3.1 环和域(3)

定义(子集对二元运算封闭) S是一个非空集合，$*$是S上的一个二元运算，$S'\subseteq S$，如果对$\forall s_1, s_2\in S'$，都有$s_1 * s_2 \in S'$，则我们说S'对运算$*$封闭。

定义(子环) R是环，$S\subseteq R$，S是R的一个非空子集，如果S对加法和乘法也构成一个环，则称S是R的一个子环。

R是环，$S\subseteq R$，S是R的一个非空子集，则有：

Lemma (子环的充要条件) S是R的子环 $\iff$ $0_R, 1_R\in S$ 且 S对加法运算，乘法运算，加法取逆运算 $x\mapsto -x$ 封闭。

~~Proof: ($\Rightarrow$): $\because$ S是R的一个非空子集且S是R的子环~~

~~$\therefore$ $0_R, 1_R\in S$ 且 $+: S\times S\to S$ 和 $\cdot: S\times S\to S$ 都是二元运算~~

~~$\therefore$ $0_R, 1_R\in S$ 且 S对加法运算和乘法运算封闭~~

~~$\because$ S对加法和乘法构成一个环~~

~~$\therefore$ 对$\forall x\in S$，$\exists\ \alpha\in S$，使得 $x+\alpha=$~~

Proof: ($\Rightarrow$): $\because$ S是R的子环 $\quad\therefore$ S对R的加法和R的乘法也构成一个环

$\therefore$ $+: S\times S\to S$ 和 $\cdot: S\times S\to S$ 都是二元运算

$\therefore$ S对加法运算和乘法运算封闭。

$\because$ $\exists\, 0_S\in S$，使得：对$\forall x\in S$，有：$x+0_S=x=0_S+x$。 $\quad\therefore 0_S+0_S=0_S$

$\because 0_S\in S \quad \therefore 0_S\in R \quad \therefore 0_S+0_R=0_S=0_R+0_S$

$\because 0_S\in R \quad \therefore \exists\,\alpha\in R$, s.t. $0_S+\alpha=0_R$

$\therefore 0_R=0_S+\alpha=(0_S+0_S)+\alpha=0_S+(0_S+\alpha)=0_S+0_R=0_S$

$\therefore 0_R\in S$.

对$\forall x\in S$。 $\because$ S对R的加法和R的乘法也构成一个环

$\therefore \exists\, \beta\in S$，使得 $x+\beta=0_S$

$\because 0_R=0_S \quad \therefore x+\beta=0_R$

$\because x\in R \quad \therefore \exists -x\in R$, s.t. $x+(-x)=0_R$.

$$\therefore \underset{\beta\in R}{\beta} = \beta+0_R = \beta+(x+(-x)) \underset{\text{R中的加法结合律}}{=} (\beta+x)+(-x) \underset{\text{R中的加法交换律}}{=} (x+\beta)+(-x) = 0_R+(-x) = -x$$

$\therefore -x=\beta\in S \quad \therefore S$ 对加法取逆运算封闭.

$\because \exists\, 1_S\in S$，使得：对 $\forall x\in S$，有：$x\cdot 1_S = x = 1_S\cdot x$

$\because$ 对 $\forall x\in S$，有 $x\in R \quad \therefore x\cdot 1_R = x = 1_R\cdot x$

（我们无法严格地证明 $1_R=1_S$. 我们规定：S 是 R 的子环时，$1_R\in S$ 且 $1_R=1_S$）.

$\therefore 1_R=1_S$ 且 $1_R\in S$

$(\Leftarrow)$：S 是 R 的一个非空子集，$0_R, 1_R\in S$

$\because S$ 对 R 的加法运算和 R 的乘法运算封闭

$\therefore +: S\times S\longrightarrow S$ 和 $\cdot: S\times S\longrightarrow S$ 都是二元运算.

对 $\forall x,y,z\in S$. $\because x,y,z\in R \quad \therefore (x+y)+z = x+(y+z) \quad \therefore S$ 中加法运算满足结合律.

