多项式的根

定义（多项式的根）R是交换环，$f \in R[X]$，$a \in R$且$f(a)=0$，则称a是f在R中的根.

定理（余式定理）R是一个整环，$f \in R[X]$，r以带余除法将f表成$(X-a)q+r$，其中r是满足$\deg r < 1$的余式，则$r=f(a)$

Proof：$\because$ R是一个整环，$f \in R[X]$，$X-a \in R[X]$，$X-a \neq 0$.

$X-a$的最高次项系数为$1_R \in R^{\times}$

$\therefore$ 存在唯一的$q, r \in R[X]$，s.t. $\deg(r) < \deg(X-a) = 1$

且 $f = (X-a)q + r$

$\because$ $X-a \in R[X]$ $\therefore$ $a \in R$

$\therefore$ $f(a) = (a-a)q + r = 0q + r = 0 + r = r$ $\square$

推论：R是一个整环，$f \in R[X]$，$a \in R$，则有：

$$f(a) = 0 \iff (X-a) \mid f$$

Proof：$\because$ R是一个整环，$f \in R[X]$，$X-a \in R[X]$，$X-a \neq 0$

$X-a$的最高次项系数为$1_R \in R^{\times}$

$\therefore$ 存在唯一的$q, r \in R[X]$，s.t. $\deg(r) < \deg(X-a) = 1$

且 $f = (X-a)q + r$

$\therefore$ $f(a) = 0 \iff (a-a)q + r = 0 \iff 0q + r = 0 \iff 0 + r = 0 \iff r = 0$

$\Leftrightarrow f=(X-a)q,\ q\in R[X]$

$\Leftrightarrow (X-a)\mid f$ $\square$

命题(域F上的一元多项式根的个数上限) F是域，则F[X]中一个任意的n次非零多项式至多只有n个相异的根.($n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$)

Proof: 设$f\in F[X]$是$F[X]$中一个任意的0次非零多项式

$\therefore f=a\in F\setminus\{0\}$ $\because a\neq 0$ $\therefore f$在F中没有根

$\therefore f$有0个相异的根

$\therefore F[X]$中一个任意的0次非零多项式至多只有0个相异的根

设$f\in F[X]$是$F[X]$中一个任意的1次非零多项式

$\therefore f=aX+b$，其中$a\in F\setminus\{0\}$，$b\in F$

$\therefore f(x)=0 \Leftrightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=a^{-1}(-b)$

$\Leftrightarrow x=-a^{-1}b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$

$\therefore f$在F中只有1个根

$\therefore F[X]$中一个任意的1次非零多项式至多只有1个相异的根.

假设我们已经证明了: $F[X]$中一个任意的k次非零多项式至多只有k个相异的根($k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$)

设$f\in F[X]$是$F[X]$中一个任意的$(k+1)$次非零多项式.

假设 f 有 $\geqslant(k+2)$ 个相异的根. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ 是 f 的相异的根.

$\because a_{k+2}$ 是 f 的根 $\quad \therefore a_{k+2} \in F$ 且 $f(a_{k+2})=0$

$\therefore (X-a_{k+2}) \mid f \quad \therefore \exists g \in F[X]$, s.t. $f=(X-a_{k+2})g$

假设 $g=0$, 则有: $f=(X-a_{k+2})g=(X-a_{k+2})\cdot 0=0$. 矛盾.

$\therefore g \neq 0 \quad \therefore g \in F[X]\backslash\{0\}$

又对 $\forall i=1,2,\cdots,k,k+1$, $\because a_i \neq a_{k+2} \quad \therefore a_i - a_{k+2} \neq 0$

$\therefore a_i - a_{k+2} \in F^{\times}$

$\because 0=f(a_i)=(a_i-a_{k+2})g(a_i)$, 又 $\because F$ 是整环

$\therefore a_i-a_{k+2}=0$ 或 $g(a_i)=0 \quad \because a_i-a_{k+2}\neq 0 \quad \therefore g(a_i)=0$

$\therefore a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$ 是 g 的相异的根

$\therefore g$ 有 $\geqslant(k+1)$ 个相异的根.

$\because F$ 是整环, $X-a_{k+2} \in F[X]$, $X-a_{k+2} \neq 0$, $g \in F[X]$, $g \neq 0$

$\therefore \deg(f)=\deg((X-a_{k+2})g)=\deg(X-a_{k+2})+\deg(g)$

$\therefore \deg(g)=\deg(f)-\deg(X-a_{k+2})=(k+1)-1=k$

$\therefore g$ 至多只有 k 个相异的根. 矛盾. $\quad \therefore f$ 有 $<(k+2)$ 个相异的根

$\therefore f$ 至多只有 $(k+1)$ 个相异的根

$\therefore F[X]$ 中一个任意的 n 次 $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 非零多项式至多只有 n 个相异的根.

$\square$