

定义(交换环中的整除) R 是交换环, 对 $\forall x, y \in R$, 若存在 $d \in R$ 使得 $y = dx$, 则称 x 整除 y , 记作 $x|y$.

定义(整环上的相伴关系) R 是整环, 对 $\forall x, y \in R$,

$$x \sim y \iff \exists r \in R^\times, \text{ 使得 } x = ry$$

若 $x \sim y$, 则称 x 和 y 相伴.

Lemma: 整环上的相伴关系是整环上的等价关系.

Proof: R 是整环, 对 $\forall x, y \in R$, 有: $x \sim y \iff \exists r \in R^\times, \text{ s.t. } x = ry$.

对 $\forall x \in R$, $\because 1_R \in R^\times$, 且 $x = 1_R \cdot x \quad \therefore x \sim x \quad \therefore$ 反身性成立.

对 $\forall x, y \in R$, 若 $x \sim y$, 则有: $\because x \sim y \quad \therefore \exists r \in R^\times, \text{ s.t. } x = ry$

$\because r \in R^\times \quad \therefore r^{-1} \in R^\times$

$\because y = 1_R \cdot y = (r^{-1} \cdot r) \cdot y = r^{-1}(ry) = r^{-1}x \quad \therefore y \sim x \quad \therefore$ 对称性成立

对 $\forall x, y, z \in R$, 若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 则有:

$\because x \sim y \quad \therefore \exists r_1 \in R^\times, \text{ s.t. } x = r_1 y$

$\because y \sim z \quad \therefore \exists r_2 \in R^\times, \text{ s.t. } y = r_2 z$

$\because r_1 \in R^\times \text{ 且 } r_2 \in R^\times \quad \therefore r_1 r_2 \in R^\times$

$\because (r_1 r_2)z = r_1(r_2 z) = r_1 y = x \quad \therefore x = (r_1 r_2)z$

$\therefore x \sim z \quad \therefore$ 传递性成立.

\therefore 整环上的相伴关系是整环上的等价关系



Lemma: R 是整环, 已经证明了 \sim 为 R 上的等价关系, 对 $\forall x \in R$, 以 x 为代表元的等价类为 $\{\alpha \in R : \alpha \sim x\}$. 则有:

$$\{\alpha \in R : \alpha \sim x\} \subseteq (x) \quad (\text{其中 } (x) = xR = \{xr : r \in R\})$$

((x) 称为 x 确定的主理想).

Proof: 任取集合 $\{\alpha \in R : \alpha \sim x\}$ 中的一个元素 α $\therefore \alpha \in R$ 且 $\alpha \sim x$

$$\therefore \alpha \in R \text{ 且 } x \in R \text{ 且 } \exists r \in R, \text{ s.t. } \alpha = rx$$

$$\therefore \alpha = rx = xr \in (x) \quad \therefore \{\alpha \in R : \alpha \sim x\} \subseteq (x). \quad \square$$

Remark: 反方向的包含关系一般不成立. 例子可由 Gemini 生成.

Lemma: R 是整环, 对 $\forall x, y \in R$, 有:

$$x \mid y \iff (y) \subseteq (x)$$

Proof: (\Rightarrow): $\because x \mid y \quad \therefore \exists d \in R, \text{ s.t. } y = dx$

对 $\forall \lambda \in (y)$, 有: $\exists r \in R, \text{ s.t. } \lambda = yr$

$$\therefore \lambda = yr = (dx)r = (xd)r = x(dr) \in (x)$$

$$\therefore (y) \subseteq (x)$$

(\Leftarrow): $y = y \cdot 1 \in (y) \quad \because (y) \subseteq (x) \quad \therefore y \in (x)$

$$\therefore \exists d \in R, \text{ s.t. } y = xd$$

$$\therefore \exists d \in R, \text{ s.t. } y = dx \quad \therefore x \mid y \quad \square$$

Lemma: R 是整环, 对 $\forall x, y \in R$, 有:

$$x \sim y \Leftrightarrow x|y \text{ 且 } y|x \Leftrightarrow (x) = (y)$$

Proof: 左 \Rightarrow 中: $\because x \sim y \quad \therefore \exists r \in R^\times, \text{ s.t. } x = ry$

$$\therefore r \in R \text{ 且 } x = ry \quad \therefore y|x$$

$$\therefore r \in R^\times \quad \therefore r^{-1} \in R^\times$$

$$\therefore y = \frac{1}{r} \cdot x = (r^{-1} \cdot r) y = r^{-1}(ry) = r^{-1}x$$

$$\therefore r^{-1} \in R^\times \text{ 且 } y = r^{-1}x \quad \therefore x|y$$

$$\therefore x|y \text{ 且 } y|x$$

$$\text{中} \Rightarrow \text{左}: \because x|y \quad \therefore \exists d_1 \in R, \text{ s.t. } y = d_1 \cdot x$$

