Lemma：X和Y是集合，$f: X \to Y$是映射，$A \subseteq B \subseteq X$，则有：

$f(A) \subseteq f(B) \subseteq f(X) \subseteq Y$.

Proof：对$\forall \lambda \in f(A)$，$\exists x \in A$，s.t. $f(x) = \lambda$

$\because x \in A$，$A \subseteq B$ $\quad \therefore x \in B$ $\quad \therefore f(x) \in f(B)$ $\quad \therefore \lambda \in f(B)$

$\therefore f(A) \subseteq f(B)$

对$\forall \mu \in f(B)$，$\exists y \in B$，s.t. $\mu = f(y)$

$\because y \in B \subseteq X$ $\quad \therefore y \in X$ $\quad \therefore f(y) \in f(X)$ $\quad \therefore \mu \in f(X)$

$\therefore f(B) \subseteq f(X)$ $\qquad \therefore f(A) \subseteq f(B) \subseteq f(X) \subseteq Y$. $\quad \square$

Lemma：X和Y是集合，$f: X \to Y$是映射，$A \subseteq B \subseteq Y$，则有：

$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Y) = X$

Proof：对$\forall x \in f^{-1}(A)$，有：$x \in X$且$f(x) \in A$.

$\because f(x) \in A \subseteq B$ $\quad \therefore f(x) \in B$ $\quad \therefore x \in f^{-1}(B)$ $\quad \therefore f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

对$\forall x \in f^{-1}(B)$，有：$x \in X$且$f(x) \in B$

$\because f(x) \in B \subseteq Y$ $\quad \therefore f(x) \in Y$ $\quad \therefore x \in f^{-1}(Y)$ $\quad \therefore f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Y)$

对$\forall x \in X$，有：$f(x) \in Y$ $\quad \therefore x \in f^{-1}(Y)$ $\quad \therefore X \subseteq f^{-1}(Y)$

对$\forall x \in f^{-1}(Y)$，有：$x \in X$且$f(x) \in Y$ $\quad \therefore x \in X$ $\quad \therefore f^{-1}(Y) \subseteq X$

$\therefore f^{-1}(Y) = X$

$\therefore f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Y) = X$ $\quad \square$

Lemma：R和R'是环，$f: R \to R'$是环同态，A是环R的子环，

则有：$f(A)$是环R'的子环.

Proof：$\because$ A是环R的子环 $\therefore$ $0_R, 1_R \in A$ $\therefore$ $f(0_R), f(1_R) \in f(A)$

$\because$ $f(0_R) = 0_{R'}$，$f(1_R) = 1_{R'}$ $\therefore$ $0_{R'} \in f(A)$，$1_{R'} \in f(A)$

对$\forall \lambda, \mu \in f(A)$，有：$\exists x, y \in A$，s.t. $f(x) = \lambda$，$f(y) = \mu$

$\because$ A是环R的子环，$x, y \in A$ $\therefore$ $x+y \in A$，$xy \in A$

$\therefore$ $f(x+y) \in f(A)$，$f(xy) \in f(A)$

$\because$ $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda + \mu$，$f(xy) = f(x)f(y) = \lambda\mu$

$\therefore$ $\lambda + \mu \in f(A)$，$\lambda\mu \in f(A)$

对$\forall \lambda \in f(A)$，有：$\exists x \in A$，s.t. $f(x) = \lambda$

$\because$ A是环R的子环，$x \in A$ $\therefore$ $-x \in A$ $\therefore$ $f(-x) \in f(A)$

$\because$ $f(-x) = -f(x) = -\lambda$ $\therefore$ $-\lambda \in f(A)$

$\because$ $A \subseteq R$ $\therefore$ $f(A) \subseteq f(R) \subseteq R'$

$\therefore$ $f(A)$是环R'的子环. $\square$

Lemma：R和R'是环，$f: R \to R'$是环同态，B是环R'的子环，

则有：$f^{-1}(B)$是环R的子环.

Proof：$\because$ B是环R'的子环 $\therefore$ $B \subseteq R'$ $\therefore$ $f^{-1}(B) \subseteq R$

$\because 0_R \in R$，且 $f(0_R) = 0_{R'} \in B$ $\quad \therefore 0_R \in f^{-1}(B)$

$\because 1_R \in R$，且 $f(1_R) = 1_{R'} \in B$ $\quad \therefore 1_R \in f^{-1}(B)$

对 $\forall x, y \in f^{-1}(B)$，有：$x, y \in R$，且 $f(x) \in B$，$f(y) \in B$

$\because$ $x+y \in R$，$f(x+y) = f(x)+f(y) \in B$ $\quad \therefore x+y \in f^{-1}(B)$

$\because xy \in R$，$f(xy) = f(x)f(y) \in B$ $\quad \therefore xy \in f^{-1}(B)$

对 $\forall x \in f^{-1}(B)$，有：$x \in R$，且 $f(x) \in B$

$\therefore -x \in R$，$f(-x) = -f(x) \in B$ $\quad \therefore -x \in f^{-1}(B)$

$\therefore f^{-1}(B)$ 是环 R 的子环. $\square$

Lemma：R 和 R' 是环，$f: R \to R'$ 是环同态，I 是环 R 的理想，则有：$f(I)$ 是环 $f(R)$ 的理想

Proof：$\because I$ 是环 R 的理想 $\quad \therefore I \subseteq R$ $\quad \therefore f(I) \subseteq f(R)$

$\because 0_R \in I$ $\quad \therefore 0_{R'} = f(0_R) \in f(I)$ $\quad \therefore f(I) \neq \emptyset$

$\therefore f(I)$ 是 $f(R)$ 的非空子集.

