3.3 多项式环

定义（系数在非零环 R 上的多项式）设 R 为非零环．以 X 为变元，系数在 R 上的多项式定义为形如

$$f=\sum_{n\geq 0}a_nX^n,\quad a_n\in R,\quad \text{至多有限个 } a_n \text{ 非零}.$$

的形式和，$a_n=0$ 的项可以省去；须凸显变元时也将 f 写作 $f(X)$．

所有这些多项式构成的集合记为 $R[X]$

Remark：① A，I 是任意集合，$A^I:=\{\text{映射 } f: I\to A\}$．

$R[X]$ 的一种原教旨主义的诠释为：

$R[X]=\{(a_n)_{n\geq 0}\in R^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}:\text{仅有至多有限个 } n \text{ 使得 } a_n\neq 0\}$．

$\therefore R[X]\subseteq R^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$

按此观点，X^n 在写法 $\sum_{n\geq 0}a_nX^n$ 中仅起到记录下标 n 的作用．

② $\sum_{n\geq 0}a_nX^n=\sum_{n\geq 0}b_nX^n \iff \forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_n=b_n$

定义（关于多项式的标准术语）设 $f=\sum_{n\geq 0}a_nX^n\in R[X]$．

系数 a_n ： f 的 n 次项系数

系数 a_0 ： f 的常数项

使系数 a_n 非零的最高次项 a_nX^n ： f 的首项

首项系数为 1 的多项式 ： 首一多项式

系数全为 0 的多项式 ： 零多项式 ——— 记作：0

$\max\{n\geq 0: a_n\neq 0\}$ ： 非零多项式 f 的次数 ——— 记作 $\deg f$

除常数项以外系数均为零的多项式 ： 常数多项式．

Lemma: R可以嵌入为$R[X]$的子集

Proof: 定义映射 $\varphi: R \longrightarrow R[X]$

$$r \longmapsto r \ (\text{常数多项式})$$

显然，φ是映射，且是单射. $\therefore \varphi$是$R \to R[X]$的嵌入映射. $\square$

定义(多项式非零) $f \in R[X]$. 若$f \in R[X] \setminus \underset{\text{零多项式}}{\{0\}}$，则称多项式

$f \in R[X]$非零.

定义(零多项式的次数) 一般不考虑零多项式的次数；确实有需要时，

定义 $\deg 0 = -\infty$，仅作为一个方便的符号来理解.

定义($R[X]$上的加法和乘法) $R[X]$定义为:

$$R[X] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n X^n \,\middle|\, a_n \in R, \text{至多有限个} a_n \text{非零} \right\}.$$

定义$R[X]$上的加法运算为:

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n + \sum_{n \geq 0} b_n X^n := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) X^n$$

定义$R[X]$上的乘法运算为:

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n\right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n X^n\right) := \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} a_h b_k \right) X^n$$

Lemma: $(R[X], +, \cdot, 0_{R[X]} = 0 \ (\text{零多项式}), 1_{R[X]} = 1_R \ (\text{常数多项式}))$是环

Proof: 首先我们证明$R[X]$上的加法运算和乘法运算的良定性.

对$\forall \sum_{n \geq 0} a_n X^n, \sum_{n \geq 0} b_n X^n \in R[X]$，有:

$\because \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in R[X]$ $\therefore \exists N_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，对$\forall n > N_1$，有：$a_n = 0$

$\because \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in R[X]$ $\therefore \exists N_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，对$\forall n > N_2$，有：$b_n = 0$.

$\therefore$ 对$\forall n > \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，有：$a_n + b_n = 0 + 0 = 0$

$\therefore \sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) X^n \in R[X]$.

$\because$ 对$\forall n > N_1 + N_2 + 2 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，有：

对$\forall h, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 且 $h+k=n$，假设 $h \leq N_1$ 且 $k \leq N_2$，则有：

$n = h+k \leq N_1 + N_2 < N_1 + N_2 + 2 < n$. 矛盾.

$\therefore h > N_1$ 或 $k > N_2$ $\therefore a_h = 0$ 或 $b_k = 0$ $\therefore a_h b_k = 0$

$\therefore \sum_{\substack{h,k\geq 0 \\ h+k=n}} a_h b_k = 0$

$\therefore \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{\substack{h,k\geq 0 \\ h+k=n}} a_h b_k\right) X^n \in R[X]$

若还有 $\sum_{n\geq 0} a_n' X^n$，$\sum_{n\geq 0} b_n' X^n \in R[X]$，s.t. $\sum_{n\geq 0} a_n' X^n = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$，

$\sum_{n\geq 0} b_n' X^n = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$，则有：

$\because \sum_{n\geq 0} a_n' X^n = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ $\therefore$ 对$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$a_n' = a_n$

$\because \sum_{n\geq 0} b_n' X^n = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ $\therefore$ 对$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$b_n' = b_n$

$\therefore \sum_{n\geq 0} a_n' X^n + \sum_{n\geq 0} b_n' X^n = \sum_{n\geq 0} (a_n' + b_n') X^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) X^n = \sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n$

环R中加法运算的良定性

$\therefore R[X]$中的加法运算良定.

