例（二元多项式环）R是一个任意的非零环，X_1和X_2是任意的两个相互独立的变元，则有：

$$R[X_1,X_2]=\left\{\sum_{a_1,a_2\geq 0} c_{a_1,a_2}X_1^{a_1}X_2^{a_2}\ \middle|\ c_{a_1,a_2}\in R,\text{至多有限个}c_{a_1,a_2}\text{非零}\right\}$$

对$\forall f\in R[X_1,X_2]$，$\exists n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，s.t.

$$\begin{aligned}f=&c_{0,0}X_1^0X_2^0+c_{0,1}X_1^0X_2^1+c_{1,0}X_1^1X_2^0+c_{0,2}X_1^0X_2^2+c_{1,1}X_1^1X_2^1\\&+c_{2,0}X_1^2X_2^0+\cdots+c_{0,n}X_1^0X_2^n+c_{1,n-1}X_1^1X_2^{n-1}+\cdots+c_{n-1,1}X_1^{n-1}X_2^1+c_{n,0}X_1^nX_2^0\end{aligned}$$

意即：f是n次多项式.

例（三元多项式环）R是一个任意的非零环，X_1,X_2,X_3是三个相互独立的变元，则有：

$$R[X_1,X_2,X_3]=\left\{\sum_{a_1,a_2,a_3\geq 0} c_{a_1,a_2,a_3}X_1^{a_1}X_2^{a_2}X_3^{a_3}\ \middle|\ c_{a_1,a_2,a_3}\in R,\text{至多有限个}c_{a_1,a_2,a_3}\text{非零}\right\}$$

对$\forall f\in R[X_1,X_2,X_3]$，$\exists n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，s.t.

$$\begin{aligned}f=&c_{0,0,0}X_1^0X_2^0X_3^0+c_{1,0,0}X_1^1X_2^0X_3^0+c_{0,1,0}X_1^0X_2^1X_3^0+c_{0,0,1}X_1^0X_2^0X_3^1\\&+c_{2,0,0}X_1^2X_2^0X_3^0+c_{0,2,0}X_1^0X_2^2X_3^0+c_{0,0,2}X_1^0X_2^0X_3^2\\&+c_{1,1,0}X_1^1X_2^1X_3^0+c_{1,0,1}X_1^1X_2^0X_3^1+c_{0,1,1}X_1^0X_2^1X_3^1\\&+\cdots\\&+c_{n,0,0}X_1^nX_2^0X_3^0+c_{0,n,0}X_1^0X_2^nX_3^0+c_{0,0,n}X_1^0X_2^0X_3^n\\&+\cdots\cdots+c_{\alpha,\beta,\gamma}X_1^{\alpha}X_2^{\beta}X_3^{\gamma}\quad(\alpha+\beta+\gamma=n)\end{aligned}$$

（将n分解为$n=\alpha+\beta+\gamma$，其中$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. 有序数组$(\alpha,\beta,\gamma)$遍历所有和为$n$的情况.）（次数为$n$的单项式有$\binom{n+2}{2}$个）

Remark：如果是 m 个变元 $X_1, X_2, \cdots, X_m$，考虑 n 次单项式 $X_1^{a_1}X_2^{a_2}\cdots X_m^{a_m}$（其中 $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$，$a_1\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, a_2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \cdots, a_m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$）的个数，则 n 次单项式有 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 个.

（n 个物体，放 $(m-1)$ 个隔板，把这 n 个物体分成 m 堆（允许空堆）.
即从 $n+m-1$ 个位置中，选出 $(m-1)$ 个位置放隔板，则这 n 个物体被分成了 m 堆（允许空堆））（weak composition，combinatorics）

Scanned with CamScanner