Lemma：R是交换环，则有：$\{0_R\}$是R的极大理想 $\Longleftrightarrow$ R是域

Proof：~~⇒~~ ∵R是环　∴$\{0_R\}$是R的零理想

若R是零环，则有：$R=\{0_R\}$　∴$\{0_R\}$不是R的真理想

∴$\{0_R\}$不是R的极大理想　∴左边为假．

假设R是域，则R是非零环，矛盾．∴R不是域　∴右边为假．∴左$\Leftrightarrow$右．

若R是非零环，则有：R是非零交换环．

$(\Rightarrow)$：~~$\{0_R\}$是R的~~ 设I是R的一个任意的理想，则：

若$I=\{0_R\}$，则$I=\{0_R\}$．

若$I\neq\{0_R\}$，则∵$\{0_R\}\subseteq I$　∴$\{0_R\}\subsetneqq I$．∵$\{0_R\}$是R的极大理想

∴$I=R$

∴$I=\{0_R\}$或$I=R$　∴R没有$\{0_R\}$和R之外的理想　∴R是域．

$(\Leftarrow)$：~~⇐~~ ∵R是环　∴$\{0_R\}\subseteq R$　∵R是非零环　∴$\{0_R\}\neq R$

∴$\{0_R\}\subsetneqq R$　∴$\{0_R\}$是R的真理想．

设I是R的任意一个满足$\{0_R\}\subseteq I$的理想．

∵R是域　∴R只有两个理想$\{0_R\}$和R　∴$I=\{0_R\}$或$I=R$

∴$\{0_R\}$是R的极大理想．　$\square$

Lemma：R和R'是交换环，$f:R\longrightarrow R'$是环同态，I是R的素理想，$\ker(f)\subseteq I$，则有：$f(I)$是环$f(R)$的素理想．

Proof：∵R和R'是环，$f:R\rightarrow R'$是环同态　∴$f(R)$是环R'的子环．

∵$0_{R'}=f(0_R)\in f(R)$　∴$\{0_{R'}\}\subseteq f(R)$

∵I是R的素理想　∴$I\subsetneqq R$　∴$\{0_R\}\subseteq I\subsetneqq R$　∴R是非零环．

假设 $f(R)=\{0_{R'}\}$，则对 $\forall x\in R$，有：$f(x)\in f(R)=\{0_{R'}\}$ $\therefore f(x)=0_{R'}$

$\therefore x\in \ker(f)$ $\therefore R\subseteq \ker(f)$ $\therefore R=\ker(f)$ $\because I\subseteq R=\ker(f)$

$\therefore \ker(f)=I$ $\therefore I=R$ $\because$ I是R的素理想 $\therefore I\neq R$ 矛盾.

$\therefore f(R)\neq\{0_{R'}\}$ $\therefore \{0_{R'}\}\subsetneqq f(R)\subseteq R'$

$\therefore f(R)$是环R'的子环，$f(R)$是非零环，R'是非零环.

$\because R$和R'是环，$f: R\to R'$是环同态，I是R的理想

$\therefore f(I)$是环$f(R)$的理想（20250816_…/杂项/4 笔记）

$\therefore f(R)$是非零交换环，$f(I)$是环$f(R)$的理想.

假设 $f(I)=f(R)$，则 $1_{R'}=f(1_R)\in f(R)=f(I)$

$\therefore \exists x\in I$，s.t. $1_{R'}=f(x)$ $\because 1_R\in R$，$x\in I\subseteq R$ $\therefore 1_R-x\in R$

$\because f(1_R-x)=f(1_R+(-x))=f(1_R)+f(-x)=1_{R'}+(-f(x))=f(x)+(-f(x))$

$=0_{R'}$ $\therefore 1_R-x\in\ker(f)\subseteq I$ $\because$ I是R的理想，$x\in I$，$1_R-x\in I$

$\therefore (1_R-x)+x\in I$ ~~$\because (1_R-x)+x=(1_R+(-x))+x=1_R+((-x)+x)=$~~

$\because (1_R-x)+x=(1_R+(-x))+x=1_R+((-x)+x)=1_R+0_R=1_R$

$\therefore 1_R\in I$ $\because R$是环，I是R的理想，$1_R\in I$ $\therefore I=R$

$\because$ I是R的素理想 $\therefore$ I是R的真理想 $\therefore I\neq R$ 矛盾. $\therefore f(I)\neq f(R)$

$\therefore f(I)$是环$f(R)$的真理想.