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n' X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} b_n' X^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} a_h' b_k'\right)X^n = \underset{\text{环R中乘法和加法的良定性}}{\underbrace{=}}\ \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} a_h b_k\right)X^n$$

$$= \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right)$$

$\therefore R[X]$中的乘法运算良定.

对$\forall \sum_{n\geq 0} a_n X^n, \sum_{n\geq 0} b_n X^n, \sum_{n\geq 0} c_n X^n \in R[X]$,

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n\right) + \sum_{n\geq 0} c_n X^n = \sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)X^n + \sum_{n\geq 0} c_n X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left((a_n+b_n)+c_n\right)X^n \underset{\text{环R中的加法结合律}}{=} \sum_{n\geq 0}\left(a_n+(b_n+c_n)\right)X^n = \sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0}(b_n+c_n)X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n X^n + \left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n + \sum_{n\geq 0} c_n X^n\right)$$ $\therefore R[X]$中加法结合律成立.

$$\left(\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right)\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right) = \left(\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} a_h b_k\right)X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=n}}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\alpha}} a_h b_k\right)c_\beta\right)X^n$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)\cdot\left(\left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right)\right) = \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} b_h c_k\right)X^n\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=n}} a_\alpha\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\beta}} b_h c_k\right)\right)X^n$$

当$n=0$时，

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=n}}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\alpha}} a_h b_k\right)c_\beta = \left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=0}} a_h b_k\right)c_0 = (a_0 b_0)c_0 = a_0(b_0 c_0)$$

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=n}} a_\alpha\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\beta}} b_h c_k\right) = a_0\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=0}} b_h c_k\right) = a_0(b_0 c_0)$$

$\therefore$ 当$n=0$时，系数相等.

当$n=1$时，

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=n}}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\alpha}} a_h b_k\right)c_\beta = \sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=1}}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\alpha}} a_h b_k\right)c_\beta$$

$$=\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=0}} a_h b_k\right)c_1 + \left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=1}} a_h b_k\right)c_0 = (a_0 b_0)c_1 + (a_0 b_1)c_0 + (a_1 b_0)c_0$$

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=n}} a_\alpha\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\beta}} b_h c_k\right) = \sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=1}} a_\alpha\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\beta}} b_h c_k\right)$$

$$= a_0\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=1}} b_h c_k\right) + a_1\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=0}} b_h c_k\right) = a_0(b_0 c_1) + a_0(b_1 c_0) + a_1(b_0 c_0)$$

$\therefore$ 当$n=1$时，系数相等.

又对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+\beta=n}}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=\alpha}} a_h b_k\right)c_\beta = \left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=0}} a_h b_k\right)c_n + \left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=1}} a_h b_k\right)c_{n-1} + \left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=2}} a_h b_k\right)c_{n-2}$$

$$+\cdots+\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n-1}} a_h b_k\right)c_1 + \left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} a_h b_k\right)c_0$$

$$=(a_0 b_0)c_n + (a_0 b_1)c_{n-1} + (a_1 b_0)c_{n-1} + (a_0 b_2)c_{n-2} + (a_1 b_1)c_{n-2} + (a_2 b_0)c_{n-2} + \cdots +$$

$$(a_0 b_{n-1})c_1 + (a_1 b_{n-2})c_1 + \cdots + (a_{n-1} b_0)c_1 + (a_0 b_n)c_0 + (a_1 b_{n-1})c_0 + \cdots + (a_n b_0)c_0$$

$$= a_0 b_0 c_n$$

$$+ a_0 b_1 c_{n-1} + a_1 b_0 c_{n-1}$$

$$+ a_0 b_2 c_{n-2} + a_1 b_1 c_{n-2} + a_2 b_0 c_{n-2}$$

$$+ \cdots$$

$$+ a_0 b_{n-1} c_1 + a_1 b_{n-2} c_1 + a_2 b_{n-3} c_1 + \cdots + a_{n-1} b_0 c_1$$

$$+ a_0 b_n c_0 + a_1 b_{n-1} c_0 + a_2 b_{n-2} c_0 + \cdots + a_{n-1} b_1 c_0 + a_n b_0 c_0$$

$$= a_0 \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} b_h c_k \Big) + a_1 \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n-1}} b_h c_k \Big) + a_2 \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n-2}} b_h c_k \Big) + \cdots +$$

$$a_{n-1} \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=1}} b_h c_k \Big) + a_n \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=0}} b_h c_k \Big)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta \geq 0 \\ \alpha+\beta=n}} a_\alpha \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=\beta}} b_h c_k \Big)$$

