共线向量基本定理：$\vec{a}\neq\vec{0}$，则：

$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线 $\Longleftrightarrow$ 存在一个唯一的 $\lambda\in R$，使得：$\vec{b}=\lambda\vec{a}$

Proof：($\Leftarrow$)：∵ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，$\lambda\in R$　　$\boxed{\lambda\vec{a}}$，$\lambda\in R$

$\vec{a}$，$\lambda\in R$，$\boxed{\lambda\vec{a}\text{ 是一个与 }\vec{a}\text{ 共线的向量.}}$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向.

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向.

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

∴ 根据数乘向量的定义，$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线.

($\Rightarrow$)：∵ $\vec{a}\neq\vec{0}$，∴ $|\vec{a}|>0$，∴ $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\in R$

∵ $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线　∴ 分三种情况讨论.

① $\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向

② $\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向.

③ $\vec{b}=\vec{0}$.

① $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向，此时考虑向量 $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$.

∵ $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}>0$　∴ 向量 $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相同.

∵ $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向　∴ 向量 $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相同.

∵ $$\left|\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| \underset{\text{数乘向量的定义}}{=} \left|\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right|\cdot|\vec{a}| \underset{\text{正数的绝对值是它本身}}{=} \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

∴ $\vec{b}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$，其中 $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\in R$.　此时存在性得证.

② $\vec{b}$与$\vec{a}$反向. 此时考虑向量 $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

$\because -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}<0$ $\therefore$ 向量 $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相反.

$\because \vec{b}$与$\vec{a}$反向. $\therefore$ 向量 $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相同.

$$\because \left|-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \left|-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right|\cdot|\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$\therefore \vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 其中 $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\in R$. 此时存在性得证.

③ $\vec{b}=\vec{0}$. 此时 $\vec{b}=0\cdot\vec{a}$. $0\in R$. 此时存在性得证.

存在性证毕. 下证唯一性.

假设存在 $\lambda_1\in R$, $\lambda_2\in R$, 使得 $\vec{b}=\lambda_1\vec{a}$, $\vec{b}=\lambda_2\vec{a}$.

$\therefore \lambda_1\vec{a}=\lambda_2\vec{a}$ $\therefore \lambda_1\vec{a}-\lambda_2\vec{a}=\vec{0}$ $\therefore (\lambda_1-\lambda_2)\vec{a}=\vec{0}$.

$$\therefore 0=|\vec{0}|=|(\lambda_1-\lambda_2)\vec{a}|=|\lambda_1-\lambda_2|\cdot|\vec{a}|$$

$\because \vec{a}\neq\vec{0}$ $\therefore |\vec{a}|>0$

$\therefore |\lambda_1-\lambda_2|\,|\vec{a}|=0$. $\therefore |\lambda_1-\lambda_2|=0$. $\therefore \lambda_1-\lambda_2=0$.

$\therefore \lambda_1=\lambda_2$. 唯一性得证. □

定理：$\vec{a}, \vec{b}$ 是任意的两个向量，则有：
(Theorem)

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线 $\Longleftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的实数 x_1, x_2，使得：$x_1\vec{a}+x_2\vec{b}=\vec{0}$.

Proof: ($\Longleftarrow$) ∵ x_1, x_2 不全为 0. ∴分情况讨论如下：

① $x_1 \neq 0$. 此时有. ∵ $x_1\vec{a}+x_2\vec{b}=\vec{0}$ ∴ $x_1\vec{a}=-x_2\vec{b}$ ∴ $\vec{a}=-\dfrac{x_2}{x_1}\vec{b}$.

∴ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线

② $x_1=0$. 此时有. ∵ x_1, x_2 不全为 0. ∴ $x_2 \neq 0$.

∵ $x_1\vec{a}+x_2\vec{b}=\vec{0}$ ∴ $x_2\vec{b}=-x_1\vec{a}$ ∴ $\vec{b}=-\dfrac{x_1}{x_2}\vec{a}$.

∴ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线.

($\Longrightarrow$)：按照 $\vec{a}$ 是否等于 $\vec{0}$ 分类讨论如下：

① $\vec{a} \neq \vec{0}$. ∵ $\vec{a} \neq \vec{0}$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线

∴存在一个唯一的 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

∴ $\lambda\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{b}+(-1)\vec{b}=\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{0}$.

∵ $-1 \neq 0$. ∴ λ 和 -1 不全为 0.

∴存在一组不全为 0 的实数 λ 和 -1，使得 $\lambda\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}$.

② $\vec{a}=\vec{0}$. 此时有：$1\vec{a}+0\vec{b}=1\vec{a}+\vec{0}=1\cdot\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

∵ 1 和 0 不全为 0

∴存在一组不全为 0 的实数 1 和 0，使得 $1\vec{a}+0\vec{b}=\vec{0}$. $\square$

定理：$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是任意的两个向量，则有：

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线 $\Longleftrightarrow$ 若 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$，则必有 $x=y=0$.