

共线向量基本定理: $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则:

\vec{b} 与 \vec{a} 共线 \Leftrightarrow 存在一个唯一的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得: $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

Proof: (\Leftarrow): $\because \vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

\vec{a} , $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{a}$ 是一个与 \vec{a} 共线的向量.

当 $\lambda > 0$ 时,	$\lambda \vec{a}$ 与 \vec{a} 同向.
当 $\lambda < 0$ 时,	$\lambda \vec{a}$ 与 \vec{a} 反向.
当 $\lambda = 0$ 时,	$\lambda \vec{a} = \vec{0}$.

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

\therefore 根据数乘向量的定义, \vec{b} 与 \vec{a} 共线.

(\Rightarrow): $\because \vec{a} \neq \vec{0}, \therefore |\vec{a}| > 0, \therefore \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \in \mathbb{R}$

$\because \vec{b}$ 与 \vec{a} 共线 \therefore 分三种情况讨论.

① \vec{b} 与 \vec{a} 同向, 此时考虑向量 $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$.

$\because \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} > 0, \therefore$ 向量 $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ 与向量 \vec{a} 方向相同.

$\because \vec{b}$ 与 \vec{a} 同向 \therefore 向量 $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ 与向量 \vec{b} 方向相同.

$$\therefore \left| \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

数乘向量的定义

正数的绝对值
是它本身

$\therefore \vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$, 其中 $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \in \mathbb{R}$. 此时存在性得证.

- ① $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{b}$ 与 \vec{a} 同向
- ② $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{b}$ 与 \vec{a} 反向
- ③ $\vec{b} = \vec{0}$.

② \vec{b} 与 \vec{a} 反向. 此时考虑向量 $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

$\therefore -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} < 0 \quad \therefore \vec{a} - \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 与 \vec{a} 方向相反.

$\therefore \vec{b}$ 与 \vec{a} 反向. \therefore 向量 $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 与 向量 \vec{b} 方向相同.

$$\therefore \left| -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} \right| = \left| -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = \underline{|\vec{b}|}$$

$\therefore \vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 其中 $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \in \mathbb{R}$. 此时存在性得证.

③ $\vec{b} = \vec{0}$. 此时 $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$. $0 \in \mathbb{R}$. 此时存在性得证.

存在性证毕. 下证唯一性.

假设存在 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, 使得 $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}$, $\vec{b} = \lambda_2 \vec{a}$.

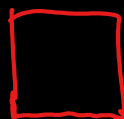
$$\therefore \lambda_1 \vec{a} = \lambda_2 \vec{a} \quad \therefore \lambda_1 \vec{a} - \lambda_2 \vec{a} = \vec{0} \quad \therefore (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{a} = \vec{0}$$

$$\therefore 0 = |\vec{0}| = |(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{a}| = |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot |\vec{a}|$$

$$\boxed{\therefore \vec{a} \neq \vec{0} \quad \therefore |\vec{a}| > 0}$$

$$\therefore |\lambda_1 - \lambda_2| |\vec{a}| = 0. \quad \therefore |\lambda_1 - \lambda_2| = 0. \quad \therefore \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2$. 唯一性得证.



定理: \vec{a}, \vec{b} 是任意的两个向量, 则有:
(Theorem)

\vec{a} 与 \vec{b} 共线 \Leftrightarrow 存在一组不全为 0 的实数 x_1, x_2 , 使得: $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \vec{0}$.

Proof: (\Leftarrow) $\because x_1, x_2$ 不全为 0. \therefore 分情况讨论如下:

① $x_1 \neq 0$. 此时有: $\because x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \vec{0} \quad \therefore x_1\vec{a} = -x_2\vec{b} \quad \therefore \vec{a} = -\frac{x_2}{x_1}\vec{b}$.

$\therefore \vec{a}$ 与 \vec{b} 共线

② $x_1 = 0$. 此时有: $\because x_1, x_2$ 不全为 0. $\therefore x_2 \neq 0$.

$\because x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \vec{0} \quad \therefore x_2\vec{b} = -x_1\vec{a} \quad \therefore \vec{b} = -\frac{x_1}{x_2}\vec{a}$.

$\therefore \vec{a}$ 与 \vec{b} 共线.

(\Rightarrow): 按照 \vec{a} 是否等于 $\vec{0}$ 分类讨论如下:

① $\vec{a} \neq \vec{0}$. $\because \vec{a} \neq \vec{0}$ 且 \vec{a} 与 \vec{b} 共线

\therefore 存在一个唯一的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

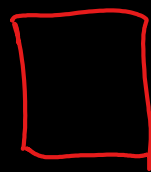
$\therefore \lambda\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{b} + (-1)\vec{b} = \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$.

$\because -1 \neq 0$. $\therefore \lambda$ 和 -1 不全为 0. \therefore 存在一组不全为 0 的实数 λ 和 -1 , 使得 $\lambda\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}$.

② $\vec{a} = \vec{0}$. 此时有: $\underline{|\vec{a}|} + \underline{0}\vec{b} = |\vec{a} + \vec{0}| = |\vec{0} + \vec{0}| = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

$\therefore |\vec{a}|$ 和 0 不全为 0.

\therefore 存在一组不全为 0 的实数 $|\vec{a}|$ 和 0, 使得 $|\vec{a}| + 0\vec{b} = \vec{0}$.



定理: \vec{a} 和 \vec{b} 是任意的两个向量, 则有:

\vec{a} 与 \vec{b} 不共线 \Leftrightarrow 若 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$, 则必有 $x = y = 0$.