Lemma：R是环，I是R的理想，A是R的子环，且有$I \subseteq A \subseteq R$，则有：$A/I$是环$R/I$的子环.

Prof：$\because$ R是环，I是R的理想

$\therefore$ R/I是环，商映射 $q: R \longrightarrow R/I$ 是满同态

$$x \longmapsto x+I$$

$\because$ R是环，R/I是环，$q: R \longrightarrow R/I$是满同态，A是环R的子环

$\therefore$ $q(A)$是环R/I的子环.

$\because$ A是R的子环 $\therefore$ $(A, +, \cdot, 0_R, 1_R)$是环

$\because$ I是R的理想 $\therefore$ $I \neq \emptyset$ $\therefore$ I是A的非空子集

对$\forall x, y \in I$，$\because$ I是R的理想 $\therefore$ $x+y \in I$

对$\forall a \in A$，$\because a \in A \subseteq R$ $\therefore a \in R$ $\therefore aI \subseteq I$ 且 $Ia \subseteq I$

$\therefore$ I是环A的理想 $\therefore$ A/I是环

对$\forall \lambda \in q(A)$，$\exists a \in A$，s.t. $\lambda = q(a)$

$\therefore \lambda = q(a) = a+I \in A/I$ $\therefore q(A) \subseteq A/I$

任取A/I中的一元：$a+I$（其中$a \in A$）

$\because a \in A$ $\therefore q(a) \in q(A)$

$\because q(a) = a+I$ $\therefore a+I \in q(A)$ $\therefore A/I \subseteq q(A)$

$\therefore q(A) = A/I$

$\therefore$ A/I是环R/I的子环 $\square$

Lemma：R是环，I是R的理想，已经证明了 $R/I=\{x+I \mid x\in R\}$ 是环．则有：R/I的任意一个子环B必能表示成A/I的形式，其中A是R的子环且有 $I\subseteq A\subseteq R$．

Proof：$\because R$是环，R/I是环，商映射 $q: \begin{aligned} R &\longrightarrow R/I \\ x &\longmapsto x+I \end{aligned}$ 是满同态，

B是R/I的子环 $\quad\therefore q^{-1}(B)$是环$R$的子环．

令$A=q^{-1}(B)$ $\quad\therefore A$是环R的子环．

对$\forall x\in I$，$\because x-0_R=x+(-0_R)=x+0_R=x\in I$

$\therefore x\equiv_I 0_R \quad \therefore x+I=0_R+I$

$\therefore x\in R$，且 $q(x)=x+I=0_R+I=0_{R/I}\in B \quad \therefore x\in q^{-1}(B)=A$

$\therefore I\subseteq A\subseteq R$

$\because I$是R的理想 $\quad\therefore I\neq\emptyset \quad\therefore I$是环$A$的非空子集

对$\forall x,y\in I$，$\because I$是R的理想 $\quad\therefore x+y\in I$

对$\forall a\in A$，$\because a\in R \quad\therefore aI\subseteq I$ 且 $Ia\subseteq I$

$\therefore I$是环A的理想 $\quad\therefore A/I$是环．

对$\forall \alpha\in B$，$\because \alpha\in B\subseteq R/I \quad\therefore \exists x\in R$，s.t. $\alpha=x+I$

$\therefore x\in R$，且有 $q(x)=x+I=\alpha\in B \quad\therefore x\in q^{-1}(B)=A$

$\therefore x+I\in A/I \quad\therefore \alpha=x+I\in A/I \quad\therefore B\subseteq A/I$

任取A/I中的一元：$a+I$（其中$a\in A$）

$\because a\in A\subseteq R \quad \therefore a\in R \quad \therefore q(a)=a+I$

$\because a\in A=q^{-1}(B) \quad \therefore q(a)\in B \quad \therefore a+I\in B$

$\therefore A/I\subseteq B \quad \therefore B=A/I$ $\square$

Lemma：R是环，I是R的理想，J是R的理想，且有 $I\subseteq J\subseteq R$，则有：J/I是环R/I的理想.

Proof：$\because$ R是环，I是R的理想 $\therefore$ R/I是环

$\because$ R是环，R/I是环，商同态 $q: R\to R/I$ 是满同态，

$x\mapsto x+I$

J是环R的理想

$\therefore$ q(J)是环R/I的理想.

（注意：一般来说，J不一定是R的子环. ~~集~~所以 J/I 一般来说不是商环. 此处 J/I 仅被理解成一种记法，表示：

$J/I=\{x+I \mid x\in J\} \quad \therefore J/I\subseteq R/I$ ）

对 $\forall \alpha\in q(J)$，$\exists x\in J$，s.t. $\alpha=q(x)$

$\therefore \alpha=q(x)=x+I\in J/I \quad \therefore q(J)\subseteq J/I$

任取J/I中的一元：$x+I$（其中 $x\in J$）

$\because x\in J \quad \therefore x\in R \quad \therefore q(x)=x+I$

$\therefore x+I=q(x)\in q(J) \quad \therefore J/I\subseteq q(J) \quad \therefore J/I=q(J)$

$\therefore$ J/I是环R/I的理想. $\square$

Lemma: R是环，I是R的理想，已经证明了 $R/I=\{x+I \mid x\in R\}$ 是环，则有：R/I 的任意一个理想 K 必能表示成 J/I 的形式，其中 J 是 R 的理想且有 $I\subseteq J\subseteq R$.