对 $\forall \lambda,\mu\in f(R)$，若 $\lambda\mu\in f(I)$，则有：

$\because \lambda,\mu\in f(R)$ $\therefore \exists x,y\in R$，s.t. $\lambda=f(x)$，$\mu=f(y)$

$\therefore f(xy)=f(x)f(y)=\lambda\mu\in f(I)$ $\therefore \exists z\in I$，s.t. $f(xy)=f(z)$

$\therefore xy-z\in R$，且 $f(xy-z)=f(xy+(-z))=f(xy)+f(-z)=f(xy)+(-f(z))$
$=f(z)+(-f(z))=0_{R'}$ $\therefore xy-z\in \ker(f)\subseteq I$ $\therefore (xy-z)+z\in I$
$\because (xy-z)+z=(xy+(-z))+z=xy+((-z)+z)=xy+0_R=xy$
$\therefore xy\in I$ $\because I$是R的素理想 $\therefore x\in I$或$y\in I$
$\therefore \lambda=f(x)\in f(I)$或$\mu=f(y)\in f(I)$ $\therefore f(I)$是环$f(R)$的素理想.

$\square$

推论：R和R'是交换环，$f:R\to R'$是满同态，I是R的素理想，$\ker(f)\subseteq I$，则有：$f(I)$是环R'的素理想.

Proof：由上一引理：$f(I)$是环$f(R)$的素理想.
$\because f:R\to R'$是满同态 $\therefore f(R)=R'$
$\therefore f(I)$是环R'的素理想. $\square$

Lemma：R是环，I_1和I_2是R的理想，则有：
$I_1+I_2=\{a+b\mid a\in I_1, b\in I_2\}$是$R$的理想，且$I_1+I_2$是$R$的包含$I_1\cup I_2$的最小理想.

Proof：对$\forall a+b\in I_1+I_2$（其中$a\in I_1$且$b\in I_2$）
$\because a\in I_1\subseteq R$，$b\in I_2\subseteq R$ $\therefore a+b\in R$ $\therefore I_1+I_2\subseteq R$
$\because I_1$和I_2是R的理想 $\therefore 0_R\in I_1$且$0_R\in I_2$
$\therefore 0_R=0_R+0_R\in I_1+I_2$ $\therefore I_1+I_2\neq\emptyset$. $\therefore I_1+I_2$是R的非空子集.
对$\forall a_1+b_1, a_2+b_2\in I_1+I_2$（其中$a_1\in I_1$，$b_1\in I_2$，$a_2\in I_1$，$b_2\in I_2$）

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)=\underbrace{(a_1+a_2)}_{\in I_1}+\underbrace{(b_1+b_2)}_{\in I_2}\in I_1+I_2$$

对 $\forall r\in R$,

任取 $r(I_1+I_2)$ 中的一元：$r(a+b)$ （其中 $a\in I_1$, $b\in I_2$）

$\therefore r(a+b)=ra+rb\in I_1+I_2$ $\quad\therefore r(I_1+I_2)\subseteq I_1+I_2$

任取 $(I_1+I_2)r$ 中的一元：$(a+b)r$ （其中 $a\in I_1$, $b\in I_2$）

$\therefore (a+b)r=ar+br\in I_1+I_2$ $\quad\therefore (I_1+I_2)r\subseteq I_1+I_2$

$\therefore I_1+I_2$ 是 R 的理想.

对 $\forall\lambda\in I_1\cup I_2$，有：$\lambda\in I_1$ 或 $\lambda\in I_2$

若 $\lambda\in I_1$，则 $\lambda=\lambda+0_R\in I_1+I_2$.

