

定义(交换环中的整除) R 是交换环, 对 $\forall x, y \in R$, 若存在 $d \in R$ 使得 $y = dx$, 则称 x 整除 y , 记作 $x | y$.

定义(整环上的相伴关系) R 是整环, 对 $\forall x, y \in R$,

$$x \sim y \iff \exists r \in R^{\times}, \text{ 使得 } x = ry$$

若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 相伴.

Lemma: 整环上的相伴关系是整环上的等价关系.

Proof: R 是整环, 对 $\forall x, y \in R$, 有: $x \sim y \iff \exists r \in R^{\times}$, s.t. $x = ry$.

对 $\forall x \in R$, $\because |_R \in R^{\times}$, 且 $x = |_R \cdot x \quad \therefore x \sim x \quad \therefore \text{反身性成立.}$

对 $\forall x, y \in R$, 若 $x \sim y$, 则有: $\because x \sim y \quad \exists r \in R^{\times}$, s.t. $x = ry$

$$\therefore r \in R^{\times} \quad \cancel{r \neq 0} \quad \therefore r^{-1} \in R^{\times}$$

$$\therefore y = |_R \cdot y = (r^{-1} \cdot r) \cdot y = r^{-1}(ry) = r^{-1}x \quad \therefore y \sim x \quad \therefore \text{对称性成立}$$

对 $\forall x, y, z \in R$, 若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 则有:

$$\because x \sim y \quad \exists r_1 \in R^{\times}, \text{ s.t. } x = r_1 y$$

$$\because y \sim z \quad \exists r_2 \in R^{\times}, \text{ s.t. } y = r_2 z$$

$$\therefore r_1 \in R^{\times} \text{ 且 } r_2 \in R^{\times} \quad \therefore r_1 r_2 \in R^{\times}$$

$$\therefore (r_1 r_2)z = r_1(r_2 z) = r_1 y = x \quad \therefore x = (r_1 r_2)z$$

$\therefore x \sim z \quad \therefore \text{传递性成立.}$

\therefore 整环上的相伴关系是整环上的等价关系



Lemma: R 是整环，已经证明了 \sim 为 R 上的等价关系，对 $\forall x \in R$ ，以 x 为代元的等价类为 $\{\alpha \in R : \alpha \sim x\}$. 则有：

$$\{\alpha \in R : \alpha \sim x\} \subseteq (x) \quad (\text{其中 } (x) = xR = \{xr : r \in R\})$$

((x) 称为 x 确定的主理想)

Proof: 任取集合 $\{\alpha \in R : \alpha \sim x\}$ 中的一个元素 α $\therefore \alpha \in R$ 且 $\alpha \sim x$
 $\therefore \alpha \in R$ 且 $x \in R$ 且 $\exists r \in R^X$, s.t. $\alpha = rx$
 $\therefore \alpha = rx = xr \in (x)$ $\therefore \{\alpha \in R : \alpha \sim x\} \subseteq (x)$. □

Remark: 反方向的包含关系一般不成立. 例子可由 Gemin 生成.

Lemma: R 是整环, 对 $\forall x, y \in R$, 有:

$$x|y \iff (y) \subseteq (x)$$

Proof: (\Rightarrow): $\because x|y \quad \therefore \exists d \in R$, s.t. $y = dx$

对 $\forall \lambda \in (y)$, 有: $\exists r \in R$, s.t. $\lambda = yr$

$$\therefore \lambda = yr = (dx)r = (xd)r = x(dr) \in (x)$$

$$\therefore (y) \subseteq (x)$$

$$(\Leftarrow): y = y \cdot 1_R \in (y) \quad \therefore (y) \subseteq (x) \quad \therefore y \in (x)$$

$$\therefore \exists d \in R, \text{s.t. } y = xd$$

$$\therefore \exists d \in R, \text{s.t. } y = dx \quad \therefore x|y \quad \boxed{\square}$$

Lemma: R 是整环, 对 $\forall x, y \in R$, 有:

$$x \sim y \Leftrightarrow x|y \text{ 且 } y|x \Leftrightarrow (x) = (y)$$

Proof: 左 \Rightarrow 右: $\because x \sim y \therefore \exists r \in R^{\times}$, s.t. $x = ry$

$$\therefore r \in R \text{ 且 } x = ry \quad \therefore y|x$$

$$\therefore r \in R^{\times} \quad \therefore r^{-1} \in R^{\times}$$

$$\therefore y = |_R \cdot y = (r^{-1} \cdot r)y = r^{-1}(ry) = r^{-1}x$$

$$\therefore r^{-1} \in R^{\times} \text{ 且 } y = r^{-1}x \quad \therefore x|y$$

$$\therefore x|y \text{ 且 } y|x$$

右 \Rightarrow 左: $\because x|y \quad \therefore \exists d_1 \in R$, s.t. $y = d_1 \cdot x$

