Lemma：R是环，S是R的子环，I是R的理想，则有：

$S+I=\{s+i \mid s\in S,\ i\in I\}$是$R$的子环

Proof：$\because$ S是R的子环 $\therefore S\subseteq R$ $\because$ I是R的理想 $\therefore I\subseteq R$

$\therefore S+I=\{s+i \mid s\in S,\ i\in I\}\subseteq R$

$\because$ S是R的子环 $\therefore 0_R\in S$ $\because$ I是R的理想 $\therefore 0_R\in I$

$\therefore 0_R=0_R+0_R\in S+I$ $\therefore S+I\neq\emptyset$ $\therefore$ $S+I$是R的非空子集

$\because$ S是R的子环 $\therefore 1_R\in S$

$\therefore 1_R=1_R+0_R\in S+I$

对$\forall\ s_1+i_1,\ s_2+i_2\in S+I$，有：

$(s_1+i_1)+(s_2+i_2)=(s_1+s_2)+(i_1+i_2)\in S+I$

$(s_1+i_1)\cdot(s_2+i_2)=s_1(s_2+i_2)+i_1(s_2+i_2)=s_1s_2+s_1i_2+i_1s_2+i_1i_2$

$\because s_1,s_2\in S$ $\therefore s_1s_2\in S$

$\because s_1i_2\in s_1I\subseteq I$，$i_1s_2\in Is_2\subseteq I$，$i_1i_2\in i_1I\subseteq I$

$\therefore s_1i_2+i_1s_2+i_1i_2\in I$

$\therefore (s_1+i_1)\cdot(s_2+i_2)=s_1s_2+(s_1i_2+i_1s_2+i_1i_2)\in S+I$

对$\forall\ s+i\in S+I$

$-(s+i)=(-s)+(-i)\in S+I$

$\therefore$ ~~$S+I$是~~ $S+I=\{s+i \mid s\in S,\ i\in I\}$是$R$的子环 $\square$

Lemma：R是环，S是R的子环，I是R的理想，则有：

I是环$S+I$的理想.

Proof：$\because$ 已经证明了 $S+I$ 是R的子环

$\therefore (S+I, +, \cdot, 0_R, 1_R)$ 是环.

对 $\forall i \in I$，$\because i = 0_R + i \in S+I$ $\quad \therefore I \subseteq S+I$

$\because$ I是R的理想 $\quad \therefore I \neq \emptyset$ $\quad \therefore$ I是$S+I$的非空子集

对 $\forall x, y \in I$，$\because$ I是R的理想 $\quad \therefore x+y \in I$

$\therefore$ $S+I$的非空子集I满足加法封闭性.

对 $\forall s+i \in S+I$ （其中 $s \in S$，$i \in I$）

任取 $(s+i)I$ 中的一元：$(s+i)\alpha$ （其中 $\alpha \in I$）

$\therefore (s+i)\alpha = s\alpha + i\alpha \in I$

$\qquad (s\alpha \in sI \subseteq I,\ i\alpha \in iI \subseteq I)$

$\therefore (s+i)I \subseteq I$

任取 $I(s+i)$ 中的一元：$\beta(s+i)$ （其中 $\beta \in I$）

$\therefore \beta(s+i) = \beta s + \beta i \in I$

$\qquad (\beta s \in Is \subseteq I,\ \beta i \in Ii \subseteq I)$

$\therefore I(s+i) \subseteq I$

$\therefore$ I是环$S+I$的理想. $\square$

Lemma: R是环, S是R的子环, I是R的理想, 则有:

$S\cap I$是S的理想.

Proof: $\because S$是R的子环 $\therefore (S,+,\cdot,0_R,1_R)$是环.

$\because S$是R的子环 $\therefore 0_R\in S$ $\because I$是R的理想 $\therefore 0_R\in I$

$\therefore 0_R\in S\cap I$ $\therefore S\cap I\neq\phi$

$\because S\cap I\subseteq S$ $\therefore S\cap I$是S的非空子集.