$\because f(R)$ 是环 R' 的子环 $\quad \therefore (f(R), +, \cdot, 0_{R'}, 1_{R'})$ 是环.

对 $\forall \lambda, \mu \in f(I)$，$\exists x, y \in I$，s.t. $f(x) = \lambda$，$f(y) = \mu$

$\because x+y \in I$ $\quad \therefore f(x+y) \in f(I)$

$\because f(x+y) = f(x)+f(y) = \lambda+\mu$ $\quad \therefore \lambda+\mu \in f(I)$

对 $\forall \zeta \in f(R)$，$\exists t \in R$，s.t. $f(t) = \zeta$

任取$\zeta f(I)$中的一元：$\zeta\alpha$（其中$\alpha\in f(I)$）

$\because \alpha\in f(I)$ $\therefore \exists x\in I$, s.t. $\alpha=f(x)$ $\therefore tx\in tI\subseteq I$

$\therefore \zeta\alpha=f(t)f(x)=f(tx)\in f(I)$ $\therefore \zeta f(I)\subseteq f(I)$

任取$f(I)\zeta$中的一元：$\beta\zeta$（其中$\beta\in f(I)$）

$\because \beta\in f(I)$ $\therefore \exists y\in I$, s.t. $\beta=f(y)$ $\therefore yt\in It\subseteq I$

$\therefore \beta\zeta=f(y)f(t)=f(yt)\in f(I)$ $\therefore f(I)\zeta\subseteq f(I)$

$\therefore f(I)$是环$f(R)$的理想. $\square$

Lemma：R和R'是环，$f: R\to R'$是满同态，I是环R的理想，

则有：$f(I)$是环R'的理想.

Proof：$\because R$和R'是环，$f: R\to R'$是环同态，I是环R的理想，

$\therefore f(I)$是环$f(R)$的理想

$\because f: R\to R'$是满同态 $\therefore f(R)=R'$

$\therefore f(I)$是环R'的理想. $\square$

Lemma：R和R'是环，$f: R\to R'$是环同态，则有：

$f: R\to R'$是满同态 $\Longleftrightarrow$ 对于环R的任意一个理想I，都有

$f(I)$是环R'的理想.

Proof：($\Rightarrow$)：对于环R的任意一个理想I，有：

$\because R$和R'是环，$f: R\to R'$是满同态，I是环R的理想

$\therefore f(I)$是环R'的理想

令：$\because$ R是R的理想　$\therefore$ $f(R)$是环R'的理想

$\therefore$ $1_{R'}=f(1_R)\in f(R)$

$\because$ R'是环，$f(R)$是环R'的理想，$1_{R'}\in f(R)$

$\therefore$ $f(R)=R'$

$\therefore$ $f:R\to R'$是满同态　$\square$

Lemma：R和R'是环，$f:R\to R'$是环同态，J是环R'的理想，

则有：$f^{-1}(J)$是环R的理想.

Proof：$\because$ J是环R'的理想　$\therefore$ $J\subseteq R'$　$\therefore$ $f^{-1}(J)\subseteq R$

$\because$ J是环R'的理想　$\therefore$ $0_{R'}\in J$

$\therefore$ $0_R\in R$，且$f(0_R)=0_{R'}\in J$　$\therefore$ $0_R\in f^{-1}(J)$

$\therefore$ $f^{-1}(J)\neq\emptyset$　$\therefore$ $f^{-1}(J)$是环R的非空子集.

对$\forall x,y\in f^{-1}(J)$，有：$x,y\in R$，且$f(x)\in J$，$f(y)\in J$.

$\therefore$ $x+y\in R$，且$f(x+y)=f(x)+f(y)\in J$　$\therefore$ $x+y\in f^{-1}(J)$

对$\forall r\in R$，

任取$rf^{-1}(J)$中的一元：$r\alpha$（其中$\alpha\in f^{-1}(J)$）

$\because$ $\alpha\in f^{-1}(J)$　$\therefore$ $\alpha\in R$且$f(\alpha)\in J$

$\therefore$ $r\alpha\in R$且$f(r\alpha)=f(r)f(\alpha)\in f(r)J\subseteq J$

$\therefore$ $r\alpha\in f^{-1}(J)$　$\therefore$ $rf^{-1}(J)\subseteq f^{-1}(J)$

任取$f^{-1}(J)r$中的一元：βr（其中$\beta\in f^{-1}(J)$）

$\because \beta\in f^{-1}(J)$ $\quad\therefore \beta\in R$ 且 $f(\beta)\in J$

$\therefore \beta r\in R$，且 $f(\beta r)=f(\beta)f(r)\in Jf(r)\subseteq J$

$\therefore \beta r\in f^{-1}(J)$ $\quad\therefore f^{-1}(J)r\subseteq f^{-1}(J)$

$\therefore f^{-1}(J)$是环R的理想 $\square$