定理（任意交换环 R 上的一元多项式环的泛性质）

R 是一个任意的非零交换环.

B 是一个交换环，$f: R \to B$ 是一个环同态，$b \in B$，满足：

对 $\forall$ 交换环 A，$\forall$ 环同态 $\varphi: R \to A$，$\forall a \in A$，$\exists$ 唯一的环同态

$\theta: B \to A$，s.t. 下图交换：

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ B \arrow[rr, "\theta"'] & & A \end{tikzcd}$$

且有 $\theta(b) = a$

B' 是另一个交换环，$f': R \to B'$ 是另一个环同态，$b' \in B'$，满足：

对 $\forall$ 交换环 A，$\forall$ 环同态 $\varphi: R \to A$，$\forall a \in A$，$\exists$ 唯一的环同态

$\theta': B' \to A$，s.t. 下图交换：

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ B' \arrow[rr, "\theta'"'] & & A \end{tikzcd}$$

且有 $\theta'(b') = a$

则存在唯一的映射 $\Theta: B \to B'$，s.t. 下图交换：

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B \arrow[rr, "\Theta"'] & & B' \end{tikzcd}$$

且 $\Theta(b) = b'$，$\Theta: B \to B'$ 是环同构.

Proof: 对于交换环 B'，环同态 $f': R\to B'$，$b'\in B'$，∃唯一的环同态

$\Phi: B\to B'$，s.t. 下图交换：
$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B \arrow[rr, "\Phi"'] & & B' \end{tikzcd}$$
且有 $\Phi(b)=b'$

对于交换环 B，环同态 $f: R\to B$，$b\in B$，∃唯一的环同态

$\Psi: B'\to B$，s.t. 下图交换：
$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B' \arrow[rr, "\Psi"'] & & B \end{tikzcd}$$
且有 $\Psi(b')=b$

∵ $\Phi: B\to B'$ 和 $\Psi: B'\to B$ 都是环同态

∴ $\Psi\circ\Phi: B\to B$ 和 $\Phi\circ\Psi: B'\to B'$ 都是环同态.

对于交换环 B，环同态 $f: R\to B$，$b\in B$，∃唯一的环同态

$\alpha: B\to B$ s.t. 下图交换：
$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[rr, "\alpha"'] & & B \end{tikzcd}$$
且有 $\alpha(b)=b$.

∵ B是环　　∴ $id_B: \begin{array}{c} B\to B \\ x\mapsto x \end{array}$ 是环同构，也是环同态.

∵ $id_B\circ f=f$　　∴ 下图交换：
$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[rr, "id_B"'] & & B \end{tikzcd}$$
∵ $id_B(b)=b$　　∴ $id_B=\alpha$

∵ $(\Psi\circ\Phi)\circ f=\Psi\circ(\Phi\circ f)=\Psi\circ f'=f$　　∴ 下图交换：
$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[rr, "\Psi\circ\Phi"'] & & B \end{tikzcd}$$

∵ $(\Psi\circ\Phi)(b)=\Psi(\Phi(b))=\Psi(b')=b$　　∴ $\Psi\circ\Phi=\alpha=id_B$.

对于交换环 B'，环同态 $f': R\to B'$，$b'\in B'$，∃唯一的环同态

$\beta: B'\to B'$，s.t. 下图交换：
$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B' \arrow[rr, "\beta"'] & & B' \end{tikzcd}$$
且有 $\beta(b')=b'$

$\because id_{B'}: B' \to B'$ 是环同态， $id_{B'} \circ f' = f'$

$\therefore$ 下图交换：

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B' \arrow[rr, "id_{B'}"'] & & B' \end{tikzcd}$$

$\because id_{B'}(b') = b'$ $\therefore id_{B'} = \beta$

$\because (\Phi \circ \Psi) \circ f' = \Phi \circ (\Psi \circ f') = \Phi \circ f = f'$

$\therefore$ 下图交换：

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B' \arrow[rr, "\Phi \circ \Psi"'] & & B' \end{tikzcd}$$

$\because (\Phi \circ \Psi)(b') = \Phi(\Psi(b')) = \Phi(b) = b'$

$\therefore \Phi \circ \Psi = \beta = id_{B'}$

$\therefore \Phi: B \to B'$ 是可逆映射 $\therefore \Phi: B \to B'$ 是双射.

$\therefore \Phi: B \to B'$ 是环同构. $\therefore$ 存在性得证.

假设存在映射 $\Theta_1: B \to B'$, s.t. 下图交换：

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B \arrow[rr, "\Theta_1"'] & & B' \end{tikzcd}$$

且 $\Theta_1(b) = b'$,

$\Theta_1: B \to B'$ 是环同构

假设还存在映射 $\Theta_2: B \to B'$, s.t. 下图交换：

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B \arrow[rr, "\Theta_2"'] & & B' \end{tikzcd}$$

且 $\Theta_2(b) = b'$,

$\Theta_2: B \to B'$ 是环同构.

$\because$ 对于交换环 B'，环同态 $f': R \to B'$ ， $b' \in B'$ ，$\exists$ 唯一的环同态

$\Phi: B \to B'$, s.t. 下图交换：

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B \arrow[rr, "\Phi"'] & & B' \end{tikzcd}$$

且有 $\Phi(b) = b'$

$\therefore \Theta_1 = \Phi = \Theta_2$. 唯一性得证. $\square$