Lemma: R是环，I是R的理想，则有：$0_R \in I$

Proof　I是R的理想　$\therefore I \subseteq R$ 且 $I \neq \emptyset$

$\exists x \in I$

$x \in I$，I是R的理想　$\therefore -x \in I$

$x \in I$，$-x \in I$，I是R的理想　$\therefore x+(-x) \in I$

$x+(-x) = 0_R$　$\therefore 0_R \in I$．$\square$

Lemma：R是环，对$\forall \lambda\in\Lambda$，$I_\lambda$是$R$的理想，则有：

$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$是$R$的理想

Proof：对$\forall \lambda\in\Lambda$，$\because I_\lambda$是$R$的理想 $\therefore I_\lambda\subseteq R$ 且 $I_\lambda\neq\emptyset$

$\therefore \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\subseteq R$

对$\forall \lambda\in\Lambda$，$\because I_\lambda$是$R$的理想 $\therefore 0_R\in I_\lambda$ $\therefore 0_R\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$

$\therefore \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\neq\emptyset$

对$\forall x,y\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$，有：

对$\forall \lambda\in\Lambda$，$\because x,y\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ $\therefore x,y\in I_\lambda$

$\because I_\lambda$是R的理想 $\therefore x+y\in I_\lambda$ $\therefore x+y\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$

对$\forall r\in R$，

任取$r\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$中的一个元素$r\alpha$（其中$\alpha\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$）

对$\forall \lambda\in\Lambda$，$\because \alpha\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ $\therefore \alpha\in I_\lambda$ $\therefore r\alpha\in rI_\lambda\subseteq I_\lambda$

$\therefore r\alpha\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ $\therefore r\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)\subseteq\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$

任取$\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)r$中的一个元素$\beta r$（其中$\beta\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$）

对$\forall \lambda\in\Lambda$，$\because \beta\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ $\therefore \beta\in I_\lambda$ $\therefore \beta r\in I_\lambda r\subseteq I_\lambda$

$\beta r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \quad \therefore \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) r \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$

$\therefore \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 是 R 的理想. $\square$

Lemma: R 是环, I_1 和 I_2 是 R 的理想, 则有:

$I_1 \cup I_2$ 是 R 的理想 $\Longleftrightarrow$ $I_1 \subseteq I_2$ 或 $I_2 \subseteq I_1$

Proof: ($\Leftarrow$): 若 $I_1 \subseteq I_2$, 则 $I_1 \cup I_2 = I_2$ 是 R 的理想

若 $I_2 \subseteq I_1$, 则 $I_1 \cup I_2 = I_1$ 是 R 的理想.

($\Rightarrow$): 假设 $I_1 \nsubseteq I_2$ 且 $I_2 \nsubseteq I_1$, 则有:

$\because I_1 \nsubseteq I_2 \quad \therefore \exists x \in I_1$, s.t. $x \notin I_2$

$\because I_2 \nsubseteq I_1 \quad \therefore \exists\, y \in I_2$, s.t. $y \notin I_1$

$\because x \in I_1 \subseteq I_1 \cup I_2 \quad \therefore x \in I_1 \cup I_2$

$\because y \in I_2 \subseteq I_1 \cup I_2 \quad \therefore y \in I_1 \cup I_2$

$\because I_1 \cup I_2$ 是 R 的理想 $\quad \therefore x+y \in I_1 \cup I_2$

$\therefore x+y \in I_1$ 或 $x+y \in I_2$

若 $x+y \in I_1$, 则有: $\because x \in I_1$, I_1 是 R 的理想 $\quad \therefore -x \in I_1$

$\because x+y \in I_1$, $-x \in I_1$, I_1 是 R 的理想 $\quad \therefore (x+y)+(-x) \in I_1$

$\because (x+y)+(-x) = (y+x)+(-x) = y+(x+(-x)) = y+0_R = y$

$\therefore y \in I_1 \quad \because y \notin I_1 \quad \therefore$ 矛盾.

若 $x+y \in I_2$，则有：$\because y \in I_2$，I_2 是 R 的理想 $\therefore -y \in I_2$

$\because x+y \in I_2$，$-y \in I_2$，I_2 是 R 的理想 $\therefore (x+y)+(-y) \in I_2$

$\because (x+y)+(-y) = x+(y+(-y)) = x+0_R = x$ $\therefore x \in I_2$

$\because x \notin I_2$ $\therefore$ 矛盾

$\therefore I_1 \subseteq I_2$ 或 $I_2 \subseteq I_1$ $\square$