Lemma: R是环，I是R的理想，已经证明了 $R/I=\{x+I \mid x\in R\}$ 是环（即：$(R/I,+,\cdot,0_{R/I},1_{R/I})$是环）则有：

商映射 $q: R\longrightarrow R/I$ 是满同态. 称$q:R\to R/I$为商同态.

$x\longmapsto x+I$

Proof: Lecture_Notes_in_Algebra_WenWaiLi_20250228_20250717/第二章/2.5/1 中，已经证明了商映射 $q: R\longrightarrow R/I$ 是满射.

$x\longmapsto x+I$

对$\forall\, x,y\in R$，有：

$$q(x+y)=(x+y)+I=(x+I)+(y+I)=q(x)+q(y)$$

$$q(xy)=xy+I=(x+I)(y+I)=q(x)\cdot q(y)$$

$$q(1_R)=1_R+I=1_{R/I}$$

$\therefore$ 商映射 $q: R\to R/I$ 是环同态

$\therefore$ 商映射 $q: R\to R/I$ 是满同态. $\square$

Lemma: R是环，I是R的理想，R/I是商环，$q:R\to R/I$是商同态，则有：$\ker(q)=I$

Proof: $\because$ $q:R\to R/I$是商同态 $\therefore$ $\ker(q)\subseteq R$

$\because$ I是R的理想 $\therefore$ $I\subseteq R$

对 $\forall x \in \ker(q)$，有：$q(x) = 0_{R/I} = 0_R + I$

$\because q(x) = x + I$ $\quad \therefore x + I = 0_R + I$ $\quad \therefore x \equiv_I 0_R$ $\quad \therefore x - 0_R \in I$

$\because x - 0_R = x + (-0_R) = x + 0_R = x$ $\quad \therefore x \in I$ $\quad \therefore \ker(q) \subseteq I$

对 $\forall x \in I$，有：$x \in I \subseteq R$ $\quad \therefore x \in R$ $\quad \therefore q(x) = x + I$

$\because x - 0_R = x + (-0_R) = x + 0_R = x \in I$ $\quad \therefore x \equiv_I 0_R$

$\therefore x + I = 0_R + I = 0_{R/I}$ $\quad \therefore q(x) = x + I = 0_{R/I}$

$\therefore x \in \ker(q)$ $\quad \therefore I \subseteq \ker(q)$ $\quad \therefore \ker(q) = I$ $\quad \square$

定理（环的第一同构定理）R 和 R' 是环，$f: R \to R'$ 是环同态，则有：

① $\ker(f)$ 是 R 的理想

② $f(R)$ 是 R' 的子环

③ $R/\ker(f) \simeq f(R)$

Proof：①在 20250816_（ ）/第六章/6.1/2 中已证，

②在 20250225_20250717/第三章/3.2/1 中已证.

$\because \ker(f)$ 是 R 的理想 $\quad \therefore R/\ker(f) = \{x + \ker(f) \mid x \in R\}$

$$f(R) = \{f(x) \mid x \in R\}$$

定义映射
$$\varphi: R/\ker(f) \longrightarrow f(R)$$
$$x + \ker(f) \longmapsto f(x)$$

下证 $\varphi: R/\ker(f) \longrightarrow f(R)$ 是环同构.

任取 $R/\ker(f)$ 中的一元：$x+\ker(f)$（其中 $x\in R$），

$\varphi(x+\ker(f)) = f(x) \in f(R)$ $\quad\therefore \varphi(R/\ker(f)) \subseteq f(R)$

又对 $\forall\, x+\ker(f),\ y+\ker(f) \in R/\ker(f)$（其中 $x, y\in R$），

若 $x+\ker(f) = y+\ker(f)$，则有：$x \equiv_{\ker(f)} y$ $\quad\therefore x-y\in\ker(f)$

$\therefore f(x)=f(y)$ $\quad\therefore \varphi(x+\ker(f)) = f(x) = f(y) = \varphi(y+\ker(f))$

$\therefore \varphi: R/\ker(f) \to f(R)$ 是映射.

若 $\varphi(x+\ker(f)) = \varphi(y+\ker(f))$，则有：$f(x)=f(y)$ $\quad\therefore x-y\in\ker(f)$

$\therefore x \equiv_{\ker(f)} y$ $\quad\therefore x+\ker(f) = y+\ker(f)$

$\therefore \varphi: R/\ker(f) \to f(R)$ 是单射.

又对 $\forall\, \mu\in f(R)$，$\exists\, \lambda\in R$，s.t. $\mu = f(\lambda)$

$\because \lambda\in R$ $\quad\therefore \lambda+\ker(f) \in R/\ker(f)$

$\because \varphi(\lambda+\ker(f)) = f(\lambda) = \mu$

$\therefore \varphi: R/\ker(f) \to f(R)$ 是满射 $\quad\therefore \varphi: R/\ker(f) \to f(R)$ 是双射.

对 $\forall\, x+\ker(f),\ y+\ker(f) \in R/\ker(f)$（其中 $x, y\in R$）

$\varphi\big((x+\ker(f)) + (y+\ker(f))\big) = \varphi\big((x+y)+\ker(f)\big) = f(x+y)$

$= f(x)+f(y) = \varphi(x+\ker(f)) + \varphi(y+\ker(f))$

$$\varphi\big((x+\ker(f))\cdot(y+\ker(f))\big)=\varphi(xy+\ker(f))=f(xy)$$

$$=f(x)\cdot f(y)=\varphi(x+\ker(f))\cdot\varphi(y+\ker(f))$$

$\varphi(1_{R/\ker(f)})=\varphi(1_R+\ker(f))=f(1_R)=1_{R'}$ 是环 $f(R)$ 的乘法幺元.

$\therefore\ \varphi: R/\ker(f)\to f(R)$ 是环同态

$\therefore\ \varphi: R/\ker(f)\to f(R)$ 是环同构.

$\therefore\ R/\ker(f)\simeq f(R)$ $\square$

推论：R 和 R' 是环，$f: R\to R'$ 是~~环~~满同态，则有：$R/\ker(f)\simeq R'$

Proof: $\because$ R 和 R' 是环，$f: R\to R'$ 是环同态，

$\therefore\ R/\ker(f)\simeq f(R)$

$\because\ f: R\to R'$ 是满射 $\quad\therefore\ f(R)=R'$

$\therefore\ R/\ker(f)\simeq R'$ $\square$