Lemma：R_1，R_2 和 R_3 是环，$f: R_1 \to R_2$ 和 $g: R_2 \to R_3$ 是环同态，I_1 是环 R_1 的理想，I_2 是环 R_2 的理想，I_3 是环 R_3 的理想，$f(I_1) \subseteq I_2$，$g(I_2) \subseteq I_3$．对 $\forall i = 1, 2, 3$，$q_i : R_i \to R_i/I_i$ 是商同态．则有：存在唯一的一对环同态 $\bar{f} : R_1/I_1 \to R_2/I_2$，$\bar{g} : R_2/I_2 \to R_3/I_3$，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
R_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_1"'] & R_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q_2"'] & R_3 \arrow[d, "q_3"] \\
R_1/I_1 \arrow[r, "\bar{f}"'] & R_2/I_2 \arrow[r, "\bar{g}"'] & R_3/I_3
\end{tikzcd}$$

Proof：$\because R_1$ 和 R_2 是环，$f: R_1 \to R_2$ 是环同态，

I_1 是环 R_1 的理想，I_2 是环 R_2 的理想，$f(I_1) \subseteq I_2$，

$q_1 : R_1 \to R_1/I_1$ 是商同态，$q_2 : R_2 \to R_2/I_2$ 是商同态

$\therefore$ 存在唯一的环同态 $\bar{f} : R_1/I_1 \to R_2/I_2$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
R_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_1"'] & R_2 \arrow[d, "q_2"] \\
R_1/I_1 \arrow[r, "\bar{f}"'] & R_2/I_2
\end{tikzcd}$$

$\because R_2$ 和 R_3 是环，$g: R_2 \to R_3$ 是环同态，

I_2 是环 R_2 的理想，I_3 是环 R_3 的理想，$g(I_2) \subseteq I_3$

$q_2 : R_2 \to R_2/I_2$ 是商同态，$q_3 : R_3 \to R_3/I_3$ 是商同态

∴存在唯一的环同态 $\bar{g}: R_2/I_2 \to R_3/I_3$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} R_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q_2"'] & R_3 \arrow[d, "q_3"] \\ R_2/I_2 \arrow[r, "\bar{g}"'] & R_3/I_3 \end{tikzcd}$$

∴存在唯一的一对环同态 $\bar{f}: R_1/I_1 \to R_2/I_2$，$\bar{g}: R_2/I_2 \to R_3/I_3$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_1"'] & R_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q_2"] & R_3 \arrow[d, "q_3"] \\ R_1/I_1 \arrow[r, "\bar{f}"'] & R_2/I_2 \arrow[r, "\bar{g}"'] & R_3/I_3 \end{tikzcd}$$

$\square$

Remark：∵ R_1 和 R_3 是环，$g\circ f: R_1 \to R_3$ 是环同态，

I_1 是环 R_1 的理想，I_3 是环 R_3 的理想，$(g\circ f)(I_1) \subseteq I_3$

$q_1: R_1 \to R_1/I_1$ 是商同态，$q_3: R_3 \to R_3/I_3$ 是商同态

∴ 存在唯一的环同态 $\overline{g\circ f}: R_1/I_1 \to R_3/I_3$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "q_1"'] & R_3 \arrow[d, "q_3"] \\ R_1/I_1 \arrow[r, "\overline{g\circ f}"'] & R_3/I_3 \end{tikzcd}$$

∴由唯一性知：$\overline{g\circ f} = \bar{g}\circ\bar{f}$ $\square$

Lemma：R是非零交换环，则有：

R是域 $\Leftrightarrow$ R没有$\{0_R\}$和R之外的理想

Proof：($\Rightarrow$)：设I是环R的一个任意的理想.

① 若$I=\{0_R\}$，则$I=\{0_R\}$. 此时I是R的零理想.

② 若$I\neq\{0_R\}$，则有：$\because$ R是环，I是R的理想 $\therefore 0_R\in I$

$\therefore \{0_R\}\subseteq I$ $\quad\because \{0_R\}\neq I$ $\quad\therefore \{0_R\}\subsetneq I$

$\therefore \exists x\in I$，s.t. $x\neq 0_R$

$\because x\in I$，$I\subseteq R$ $\quad\therefore x\in R$ $\quad\because x\neq 0_R$ $\quad\therefore x\in R\setminus\{0_R\}$

$\because$ R是域 $\quad\therefore$ R是交换除环 $\quad\therefore R^\times=R\setminus\{0_R\}$ $\quad\therefore x\in R^\times$

$\therefore \exists x^{-1}\in R$，s.t. $x^{-1}x=1_R=xx^{-1}$

$\because$ I是环R的理想，$x^{-1}\in R$ $\quad\therefore x^{-1}I\subseteq I$

$\therefore 1_R=x^{-1}x\in x^{-1}I\subseteq I$ $\quad\therefore 1_R\in I$ $\quad\therefore I=R$

$\therefore$ R没有$\{0_R\}$和R之外的理想.

20250816_( )

($\Leftarrow$)：$\because$ R是非零环 $\quad\therefore R^\times\subseteq R\setminus\{0_R\}$. （参3.5(3)笔记）

对$\forall x\in R\setminus\{0_R\}$，有：

$\because$ R是交换环，$x\in R$，$\quad\therefore (x)=xR=\{xr:r\in R\}$是R的理想，称为x确定的主理想

$\because x=x\cdot 1_R\in xR=(x)$ $\quad\therefore x\in(x)$ $\quad\because x\neq 0_R$ $\quad\therefore (x)\neq\{0_R\}$

$\because$ R没有$\{0_R\}$和R之外的理想，(x)是R的理想，$(x)\neq\{0_R\}$

$\therefore (x)=R$ $\quad\therefore 1_R\in R=(x)$ $\quad\therefore \exists \alpha\in R$，s.t. $1_R=x\alpha$

$\because$ R是交换环 $\quad\therefore 1_R=x\alpha=\alpha x$ $\quad\therefore$ x可逆. $x\in R^\times$

$\because R\setminus\{0_R\} \subseteq R^\times$ $\quad \therefore R^\times = R\setminus\{0_R\}$ $\quad \therefore R$是除环

$\because R$是交换除环 $\quad \therefore R$是域. $\quad \square$