定理(环的第四同构定理，子环版本) R是环，I是R的理想，已经证明了R/I是环，商同态 $q: R \to R/I$ 是满同态.

$$x \mapsto x+I$$

定义两个集合：$S=\{A \mid A\text{是环}R\text{的子环，且}I \subseteq A\}$

$T=\{B \mid B\text{是环}R/I\text{的子环}\}$

定义映射 $f: S \to T$. 则已经证明了$f: S \to T$是一个保持包含关系的双射

$$A \mapsto A/I$$

则有：对$\forall A \in S$，有：$A=q^{-1}(f(A))$

对$\forall B \in T$，有：$f^{-1}(B)=q^{-1}(B)$

Proof：对$\forall A \in S$，有：

$\because A \in S$ $\therefore A$是环R的子环，且$I \subseteq A$ $\therefore A \subseteq R$

$\because A \in S$ $\therefore f(A)=A/I$是环R/I的子环 $\therefore f(A) \subseteq R/I$

$\because$商同态 $q: R \to R/I$ 是满同态

$$x \mapsto x+I$$

$\therefore q^{-1}(f(A))=\{x \in R \mid q(x) \in f(A)\} \subseteq R$

$\therefore A \subseteq R$ 且 $q^{-1}(f(A)) \subseteq R$

对$\forall x \in A$，有：$\because x \in A \subseteq R$ $\therefore x \in R$

$\because q(x)=x+I \in A/I=f(A)$ $\therefore x \in q^{-1}(f(A))$

$\therefore A \subseteq q^{-1}(f(A))$

对$\forall x\in q^{-1}(f(A))$，有：$x\in R$ 且 $q(x)\in f(A)=A/I$

$\therefore x+I\in A/I$ $\therefore \exists a\in A$, s.t. $x+I=a+I$ $\therefore x\equiv_I a$

$\therefore x-a\in I$ $\because I\subseteq A$ $\therefore x-a\in A$

$\because x-a\in A$，$a\in A$，A是环R的子环 $\therefore (x-a)+a\in A$

$\because (x-a)+a=(x+(-a))+a=x+((-a)+a)=x+0_R=x$

$\therefore x\in A$ $\therefore q^{-1}(f(A))\subseteq A$ $\therefore A=q^{-1}(f(A))$

对$\forall B\in T$，有：B是环R/I的子环 $\therefore B\subseteq R/I$

$\because B$是环R/I的子环 $\therefore B$能表示成A/I的形式，其中A是R的子环

且$I\subseteq A\subseteq R$ $\therefore A\in S$ 且 $B=A/I$

$\therefore f(A)=A/I=B$

$\because f:S\to T$是一个双射 $\therefore f:S\to T$是一个可逆映射

$\therefore$ 存在映射$f^{-1}:T\to S$, s.t. $f^{-1}f=id_S$ 且 $ff^{-1}=id_T$

$\therefore f^{-1}(B)=f^{-1}(f(A))=(f^{-1}\circ f)(A)=id_S(A)=A$

$\because A$是R的子环 $\therefore A\subseteq R$

$\because B\subseteq R/I$ $\therefore q^{-1}(B)=\{x\in R\mid q(x)\in B\}\subseteq R$

对$\forall x\in A$，有：$x\in R$，且 $q(x)=x+I\in A/I=B$

$\therefore x\in q^{-1}(B)$ $\therefore A\subseteq q^{-1}(B)$

对$\forall x\in q^{-1}(B)$，有：$x\in R$ 且 $q(x)\in B$ $\therefore x+I\in A/I$

$\therefore \exists a\in A$, s.t. $x+I=a+I$ $\therefore x\equiv_I a$ $\therefore x-a\in I$

$\because I\subseteq A$ $\therefore x-a\in A$

$\because x-a\in A$, $a\in A$, A是R的子环 $\quad \therefore (x-a)+a\in A$

$\because (x-a)+a = (x+(-a))+a = x+((-a)+a) = x+0_R = x$

$\therefore x\in A \quad \therefore g^{-1}(B)\subseteq A \quad \therefore A = g^{-1}(B)$

$\therefore f^{-1}(B) = A = g^{-1}(B) \quad \square$