若 $\lambda\in I_2$，则 $\lambda=0_R+\lambda\in I_1+I_2$

$\therefore\lambda\in I_1+I_2$ $\quad\therefore I_1\cup I_2\subseteq I_1+I_2$

$\therefore I_1+I_2$ 是 R 的包含 $I_1\cup I_2$ 的理想.

设 I 是 R 的任意一个包含 $I_1\cup I_2$ 的理想，任取 I_1+I_2 中的一元：$a+b$ $(a\in I_1, b\in I_2)$

$\because a\in I_1\subseteq I_1\cup I_2\subseteq I$, $b\in I_2\subseteq I_1\cup I_2\subseteq I$，$I$ 是 R 的理想

$\therefore a+b\in I$ $\quad\therefore I_1+I_2\subseteq I$

$\therefore I_1+I_2$ 是 R 的包含 $I_1\cup I_2$ 的最小理想. $\quad\square$

定理（像环的商环同构定理）R 和 R' 是环，$f: R \to R'$ 是环同态，I 是 R 的理想，则有：$R/(I+\ker(f)) \simeq f(R)/f(I)$

Proof: ∵ R 和 R' 是环，$f: R \to R'$ 是环同态　∴ $\ker(f)$ 是 R 的理想

∵ I 是 R 的理想，$\ker(f)$ 是 R 的理想　∴ $I+\ker(f)$ 是 R 的理想

∴ $R/(I+\ker(f))$ 是环.

∵ R 和 R' 是环，$f: R \to R'$ 是环同态　∴ $f(R)$ 是环 R' 的子环　∴ $f(R)$ 是环.

∵ R 和 R' 是环，$f: R \to R'$ 是环同态，I 是 R 的理想　∴ $f(I)$ 是环 $f(R)$ 的理想

∴ $f(R)/f(I)$ 是环.

定义映射：
$$\begin{aligned} \varphi: R &\longrightarrow f(R)/f(I) \\ x &\longmapsto f(x)+f(I) \end{aligned}$$

对 $\forall x \in R$，∵ $f: R \to R'$ 是环同态　∴ $f(x) \in f(R)$　$\cancel{f(x)+f(I)}$

∴ $\varphi(x) = f(x)+f(I) \in f(R)/f(I)$　∴ $\varphi(R) \subseteq f(R)/f(I)$

对 $\forall x_1, x_2 \in R$，若 $x_1 = x_2$，则有：∵ $f: R \to R'$ 是环同态　∴ $f(x_1) = f(x_2) \in f(R)$

∴ $\varphi(x_1) = f(x_1)+f(I) = f(x_2)+f(I) = \varphi(x_2)$

∴ $\varphi: R \to f(R)/f(I)$ 是一个映射.

任取 $f(R)/f(I)$ 中的一元：$\lambda + f(I)$（其中 $\lambda \in f(R)$）

∵ $\lambda \in f(R)$　∴ $\exists \mu \in R$, s.t. $f(\mu) = \lambda$.

∴ $\varphi(\mu) = f(\mu)+f(I) = \lambda + f(I)$

∴ $\varphi: R \to f(R)/f(I)$ 是一个满射.

对 $\forall x_1, x_2 \in R$，

$$\varphi(x_1+x_2) = f(x_1+x_2)+f(I) = \big(f(x_1)+f(x_2)\big)+f(I)$$

$$= \big(f(x_1)+f(I)\big)+\big(f(x_2)+f(I)\big) = \varphi(x_1)+\varphi(x_2)$$

$$\varphi(x_1\cdot x_2) = f(x_1\cdot x_2)+f(I) = f(x_1)\cdot f(x_2)+f(I)$$

$$= \big(f(x_1)+f(I)\big)\cdot\big(f(x_2)+f(I)\big) = \varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)$$

$$\varphi(1_R) = f(1_R)+f(I) = 1_{R'}+f(I) = 1_{f(R)}+f(I) = 1_{f(R)/f(I)}$$

$\therefore \varphi: R \to f(R)/f(I)$ 是满同态.

$\therefore$ 由环的第一同构定理知：$R/\ker(\varphi) \simeq f(R)/f(I)$

$\because I+\ker(f)$ 是 R 的理想 $\therefore I+\ker(f) \subseteq R$. $\ker(\varphi) \subseteq R$.

