奥数教程九年级 P80 例6.

Lemma: $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a+b+c=0$. ~~求证~~ $a>b>c$, 求证: $\frac{c}{a} \in (-2, -\frac{1}{2})$

proof: 假设 $a \leq 0$. 则 $c<b<a \leq 0$ ∴ $a \leq 0$ 且 $b<0$ 且 $c<0$

∴ $a+b+c<0$, $0<0$. 矛盾. ∴ $a>0$.

假设 $c \geq 0$. 则 $a>b>c \geq 0$ ∴ $a>0$ 且 $b>0$ 且 $c \geq 0$

∴ $a+b+c>0$, $0>0$ 矛盾 ∴ $c<0$.

∵ $a+b+c=0$ ∴ $b=-a-c$

∵ $a>b$ ∴ $a>-a-c$ ∴ $c>-2a$. ∵ $\frac{1}{a}>0$ ∴ $\frac{c}{a}>-2$

∵ $b>c$ ∴ $-a-c>c$ ∴ $c<-\frac{1}{2}a$ ∴ $\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$ ∴ $\frac{c}{a} \in (-2, -\frac{1}{2})$ □

Lemma: $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a+b+c=0$, $a>0$, $\frac{c}{a} \in (-2, -\frac{1}{2})$.

求证: $a>b>c$

proof: ∵ $a+b+c=0$ ∴ $b=-a-c$.

∵ $\frac{c}{a}>-2$, $a>0$ ∴ $c>-2a$. ∴ $a+c>-a$. $a>-a-c=b$

∵ $\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$, $a>0$ ∴ $c<-\frac{1}{2}a$ $2c<-a$. ∴ $c<-a-c=b$

∴ $a>b>c$ □

Lemma: $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a+b+c=0$, $a<0$, $\frac{c}{a} \in (-2, -\frac{1}{2})$.

求证: $a<b<c$.

proof: ∵ $a+b+c=0$ ∴ $b=-a-c$

∵ $\frac{c}{a}>-2$, $a<0$ ∴ $c<-2a$ ∴ $a+c<-a$, $a<-a-c=b$

∵ $\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$, $a<0$ ∴ $c>-\frac{1}{2}a$, $2c>-a$. ∴ $c>-a-c=b$.

∴ $a<b<c$ □

思考：$a, b, c \in \mathbb{R}$，$a+b+c=0$. $a>b>c$. 我们已经证明了 $\frac{c}{a} \in (-2, -\frac{1}{2})$

但是，$\frac{c}{a}$ 真的可以取到 $(-2, -\frac{1}{2})$ 中的所有值吗？ 可以！

对 $\forall \lambda \in (-2, -\frac{1}{2})$. 令 $c = 100\lambda$. $a = 100$，$b = -100 - 100\lambda$.

$\therefore a, b, c \in \mathbb{R}$. $a+b+c = 100 - 100 - 100\lambda + 100\lambda = 0$.

$a - b = 100 + 100 + 100\lambda = 100 \times (\lambda + 2) > 0$ $\therefore a > b$.

$b - c = -100 - 100\lambda - 100\lambda = -100(2\lambda + 1) > 0$ $\therefore b > c$ $\therefore a > b > c$.

$\frac{c}{a} = \frac{100\lambda}{100} = \lambda$ $\therefore \frac{c}{a}$ 可以取到 $(-2, -\frac{1}{2})$ 中的所有值. $\square$