对$\forall x,y\in S\cap I$, 有:

$\because x\in S$, $y\in S$, S是R的子环 $\therefore x+y\in S$

$\because x\in I$, $y\in I$, I是R的理想 $\therefore x+y\in I$

$\therefore x+y\in S\cap I$

对$\forall s\in S$,

任取 $s(S\cap I)$中的一元: $s\alpha$ (其中$\alpha\in S\cap I$)

$\because s\in S$, $\alpha\in S$ $\therefore s\alpha\in S$

$\because s\in S$, $\alpha\in I$ $\therefore s\alpha\in sI\subseteq I$ $\therefore s\alpha\in S\cap I$

$\therefore s(S\cap I)\subseteq S\cap I$

任取 $(S\cap I)s$中的一元: βs (其中$\beta\in S\cap I$)

$\because \beta\in S$, $s\in S$ $\therefore \beta s\in S$

$\because \beta\in I$, $s\in S$ $\therefore \beta s\in Is\subseteq I$ $\therefore \beta s\in S\cap I$

$\therefore (S\cap I)s\subseteq S\cap I$ $\therefore S\cap I$是S的理想. $\square$

定理（环的第二同构定理）R是环，S是R的子环，I是R的理想，则有：$S/(S\cap I)\simeq(S+I)/I$

Proof：$\because$ $S+I$是R的子环，I是环$S+I$的理想

$\therefore$ $(S+I)/I$ 是环

定义映射 $f: S\longrightarrow(S+I)/I$

$x\longmapsto x+I$

对$\forall x\in S$，$\because$ I是R的理想 $\therefore 0_R\in I$

$\therefore x=x+0_R\in S+I$ $\quad\therefore x+I\in(S+I)/I$

$\therefore f(x)=x+I\in(S+I)/I$ $\quad\therefore f(S)\subseteq(S+I)/I$

对$\forall x,y\in S$，若$x=y$，则有：$x-y=y-y=0_R\in I$

$\therefore x\equiv_I y$ $\quad\therefore x+I=y+I$

$\therefore f(x)=x+I=y+I=f(y)$ $\quad\therefore f: S\to(S+I)/I$是映射

对$\forall x,y\in S$，

$$f(x+y)=(x+y)+I=(x+I)+(y+I)=f(x)+f(y)$$

$$f(xy)=xy+I=(x+I)\cdot(y+I)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(1_S)=f(1_R)=1_R+I=1_{S+I}+I=1_{(S+I)/I}$$

$\because f: S \to (S+I)/I$ 是环同态.

$\therefore$ 由环的第一同构定理可知: $S/\ker(f) \simeq f(S)$

已知 $f(S) \subseteq (S+I)/I$.

任取 $(S+I)/I$ 中的一元: $(s+i)+I$. (其中 $s\in S$, $i\in I$)

$\because (s+i)-s = (s+i)+(-s) = (i+s)+(-s) = i+(s+(-s)) = i+0_R = i$

$\therefore (s+i)-s = i \in I$

$\therefore (s+i) \equiv_I s \qquad \therefore (s+i)+I = s+I$

$\because s\in S \quad \therefore f(s) = s+I = (s+i)+I$

$\therefore (s+i)+I = f(s) \in f(S) \qquad \therefore (S+I)/I \subseteq f(S)$

$\therefore f(S) = (S+I)/I$

$\because \ker(f) \subseteq S$, 且对 $\forall x\in S$, 有:

$$
\begin{aligned}
x\in\ker(f) &\iff f(x) = 0_{(S+I)/I} \\
&\iff f(x) = 0_{S+I} + I \\
&\iff f(x) = 0_R + I \\
&\iff x+I = 0_R + I \\
&\iff x \equiv_I 0_R \\
&\iff x - 0_R \in I \\
&\iff x + (-0_R) \in I \\
&\iff x + 0_R \in I \\
&\iff x \in I \iff x \in S\cap I
\end{aligned}
$$

$\because \ker(f) \subseteq S, \quad S \cap I \subseteq S,$

$x \in \ker(f) \iff x \in S \cap I$

$\therefore \ker(f) = S \cap I$

$\therefore S/(S \cap I) \simeq (S+I)/I \qquad \square$