

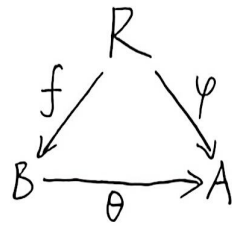
定理 (任意交换环  $R$  上的一元多项式环的泛性质)

$R$  是一个任意的非零交换环.

$B$  是一个交换环,  $f: R \rightarrow B$  是一个环同态,  $b \in B$ , 满足:

对  $\forall$  交换环  $A$ ,  $\forall$  环同态  $\varphi: R \rightarrow A$ ,  $\forall a \in A$ ,  $\exists$  唯一的环同态

$\theta: B \rightarrow A$ , s.t. 下图交换:

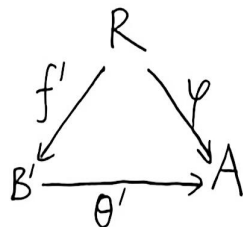


且有  $\theta(b) = a$

$B'$  是另一个交换环,  $f': R \rightarrow B'$  是另一个环同态,  $b' \in B'$ , 满足:

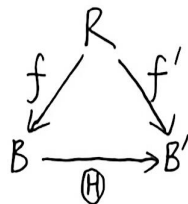
对  $\forall$  交换环  $A$ ,  $\forall$  环同态  $\varphi: R \rightarrow A$ ,  $\forall a \in A$ ,  $\exists$  唯一的环同态

$\theta': B' \rightarrow A$ , s.t. 下图交换:



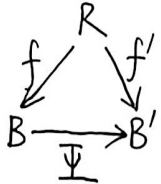
且有  $\theta'(b') = a$

则存在唯一的映射  $\theta: B \rightarrow B'$ , s.t. 下图交换:

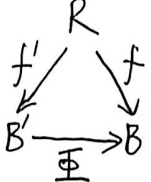


且  $\theta(b) = b'$ ,  $\theta: B \rightarrow B'$  是环同构.

Proof: 对于交换环  $B'$ , 环同态  $f': R \rightarrow B'$ ,  $b' \in B'$ ,  $\exists$  唯一的环同态

$\Psi: B \rightarrow B'$ , s.t. 下图交换:  且有  $\Psi(b) = b'$

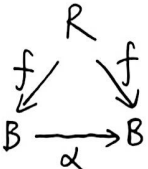
对于交换环  $B$ , 环同态  $f: R \rightarrow B$ ,  $b \in B$ ,  $\exists$  唯一的环同态

$\Phi: B' \rightarrow B$ , s.t. 下图交换:  且有  $\Phi(b') = b$

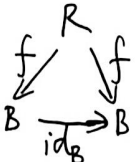
$\therefore \Psi: B \rightarrow B'$  和  $\Phi: B' \rightarrow B$  都是环同态

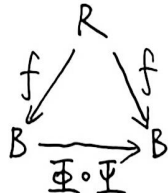
$\therefore \Phi \circ \Psi: B \rightarrow B$  和  $\Psi \circ \Phi: B' \rightarrow B'$  都是环同态.

对于交换环  $B$ , 环同态  $f: R \rightarrow B$ ,  $b \in B$ ,  $\exists$  唯一的环同态

$\alpha: B \rightarrow B$  s.t. 下图交换:  且有  $\alpha(b) = b$ .

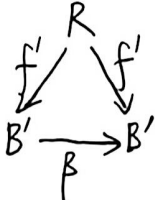
$\therefore B$  是环  $\therefore \text{id}_B: B \rightarrow B$  是环同构, 也是环同态.  
 $x \mapsto x$

$\therefore \text{id}_B \circ f = f$   $\therefore$  下图交换:   $\therefore \text{id}_B(b) = b$   $\therefore \text{id}_B = \alpha$

$\therefore (\Phi \circ \Psi) \circ f = \Phi \circ (\Psi \circ f) = \Phi \circ f' = f$   $\therefore$  下图交换: 

$\therefore (\Phi \circ \Psi)(b) = \Phi(\Psi(b)) = \Phi(b') = b$   $\therefore \Phi \circ \Psi = \alpha = \text{id}_B$ .

对于交换环  $B'$ , 环同态  $f': R \rightarrow B'$ ,  $b' \in B'$ ,  $\exists$  唯一的环同态

$\beta: B' \rightarrow B'$ , s.t. 下图交换:  且有  $\beta(b') = b'$

$\therefore \text{id}_{B'} : B' \rightarrow B'$  是环同态,  $\text{id}_{B'} \circ f' = f'$

$\therefore$  下图交换:  $\begin{array}{ccc} & R & \\ f' \swarrow & & \searrow f' \\ B' & \xrightarrow{\text{id}_{B'}} & B' \end{array}$   $\therefore \text{id}_{B'}(b') = b' \quad \therefore \text{id}_{B'} = \beta$

$\therefore (\Psi \circ \Phi) \circ f' = \Psi \circ (\Phi \circ f') = \Psi \circ f = f'$

$\therefore$  下图交换:  $\begin{array}{ccc} & R & \\ f' \swarrow & & \searrow f' \\ B' & \xrightarrow{\Psi \circ \Phi} & B' \end{array}$   $\therefore (\Psi \circ \Phi)(b') = \Psi(\Phi(b')) = \Psi(b) = b'$

$\therefore \Psi \circ \Phi = \beta = \text{id}_{B'}$

$\therefore \Psi : B \rightarrow B'$  是可逆映射  $\therefore \Psi : B \rightarrow B'$  是双射.

$\therefore \Psi : B \rightarrow B'$  是环同构.  $\therefore$  存在性得证.

假设存在映射  $\Phi_1 : B \rightarrow B'$ , s.t. 下图交换:  $\begin{array}{ccc} & R & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ B & \xrightarrow{\Phi_1} & B' \end{array}$  且  $\Phi_1(b) = b'$ ,

$\Phi_1 : B \rightarrow B'$  是环同构

假设还存在映射  $\Phi_2 : B \rightarrow B'$ , s.t. 下图交换:  $\begin{array}{ccc} & R & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ B & \xrightarrow{\Phi_2} & B' \end{array}$  且  $\Phi_2(b) = b'$ ,

$\Phi_2 : B \rightarrow B'$  是环同构.

$\therefore$  对于交换环  $B'$ , 环同态  $f' : R \rightarrow B'$ ,  $b' \in B'$ ,  $\exists$  唯一的环同态

$\Psi : B \rightarrow B'$ , s.t. 下图交换:  $\begin{array}{ccc} & R & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ B & \xrightarrow{\Psi} & B' \end{array}$  且有  $\Psi(b) = b'$

$\therefore \Phi_1 = \Psi = \Phi_2$ . 唯一性得证.  $\square$