奥数教程第七版高中第一分册　P39 例10.

设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，求证：方程 $a^x+a^{-x}=2a$ 的根不在区间 $[-1,1]$ 内.

Proof：令 $t=a^x$　$\therefore t+\frac{1}{t}=2a$.　$\because t\in(0,+\infty)$　$\therefore t^2-2at+1=0$.

① 当 $0<a<1$ 时.　$\Delta=4a^2-4=4(a^2-1)<0$　$\therefore$ 关于t的方程 $t^2-2at+1=0$ 无实根

$\therefore$ 方程 $a^x+a^{-x}=2a$ 无实根

② 当 $a>1$ 时，　$\Delta=4a^2-4=4(a^2-1)>0$.　$\therefore$ 关于t的方程 $t^2-2at+1=0$ 有2个不相等的实数根.

令 $g(t)=t^2-2at+1$　$\therefore g(t)$ 的对称轴为：$t=-\frac{-2a}{2}=a$.　~~g(t)的定义域为~~

$g(t)$ 的定义域为：$t\in(0,+\infty)$

$\because a>1$　$\therefore \frac{1}{a}\in(0,1)$，$a\in(1,+\infty)$，$g(t)$ 是开口向上的抛物线.

$\because g(a)=a^2-2a^2+1=-a^2+1<0$.　$g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}-2+1=\frac{1}{a^2}-1<0$.

$\therefore$ 方程 $g(t)=0$ 的根 $t_1, t_2\notin\left[\frac{1}{a},a\right]$

~~设方程~~ $\because g(0)=1>0$.　$a>1$，$g(a)<0$　$g\left(\frac{1}{a}\right)<0$

$\therefore$ 方程 $g(t)=0$ 的根 t_1, t_2 满足：$t_1\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$t_2\in(a,+\infty)$.

设方程 $a^x+a^{-x}=2a$ 的根为 x_1, x_2. 其中 $a^{x_1}=t_1$，$a^{x_2}=t_2$.

$\therefore a^{x_1}\in(0,a^{-1})$　$\therefore x_1<-1$

$\therefore a^{x_2}\in(a,+\infty)$　$\therefore x_2>1$

$\therefore$ 方程 $a^x+a^{-x}=2a$ 的根不在区间 $[-1,1]$ 内.　□