Lemma：R是环，I是R的理想，对$\forall x \in R$，有：

$$x \in I \iff x + I = 0_{R/I}$$

Proof：($\Rightarrow$)：$\because x \in R$ $\quad \therefore x - 0_R = x + (-0_R) = x + 0_R = x \in I$

$\therefore x \equiv_I 0_R$ $\quad \therefore x + I = 0_R + I = 0_{R/I}$

($\Leftarrow$)：$\because x \in R$ $\quad \therefore x + I \in R/I$ $\quad \because x + I = 0_{R/I} = 0_R + I$

$\therefore x \equiv_I 0_R$ $\quad \therefore x - 0_R \in I$

$\because x - 0_R = x + (-0_R) = x + 0_R = x$ $\quad \therefore x \in I$ $\quad \square$

Lemma: R是非零交换环，则有:

R是域 $\Longleftrightarrow$ 对$\forall$非零环A，$\forall$映射 $f: R \to A$，若f是环同态，则f是单同态.

Proof: ($\Rightarrow$): 对$\forall$非零环A，$\forall$映射$f: R \to A$，若f是环同态，则:

$\because$ R是域，A是非零环，$f: R \to A$是映射，$f: R \to A$是环同态

$\therefore$ $f: R \to A$是单射 $\therefore$ $f: R \to A$是单同态. (参见 3.2/4 笔记)

($\Leftarrow$): 设I是R的一个任意的理想 (参见 6.1/14 笔记)

若$I = R$，则$I = R$

若$I \neq R$，则 $\because$ R是环，I是R的理想 $\therefore$ R/I是环.

$\because$ R/I是环 $\therefore$ $0_{R/I} = 0_R + I$，$1_{R/I} = 1_R + I$

假设 $0_{R/I} = 1_{R/I}$，则 $0_R + I = 1_R + I$ $\therefore$ $0_R \equiv_I 1_R$ $\therefore$ $1_R \equiv_I 0_R$

$\therefore$ $1_R - 0_R \in I$ 又 $\because$ $1_R - 0_R = 1_R + (-0_R) = 1_R + 0_R = 1_R$ $\therefore$ $1_R \in I$

$\therefore$ $I = R$. 矛盾. $\therefore$ $0_{R/I} \neq 1_{R/I}$ $\therefore$ R/I是非零环.

$\because$ R/I是非零环，$q: R \to R/I$, $x \mapsto x + I$ 是商同态 $\therefore$ $q: R \to R/I$, $x \mapsto x + I$ 是单同态

$\therefore$ $\ker(q) = \{0_R\}$ $\because$ $\ker(q) = I$ $\therefore$ $I = \{0_R\}$

$\therefore$ $I = R$ 或 $I = \{0_R\}$ $\therefore$ R没有$\{0_R\}$和R之外的理想 $\therefore$ R是域 $\square$

Remark: 这个引理和 6.1/14 笔记中的一个引理共同构成了 Atiyah 交换代数 Proposition 1.2

Lemma: R是交换环，I是R的理想，则有:

I是R的素理想 $\Longleftrightarrow$ R/I是整环.

Proof: $\because$ R是环，I是R的理想 $\therefore$ R/I是环.

若R是零环，则 $R=\{0_R\}$. $\because I$是R的理想 $\therefore I=\{0_R\}$ $\therefore I=R$

$\therefore I$不是R的素理想.

$\because R/I=\{x+I \mid x\in R\}=\{0_R+I\}=\{0_{R/I}\}$ $\therefore R/I$是零环

$\therefore R/I$不是整环. $\therefore$ 假命题 $\Leftrightarrow$ 假命题 仍然成立.

若R是非零环，则：

$(\Rightarrow)$：$\because I$是R的素理想 $\therefore I$是R的真理想 $\therefore I\neq R$

假设 R/I 是零环，则有：$1_{R/I}=0_{R/I}$ $\therefore 1_R+I=0_R+I$ $\therefore 1_R\equiv_I 0_R$

$\therefore 1_R-0_R\in I$ $\therefore 1_R\in I$ $\therefore I=R$ 矛盾. $\therefore R/I$是非零环.

$\because R$是交换环，I是R的理想 $\therefore R/I$是交换环.

$\therefore R/I$是非零交换环.

