奥数教程第七版 高中第一分册 P34 13题

Proof: 假设 $\exists x_0 \in R$, s.t. $f(x_0)=1$. 则有:

$f(x_0+2)(1-f(x_0))=1+f(x_0)$ $\therefore 0=2$. 矛盾.

$\therefore$ 对 $\forall x \in R$, $f(x)\neq 1$.

假设 $\exists x_0 \in R$, s.t. $f(x_0)=0$. 则有:

$f(x_0+2)(1-f(x_0))=1+f(x_0)$ $\therefore f(x_0+2)=1$. 矛盾.

$\therefore$ 对 $\forall x \in R$, $f(x)\neq 0$.

$\therefore$ 对 $\forall x\in R$, 有: $f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$

$$f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

$$f(x+4)=f((x+2)+2)=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$$

$$f(x+8)=f((x+4)+4)=-\frac{1}{f(x+4)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x),\ \forall x\in R$$

$\therefore f(x)$ 的其中一个周期是 8.

$\because f(3)(1-f(1))=1+f(1)$

$$\therefore f(3)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}=\frac{3+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}=-\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=-\frac{2\sqrt{3}}{3-1}=-\sqrt{3}$$

$\because f(5)(1-f(3))=1+f(3)$

$$\therefore f(5)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}=\frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{3-1}=-2+\sqrt{3}$$

$\therefore f(1997)=f(249\times 8+5)=f(5)=\sqrt{3}-2$. $f(2001)=f(1+2000)=f(1)=2+\sqrt{3}$.