Proof: $\because$ R是环，R/I 是环，商同态 $q: R\to R/I$ 是满同态，
$x\mapsto x+I$

K是环 R/I 的理想 $\therefore q^{-1}(K)$ 是环R的理想.

令 $J=q^{-1}(K)$ $\therefore$ J是环R的理想.

对 $\forall x\in I$，$\because x-0_R=x+(-0_R)=x+0_R=x\in I$

$\therefore x\equiv_I 0_R$ $\therefore$ ~~$x+0_R$~~ $x+I=0_R+I$

$\therefore x\in R$，且 $q(x)=x+I=0_R+I=0_{R/I}\in K$

$\therefore x\in q^{-1}(K)=J$ $\therefore I\subseteq J\subseteq R$

对 $\forall \alpha\in K$，有：$\alpha\in K\subseteq R/I$ $\therefore \exists x\in R$, s.t. $\alpha=x+I$

$\therefore x\in R$，且有 $q(x)=x+I=\alpha\in K$ $\therefore x\in q^{-1}(K)=J$

$\therefore \alpha=x+I\in J/I$ $\therefore K\subseteq J/I$

任取 J/I 中的一元：$x+I$（其中 $x\in J$）

~~$\because x\in J$ $\therefore x\in R$ $\therefore q(x)=x+I$~~

~~$\therefore x+I=q(x)\in q(J)$~~

$\because x\in J$ $\therefore x\in R$ $\because x\in J$ $\therefore x\in q^{-1}(K)$ ~~$=q(x)$~~

$\therefore q(x)\in K$ $\because q(x)=x+I$ $\therefore x+I\in K$

$\therefore J/I\subseteq K$ $\therefore J/I=K$ $\therefore K=J/I$. $\square$

定理（环的第三同构定理）R是环，I是R的理想，J是R的理想，且有$I\subseteq J\subseteq R$，则有：$(R/I)/(J/I)\simeq R/J$

Proof $\because$ R是环，I是R的理想，J是R的理想，且有$I\subseteq J\subseteq R$

$\therefore$ J/I是环R/I的理想 $\quad\therefore$ $(R/I)/(J/I)$是环

$\because$ R是环，J是R的理想 $\quad\therefore$ R/J是环.

定义映射：
$$f: R/I \longrightarrow R/J$$
$$x+I \longmapsto x+J$$

对$\forall\, x+I\in R/I$（其中$x\in R$），$f(x+I)=x+J\in R/J$

$\therefore$ $f(R/I)\subseteq R/J$

$\because$ 对$\forall\, x+I,\ y+I\in R/I$（其中$x,y\in R$），若$x+I=y+I$，则有：

$x\equiv_I y$ $\quad\therefore$ $x-y\in I\subseteq J$ $\quad\therefore$ $x-y\in J$

$\therefore$ $x\equiv_J y$ $\quad\therefore$ $x+J=y+J$

$\therefore$ $f(x+I)=x+J=y+J=f(y+I)$

$\therefore$ $f: R/I\to R/J$是映射.

对$\forall\, x+J\in R/J$（其中$x\in R$）. $\because$ $x\in R$ $\quad\therefore$ $x+I\in R/I$

$\therefore$ $f(x+I)=x+J$ $\quad\therefore$ $f: R/I\to R/J$是满射.

对$\forall\, x+I,\ y+I\in R/I$（其中$x,y\in R$），

$$f((x+I)+(y+I))=f((x+y)+I)=(x+y)+J=(x+J)+(y+J)$$
$$=f(x+I)+f(y+I)$$

$$f((x+I)\cdot(y+I)) = f(xy+I) = xy+J = (x+J)\cdot(y+J)$$
$$= f(x+I)\cdot f(y+I)$$

$$f(1_{R/I}) = f(1_R+I) = 1_R+J = 1_{R/J}$$

$\therefore f: R/I \to R/J$ 是满同态.

$\therefore$ 由环的第一同构定理知: $(R/I)/\ker(f) \simeq R/J$

$\because J/I \subseteq R/I$, $\ker(f) \subseteq R/I$

对 $\forall\, x+I \in R/I$ (其中 $x \in R$), 有:

$$
\begin{aligned}
x+I \in \ker(f) &\iff f(x+I) = 0_{R/J} \\
&\iff x+J = 0_R+J \\
&\iff x \equiv_J 0_R \\
&\iff x-0_R \in J \\
&\iff x+(-0_R) \in J \\
&\iff x+0_R \in J \\
&\iff x \in J \\
&\iff x+I \in J/I
\end{aligned}
$$

$\therefore \ker(f) = J/I$

$\therefore (R/I)/(J/I) \simeq R/J$ $\square$