Lemma：E和F是域，存在从E到F的环同态，则有：

$char(E) = char(F)$

Proof：$\because$ 存在从E到F的环同态

$\therefore$ 设 $f: E \to F$ 为环同态

$\because$ F是域 $\therefore$ F是非零环

$\because$ E是域，F是非零环，$f: E \to F$ 是环同态

$\therefore$ 映射 $f: E \to F$ 是单射 $\therefore$ $f: E \to F$ 是单同态.

$\because$ E和F是域 $\therefore$ E和F是整环

$\because$ E和F是整环，$f: E \to F$ 是单同态 $\therefore char(E) = char(F)$ $\square$

推论：E和F是域，$char(E) \neq char(F)$，则有：不存在从E到F的环同态.

Proof：假设存在从E到F的环同态，则有 $char(E) = char(F)$

矛盾. $\therefore$ 不存在从E到F的环同态.

Lemma：$char(\mathbb{Z}) = 0$

Proof：在 Lecture_Notes_in_Algebra_WenWeiLi_notes_20250225_20250717/第二章/12.6/5 笔记中，已经证明了 $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个整环.

$\therefore$ 存在唯一的 $\mathrm{char}(\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，s.t. 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$，都有：

$n \cdot 1 = 0 \iff \mathrm{char}(\mathbb{Z}) \mid n$

$\therefore$ 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$，都有：$n = 0 \iff \mathrm{char}(\mathbb{Z}) \mid n$

假设 $\mathrm{char}(\mathbb{Z}) > 0$，则有：$\mathrm{char}(\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}_{>0}$

$\because \mathrm{char}(\mathbb{Z}) \mid \mathrm{char}(\mathbb{Z})$ $\quad\therefore \mathrm{char}(\mathbb{Z}) = 0$ 矛盾.

$\therefore \mathrm{char}(\mathbb{Z}) = 0$ $\quad\square$