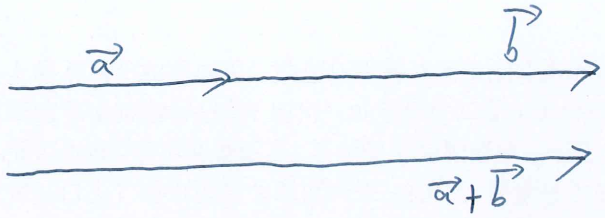
已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是非零向量．求证：

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}| \iff \vec{a},\vec{b}\text{ 方向相同}.$$

proof：($\Leftarrow$)：$\because$ $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相同　$\therefore$ 可以把 $\vec{b}$ 的起点平移到 $\vec{a}$ 的终点处，使 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 位于同一条直线上，即有：

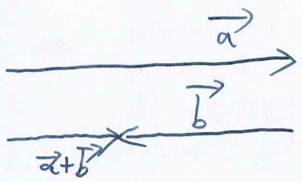


$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$　　$\therefore |\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$

($\Rightarrow$)：假设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向不相同，则分两种情况讨论．

① $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线．则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相反．有如下的三种可能．(按 $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$ 的大小关系分类讨论)

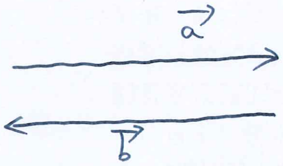
(i)



$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{b}|=|\vec{a}|$．　$\therefore |\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{b}|=|\vec{a}|$

$\therefore |\vec{b}|=0$．矛盾．

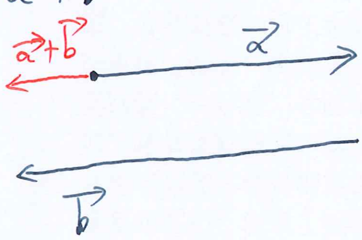
(ii)



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

$\therefore |\vec{a}|+|\vec{b}|=2|\vec{a}|>0=|\vec{0}|=|\vec{a}+\vec{b}|$．矛盾．

(iii)

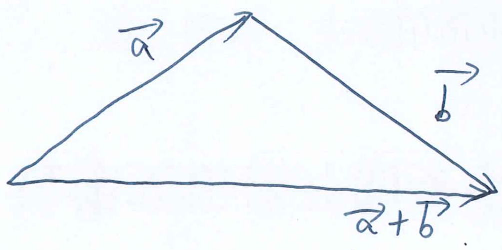


$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}|=|\vec{b}|$　$\therefore |\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}|=|\vec{b}|$

$\therefore 2|\vec{a}|=0$，$|\vec{a}|=0$　矛盾．

② $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线．则有如下的三角形法则的图示：

(总可以把 $\vec{b}$ 的起点平移到 $\vec{a}$ 的终点处)



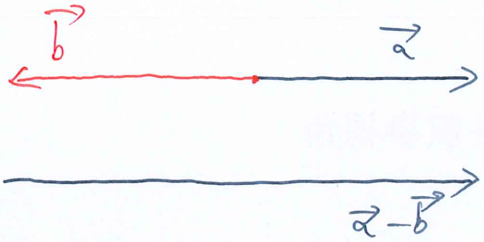
此时有：$|\vec{a}|+|\vec{b}|>|\vec{a}+\vec{b}|$．矛盾．

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同　□

已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是非零向量. 求证:

$$|\vec{a}|+|\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b} \text{ 方向相反}.$$

proof: ($\Leftarrow$) ∵ $\vec{a}$, $\vec{b}$ 方向相反. ~~∴有如下三种可能的情况~~ ∴有如下的图示:

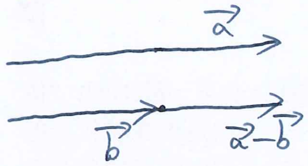


∴ $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$, $|\vec{a}|+|\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

($\Rightarrow$): 假设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 方向不相反. 则分两种情况讨论

① $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线. 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同. 有如下的三种可能 (按 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ 的大小关系分类讨论!)

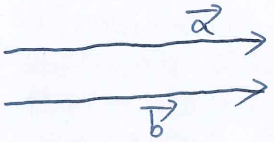
(i)



∴ $|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{b}| = |\vec{a}|$ ∴ $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{b}| = |\vec{a}|$

$|\vec{b}| = 0$ 矛盾.

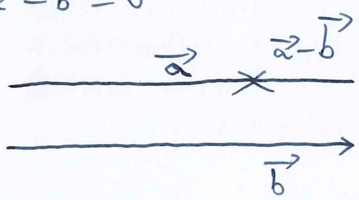
(ii)



∴ $|\vec{a}|+|\vec{b}| = 2|\vec{a}| > 0 = |\vec{0}| = |\vec{a}-\vec{b}|$. 矛盾.

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$

(iii)



∴ $|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ∴ $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}| = |\vec{b}|$

∴ $|\vec{a}| = 0$ 矛盾.

② $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线, 则总可以把 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的起点平移到同一点, 有如下的三角形法则的图示:

此时有 $|\vec{a}|+|\vec{b}| > |\vec{a}-\vec{b}|$. 矛盾.

