Lemma：R是环，I是R的理想，则有：I在R的加法取逆$x \mapsto -x$之下封闭.

Proof：$\because$ R是环，I是R的理想 $\therefore$ $I \subseteq R$且$I \neq \emptyset$

对$\forall x \in I$，$\because 1_R \in R$ $\therefore -1_R \in R$

$\because$ I是R的理想 $\therefore (-1_R)I \subseteq I$

$\therefore (-1_R)x \in (-1_R)I \subseteq I$

$\because x \in I$ $\therefore x \in R$ $\therefore (-1_R)x = -x$

$\therefore -x \in I$

$\therefore$ I在R的加法取逆$x \mapsto -x$之下封闭. $\square$

Lemma：R是环，I是R的理想，$A\subseteq R$，A在R的加法运算之下封闭，$I\subseteq A$，则有：

$$A\text{是环}R\text{的理想} \Longleftrightarrow A/I\text{是环}R/I\text{的理想}$$

Proof：$\because$ R是环，I是R的理想 $\therefore$ $I\neq\emptyset$

$\because$ $I\subseteq A$ $\therefore$ $A\neq\emptyset$ $\therefore$ A是环R的非空子集

$\because$ $0_R\in I\subseteq A$ $\therefore$ $0_R\in A$

已知 $A/I=\{x+I\mid x\in A\}\subseteq R/I$.

$\because$ $0_R\in A$ $\therefore$ $0_R+I\in A/I$ $\therefore$ $A/I\neq\emptyset$，且 $0_{R/I}=0_R+I\in A/I$

$\therefore$ A是环R的非空子集，且 $0_R\in A$

A/I是环R/I的非空子集，且 $0_{R/I}\in A/I$

$(\Rightarrow)$：$\because$ R是环，A是环R的理想

$\therefore$ A在R的加法取逆 $x\mapsto -x$ 之下封闭.

$\therefore$ 由上一篇笔记，A/I是环R/I的理想.

$(\Leftarrow)$：对$\forall x\in A$，

$\because$ $x\in A$ $\therefore$ $x+I\in A/I$ $\because$ R/I是环，A/I是环R/I的理想

$\therefore$ A/I在R/I的加法取逆之下封闭

$\because$ $x+I\in A/I$ $\therefore$ $-(x+I)\in A/I$

$\because$ $-(x+I)=(-x)+I$ $\therefore$ $(-x)+I\in A/I$

$\therefore$ $\exists\, a\in A$，s.t. $(-x)+I=a+I$ $\therefore$ $(-x)\equiv_I a$ $\therefore$ $(-x)-a\in I\subseteq A$

$\therefore$ $(-x)-a\in A$，$a\in A$，A在R的加法运算之下封闭

$\therefore$ $((-x)-a)+a\in A$

$\because ((-x)-a)+a = ((-x)+(-a))+a = (-x)+((-a)+a) = (-x)+0_R = -x$

$\therefore -x \in A$

$\therefore$ A在R的加法取逆 $x \mapsto -x$ 之下封闭

$\therefore$ 由上一引理，A是环R的理想 $\square$