$$\because y|x \quad \therefore \exists d_2 \in R, \text{ s.t. } x = d_2 y$$

$$\therefore y = d_1 x = d_1(d_2 y) = (d_1 d_2) y$$

$$\textcircled{1} \text{ 若 } y = 0_R, \text{ 则有: } x = d_2 y = d_2 \cdot 0_R = 0_R$$

$$\therefore 1_R \in R^\times \text{ 且有 } 0_R = 1_R \cdot 0_R$$

$$\therefore 1_R \in R^\times \text{ 且有 } x = 1_R \cdot y \quad \therefore x \sim y$$

$\textcircled{2}$ 若 $y \neq 0_R$, 则有:

$$\therefore (d_1 d_2) y = y = 1_R \cdot y \quad \therefore (d_1 d_2) y = 1_R \cdot y$$

$$\therefore d_1 d_2 \in R, 1_R \in R, y \in R, y \neq 0_R, (d_1 d_2) y = 1_R \cdot y$$

$$\therefore d_1 d_2 = 1_R \quad \therefore 1_R = d_1 d_2 = d_2 d_1$$

$$\therefore d_1 \in R^\times \text{ 且 } d_2 \in R^\times$$

$$\therefore d_2 \in R^\times \text{ 且 } x = d_2 y \quad \therefore x \sim y$$

\therefore 左 \Leftrightarrow 中得证!

$$\text{中} \Leftrightarrow x|y \text{ 且 } y|x \Leftrightarrow (y) \subseteq (x) \text{ 且 } (x) \subseteq (y) \Leftrightarrow (x) = (y) \Leftrightarrow \text{右}$$

\therefore 中 \Leftrightarrow 右得证! \square

定义(素元, 不可约元) R 是整环, $p \in R$, $p \neq 0_R$, $p \notin R^\times$

* 若对 $\forall a, b \in R$, $p|ab \Leftrightarrow p|a$ 或 $p|b$, 则称 p 为素元

* 若对 $\forall a \in R$, $a|p \Leftrightarrow a \sim p$ 或 $a \sim 1_R$, 则称 p 为不可约元.

Lemma: R 是交换环, $p, a, b \in R$, $p|a$ 或 $p|b$, 则有: $p|ab$

Proof: 若 $p|a$, 则有: $\exists d_1 \in R$, s.t. $a = d_1 p$

$$\therefore ab = (d_1 p)b = d_1(pb) = d_1(bp) = (d_1 b)p$$

$$\therefore d_1 \in R, b \in R \quad \therefore d_1 b \in R$$

$$\therefore d_1 b \in R \text{ 且 } ab = (d_1 b)p \quad \therefore p|ab$$

若 $p|b$, 则有: $\exists d_2 \in R$, s.t. $b = d_2 p$

$$\therefore ab = a(d_2 p) = (ad_2)p$$

$$\therefore a \in R \text{ 且 } d_2 \in R \quad \therefore ad_2 \in R$$

$$\therefore ad_2 \in R \text{ 且 } ab = (ad_2)p \quad \therefore p|ab. \quad \square$$

定义(素元) R 是整环, $p \in R$, $p \neq 0_R$, $p \notin R^\times$.

若对 $\forall a, b \in R$, $p|ab \Rightarrow p|a$ 或 $p|b$, 则称 p 为素元.

Lemma: R 是整环, $p, a \in R$, $a \sim p$ 或 $a \sim 1_R$, 则有 $a|p$

Proof: 若 $a \sim p$, 则有: $a|p$ 且 $p|a \quad \therefore a|p$

若 $a \sim 1_R$, 则有: $\exists r \in R^\times$, s.t. $a = r \cdot 1_R \quad \therefore a = r$

$\therefore r \in R^\times \quad \therefore r^{-1} \in R^\times \quad \therefore r^{-1} \in R \quad \cancel{\therefore r^{-1}a \in R} \quad \therefore pr^{-1} \in R$

$$\cancel{\therefore (r^{-1}a)a = (r^{-1}r)a = 1_R a = a}$$

$$\therefore (pr^{-1})a = p(r^{-1}a) = p(r^{-1}r) = p \cdot 1_R = p$$

$$\therefore pr^{-1} \in R \text{ 且 } p = (pr^{-1})a$$

$$\therefore a|p \quad \square$$

定义(不可约元) R 是整环, $p \in R$, $p \neq 0_R$, $p \notin R^\times$

若对 $\forall a \in R$, $a|p \Rightarrow a \sim p$ 或 $a \sim 1_R$, 则称 p 为不可约元.