

(19) 解: (I)  $(1, 2, 3)$  是 2 阶可等向量.

例如经过两次变换  $\varphi_2$  可得:  $(1, 2, 3) \xrightarrow{i=3, x=1} (2, 3, 3) \xrightarrow{i=1, x=-1} (2, 2, 2)$   
.....2 分

(II) 设  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  进行一次变换  $\varphi_2$  后得  $(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ ,

当  $i=0$  时,  $(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) = (a_1 + x, a_2 + x, a_3, a_4)$

当  $i=1$  时,  $(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) = (a_1, a_2 + x, a_3 + x, a_4)$

当  $i=2$  时,  $(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) = (a_1, a_2, a_3 + x, a_4 + x)$

当  $i=3$  时,  $(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) = (a_1 + x, a_2, a_3, a_4 + x)$

综上, 我们得到

$$(a'_1 + a'_3) - (a'_2 + a'_4) = (a_1 + a_3 + x) - (a_2 + a_4 + x) = (a_1 + a_3) - (a_2 + a_4).$$

因为  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  是 2 阶可等向量, 即  $t_1 = t_2 = t_3 = t_4$

所以  $(a_1 + a_3) - (a_2 + a_4) = (t_1 + t_3) - (t_2 + t_4) = 0$ .

$$\text{所以 } a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = \frac{a_1 + a_3 + a_2 + a_4}{2} = \frac{1 + 2 + 3 + 4}{2} = 5 \quad \text{.....6 分}$$

(III) 任取  $(1, 2, \dots, 7)$  的一个排序, 记为  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_7)$ .

注意到,

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是  $k$  阶可等向量,

等价于  $(a_1 + y, a_2 + y, \dots, a_n + y)$  是  $k$  阶可等向量.

变换  $\varphi_5$  即对连续五个维度的坐标 (首尾也看成连续) 同时加上  $x$ ,

相当于对剩余两个连续维度的坐标同时加上  $-x$ .

对  $b_2, b_3$ ;  $b_4, b_5$ ;  $b_6, b_7$  依次加上  $-x$ , 相当于对  $b_1$  单独加上  $x$ ;

对  $b_3, b_4$ ;  $b_5, b_6$ ;  $b_7, b_1$  依次加上  $-x$ , 相当于对  $b_2$  单独加上  $x$ ;

.....

基于上述分析, 相当于可以对  $b_1, b_2, \dots, b_7$  分别单独加上  $-b_1, -b_2, \dots, -b_7$ .

所以  $\mathbf{b}$  为 5 阶可等向量,  $(1, 2, \dots, 7)$  为 5 阶强可等向量. ....11 分