  图像关于原点对称, 且最大值为 2  
C.  $f(x)$  图像关于  $y$  轴对称, 且最小值为 0  
D.  $f(x)$  图像关于  $y$  轴对称, 且最大值为 2

22. 下列函数中, 满足 “ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) \leq nf(x)$ ” 的是 ( )

- A.  $y = |\cos x|$                       B.  $y = |\sin x|$   
C.  $y = \cos |x|$                       D.  $y = \sin |x|$

23. 若  $e^x + a \sin x - \cos x \geq 0$  在  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  恒成立, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $[0, +\infty)$                       B.  $[-e^{\frac{\pi}{2}}, +\infty)$   
C.  $[-e^{\frac{\pi}{2}}, 0]$                       D.  $[0, e^{\frac{\pi}{2}}]$

24. 已知  $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{4}\right)$ ,  $B\left(x_2, \frac{x_2^2}{4}\right)$ ,  $C(0, 2)$  三点共线, 其中  $x_1 \neq x_2$ , 点  $A$  关于  $y$  轴的对称点为

点  $D$ , 给出下面四个结论:

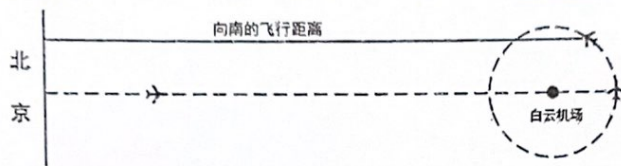
- ①  $\triangle AOB$  不可能为等边三角形;
- ② 设  $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ , 则当  $\lambda\mu$  最大时,  $x_1 + x_2 = 0$ ;
- ③  $x_1 x_2 = -8$ ;
- ④ 当  $AB$  不与  $y$  轴垂直时, 直线  $BD$  过定点.

其中正确结论的个数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在答题纸上的相应位置.)

25. 一架飞机从北京向南飞行 1935 公里到达广州, 假设在广州白云国际机场上空的等待航线是圆形, 飞机到达机场上空后, 继续沿原航线向南飞行 20 公里后, 开始在直径 40 公里的圆形等待航线上飞行, 飞机每 15 分钟飞行一周, 如图所示, 设飞机在等待航线上飞行的时间为  $t$  小时, 飞机从北京出发向南的飞行距离为  $f(t)$ ,  $f(t)$  可以近似地表示为  $f(t) = 1935 + A \cos \omega t$  ( $A > 0$ ,  $\omega > 0$ ), 则  $A =$  \_\_\_\_\_,  $\omega =$  \_\_\_\_\_.



26. 若  $f(x) = 2 \sin(x + \varphi) + \cos x$  的最大值为 3, 则  $\varphi =$  \_\_\_\_\_.
27. 已知向量  $m = (a + \cos x, 1)$ ,  $n = (-1, a + \cos y)$ , 则集合  $\{a \in \mathbf{R} | \exists x, y \in \mathbf{R}, m \parallel n\}$  中的所有元素之和为 \_\_\_\_\_.
28. 在现实生活中, 一个符合实际的函数模型经常是将不同的函数组合得到的, 如听音乐家演奏音乐时, 我们听到的声音常常就是多种不同乐器产生的声波叠加的结果. 在学习了向量和三角函数后, 人大附中某研学小组利用所学知识研究若干振幅相同, 同频同向的简谐波叠加后, 得到新的简谐波的振幅和初相规律, 该小组把

$$x_i = a \cos[\omega t + (i-1)\theta_0], \quad i = 1, 2, \dots, N (N \text{ 为正整数})$$

叠加, 研究  $\sum_{i=1}^N x_i = A \cos(\omega t + \varphi)$  中的  $A$  和  $\varphi$ , 其中  $a > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $A > 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

(1) 当  $a = \omega = 1$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $N = 3$  时,  $A =$  \_\_\_\_\_,  $\varphi =$  \_\_\_\_\_.

(2) 当  $a = 2$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{12}$ ,  $N = 11$  时,  $A =$  \_\_\_\_\_,  $\varphi =$  \_\_\_\_\_.



三、解答题（本小题 10 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

29.（本小题 10 分）

已知  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ ,  $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $n$  维向量, 若  $-1 < x_i < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 则称  $a$  为可聚向量. 对于可聚向量  $a$  实施变换  $T$ : 把  $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的某两个坐标  $x_i, x_j$  ( $i \neq j$ ) 删除后, 添加  $\frac{x_i + x_j}{1 + x_i x_j}$  作为最后一个坐标, 得到一个  $n-1$  维新向量  $a(1)$ , 如果  $a(1)$  为可聚向量, 可继续实施变换  $T$ , 得到新向量  $a(2)$ ,  $\dots$ , 如此经过  $k$  次变换后得到的向量记为  $a(k)$ . 特别的, 二维可聚向量变换后得到一个实数. 若向量  $a$  经过若干次变换后结果为实数, 则称该实数为向量  $a$  的聚数.

(I) 设  $a = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ , 直接写出  $a(1)$  的所有可能结果;

(II) 求证: 对于任意一个  $n$  ( $n \geq 2$ ) 维可聚向量  $a$ , 变换  $T$  总可以进行  $n-1$  次;

(III) 设  $a = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right)$ , 求  $a$  的聚数的所有可能结果.