奥数教程第七版 高中第一分册. P42 11题.

已知 $a>0$，$a\neq1$，求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围.

解: $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>ak\\ x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)\\ \log_a(x-ak)=\log_a\sqrt{x^2-a^2}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x>ak\\ x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)\\ x-ak=\sqrt{x^2-a^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>ak\\ x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)\\ 2kx=ak^2+a.\end{cases}$$

$\therefore$ 分如下的七种情况讨论:

① $k=-1$ 此时有: $ak=-a$ $\quad\therefore x\in(a,+\infty)$

$\because ak^2+a=a+a=2a>0$ $\quad x>a>0.$ $\quad 2kx=-2x<0$ $\quad\therefore$ 原方程无解.

② $k=0$ 此时有: $2kx=ak^2+a\Leftrightarrow0=a.$ $\quad\therefore$ 原方程无解.

③ $k=1$. 此时有: $ak=a$ $\quad\therefore x\in(a,+\infty)$

$\because 2kx=ak^2+a\Leftrightarrow x=a$ 又$\because$ $x>a$ $\quad\therefore$ 原方程无解.

④ $k\in(-1,0)$. 此时有: $-a<ak<0.$ $\quad\therefore x\in(a,+\infty)$

$\because k<0$ $\quad x>a>0$ $\quad\therefore 2kx<0$ $\quad\because ak^2+a>0$ $\quad\therefore$ 原方程无解.

⑤ $k\in(0,1)$ 此时有: $0<ak<a.$ $\quad\therefore x\in(a,+\infty)$

$\therefore 2kx=ak^2+a\Leftrightarrow x=\dfrac{ak^2+a}{2k}=\dfrac{ak}{2}+\dfrac{a}{2k}\geqslant a.$ "=" iff $\dfrac{ak}{2}=\dfrac{a}{2k}$ iff $k=\pm1$

$\therefore x=\dfrac{ak^2+a}{2k}>a.$ $\quad\therefore x=\dfrac{ak^2+a}{2k}\in(a,+\infty)$ $\quad\therefore$ 原方程有解

⑥ $k\in(1,+\infty)$. 此时有: $ak>a$. $\quad\therefore x\in(ak,+\infty)$

$\therefore 2kx=ak^2+a\Leftrightarrow x=\dfrac{ak^2+a}{2k}$

$\because \dfrac{ak^2+a}{2k}-ak=\dfrac{ak^2+a-2ak^2}{2k}=\dfrac{-ak^2+a}{2k}=\dfrac{a(-k^2+1)}{2k}<0$ $\quad\therefore\dfrac{ak^2+a}{2k}<ak$

$\therefore x=\dfrac{ak^2+a}{2k}\notin(ak,+\infty)$ $\quad\therefore$ 原方程无解.

⑦ $k\in(-\infty,-1)$，此时有：$ak<-a$．　　$\therefore x\in(ak,-a)\cup(a,+\infty)$

$\therefore 2kx=ak^2+a \iff x=\dfrac{ak^2+a}{2k}$

$\because \dfrac{ak^2+a}{2k}-ak=\dfrac{ak^2+a-2ak^2}{2k}=\dfrac{-ak^2+a}{2k}=\dfrac{a(-k^2+1)}{2k}>0$

$\therefore \dfrac{ak^2+a}{2k}>ak$

$\because \dfrac{ak^2+a}{2k}=-\dfrac{-ak^2-a}{2k}=-\left(-\dfrac{ak}{2}-\dfrac{a}{2k}\right)=-\left(\dfrac{a(-k)}{2}+\dfrac{a}{2(-k)}\right)\leqslant -a$

"$=$" iff $k=\pm1$

$\therefore \dfrac{ak^2+a}{2k}<-a$．

$\therefore x=\dfrac{ak^2+a}{2k}\in(ak,-a)$　　$\therefore$ 原方程有解．

综上，使原方程有解的k的取值范围为：$k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$