

\vec{a}, \vec{b} 是任意的两个向量 (也可以是空间向量), 则有:

$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

\downarrow "成立 $\Leftrightarrow \vec{a}$ 与 \vec{b} 同向 \downarrow "成立 $\Leftrightarrow \vec{a}$ 与 \vec{b} 同向

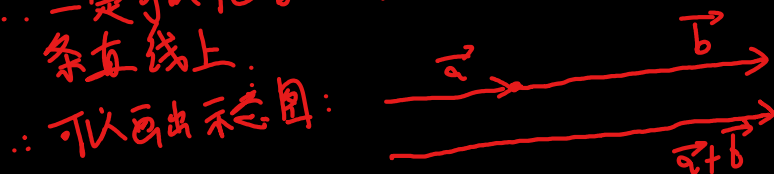
$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

\downarrow "成立 $\Leftrightarrow \vec{a}$ 与 \vec{b} 同向 \downarrow "成立 $\Leftrightarrow \vec{a}$ 与 \vec{b} 反向

命题: \vec{a} 和 \vec{b} 都是非零向量, 则有:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 同向}$$

证明: (\Rightarrow): $\because \vec{a}$ 与 \vec{b} 都是非零向量, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 同向.
 ... 一定可以把 \vec{b} 的始点平移到 \vec{a} 的终点处, 使 \vec{a} 和 \vec{b} 首尾相接, 落在一条直线上.



$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

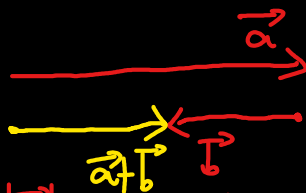
(\Rightarrow) 用反证法. 要证 \vec{a} 与 \vec{b} 同向. 假设 \vec{a} 与 \vec{b} 不同向. 则分类讨论如下:

① \vec{a} 与 \vec{b} 共线

$\because \vec{a}$ 与 \vec{b} 不同向且 \vec{a} 与 \vec{b} 共线 $\therefore \vec{a}$ 与 \vec{b} 反向.

\therefore 有以下三种可能:

(1) $|\vec{a}| > |\vec{b}|$. 此时可画出不意图:



$$|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{与} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \text{ 矛盾.}$$

(2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. 此时有: $\therefore \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{0}| = 0 < |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{与} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \text{ 矛盾.}$$

\downarrow
 $\vec{a} \neq \vec{0} \text{ 且 } \vec{b} \neq \vec{0}$

(3) $|\vec{a}| < |\vec{b}|$. 此时可画出图: 

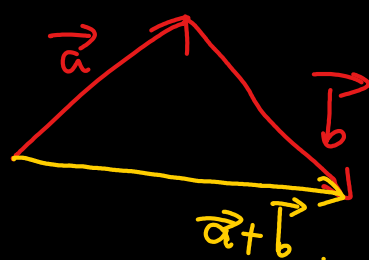
$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{与 } |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \text{ 矛盾.}$$

\downarrow \downarrow
 图 $\vec{a} \neq \vec{0}$.

② \vec{a} 与 \vec{b} 不共线.

$\therefore \vec{a}$ 和 \vec{b} 都是非零向量且 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线.

\therefore 一定可以把 \vec{b} 的始点平移到 \vec{a} 的终点处, 使 \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$ 构成一个三角形.



\therefore 三角形任意两边之和大于第三边

$$\therefore |\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{a} + \vec{b}| \quad \text{与 } |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \text{ 矛盾.}$$

综上, \vec{a} 与 \vec{b} 同向.