对 $\forall\, x+I,\ y+I\in R/I$（其中 $x,y\in R$），若 $x+I\neq 0_{R/I}$ 且 $y+I\neq 0_{R/I}$，

则有：假设 $(x+I)(y+I)=0_{R/I}$，则有：$xy+I=0_R+I$

$\therefore xy\equiv_I 0_R$ $\therefore xy-0_R\in I$ $\therefore xy\in I$

$\because I$是R的素理想 $\therefore x\in I$ 或 $y\in I$

若 $x\in I$，则 $\because x-0_R=x+(-0_R)=x+0_R=x$ $\therefore x-0_R\in I$ $\therefore x\equiv_I 0_R$

$\therefore x+I=0_R+I=0_{R/I}$ 矛盾.

若 $y\in I$，则 $\because y-0_R=y+(-0_R)=y+0_R=y$ $\therefore y-0_R\in I$ $\therefore y\equiv_I 0_R$

$\therefore y+I=0_R+I=0_{R/I}$ 矛盾.

$\therefore$ 矛盾. $\therefore (x+I)(y+I)\neq 0_{R/I}$ $\therefore R/I$是整环.

$(\Leftarrow)$：假设 $I=R$，则有：

任取 R/I 中的一元：$x+I$（其中 $x\in R$） $\therefore x\in R=I$

$\therefore x-0_R=x+(-0_R)=x+0_R=x\in I$ $\therefore x\equiv_I 0_R$

$\therefore x+I=0_R+I=0_{R/I}$ $\therefore R/I=\{0_{R/I}\}$ $\therefore R/I$是零环.

$\because R/I$是整环 $\therefore R/I$是非零环 矛盾. $\therefore I \neq R$ $\therefore I$是R的真理想.

对$\forall x, y \in R$. 若$xy \in I$, 则有: $xy + I = 0_{R/I}$

$\because x, y \in R$ $\therefore x+I, y+I \in R/I$ $\therefore (x+I)(y+I) = xy + I = 0_{R/I}$

$\because R/I$是整环, $x+I, y+I \in R/I$, $(x+I)(y+I) = 0_{R/I}$

$\therefore x+I = 0_{R/I}$ 或 $y+I = 0_{R/I}$ $\therefore x \in I$ 或 $y \in I$

$\therefore I$是R的素理想. $\square$

Lemma: R是交换环, I是R的理想, 则有:

I是R的极大理想 $\Longleftrightarrow$ R/I是域

Proof: $\because R$是环, I是R的理想 $\therefore R/I$是环, R/I是交换环.

若R是零环, 则: $R = \{0_R\}$ $\because I$是R的理想 $\therefore I \subseteq R$ 且 $I \neq \emptyset$

$\therefore I = \{0_R\} = R$ $\therefore I$不是R的真理想 $\therefore I$不是R的极大理想.

$\therefore$ 左边为假命题. $\because I = R$ $\therefore$ 对$\forall x \in R$, 有: $x \in I$ $\therefore x + I = 0_{R/I}$

$\therefore R/I = \{0_{R/I}\}$ $\therefore R/I$是零环.

假设R/I是域, 则R/I是非零环 矛盾. $\therefore R/I$不是域

$\therefore$ 右边为假命题. $\therefore$ 左 $\Longleftrightarrow$ 右 仍然成立.

~~若R是非零环, 则有: 假设R/I是零环, 则~~ $\cancel{R/I = \{0_{R/I}\}}$.

~~对~~ $\cancel{\forall x \in R}$~~, 有:~~ $\cancel{x + I \in R/I = \{0_{R/I}\}}$ $\cancel{\therefore x + I = 0_{R/I}}$

若R是非零环, 则有:

$(\Rightarrow)$: 假设R/I是零环, 则$R/I = \{0_{R/I}\}$ $\therefore$ 对$\forall x \in R$, 有:

$x + I \in R/I = \{0_{R/I}\}$ $\therefore x + I = 0_{R/I}$ $\therefore x \in I$ $\therefore R \subseteq I$ $\because I \subseteq R$

$\therefore I = R$. $\because I$是R的极大理想 $\therefore I$是R的真理想 $\therefore I \neq R$ 矛盾.

$\therefore R/I$不是零环 $\therefore R/I$是非零交换环.

