Lemma：$R$是交换环，$X$是$R$的非空子集，则有：$\langle X\rangle = RX$

proof：$\because$ $R$是环，$X$是$R$的非空子集

$$\therefore \langle X\rangle = \mathbb{Z}X + RX + XR + RXR$$

~~任取~~ 对$\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}X + RX + XR + RXR$，有：

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i' x_i' + \sum_{i=1}^{n} x_i'' r_i'' + \sum_{i=1}^{n} r_i''' x_i''' r_i''''$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n} x_i (m_i 1_R)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (m_i 1_R) x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i' x_i' + \sum_{i=1}^{n} r_i'' x_i'' + \sum_{i=1}^{n} (r_i''' r_i'''') x_i''' \in RX$$

$$\therefore \mathbb{Z}X + RX + XR + RXR \subseteq RX$$

对$\forall\, \beta \in RX$，有：

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0\cdot x_1 + \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + x_1 \cdot 0_R + 0_R \cdot x_1 \cdot 0_R \in \mathbb{Z}X + RX + XR + RXR$$

$$\therefore RX \subseteq \mathbb{Z}X + RX + XR + RXR$$

$$\therefore \mathbb{Z}X + RX + XR + RXR = RX$$

$$\therefore \langle X\rangle = \mathbb{Z}X + RX + XR + RXR = RX \qquad \square$$

Lemma：$R$是交换环，对$\forall\, x\in R$，有：$x$确定的主理想 $(x) = \langle\{x\}\rangle$

proof：$\because$ $R$是交换环，$\{x\}$是$R$的非空子集

$$\therefore \langle\{x\}\rangle = R\{x\}$$

$$\because (x) = xR = \{xr : r\in R\}$$

对 $\forall\, \alpha \in R\{x\}$，有：$\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i x = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) x = x\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) \in xR$

$\therefore R\{x\} \subseteq xR$

对 $\forall\, \beta \in xR$，有：$\beta = xr = rx \in R\{x\}$

$\therefore xR \subseteq R\{x\}$ $\qquad\qquad \therefore xR = R\{x\}$

$\therefore (x) = xR = R\{x\} = \langle \{x\} \rangle$ $\qquad \square$

定义：$R$是环，规定 $\langle \emptyset \rangle := \{0_R\}$.

对于 $r_1, r_2, r_3, \cdots \in R$，记 $\langle r_1, r_2, r_3, \cdots \rangle := \langle \{r_1, r_2, r_3, \cdots\} \rangle$

Lemma（环同态的核）$R$和$R'$是环，$f: R \to R'$是环同态，则有：
$\ker(f) := f^{-1}(0_{R'}) = \{x \in R : f(x) = 0_{R'}\}$ 是$R$的理想.

Proof：$\because \ker(f) = \{x \in R : f(x) = 0_{R'}\} \subseteq R$

$\because 0_R \in R$ 且 $f(0_R) = 0_{R'}$ $\qquad \therefore 0_R \in \ker(f)$ $\qquad \therefore \ker(f) \neq \emptyset$

$\therefore \ker(f)$是$R$的非空子集.

对 $\forall\, x, y \in \ker(f)$，有：

$\because x, y \in \ker(f) \subseteq R$ $\qquad \therefore x, y \in R$ $\qquad \therefore x + y \in R$

$\because x, y \in \ker(f)$ $\qquad \therefore f(x) = 0_{R'}$ 且 $f(y) = 0_{R'}$

$\therefore f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_{R'} + 0_{R'} = 0_{R'}$

$\therefore x + y \in \ker(f)$

对 $\forall r\in R$，有：

任取 $r\ker(f)$ 中的一元 $r\alpha$（其中 $\alpha\in\ker(f)$）

$\therefore r\alpha\in R$，且有 $f(r\alpha)=f(r)f(\alpha)=f(r)\cdot 0_{R'}=0_{R'}$

$\therefore r\alpha\in\ker(f)$ $\quad\therefore r\ker(f)\subseteq\ker(f)$

任取 $\ker(f)r$ 中的一元 $\beta r$（其中 $\beta\in\ker(f)$）

$\therefore \beta r\in R$，且有 $f(\beta r)=f(\beta)f(r)=0_{R'}\cdot f(r)=0_{R'}$

$\therefore \beta r\in\ker(f)$ $\quad\therefore \ker(f)r\subseteq\ker(f)$

$\therefore \ker(f)$ 是 $R$ 的理想. $\quad\square$

定义（环同态的核）$R$ 和 $R'$ 是环，$f:R\to R'$ 是环同态，则称 $\ker(f):=f^{-1}(0_{R'})=\{x\in R: f(x)=0_{R'}\}$ 是环同态 $f:R\to R'$ 的核（又称零核）. $\ker(f)$ 是 $R$ 的理想.

Lemma：$R$ 和 $R'$ 是环，$f:R\to R'$ 是环同态. 对 $\forall x,y\in R$，有：

$$f(x)=f(y)\iff x-y\in\ker(f)$$

Proof：($\Rightarrow$)：$\because x,y\in R$ $\quad\therefore x-y\in R$

$\because f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)+f(-y)=f(x)+(-f(y))$

$=f(y)+(-f(y))=0_{R'}$

$\therefore x-y\in\ker(f)$

$(\Leftarrow)$ $f(x)=f(x+0_R)=f(x+((-y)+y))=f((x+(-y))+y)$

$=f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)=0_{R'}+f(y)=f(y)$ $\square$

Lemma：$R$和$R'$是环，$f:R\to R'$是环同态，则有：

$f$是单同态 $\Longleftrightarrow$ $ker(f)=\{0_R\}$.

