2017年全国高中数学联赛一试(A卷)第9题.

设k, m为实数，不等式$|x^2-kx-m|\leq 1$对所有$x\in[a, b]$成立．求证：$b-a\leq 2\sqrt{2}$

proof：令$f(x)=x^2-kx-m$．$\therefore$ 对$\forall x\in[a, b]$，有：$|f(x)|\leq 1$.

$\therefore$ 对$\forall x\in[a, b]$，有：$-1\leq f(x)\leq 1$

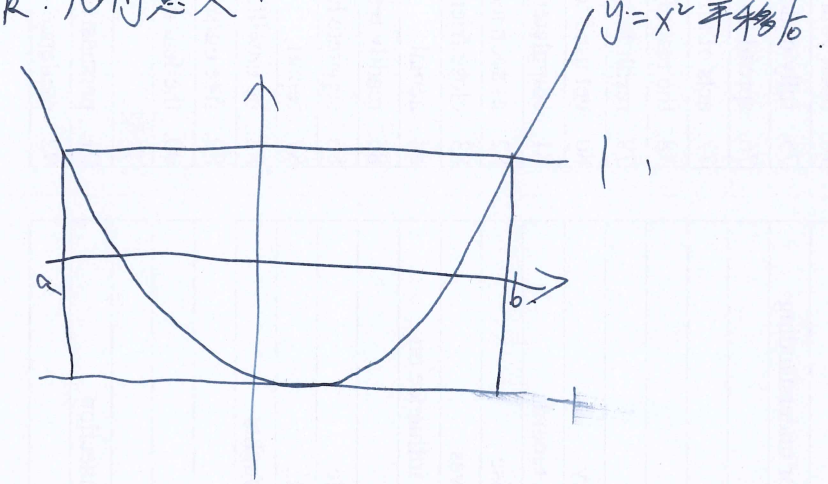
$\therefore f(a)\leq 1$ 且 $f(b)\leq 1$ 且 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq -1$.

$\therefore a^2-ka-m\leq 1$ 且 $b^2-kb-m\leq 1$ 且 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-k\cdot\frac{a+b}{2}-m\geq -1$

$\therefore$ 化简消元得：$(b-a)^2\leq 8$.（此处自己在草稿纸上尝试一下）.

$\therefore |b-a|\leq 2\sqrt{2}$. $\because b-a\geq 0$ $\therefore b-a\leq 2\sqrt{2}$. $\square$.

Remark：几何意义：



方程 $x^2-kx-m=1$ 的两根为：x_1, x_2.

$x_1+x_2=k$. $x_1\cdot x_2=-m-1$.

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+4(m+1)}$

要让 $b-a$ 取最大值，需要：$\frac{4(-m)-k^2}{4}=-1$.

$\therefore k^2+4m=4$. $\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{k^2+4m+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

$\therefore b-a\leq 2\sqrt{2}$.