《奥数教程 第七版 · 高中第一分册》 P22 . 13题 .

proof: (1) 令 $g(x)=f(x)-x=ax^2+bx+c-x=ax^2+(b-1)x+c$. $x\in\mathbb{R}$. $(a>0)$

∴ $g(x)$ 是二次函数，并且是开口向上的抛物线 .

∵ x_1, x_2 是方程 $f(x)=x$ 的两个根，且有: $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$

∴ $g(x_1)=f(x_1)-x_1=0$, $g(x_2)=f(x_2)-x_2=0$

∴ x_1, x_2 是 $g(x)$ 的两个零点，且有 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$.

∴ $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上严格单调递减 .

对 $\forall\ x\in(0,x_1)$，有: $x<x_1$ ∴ $g(x)>g(x_1)=0$.

∴ $f(x)-x>0$, $f(x)>x$.

∴ 对 $\forall\ x\in(0,x_1)$，有: $x<f(x)$.

令 $h(x)=f(x)-x_1=ax^2+bx+c-x_1$, $x\in\mathbb{R}$, $(a>0)$

∴ $h(x)$ 是二次函数，并且是开口向上的抛物线 .

$h(x_1)=f(x_1)-x_1=0$.

∵ x_1, x_2 是方程 ~~f(x) 的方程~~ $f(x)=x$ 的两个根 ∴ x_1, x_2 是方程 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 的两个根

∴ $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. ∴ $ax_1x_2=c$.

∴ $h(0)=f(0)-x_1=c-x_1=ax_1x_2-x_1=x_1(ax_2-1)$.

∵ $x_2<\frac{1}{a}$, $a>0$ ∴ $ax_2<1$, $ax_2-1<0$.

∵ $x_1>0$ ∴ $h(0)=x_1(ax_2-1)<0$.

∵ $h(x)$ 是开口向上的抛物线，$h(0)<0$. ∴ $h(x)$ 有两个不相等的零点 .

假设 x_1 是 $h(x)$ 的较小的零点，则对 $\forall\ x\in(-\infty, x_1)$，有: $h(x)>0$

∵ $0<x_1$, $h(0)<0$ ∴ 矛盾 . ∴ x_1 不是 $h(x)$ 的较小的零点 .

∴ x_1 是 $h(x)$ 的较大的零点 . 设 α 是 $h(x)$ 的较小的零点 , ∴ $\alpha<x_1$.

∴ 对 $\forall\ x\in(-\infty,\alpha)$，有: $h(x)>0$.

对 $\forall\ x\in(\alpha, x_1)$, 有: $h(x)<0$

对 $\forall\ x\in(x_1,+\infty)$，有: $h(x)>0$

$\because 0<x_1$，$h(0)<0$ $\therefore 0\in(\alpha,x_1)$ $\therefore (0,x_1)\subseteq(\alpha,x_1)$.

$\therefore$ 对 $\forall x\in(0,x_1)$，有：$x\in(\alpha,x_1)$ $\therefore h(x)<0$，即 $f(x)<x_1$

$\therefore$ 对 $\forall x\in(0,x_1)$，有：$f(x)<x_1$.

$\therefore$ 对 $\forall x\in(0,x_1)$，有：$x<f(x)<x_1$.

(2) $\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称. $\therefore -\frac{b}{2a}=x_0$.

$\because g(x)=ax^2+(b-1)x+c$，$x\in\mathbb{R}$，$(a>0)$.

$\therefore g(x)$ 是二次函数，且 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{b-1}{2a}$ 对称.

$\because g(x)$ 有两个不相等的零点 x_1，x_2，且满足：$0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b-1}{2a}$ $\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1-b}{2a}=\frac{1}{2a}-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2a}+x_0$.

$\because x_2<\frac{1}{a}$ $\therefore \frac{x_2}{2}<\frac{1}{2a}$

$\therefore \frac{1}{2a}+x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}<\frac{x_1}{2}+\frac{1}{2a}$

$\therefore x_0<\frac{x_1}{2}$ $\square$

总结：证明过程的难点在于：如何做到逻辑上绝对的严谨性.

还用到了一个二次函数的性质：

Lemma：设 $f(x)=ax^2+bx+c$. $x\in\mathbb{R}$，$(a>0)$. 若 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个不相等的零点，

~~则有：对 $\forall x\in(-\infty,$~~ $x_1<x_2$，则有：

对 $\forall x\in(-\infty,x_1)$，$f(x)>0$.

对 $\forall x\in(x_1,x_2)$，$f(x)<0$

对 $\forall x\in(x_2,+\infty)$，$f(x)>0$

我们暂时先接受这个引理的正确性，它的证明留待以后处理.