理想和商环

记号：R是一个任意的环，对$\forall S\subseteq R$，$S\neq\emptyset$，$\forall r\in R$，引入

记号：$rS:=\{rs: s\in S\}$，$Sr:=\{sr: s\in S\}$.

定义（环的理想）R是一个任意的环，I是R的非空子集，当以下条件成立时，称I为R的理想：

▷ 加法封闭性：对$\forall x,y\in I$，都有$x+y\in I$

▷ 乘法双边封闭性：对$\forall r\in R$，都有$rI\subseteq I$且$Ir\subseteq I$

Remark：这个定义中的理想称为R的双边理想.

Lemma：R是环，I是R的理想，则有：对$\forall x\in I$，有$-x\in I$

proof：对$\forall x\in I$，$\because 1_R\in R$ $\therefore -1_R\in R$

$\because$ I是R的理想 $\therefore (-1_R)I\subseteq I$

$\therefore (-1_R)x\in(-1_R)I\subseteq I$ $\because (-1_R)x=-x$

$\therefore -x\in I$ $\square$

Lemma：R是环，则$\{0_R\}$是R的理想，称为零理想.

proof：$\{0_R\}\subseteq R$ 且 $\{0_R\}\neq\emptyset$

对$\forall x,y\in\{0_R\}$，有：$x=y=0_R$ $\therefore x+y=0_R+0_R=0_R\in\{0_R\}$

对$\forall r\in R$，有：$r\{0_R\}=\{r\cdot 0_R: 0_R\in\{0_R\}\}=\{0_R\}\subseteq\{0_R\}$

$\{0_R\}r=\{0_R\cdot r: 0_R\in\{0_R\}\}=\{0_R\}\subseteq\{0_R\}$

$\therefore\{0_R\}$是R的理想，称为零理想 $\square$

Lemma: R是环，则R是R的理想.

Proof: $\because R$是环 $\therefore 0_R \in R$ $\therefore R \neq \emptyset$ $\therefore R \subseteq R$且$R \neq \emptyset$

对$\forall x, y \in R$，有: $x+y \in R$

对$\forall r \in R$，有: $rR = \{rx : x \in R\} \subseteq R$

$$Rr = \{xr : x \in R\} \subseteq R$$

$\therefore R$是R的理想. $\square$

定义(真理想) R是环，I是R的理想. 若$I \neq R$，则称I是R的真理想.

Lemma: R是环，I是R的理想，则有:

$$I = R \iff 1_R \in I$$

Proof: $(\Rightarrow)$: $1_R \in R = I$

$(\Leftarrow)$: $\because I$是R的理想 $\therefore I \subseteq R$

对$\forall x \in R$ $\because I$是R的理想 $\therefore Ix \subseteq I$

$\therefore x = 1_R \cdot x \in Ix \subseteq I$ $\therefore x \in I$ $\therefore R \subseteq I$

$\therefore I = R$ $\square$

~~Lemma: R是环，I是R的真理想，则有:~~

Lemma: R是环，则有: R的真理想不可能是R的子环.

Proof: 设I是R的任意一个真理想. 假设I是R的子环，则有:

$I\subseteq R$ 且 $1_R\in I$ $\quad\therefore I=R$

$\because I$是R的真理想 $\quad\therefore I\neq R$，矛盾。 $\therefore I$不是R的子环。 $\square$

~~定义（主理想）~~

Lemma：R是交换环，对$\forall x\in R$，有：$xR=Rx$是R的理想

Proof：对$\forall x\in R$，有：
$$xR=\{xr : r\in R\}\subseteq R$$
$$Rx=\{rx : r\in R\}\subseteq R$$

任取xR中的一个元素：xr（其中$r\in R$）。$\because xr=rx\in Rx$

$\therefore xR\subseteq Rx$

任取Rx中的一个元素：rx（其中$r\in R$）。$\because rx=xr\in xR$

$\therefore Rx\subseteq xR$ $\quad\therefore xR=Rx$ $\quad\because x=x\cdot 1_R\in xR$ $\quad\therefore xR\neq\varnothing$

任取xR中的两个元素：xr_1，xr_2（其中$r_1,r_2\in R$）

$\because xr_1+xr_2=x(r_1+r_2)\in xR$

对$\forall\alpha\in R$，有：~~$\alpha(xR)=$~~

任取$\alpha(xR)$中的一个元素 $\alpha\beta$（其中$\beta\in xR$）

$\because\beta\in xR$ $\quad\therefore\exists r_1\in R$，s.t. $\beta=xr_1$

$\therefore\alpha\beta=\alpha(xr_1)=(\alpha x)r_1=(x\alpha)r_1=x(\alpha r_1)\in xR$

$\therefore\alpha(xR)\subseteq xR$

任取$(xR)\alpha$中的一个元素 $\gamma\alpha$（其中$\gamma\in xR$）

$\because\gamma\in xR$ $\quad\therefore\exists r_2\in R$，s.t. $\gamma=xr_2$

∴ $r\alpha = (xr_2)\alpha = x(r_2\alpha) \in xR$　　∴ $(xR)\alpha \subseteq xR$

∴ xR是R的理想.　　∴ $xR = Rx$是R的理想. $\square$

定义(主理想) R是交换环，对$\forall x \in R$，$(x) := xR = \{xr : r \in R\}$是$R$的理想，称为$x$确定的主理想.

定义(主理想环) R是整环. 若R的所有理想都是主理想，则称R为主理想环.

Lemma：整数环$\mathbb{Z}$是主理想环.

Proof：设I是$\mathbb{Z}$的一个任意的理想，则有：$I \subseteq \mathbb{Z}$且$I \neq \emptyset$

对$\forall x, y \in I$，∵ I是$\mathbb{Z}$的理想　∴ $x+y \in I$

对$\forall a \in \mathbb{Z}$，$\forall x \in I$，有：∵ I是$\mathbb{Z}$的理想　∴ $aI \subseteq I$

∴ $ax \in aI \subseteq I$

∴ 存在唯一的$g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，s.t. $I = g\mathbb{Z}$　(Elementary_Number_Theory_note/第一章/2)

∴ $I = g\mathbb{Z} = (g)$　∴ I是g确定的主理想.　∴ $\mathbb{Z}$是主理想环.

$\square$