含参二次函数零点分布

1. $f(x)=x^2+(a-1)x+1$，$x\in\mathbb{R}$，$a\in\mathbb{R}$. 求证：

$f(x)$在$[0,2]$上有2个相异零点 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta>0\\ -\frac{b}{2a}\in(0,2)\\ f(0)\geq 0\\ f(2)\geq 0\end{cases}$

Proof：($\Rightarrow$)：$\because$ $f(x)$有2个相异零点 $\therefore \Delta>0$.

设$f(x)$在$[0,2]$上的两个相异零点分别为x_1、x_2（其中$x_1<x_2$）.

$\therefore 0\leq x_1<x_2\leq 2$.

$\therefore 0\leq x_1<-\frac{b}{2a}<x_2\leq 2$ (这里可以用反证法来证明$-\frac{b}{2a}\in(x_1,x_2)$) $\therefore -\frac{b}{2a}\in(0,2)$.

$\because f(x)$在$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$上严格单调递减，在$[-\frac{b}{2a},+\infty)$上严格单调递增

又$\because 0\leq x_1<-\frac{b}{2a}$，$-\frac{b}{2a}<x_2\leq 2$

$\therefore f(0)\geq f(x_1)=0$，$0=f(x_2)\leq f(2)$

($\Leftarrow$)：$\because \Delta>0$ $\therefore f(x)$有两个相异零点

若$f(-\frac{b}{2a})>0$，$\because f(x)$开口向上 $\therefore f(x)$没有零点，矛盾.

若$f(-\frac{b}{2a})=0$，$\because f(x)$开口向上 $\therefore f(x)$只有一个零点，$x=-\frac{b}{2a}$，矛盾.

$\therefore f(-\frac{b}{2a})<0$ 且 $0<-\frac{b}{2a}<2$.

$\because f(0)\geq 0$ $\therefore f(0)>0$或$f(0)=0$.

(i) 若$f(0)>0$. $\because f(-\frac{b}{2a})<0$，$0<-\frac{b}{2a}$，$f(x)$在$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$上严格单调递减

$\therefore \exists$唯一的$x_1\in(0,-\frac{b}{2a})$，s.t. $f(x_1)=0$. 且对$\forall x\in(-\infty,0)$，$f(x)>f(0)>0$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$上有唯一的零点x_1，$x_1\in(0,-\frac{b}{2a})$.

(ii) 若$f(0)=0$. $\because f(-\frac{b}{2a})<0$，$0<-\frac{b}{2a}$，$f(x)$在$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$上严格单调递减

$\therefore$ 对 $\forall x\in(-\infty,0)$，有：$f(x)>f(0)=0$.

对 $\forall x\in\left(0,-\frac{b}{2a}\right)$，有：$f(x)<f(0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上有唯一的零点 $x=0$.

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上有唯一的零点 x_1，$x_1\in\left[0,-\frac{b}{2a}\right)$

$\because f(2)\geqslant 0$ $\therefore f(2)>0$ 或 $f(2)=0$

(i) 若 $f(2)>0$ $\because f\left(-\frac{b}{2a}\right)<0$，$-\frac{b}{2a}<2$，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上严格单调递增

$\therefore \exists$ 唯一的 $x_2\in\left(-\frac{b}{2a},2\right)$，s.t. $f(x_2)=0$. 且对 $\forall x\in(2,+\infty)$，$f(x)>f(2)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上有唯一的零点 x_2，$x_2\in\left(-\frac{b}{2a},2\right)$

(ii) 若 $f(2)=0$ $\because f\left(-\frac{b}{2a}\right)<0$，$-\frac{b}{2a}<2$，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上严格单调递增

$\therefore$ 对 $\forall x\in\left(-\frac{b}{2a},2\right)$，$f(x)<f(2)=0$

对 $\forall x\in(2,+\infty)$，$f(x)>f(2)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上有唯一的零点 $x=2$

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上有唯一的零点 x_2，$x_2\in\left(-\frac{b}{2a},2\right]$.

$\therefore f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有两个相异零点. $\square$