奥数教程第七版高中第一分册 P42 15题.

设 $0<a<1$，$x<0$，求证：

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)<\frac{x(a^x-1)}{(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}$$

proof：先看不等号左边的函数 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

$\because$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$x^2+1>x^2\geqslant 0$. $\therefore \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geqslant -x$.

$\therefore \sqrt{x^2+1}+x>0$ $\therefore$ 函数 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.

再看不等号右边的函数 $y=\dfrac{x(a^x-1)}{(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}$.

$\because$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$. 有 $a^x>0$ $\therefore a^x+1>1$

$\because$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：$x^2+1>x^2\geqslant 0$. $\therefore \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geqslant x$

$\therefore \sqrt{x^2+1}-x>0$ $\therefore$ 函数 $y=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.

$$\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)=0 \iff \sqrt{x^2+1}-x=1 \iff \sqrt{x^2+1}=x+1 \iff \begin{cases} x+1\geqslant 0 \\ x^2+1=(x+1)^2 \end{cases}$$

$\iff x=0$.

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{x(a^x-1)}{(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}$ 的定义域为：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\therefore$ 令 $f(x)=\dfrac{x(a^x-1)}{(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$\therefore f(-x)=\frac{-x(a^{-x}-1)}{(a^{-x}+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)}-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$=\frac{-x(1-a^x)}{(1+a^x)\log_a\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)}-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$=\frac{x(a^x-1)}{-(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x).$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

对$\forall x>0$，有：$x>0$ 且 $x^2>0$. $\therefore x^2+1>1$. $\therefore \sqrt{x^2+1}>1$

$\therefore \sqrt{x^2+1}+x>1$ $\therefore \sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\in(0,1)$

$\therefore \ln(\sqrt{x^2+1}+x)>0$, $-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)<0$.

$\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)>0$.

$$\therefore f(x)=\frac{\overset{>0}{x}\,\overset{<0}{(a^x-1)}}{\underset{>0}{(a^x+1)}\,\underset{>0}{\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}}\underbrace{-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}_{<0}<0.$$

$\therefore$ 对$\forall x<0$，有：$-x>0$.

$\therefore f(x)=-f(-x)>0$.

$$\therefore \frac{x(a^x-1)}{(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}>\ln(\sqrt{x^2+1}+x).$$

$\therefore$ 对$\forall x<0$，有：$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)<\dfrac{x(a^x-1)}{(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}$ $\square$