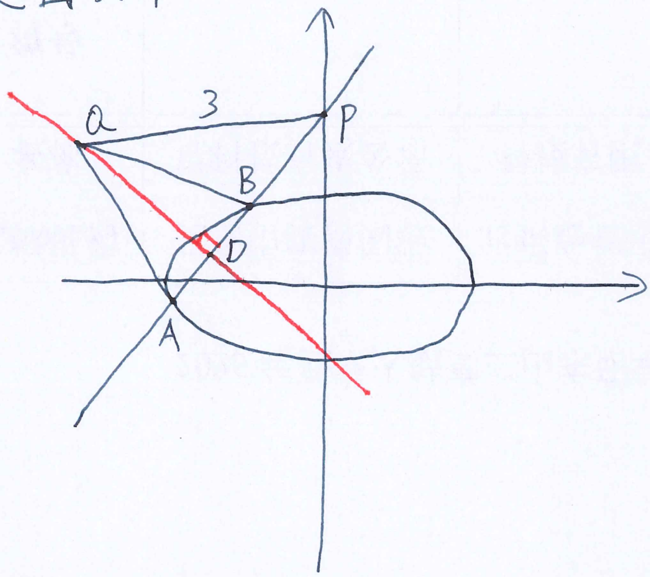
2025 海淀高三二模 解析几何

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. 设直线 $l: y=x+m$ 交椭圆 C 于不同的两点 A、B，与 y 轴交于点 P. 若点 Q 满足 $|PQ|=3$ 且 $|QA|=|QB|$，求 $\angle AQB$ 的大小.

解：画出示意图如下：



设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$. 将直线 l 与椭圆 C 联立，得：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1 \iff x^2+3y^2=6\\ y=x+m\end{cases}$$

$\therefore \quad x^2+3(x+m)^2=6$

$\therefore \quad 4x^2+6mx+3m^2-6=0$.

$\Delta=(6m)^2-4\cdot4\cdot(3m^2-6)>0$ 解得：$m\in(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

$x_1+x_2=-\frac{3}{2}m$, $\quad x_1\cdot x_2=\frac{3m^2-6}{4}$

$y_1+y_2=x_1+x_2+2m=\frac{1}{2}m$, $\quad y_1\cdot y_2=(x_1+m)(x_2+m)=\frac{m^2-6}{4}$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=\sqrt{-\frac{3}{2}m^2+12}$$

设D是线段AB的中点，~~垂~~由$|QA|=|QB|$知点Q位于线段AB的垂直平分线上．$\therefore QD\perp AB$.

$\because D\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ $\therefore D\left(-\frac{3}{4}m,\frac{1}{4}m\right)$

直线QD的方程为：$y=-x-\frac{1}{2}m$

$\because$点Q在直线QD上，点Q也在以P为圆心，3为半径的圆上．

$$\therefore\begin{cases}x^2+(y-m)^2=9\\ y=-x-\frac{1}{2}m\end{cases}$$

解得：点Q坐标为$Q_1\left(\frac{-3m+3\sqrt{-m^2+8}}{4},\frac{m-3\sqrt{-m^2+8}}{4}\right)$

或$Q_2\left(\frac{-3m-3\sqrt{-m^2+8}}{4},\frac{m+3\sqrt{-m^2+8}}{4}\right)$

分两种情况讨论：

① 若点Q坐标为：$Q_1\left(\frac{-3m+3\sqrt{-m^2+8}}{4},\frac{m-3\sqrt{-m^2+8}}{4}\right)$

解出A，B的坐标为：

$A\left(\frac{-3m+\sqrt{3}\sqrt{-m^2+8}}{4},\frac{m+\sqrt{3}\sqrt{-m^2+8}}{4}\right)$ （注意：这里A、B两点的坐标可以互换，对后续过程毫无影响）

$B\left(\frac{-3m-\sqrt{3}\sqrt{-m^2+8}}{4},\frac{m-\sqrt{3}\sqrt{-m^2+8}}{4}\right)$

~~$|Q_1A| =$~~ 令 $\lambda = \sqrt{-m^2+8}$.

$\therefore Q_1\left(\frac{-3m+3\lambda}{4}, \frac{m-3\lambda}{4}\right)$, $A\left(\frac{-3m+\sqrt{3}\lambda}{4}, \frac{m+\sqrt{3}\lambda}{4}\right)$

$B\left(\frac{-3m-\sqrt{3}\lambda}{4}, \frac{m-\sqrt{3}\lambda}{4}\right)$

$\therefore |Q_1A| = \sqrt{-\frac{3}{2}m^2+12}$, $|Q_1B| = \sqrt{-\frac{3}{2}m^2+12}$

$\therefore |AB| = |Q_1A| = |Q_1B|$ $\therefore \triangle Q_1AB$是等边三角形.

$\therefore \angle AQ_1B = \angle AQB = \frac{\pi}{3}$

② 若点Q坐标为：$Q_2\left(\frac{-3m-3\sqrt{-m^2+8}}{4}, \frac{m+3\sqrt{-m^2+8}}{4}\right)$

则有：$Q_2\left(\frac{-3m-3\lambda}{4}, \frac{m+3\lambda}{4}\right)$, $A\left(\frac{-3m+\sqrt{3}\lambda}{4}, \frac{m+\sqrt{3}\lambda}{4}\right)$

$B\left(\frac{-3m-\sqrt{3}\lambda}{4}, \frac{m-\sqrt{3}\lambda}{4}\right)$

$\therefore |Q_2A| = \sqrt{-\frac{3}{2}m^2+12}$, $|Q_2B| = \sqrt{-\frac{3}{2}m^2+12}$

$\therefore |Q_2A| = |Q_2B| = |AB|$ $\therefore \triangle Q_2AB$是等边三角形

$\therefore \angle AQ_2B = \angle AQB = \frac{\pi}{3}$.

综上，$\angle AQB = \frac{\pi}{3}$.