Proof：$(\Rightarrow)$：$\because 0_R\in R$ 且有 $f(0_R)=0_{R'}$ $\therefore 0_R\in ker(f)$

$\therefore \{0_R\}\subseteq ker(f)$

对$\forall$ $x\in ker(f)$，有：$f(x)=0_{R'}=f(0_R)$

$\because f$是单射 $\therefore x=0_R$ $\therefore x\in\{0_R\}$ $\therefore ker(f)\subseteq\{0_R\}$

$\therefore ker(f)=\{0_R\}$

$(\Leftarrow)$：对$\forall$ $x,y\in R$，若$f(x)=f(y)$，则有：

$x-y\in ker(f)=\{0_R\}$ $\therefore x-y=0_R$

$\therefore x=x+0_R=x+((-y)+y)=(x+(-y))+y=(x-y)+y$

$=0_R+y=y$

$\therefore f:R\to R'$是单射 $\therefore f:R\to R'$是单同态. $\square$

# 商环

$R$是环，$I$是$R$的理想，定义$R$上的二元关系$\equiv_I$为：对$\forall x, y \in R$，

$$x \equiv_I y \iff x - y \in I$$

Lemma：$R$上的二元关系$\equiv_I$是$R$上的等价关系.

Proof：对$\forall x \in R$，$\because x - x = x + (-x) = 0_R \in I$

$\therefore x \equiv_I x$　　$\therefore$反身性成立

对$\forall x, y \in R$，若$x \equiv_I y$，则有：$x - y \in I$

$\because (y-x) + (x-y) = (y+(-x)) + (x+(-y)) = (y+(-y)) + ((-x)+x)$

$= 0_R + 0_R = 0_R$

$\therefore y - x = -(x-y) \in I$　　$\therefore y \equiv_I x$　　$\therefore$对称性成立.

对$\forall x, y, z \in R$，若$x \equiv_I y$且$y \equiv_I z$，则：

$\because x \equiv_I y$　$\therefore x - y \in I$　　$\because y \equiv_I z$　$\therefore y - z \in I$

$\therefore (x-y) + (y-z) \in I$

$\because (x-y) + (y-z) = x + (-y) + y + (-z) = x + (-z) = x - z$

$\therefore x - z \in I$　　$\therefore x \equiv_I z$　　$\therefore$传递性成立.

$\therefore \equiv_I$是$R$上的等价关系.　$\square$

定义（理想$I$的陪集）$R$是环，$I$是$R$的理想，对$\forall x \in R$，定义

$$x + I := \{x + \beta : \beta \in I\}$$

称$R$的子集$x+I$为$I$的陪集，$x$称为该陪集的代表元.

Lemma：$R$是环，$I$是$R$的理想，已经证明了 $\equiv_I$ 为$R$上的等价关系.
则有：对$\forall\, x\in R$，以$x$为代表元的等价类为陪集 $x+I$

Proof：对$\forall\, x\in R$，以$x$为代表元的等价类是：

$$\{\alpha\in R:\alpha\equiv_I x\}$$

任取集合$\{\alpha\in R:\alpha\equiv_I x\}$中的一个元素$\alpha$. $\therefore \alpha\in R$且$\alpha\equiv_I x$

$\therefore \alpha\in R$且$x\in R$且$\alpha-x\in I$ $\therefore x+(\alpha-x)\in x+I$

$$\because x+(\alpha-x)=x+(\alpha+(-x))=x+((-x)+\alpha)=(x+(-x))+\alpha$$

$$=0_R+\alpha=\alpha \qquad \therefore \alpha\in x+I$$

$$\therefore \{\alpha\in R:\alpha\equiv_I x\}\subseteq x+I$$

任取集合$x+I$中的一个元素$x+\beta$（其中$\beta\in I$），则有：

$\because \beta\in I\subseteq R$ $\therefore \beta\in R$ $\because x\in R$ $\therefore x+\beta\in R$

$\because x+\beta\in R$，$x\in R$，

$$(x+\beta)-x=(x+\beta)+(-x)=(\beta+x)+(-x)=\beta+(x+(-x))$$

$$=\beta+0_R=\beta\in I$$

$\therefore (x+\beta)\equiv_I x$ $\therefore x+\beta\in\{\alpha\in R:\alpha\equiv_I x\}$

$\therefore x+I\subseteq\{\alpha\in R:\alpha\equiv_I x\}$ $\therefore \{\alpha\in R:\alpha\equiv_I x\}=x+I$

$\therefore$ 对$\forall\, x\in R$，以$x$为代表元的等价类是：$x+I$ $\square$

Lemma：$R$是环，$I$是$R$的理想，已经证明了$\equiv_I$为$R$上的等价关系。

对$\forall x\in R$，已经证明了以$x$为代表元的等价类是$x+I$。

则有：$R/\equiv_I=\{x+I\mid x\in R\}$.

Proof：这就是商集的记法的简单应用，参见

Lecture_Notes_in_Algebra_WenWeiLi_notes_20250225_20250717/第2章/2.5/3.

$\square$

定义（商环）$R$是环，$I$是$R$的理想，定义

$$R/I:=R/\equiv_I=\{x+I\mid x\in R\}$$