奥数教程第七版高中第一分册 P23 18题

求所有的正实数对 $(a,b)$，使得函数 $f(x)=ax^2+b$ 满足：对任意实数 $x,y$，有：

$$f(xy)+f(x+y)\geqslant f(x)f(y).$$

解：$\because (a,b)$ 是正实数对 $\therefore a>0$ 且 $b>0$.

$\because$ 对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，有：$f(xy)+f(x+y)\geqslant f(x)f(y)$

$\therefore$ 对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，有：$ax^2y^2+b+a(x+y)^2+b\geqslant (ax^2+b)(ay^2+b)$

$\therefore$ 对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，有：$ax^2y^2+a(x+y)^2+2b\geqslant(ax^2+b)(ay^2+b)$

$\therefore$ 对于 $y=0$，$\forall x\in\mathbb{R}$，有：$ax^2+2b\geqslant abx^2+b^2$

$\therefore$ 对于 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$a(b-1)x^2+b^2-2b\leqslant 0$.

① 当 $b=1$ 时，$-1\leqslant 0$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立. $\therefore b=1$ 符合要求.

② 当 $b>1$ 时，$a(b-1)>0$. $\therefore y=a(b-1)x^2+b^2-2b$ 是开口向上的~~抛~~抛物线.

$\therefore$ 必然 $\exists x_0\in\mathbb{R}$，s.t. $a(b-1)x_0^2+b^2-2b>0$. $\therefore b>1$ 不符合要求.

③. $0<b<1$ 时，$a(b-1)<0$ $\therefore y=a(b-1)x^2+b^2-2b$ 是开口向下的抛物线.

且对称轴为直线 $x=0$. 当 $x=0$ 时，$y=b^2-2b<0$. $\therefore 0<b<1$ 符合要求.

$\therefore$ 当 $0<b\leqslant 1$ 时，对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$a(b-1)x^2+b^2-2b\leqslant 0$.

$\because$ 当 $y=-x$ 时，对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$ax^4+2b\geqslant a^2x^4+2abx^2+b^2$

$\therefore$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$a(a-1)x^4+2abx^2+b^2-2b\leqslant 0$

$\therefore$ 对 $\forall t\in[0,+\infty)$，有：$a(a-1)t^2+2abt+b(b-2)\leqslant 0$

① 当 $a=1$ 时，$\because 0<b\leqslant 1$ $\therefore 0<2b\leqslant 2$. $\therefore y=2bt+b(b-2)$ 是斜率为正的直线

$\therefore$ 当 $t\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$. $\therefore$ 当 $t\to+\infty$ 时，$y>0$. $\therefore a=1$ 不符合要求.

②. 当 $a>1$ 时，$a(a-1)>0$. $\therefore y=a(a-1)t^2+2abt+b(b-2)$ 是开口向上的抛物线. $\therefore$ 当 $t\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$. $\therefore$ 当 $t\to+\infty$ 时，$y>0$. $\therefore a>1$ 不符合要求.

③ 当$0<a<1$时，$a(a-1)<0$. $\therefore y=a(a-1)t^2+2abt+b(b-2)$是开响下的~~抛~~抛物线

对称轴为直线 $t=-\frac{2ab}{2a(a-1)}=-\frac{ab}{a(a-1)}>0$.

$\therefore$ 对$\forall t\in[0,+\infty)$，$y\leqslant 0 \iff \frac{4a(a-1)b(b-2)-4a^2b^2}{4a(a-1)}\leqslant 0$

$\iff 2a+b\leqslant 2$.

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 且 $2a+b\leqslant 2$ 时，对$\forall x\in\mathbb{R}$，有：$a(a-1)x^4+2abx^2+b^2-2b\leqslant 0$

$\therefore$ 对$\forall x,y\in\mathbb{R}$，$ax^2y^2+a(x+y)^2+2b\geqslant(ax^2+b)(ay^2+b)$ 的必要条件为：

$0<b\leqslant 1$ 且 $0<a<1$ 且 $2a+b\leqslant 2$

$\because x^2+y^2=(-x)^2+y^2\geqslant 2(-x)y=-2xy$.

$\therefore$ 当 $0<b\leqslant 1$ 且 $0<a<1$ 且 $2a+b\leqslant 2$ 时，有：

$a(1-b)\geqslant 0$ $\qquad \therefore a(1-b)(x^2+y^2)\geqslant a(1-b)(-2xy)$

$\therefore ax^2y^2+a(x+y)^2+2b-(ax^2+b)(ay^2+b)$

$=ax^2y^2+a(x^2+y^2)+2axy+2b-a^2x^2y^2-ab(x^2+y^2)-b^2$

$=a(1-a)x^2y^2+a(1-b)(x^2+y^2)+2axy+2b-b^2$

$\geqslant a(1-a)x^2y^2+2a(b-1)xy+2axy+b(2-b)$

$=a(1-a)(xy)^2+2ab\,xy+b(2-b)$ $\qquad$ (令$\lambda=xy$，$\lambda\in\mathbb{R}$).

$=a(1-a)\lambda^2+2ab\lambda+b(2-b)$. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

$\because 0<a<1$ $\qquad \therefore a(1-a)>0$

$\Delta=4a^2b^2-4a(1-a)b(2-b)=4a^2b^2-4ab(a-1)(b-2)$

$=4ab(2a+b-2)\leqslant 0$.

$\therefore a(1-a)\lambda^2+2ab\lambda+b(2-b)\geqslant 0$. 对$\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

$\therefore ax^2y^2+a(x+y)^2+2b\geqslant(ax^2+b)(ay^2+b)$. 对$\forall x,y\in\mathbb{R}$. $\square$