

定理(环的第四同构定理, 理想版本) R 是环, I 是 R 的理想, 已经证明了 R/I 是环, 商同态 $g: R \rightarrow R/I$ 是满同态.

$$x \mapsto x+I$$

定义两个集合: $S = \{A \mid A \text{ 是环 } R \text{ 的理想, 且 } I \subseteq A\}$

$$T = \{B \mid B \text{ 是环 } R/I \text{ 的理想}\}$$

定义映射 $f: S \rightarrow T$, 则有: $f: S \rightarrow T$ 是一个保持包含关系的双射,

$$A \mapsto A/I$$

$\nearrow f^{-1}: T \rightarrow S$ 是 f 的逆映射

且对 $\forall A \in S$, 有: $A = g^{-1}(f(A))$, 对 $\forall B \in T$, 有: $f^{-1}(B) = g^{-1}(B)$

Proof: $\because R$ 是环, I 是 R 的理想 $\therefore R/I$ 是环

$\because R$ 是环 $\therefore R$ 是环 R 的理想, 且 $I \subseteq R \quad \therefore R \in S$

$\therefore S \neq \emptyset$

$\because R/I$ 是环 $\therefore R/I$ 是环 R/I 的理想 $\therefore R/I \in T$

$\therefore T \neq \emptyset$

对 $\forall A \in S$, 有: A 是环 R 的理想, 且 $I \subseteq A$

$\because R$ 是环, I 是 R 的理想, A 是 R 的理想, 且 $I \subseteq A \subseteq R$

$\therefore A/I$ 是环 R/I 的理想.

$\therefore f(A) = A/I$ 是环 R/I 的理想 $\therefore f(A) \in T \quad \therefore f(S) \subseteq T$

对 $\forall A_1, A_2 \in S$,

若 $A_1 = A_2$, 则有: $\therefore A_1 \in S \quad \therefore f(A_1) = A_1/I$ 是环 R/I 的理想

$\therefore A_2 \in S \quad \therefore f(A_2) = A_2/I$ 是环 R/I 的理想

任取 A_1/I 中的一元: $x+I$ (其中 $x \in A_1$) $\therefore x \in A_1 = A_2$

$$\because x+I \in A_2/I \quad \therefore A_1/I \subseteq A_2/I$$

任取 A_2/I 中的元 $x+I$ (其中 $x \in A_2$) $\therefore x \in A_2 = A_1$

$$\therefore x+I \in A_1/I \quad \therefore A_2/I \subseteq A_1/I \quad \therefore A_1/I = A_2/I$$

$$\therefore f(A_1) = A_1/I = A_2/I = f(A_2) \quad \therefore f: S \rightarrow T \text{ 是一个映射.}$$

若 $f(A_1) = f(A_2)$, 则有: $A_1/I = A_2/I$

对 $\forall x \in A_1$, 有: $x+I \in A_1/I = A_2/I$

$$\therefore \exists \lambda \in A_2, \text{ s.t. } x+I = \lambda+I \quad \therefore x \equiv_I \lambda$$

$$\therefore x-\lambda \in I \quad \because A_2 \in S \quad \therefore A_2 \text{ 是环 } R \text{ 的理想, 且 } I \subseteq A_2$$

$$\therefore x-\lambda \in A_2 \quad \because \lambda \in A_2, A_2 \text{ 是环 } R \text{ 的理想} \quad \therefore (x-\lambda)+\lambda \in A_2$$

$$\therefore (x-\lambda)+\lambda = (x+(-\lambda))+\lambda = x+((- \lambda)+\lambda) = x+0_R = x$$

$$\therefore x \in A_2 \quad \therefore A_1 \subseteq A_2$$

对 $\forall x \in A_2$, 有: $x+I \in A_2/I = A_1/I$

$$\therefore \exists \mu \in A_1, \text{ s.t. } x+I = \mu+I \quad \therefore x \equiv_I \mu$$

$$\therefore x-\mu \in I \quad \because A_1 \in S \quad \therefore A_1 \text{ 是环 } R \text{ 的理想, 且 } I \subseteq A_1$$

$$\therefore x-\mu \in A_1 \quad \because \mu \in A_1, A_1 \text{ 是环 } R \text{ 的理想} \quad \therefore (x-\mu)+\mu \in A_1$$

$$\therefore (x-\mu)+\mu = (x+(-\mu))+\mu = x+((- \mu)+\mu) = x+0_R = x$$

$$\therefore x \in A_1 \quad \therefore A_2 \subseteq A_1 \quad \therefore A_1 = A_2$$

$\therefore f: S \rightarrow T$ 是一个单射.

对 $\forall B \in T$, 有: B 是环 R/I 的理想

$\because B$ 是环 R/I 的理想 $\therefore B$ 能表示成 A/I 的形式, 其中 A 是 R 的理想
且有 $I \subseteq A \subseteq R$

$\because A \in S$ 且 $B = A/I$

$\therefore f(A) = A/I = B$ $\therefore f: S \rightarrow T$ 是一个满射

$\therefore f: S \rightarrow T$ 是一个双射.