任取 $I+\ker(f)$ 中的一元：$a+b$ （其中 $a\in I$，$b\in\ker(f)$ ）

$$\because \varphi(a+b) = f(a+b)+f(I) = \big(f(a)+f(b)\big)+f(I)$$

$$= \big(f(a)+f(I)\big)+\big(f(b)+f(I)\big) = 0_{f(R)/f(I)}+0_{f(R)/f(I)}$$

$= 0_{f(R)/f(I)}$ $\therefore a+b \in \ker(\varphi)$ $\therefore I+\ker(f) \subseteq \ker(\varphi)$

对 $\forall x \in \ker(\varphi)$，有：$x\in R$ 且 $\varphi(x) = 0_{f(R)/f(I)}$

$$\therefore f(x)+f(I) = 0_{f(R)/f(I)} = 0_{f(R)}+f(I) = 0_{R'}+f(I)$$

$\therefore f(x) \equiv_{f(I)} 0_{R'}$ $\therefore f(x)-0_{R'} \in f(I)$

$\because f(x)-0_{R'} = f(x)+(-0_{R'}) = f(x)+0_{R'} = f(x)$ $\therefore f(x) \in f(I)$

$\therefore \exists \alpha \in I$, s.t. $f(x) = f(\alpha)$

$\because x \in R$, $\alpha \in I \subseteq R$ $\quad \therefore x - \alpha \in R$

$\because f(x-\alpha) = f(x+(-\alpha)) = f(x) + f(-\alpha) = f(x) + (-f(\alpha))$

$$= f(\alpha) + (-f(\alpha)) = 0_{R'}$$

$\therefore x - \alpha \in ker(f)$ $\quad \therefore \alpha + (x-\alpha) \in I + ker(f)$

$\because \alpha + (x-\alpha) = \alpha + (x+(-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha)+x) = (\alpha+(-\alpha)) + x$

$= 0_R + x = x$ $\quad \therefore x \in I + ker(f)$ $\quad \therefore ker(\varphi) \subseteq I + ker(f)$

$\therefore ker(\varphi) = I + ker(f)$

$\therefore R/(I+ker(f)) \simeq f(R)/f(I)$ $\quad \square$

推论：R和R'是环，$f: R \to R'$是环同态，I是R的理想，$ker(f) \subseteq I$ $\cancel{I \subseteq ker(f)}$

则有：$R/I \simeq f(R)/f(I)$

Proof: 已知有：$R/(I+ker(f)) \simeq f(R)/f(I)$

又对$\forall x \in I$，$\because x = x + 0_R \in I + ker(f)$ $\quad \therefore I \subseteq I + ker(f)$

任取 $I + ker(f)$ 中的一元：$a+b$（其中$a \in I$且$b \in ker(f)$）

$\because a \in I$，$b \in ker(f) \subseteq I$，I是R的理想 $\quad \therefore a+b \in I$

$\therefore I + ker(f) \subseteq I$ $\quad \therefore I + ker(f) = I$

$\therefore R/I \simeq f(R)/f(I)$ $\quad \square$

Lemma：R和R'是交换环，$f: R \to R'$是环同态，I是R的极大理想，$\ker(f) \subseteq I$，则有：$f(I)$是环$f(R)$的极大理想.

Proof：$\because$ R和R'是环，$f: R \to R'$是环同态，I是R的理想，$\ker(f) \subseteq I$

$\therefore R/I \simeq f(R)/f(I)$

$\because$ I是R的极大理想 $\therefore$ R/I是域 $\therefore$ $f(R)/f(I)$是域.

$\because$ $f(R)$是环R'的子环，R'是交换环 $\therefore$ $f(R)$是交换环.

$\because$ R和R'是环，$f: R \to R'$是环同态，I是R的理想

$\therefore$ $f(I)$是环$f(R)$的理想

$\because$ $f(R)$是交换环，$f(I)$是环$f(R)$的理想，$f(R)/f(I)$是域

$\therefore$ $f(I)$是环$f(R)$的极大理想. $\square$