设K是R/I的一个任意的理想，则由环的第三同构定理知，存在R的理想J满足$I\subseteq J\subseteq R$，s.t. $K=J/I$

$\because I$是R的极大理想 $\therefore$有两种可能性：

① $I=J$. 此时有：$K=J/I=I/I=\{x+I \mid x\in I\}=\{0_{R/I}\}$

$\therefore K$是R/I的零理想

② $I\neq J$ $\therefore I\subsetneq J$ $\therefore J=R$ $\therefore K=R/I$

$\therefore R/I$只有两个理想：$\{0_{R/I}\}$和R/I $\therefore R/I$是域.

($\Leftarrow$)：假设$I=R$，则有：$R/I=\{x+I \mid x\in R\}=\{x+I \mid x\in I\}=\{0_{R/I}\}$

$\therefore R/I$是零环. $\because R/I$是域 $\therefore R/I$是非零环 矛盾. $\therefore I\neq R$

$\therefore I$是R的真理想.

设J是R的任意一个满足$I\subseteq J$的理想.

$\because J$是R的理想 $\therefore J\subseteq R$ $\because I\subseteq J$ $\therefore I\subseteq J\subseteq R$

$\therefore J/I$是环R/I的理想.

$\because R/I$是域 $\therefore R/I$是非零交换环. $\therefore R/I$没有$\{0_{R/I}\}$和R/I之外的理想

$\therefore J/I=\{0_{R/I}\}$或$J/I=R/I$

若$J/I=\{0_{R/I}\}$，则：对$\forall x\in J$，有：$x+I\in J/I=\{0_{R/I}\}$

$\therefore x+I=0_{R/I}$ $\therefore x\in I$ $\therefore J\subseteq I$ $\therefore J=I$

若$J/I=R/I$，则：$\because 1_R\in R$ $\cancel{1_R\in R/I}$ $\therefore 1_R+I\in R/I=J/I$

$\therefore \exists \lambda\in J$, s.t. $1_R+I=\lambda+I$

$\because 1_R\in R$, $\lambda\in J\subseteq R$, $1_R+I=\lambda+I$ $\therefore 1_R\equiv_I \lambda$ $\therefore 1_R-\lambda\in I\subseteq J$

$\therefore 1_R-\lambda\in J$ $\because \lambda\in J$, J是R的理想 $\therefore (1_R-\lambda)+\lambda\in J$

$\because (1_R-\lambda)+\lambda = (1_R+(-\lambda))+\lambda = 1_R+((-\lambda)+\lambda) = 1_R+0_R = 1_R$ $\therefore 1_R \in J$

$\because$ R是环，J是R的理想，$1_R \in J$ $\therefore J=R$

$\therefore J=I$ 或 $J=R$

$\therefore$ I是R的极大理想 $\square$

Lemma：R是交换环，则有：$\{0_R\}$是R的素理想 $\Leftrightarrow$ R是整环.

Proof：$\because$ R是环 $\therefore \{0_R\}$是R的理想，称为零理想.

若R是零环，则 $R=\{0_R\}$ $\therefore \{0_R\}$不是R的真理想 $\therefore \{0_R\}$不是R的素理想

左边为假. $\because$ R是零环 $\therefore$ R不是整环. 右边为假. 左$\Leftrightarrow$右成立.

若R是非零环，则：

$(\Rightarrow)$：R是非零交换环. 对$\forall x, y \in R$，若 $xy=0_R$，则有：

$xy=0_R \in \{0_R\}$ $\therefore xy \in \{0_R\}$ $\because \{0_R\}$是R的素理想

$\therefore x \in \{0_R\}$ 或 $y \in \{0_R\}$ $\therefore x=0_R$ 或 $y=0_R$ $\therefore$ R是整环.

$(\Leftarrow)$：$\because$ R是非零环 $\therefore \{0_R\} \subsetneqq R$ $\therefore \{0_R\}$是R的真理想

对$\forall x, y \in R$，若 $xy \in \{0_R\}$，则有：$xy=0_R$ $\therefore x=0_R$ 或 $y=0_R$

$\therefore x \in \{0_R\}$ 或 $y \in \{0_R\}$ $\therefore \{0_R\}$是R的素理想. $\square$