$\therefore$ 对 $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，系数相等.　　$\therefore$ $R[X]$ 中乘法结合律成立.

$$\Big(\sum_{n \geq 0} a_n X^n + \sum_{n \geq 0} b_n X^n \Big) \cdot \Big(\sum_{n \geq 0} c_n X^n \Big) = \Big(\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) X^n \Big) \cdot \Big(\sum_{n \geq 0} c_n X^n \Big)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} (a_h + b_h) c_k \Big) X^n = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} (a_h c_k + b_h c_k) \Big) X^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} a_h c_k + \sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} b_h c_k \Big) X^n = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} a_h c_k \Big) X^n + \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} b_h c_k \Big) X^n$$

$$= \Big(\sum_{n \geq 0} a_n X^n \Big) \cdot \Big(\sum_{n \geq 0} c_n X^n \Big) + \Big(\sum_{n \geq 0} b_n X^n \Big) \cdot \Big(\sum_{n \geq 0} c_n X^n \Big)$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n+\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right)=\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)X^n\right)$$

$$=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} c_h(a_k+b_k)\right)X^n=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}}(c_h a_k+c_h b_k)\right)X^n$$

$$=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} c_h a_k+\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} c_h b_k\right)X^n=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} c_h a_k\right)X^n+\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 0\\ h+k=n}} c_h b_k\right)X^n$$

$$=\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)+\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right)$$

$\therefore R[X]$中乘法对加法的左、右分配律成立.

对$\forall \sum_{n\geq 0} a_n X^n, \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in R[X]$，有：

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n+\sum_{n\geq 0} b_n X^n=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)X^n=\sum_{n\geq 0}(b_n+a_n)X^n=\sum_{n\geq 0} b_n X^n+\sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

环R中的加法交换律

$\therefore R[X]$中加法交换律成立.

对$\forall \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in R[X]$，有：

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n+0=\sum_{n\geq 0} a_n X^n+\sum_{n\geq 0} 0X^n=\sum_{n\geq 0}(a_n+0)X^n=\sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

$$0+\sum_{n\geq 0} a_n X^n=\sum_{n\geq 0} 0X^n+\sum_{n\geq 0} a_n X^n=\sum_{n\geq 0}(0+a_n)X^n=\sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

$$\therefore \sum_{n\geq 0} a_n X^n+0=\sum_{n\geq 0} a_n X^n=0+\sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

$\therefore$零多项式 0是 $R[X]$的加法零元. $0_{R[X]}=0$（零多项式）

$\because \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in R[X]$ $\quad \therefore$ 对$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a_n \in R$

$\therefore$ 对$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\exists -a_n \in R$, s.t. $a_n + (-a_n) = 0$

$\therefore \sum_{n\geq 0} (-a_n) X^n \in R[X]$

$\because \sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} (-a_n) X^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + (-a_n)) X^n = \sum_{n\geq 0} 0 X^n = 0_{R[X]}$

$\therefore -\sum_{n\geq 0} a_n X^n = \sum_{n\geq 0} (-a_n) X^n \in R[X]$. $\quad \therefore R[X]$中任一元都有加法逆元.

$\because \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) \cdot 1_R = \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) \cdot \left(1_R X^0 + \sum_{n\geq 1} 0 X^n\right)$

$= \sum_{n\geq 0} a_n X^n$

(对$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_{\substack{h,k\geq 0 \\ h+k=n}} a_h b_k = a_n \cdot 1_R + a_{n-1} \cdot 0 + a_{n-2} \cdot 0 + \cdots + a_2 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0$

$= a_n \cdot 1_R = a_n$)

$1_R \cdot \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) = \left(1_R X^0 + \sum_{n\geq 1} 0 X^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$

(对$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_{\substack{h,k\geq 0 \\ h+k=n}} b_h a_k = 1_R \cdot a_n + 0 \cdot a_{n-1} + 0 \cdot a_{n-2} + \cdots + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0$

$= 1_R \cdot a_n = a_n$

$\therefore$ 常数多项式 $1_R = 1_R X^0 + \sum_{n\geq 1} 0 X^n = 1_{R[X]}$ 是$R[X]$的乘法幺元

$\therefore (R[X], +, \cdot, 0, 1_R)$ 是环. $\quad \square$