对 $\forall x\in S$，$\because x\in R$ 且 $0_R\in S$，$0_R\in R \quad \therefore x+0_R = x = 0_R+x$

$\therefore 0_R$ 是 S 的加法零元.

对 $\forall x,y\in S$，有：$x,y\in R \quad \therefore x+y=y+x. \quad \therefore S$ 中加法运算满足交换律.

对 $\forall x\in S$. $\because x\in R \quad \therefore \exists -x\in R$，使得 $x+(-x)=0_R$

$\because S$ 对加法取逆运算封闭 $\quad \therefore -x\in S$

$\therefore x+(-x)=0_R$，其中 $-x\in S$，$0_R\in S$，0_R 是 S 的加法零元.

$\therefore$ S中任一元在S中有加法逆元.

对$\forall x,y,z\in S$. $\because x,y,z\in R$ $\therefore (xy)z=x(yz)$

$\therefore$ S中乘法运算满足结合律.

对$\forall x\in S$. $\because x\in R$ $\therefore x\cdot 1_R=x=1_R\cdot x$

$\because 1_R\in S$ $\therefore 1_R$是S的乘法幺元.

对$\forall x,y,z\in S$. $\because x,y,z\in R$ $\therefore (x+y)z=xz+yz$, $z(x+y)=zx+zy$

$\therefore$ S中乘法对加法满足分配律.

$\therefore (S,+,\cdot,0_R,1_R)$是环. $\therefore$ S是R的子环. $\square$

定义(含幺环的子环规定必须包括幺元) ~~R是环~~ $(R,+,\cdot,0_R,1_R)$是环. 如果R的子集R_0包含$0_R,1_R$, 而且在加法, 乘法运算和加法取逆 $x\mapsto -x$ 之下封闭, 则$(R_0,+,\cdot,0_R,1_R)$也是环, 称为R的子环.

定义(环的中心) R是环, 环R的中心定义为:

$$Z(R):=\{z\in R: 对\forall x\in R, 有 zx=xz\}$$

Lemma: Z(R)是环R的子环.

Proof: $0_R\in R$, 且对$\forall x\in R$, 有: $0_R\cdot x=0_R=x\cdot 0_R$ $\therefore 0_R\in Z(R)$

$1_R\in R$, 且对$\forall x\in R$, 有: $1_R\cdot x=x=x\cdot 1_R$ $\therefore 1_R\in Z(R)$.

$\therefore$ Z(R)是R的非空子集.

对$\forall \alpha,\beta\in Z(R)$, 有:

$\because \alpha\in Z(R)$. $\therefore \alpha\in R$ 且对$\forall x\in R$, 有: $\alpha x=x\alpha$

$\because \beta\in Z(R)$ $\therefore \beta\in R$ 且对$\forall x\in R$, 有: $\beta x=x\beta$

$\because \alpha \in R$ 且 $\beta \in R$ $\quad \therefore \alpha\beta \in R$ 且 $\alpha+\beta \in R$.

对 $\forall x \in R$, 有: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha(x\beta) = (\alpha x)\beta = (x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$

$\therefore \alpha\beta \in Z(R)$

对 $\forall x \in R$, 有: $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x = x\alpha + x\beta = x(\alpha+\beta)$

$\therefore \alpha+\beta \in Z(R)$

$\therefore Z(R)$ 对 R 中的加法运算封闭, $Z(R)$ 对 R 中的乘法运算封闭.

对 $\forall \lambda \in Z(R)$, 有: $\lambda \in R$, 且对 $\forall x \in R$, 有: $\lambda x = x\lambda$.

$\because \lambda \in R$ $\quad \therefore \exists$ 唯一的 $-\lambda \in R$, 使得 $\lambda + (-\lambda) = 0_R$.

$\because -\lambda \in R$, 且对 $\forall x \in R$, 有: $(-\lambda)x = -\lambda x = -x\lambda = x(-\lambda)$

$\therefore -\lambda \in Z(R)$ $\quad \therefore Z(R)$ 对加法取逆封闭.

$\therefore (Z(R), +, \cdot, 0_R, 1_R)$ 是 R 的子环. $\square$