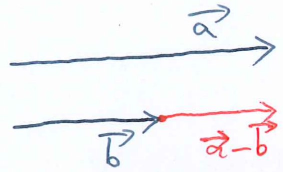
∴ $\vec{a}$, $\vec{b}$ 方向相反. □

已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是非零向量，求证：

$$\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| = |\vec{a}-\vec{b}| \iff \vec{a},\ \vec{b}\ \text{方向相同}$$

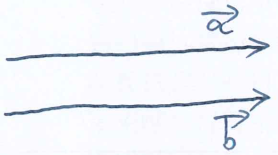
proof：($\Leftarrow$)：∵ $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相同，　∴有如下的三种可能性：

①



∴ $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}|-|\vec{b}| = \big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$

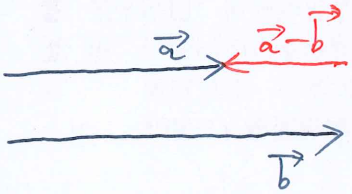
②



∴ $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{0}| = 0 = |\vec{a}|-|\vec{b}| = \big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$

③

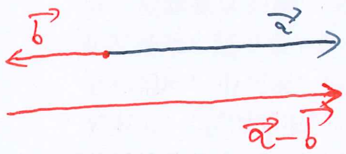


∴ $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{b}|-|\vec{a}| = \big||\vec{b}|-|\vec{a}|\big| = \big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$

($\Rightarrow$) 假设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向不相同．则分两种情况讨论

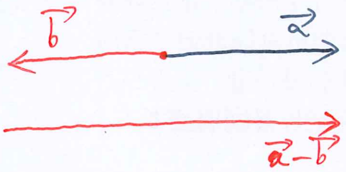
① $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线．则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相反．有如下的三种可能性：

(i)



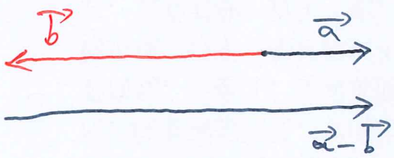
$|\vec{a}|>|\vec{b}|$．　∴ $\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| = |\vec{a}|-|\vec{b}| < |\vec{a}| < |\vec{a}-\vec{b}|$．矛盾

(ii)



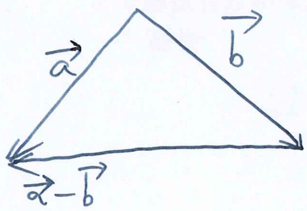
$|\vec{a}|=|\vec{b}|$．　∴ $\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| = 0 < |\vec{a}-\vec{b}|$　矛盾．

(iii)



$|\vec{a}|<|\vec{b}|$　∴ $\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| = |\vec{b}|-|\vec{a}| < |\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$　矛盾．

② $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，则总可以把 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的起点平移到同一点，有如下的三角形法则的图示：



∴ $|\vec{a}|-|\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$

$|\vec{b}|-|\vec{a}| < |\vec{a}-\vec{b}|$

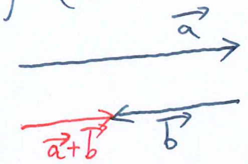
∴ $\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| < |\vec{a}-\vec{b}|$．矛盾．

∴ $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相同　□

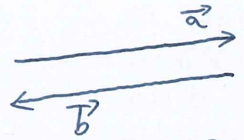
已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是非零向量，求证：

$$\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| = |\vec{a}+\vec{b}| \Longleftrightarrow \vec{a},\vec{b}\ \text{方向相反}.$$

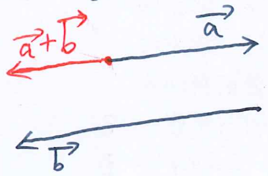
Proof：(⇐)：∵ $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相反　∴ 分以下三种情况讨论：

① 

$|\vec{a}|>|\vec{b}|$.　∴ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|-|\vec{b}| = \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$

② 

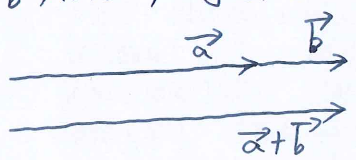
$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　∴ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{0}| = 0 = |\vec{a}|-|\vec{b}| = \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$

③ 

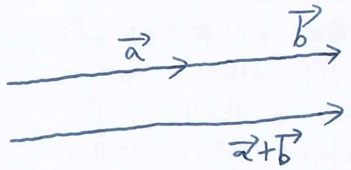
$|\vec{a}|<|\vec{b}|$　∴ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{b}|-|\vec{a}| = \left||\vec{b}|-|\vec{a}|\right| = \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$

(⇒) 假设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向不相反. 则分两种情况讨论

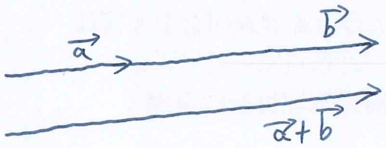
① $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共线，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相同. 有如下的三种可能：

(i) 

$|\vec{a}|>|\vec{b}|$　∴ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}| > |\vec{a}| > |\vec{a}|-|\vec{b}| = \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$ 矛盾.

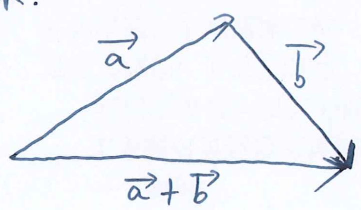
(ii) 

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　∴ $|\vec{a}+\vec{b}| > 0 = |\vec{a}|-|\vec{b}| = \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$，矛盾

(iii) 

$|\vec{a}|<|\vec{b}|$　∴ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}| > |\vec{b}| > |\vec{b}|-|\vec{a}| = \left||\vec{b}|-|\vec{a}|\right|$
$= \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$ 矛盾.

② $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，则总可以把 $\vec{b}$ 的始点平移到 $\vec{a}$ 的终点处，形成如下所示的三角形法则的图示：



$$|\vec{a}|-|\vec{b}| < |\vec{a}+\vec{b}|$$
$$|\vec{b}|-|\vec{a}| < |\vec{a}+\vec{b}|$$
$$\therefore \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| < |\vec{a}+\vec{b}|.$$　矛盾.

∴ $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相反.　□