对 $\forall A_1, A_2 \in S$,

若 $A_1 \subseteq A_2$, 则有: ~~$A \in S$ $\because A$ 是环 R 的理想, 且~~

$\therefore A_1 \in S \quad \therefore f(A_1) = A_1/I$ 是环 R/I 的理想

$\therefore A_2 \in S \quad \therefore f(A_2) = A_2/I$ 是环 R/I 的理想

任取 A_1/I 中的一元: $x+I$ (其中 $x \in A_1$)

$\therefore x \in A_1 \subseteq A_2 \quad \therefore x \in A_2 \quad \therefore x+I \in A_2/I$

$\therefore A_1/I \subseteq A_2/I \quad \therefore f(A_1) \subseteq f(A_2)$

若 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, 则有: $A_1/I \subseteq A_2/I$

对 $\forall x \in A_1$, 有: $x+I \in A_1/I \subseteq A_2/I \quad \therefore x+I \in A_2/I$

$\therefore \exists \lambda \in A_2$, s.t. $x+I = \lambda+I \quad \therefore x \equiv_I \lambda \quad \therefore x-\lambda \in I$

$\therefore A_2 \in S \quad \therefore A_2$ 是环 R 的理想, 且 $I \subseteq A_2 \quad \therefore x-\lambda \in A_2$

$\therefore x-\lambda \in A_2, \lambda \in A_2, A_2$ 是环 R 的理想 $\therefore (x-\lambda)+\lambda \in A_2$

$\therefore (x-\lambda)+\lambda = (x+(-\lambda))+\lambda = x+((-lambda)+lambda) = x+0_R = x$

$\therefore x \in A_2 \quad \therefore A_1 \subseteq A_2$

$\therefore A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

$\therefore f: S \rightarrow T$ 是一个保持包含关系的双射.

对 $\forall A \in S$, 有:

$$\because A \in S \quad \therefore A \text{ 是环 } R \text{ 的理想, 且 } I \subseteq A \quad \therefore A \subseteq R$$

$$\because A \in S \quad \therefore f(A) = A/I \text{ 是环 } R/I \text{ 的理想} \quad \therefore f(A) \subseteq R/I$$

商同态 $\varphi: R \rightarrow R/I$ 是满同态

$$x \mapsto x+I$$

$$\therefore \varphi^{-1}(f(A)) = \{x \in R \mid \varphi(x) \in f(A)\} \subseteq R$$

$$\therefore A \subseteq R \text{ 且 } \varphi^{-1}(f(A)) \subseteq R$$

对 $\forall x \in A$, 有: $x \in R$

$$\because \varphi(x) = x+I \in A/I = f(A) \quad \therefore \varphi(x) \in f(A) \quad \therefore x \in \varphi^{-1}(f(A))$$

$$\therefore A \subseteq \varphi^{-1}(f(A))$$

对 $\forall x \in \varphi^{-1}(f(A))$, 有: $x \in R$ 且 $\varphi(x) \in f(A)$

$$\therefore x+I \in A/I \quad \therefore \exists a \in A, \text{ s.t. } x+I = a+I \quad \therefore x \equiv_I a$$

$$\therefore x-a \in I \quad \therefore I \subseteq A \quad \therefore x-a \in A$$

$$\therefore x-a \in A, a \in A, A \text{ 是环 } R \text{ 的理想} \quad \therefore (x-a)+a \in A$$

$$\therefore (x-a)+a = (x+(-a))+a = x+((-a)+a) = x+0_R = x$$

$$\therefore x \in A \quad \therefore \varphi^{-1}(f(A)) \subseteq A \quad \therefore A = \varphi^{-1}(f(A))$$

对 $\forall B \in T$, 有: B 是环 R/I 的理想 $\therefore B \subseteq R/I$

$\therefore B$ 是环 R/I 的理想 $\therefore B$ 能表示成 A/I 的形式, 其中 A 是 R 的理想

且有 $I \subseteq A \subseteq R$ $\therefore A \in S$ 且 $B = A/I$

$$\therefore f(A) = A/I = B$$

$\therefore f: S \rightarrow T$ 是一个双射 $\therefore f: S \rightarrow T$ 是一个可逆映射.

存在映射 $f^{-1}: T \rightarrow S$, s.t. $f^{-1}f = id_S$ 且 $ff^{-1} = id_T$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A)) = (f^{-1} \circ f)(A) = id_S(A) = A$$

A 是 R 的理想 $\therefore A \subseteq R$

$$\because B \subseteq R/I \quad \therefore g^{-1}(B) = \{x \in R \mid g(x) \in B\} \subseteq R$$

$\forall x \in A$, 有: $\exists x \in R$, 且 $g(x) = x + I \in A/I = B$

$$\therefore x \in g^{-1}(B) \quad \therefore A \subseteq g^{-1}(B)$$

$\forall x \in g^{-1}(B)$, 有: $x \in R$ 且 $g(x) \in B \quad \therefore x + I \in B = A/I$

$$\therefore \exists a \in A, \text{ s.t. } x + I = a + I \quad \therefore x \equiv_I a$$

$$\therefore x - a \in I \quad \because I \subseteq A \quad \therefore x - a \in A$$

$\because x - a \in A, a \in A$, A 是 R 的理想 $\therefore (x - a) + a \in A$

$$\therefore (x - a) + a = (x + (-a)) + a = x + (-a) + a = x + 0_R = x$$

$$\therefore x \in A \quad \therefore g^{-1}(B) \subseteq A \quad \therefore A = g^{-1}(B) \quad \therefore f^{-1}(B) = A = g^{-1}(B)$$

□