$$\therefore y|x \quad \therefore \exists d_2 \in R$$
, s.t. $x = d_2 y$

$$\therefore y = d_1 x = d_1(d_2 y) = (d_1 d_2)y$$

① 若 $y = 0_R$, 则有: $x = d_2 y = d_2 \cdot 0_R = 0_R$

$$\therefore |_R \in R^{\times} \text{ 且有 } 0_R = |_R \cdot 0_R$$

$$\therefore |_R \in R^{\times} \text{ 且有 } x = |_R \cdot y \quad \therefore x \sim y$$

② 若 $y \neq 0_R$, 则有:

$$\therefore (d_1 d_2)y = y = |_R \cdot y \quad \therefore (d_1 d_2)y = |_R \cdot y$$

$$\therefore d_1 d_2 \in R, \quad |_R \in R, \quad y \in R, \quad y \neq 0_R, \quad (d_1 d_2)y = |_R \cdot y$$

$$\therefore d_1 d_2 = |_R \quad \therefore |_R = d_1 d_2 = d_2 d_1$$

$\therefore d_1 \in R^\times$ 且 $d_2 \in R^\times$

$\therefore d_2 \in R^\times$ 且 $x = d_2 y \quad \therefore x \sim y$

\therefore 左 \Leftrightarrow 中得证！

中 $\Leftrightarrow x|y$ 且 $y|x \Leftrightarrow (y) \subseteq (x)$ 且 $(x) \subseteq (y) \Leftrightarrow (x) = (y) \Leftrightarrow$ 右

\therefore 中 \Leftrightarrow 右得证！ \square

定义(素元, 不可约元) R 是整环, $p \in R$, $p \neq 0_R$, $p \notin R^\times$

* 若对 $\forall a, b \in R$, $p|ab \Leftrightarrow p|a$ 或 $p|b$, 则称 p 为素元

* 若对 $\forall a \in R$, $a|p \Leftrightarrow a \sim p$ 或 $a \sim |_R p$, 则称 p 为不可约元.

Lemma: R 是交换环, $p, a, b \in R$, $p|a$ 或 $p|b$, 则有: $p|ab$

Proof: 若 $p|a$, 则有: $\exists d_1 \in R$, s.t. $a = d_1 p$

$$\therefore ab = (d_1 p)b = d_1(p b) = d_1(b p) = (d_1 b)p$$

$\therefore d_1 \in R$, $b \in R \quad \therefore d_1 b \in R$

$$\therefore d_1 b \in R \text{ 且 } ab = (d_1 b)p \quad \therefore p|ab$$

若 $p|b$, 则有: $\exists d_2 \in R$, s.t. $b = d_2 p$

$$\therefore ab = a(d_2 p) = (ad_2)p$$

$\therefore a \in R$ 且 $d_2 \in R \quad \therefore ad_2 \in R$

$$\therefore ad_2 \in R \text{ 且 } ab = (ad_2)p \quad \therefore p|ab. \quad \square$$

定义(素元) R 是整环, $p \in R$, $p \neq 0_R$, $p \notin R^\times$.

若对 $\forall a, b \in R$, $p|ab \Rightarrow p|a$ 或 $p|b$, 则称 p 为素元.

Lemma: R 是整环, $p, a \in R$, $a \sim p$ 或 $a \sim |_R$, 则有 $a|p$

Proof: 若 $a \sim p$, 则有: $a|p$ 且 $p|a$ $\therefore a|p$

若 $a \sim |_R$, 则有: $\exists r \in R^\times$, s.t. $a = r \cdot |_R$ $\therefore a = r$

$\because r \in R^\times \quad \therefore r^{-1} \in R^\times \quad \therefore r^{-1} \in R \quad \cancel{\therefore r^{-1}a \in R} \quad \therefore pr^{-1} \in R$

$$\cancel{= (r^{-1}a) a = (r^{-1}r)a = |_R \cdot a \equiv a}$$

$$\therefore (pr^{-1})a = p(r^{-1}a) = p(r^{-1}r) = p \cdot |_R = p$$

$\therefore pr^{-1} \in R$ 且 $p = (pr^{-1})a$

$\therefore a|p \quad \square$

定义(不可约元) R 是整环, $p \in R$, $p \neq 0_R$, $p \notin R^\times$

若对 $\forall a \in R$, $a|p \Rightarrow a \sim p$ 或 $a \sim |_R$, 则称 p 为不可约元.