$\boxed{y = A\sin(\omega x+\varphi)+b}$

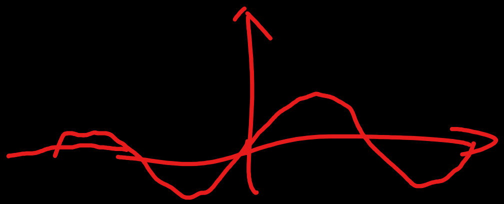
~~$y = A\cos(\omega x+\varphi)+b$~~

$y = A\tan(\omega x+\varphi)+b$

$\boxed{y = A\sin u} \quad u = \omega x+\varphi$

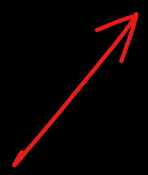
$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$y = A\cos(\omega x+\varphi) = A\sin\left(\omega x+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$



$\vec{a}$ 速度：$\boxed{大小\ 方向}$

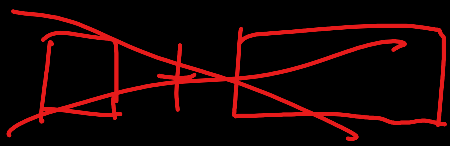
$\boxed{5m/s}$



抽象

运算 $\boxed{+,\ -,\ \cdot,\ \times}$

定义.



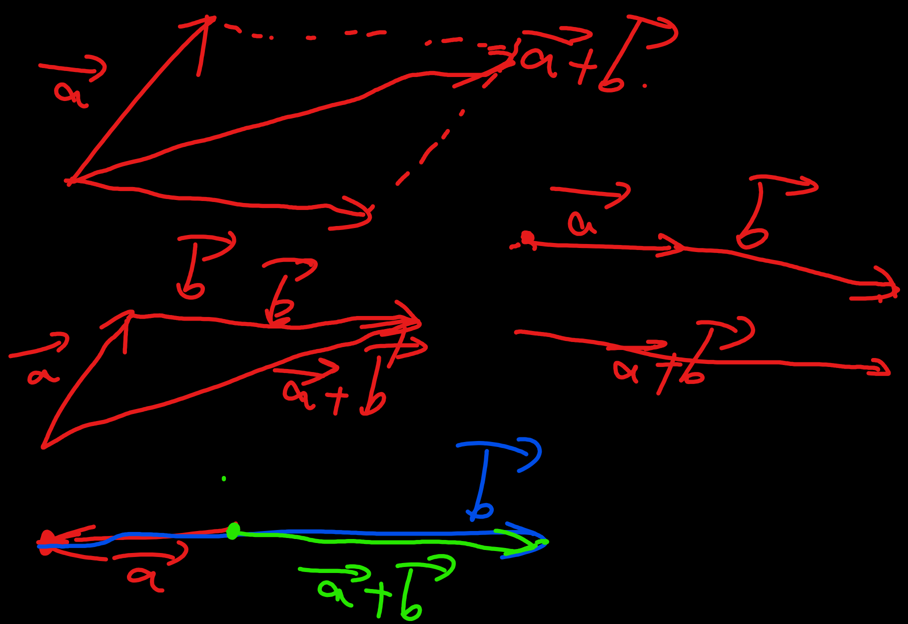
$\vec{a},\ \vec{b}$

$\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

$\vec{0}+\vec{b}=\vec{b}$

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

$\vec{a}+\vec{b}$



自由向量

对$\forall\vec{a}$：有$|\vec{a}|$是非负实数.

$|\vec{a}|\in\mathbb{R}_{\ge 0}$

求证：对任意的两个向量 $\vec{a},\vec{b}$，有：

$$\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| \le |\vec{a}\pm\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

证明：① 先证 $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

分4种情况讨论：

(i) 当 $\vec{a}=\vec{0}$ 且 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{0}|=0\le 0+0=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

(ii) 当 $\vec{a}=\vec{0}$ 且 $\vec{b}\ne\vec{0}$ 时，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}+\vec{b}=\vec{b}$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|\le 0+|\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

(iii) 当 $\vec{a}\ne\vec{0}$ 且 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

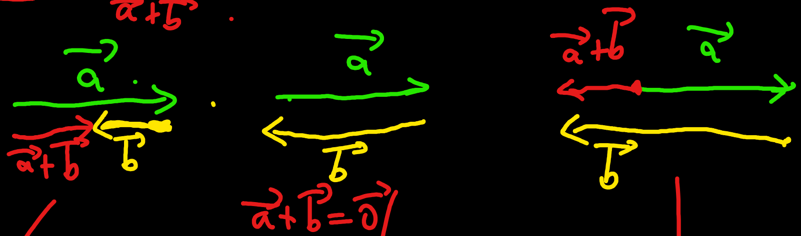
$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|\le|\vec{a}|+0=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

(iv) 当 $\vec{a}\ne\vec{0}$ 且 $\vec{b}\ne\vec{0}$ 时，此时还有三种可能性：

(1) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向：

此时有 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

(2) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向.



$|\vec{b}|<|\vec{a}|$ $\quad |\vec{b}|=|\vec{a}|$ $\quad |\vec{b}|>|\vec{a}|$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|<|\vec{a}|+|\vec{b}| \qquad |\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=0<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

(3) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行，此时一定可以把 $\vec{b}$ 的始点平移到 $\vec{a}$ 的终点处，使 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ 这三个向量构成一个三角形，由两边之和大于第三边可知：

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

综上，对任意两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ 得证.

② 再证 $|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

利用①，有：$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+(-\vec{b})|\le|\vec{a}|+|-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

$\therefore$ 对任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$. $|\vec{a}-\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ 得证.

③ 再证 $\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| \leq |\vec{a}+\vec{b}|$

$$|\vec{a}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{b}| = |(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}| \underset{\text{利用②}}{\leq} |\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{b}|$$

$\therefore |\vec{a}|-|\vec{b}| \leq |\vec{a}+\vec{b}|$

$$|\vec{b}| = |\vec{b}+\vec{a}-\vec{a}| = |(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}| \underset{\text{利用②}}{\leq} |\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}|$$

$\therefore |\vec{b}|-|\vec{a}| \leq |\vec{a}+\vec{b}|$

$\because |\vec{a}|-|\vec{b}| \leq \underline{|\vec{a}+\vec{b}|}$ 和 $|\vec{b}|-|\vec{a}| \leq |\vec{a}+\vec{b}|$ 同时成立.

$\therefore \big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| \leq |\vec{a}+\vec{b}|$

$\therefore$ 对任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$, $\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| \leq |\vec{a}+\vec{b}|$ 得证.

④ 再证: $\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| \leq |\vec{a}-\vec{b}|$

$$\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| = \big||\vec{a}|-|-\vec{b}|\big| \leq |\vec{a}+(-\vec{b})| = |\vec{a}-\vec{b}|$$

$\therefore$ 对任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$. $\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| \leq |\vec{a}-\vec{b}|$ 得证.

证毕.