# 直和

定义（向量空间的子空间的直和）$V$是域$\mathbb{F}$上的向量空间，$V_1,\cdots,V_m$是$V$的子空间，如果$V_1+\cdots+V_m$的所有元素表示成$v_1+\cdots+v_m$的方式唯一（其中$v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$），则称$V_1+\cdots+V_m$的和为直和，记作$V_1\oplus\cdots\oplus V_m$.

定理（子空间的和是直和的充要条件）$V$是域$\mathbb{F}$上的向量空间，$V_1,\cdots,V_m$是$V$的子空间，则有：$V_1+\cdots+V_m$是直和 $\Leftrightarrow$ $0$表示成$v_1+\cdots+v_m$的方式唯一（其中$v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$），即取

$$v_1=\cdots=v_m=0.$$

proof：($\Rightarrow$)：$\because V_1+\cdots+V_m$是直和

$\therefore V_1+\cdots+V_m$的所有元素表示成$v_1+\cdots+v_m$（其中$v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$）的方式唯一

$\because 0\in V_1+\cdots+V_m$ 且 $0=\underbrace{0+\cdots+0}_{m个0}$

$\therefore 0$表示成$v_1+\cdots+v_m$（其中$v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$）的方式唯一，为：$0=\underbrace{0+\cdots+0}_{m个0}$

($\Leftarrow$)：对$\forall v\in V_1+\cdots+V_m$. 设 $v=v_1+\cdots+v_m$（其中$v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$）

$v=u_1+\cdots+u_m$（其中$u_1\in V_1,\cdots,u_m\in V_m$）

则有：$0=v+(-v)=(v_1+\cdots+v_m)+(-(u_1+\cdots+u_m))=(v_1+\cdots+v_m)+((-u_1)+\cdots+(-u_m))$

$$=(v_1+(-u_1))+\cdots+(v_m+(-u_m))$$

其中$v_1+(-u_1)\in V_1,\cdots,v_m+(-u_m)\in V_m$

$\because 0$表示成$v_1+\cdots+v_m$（其中$v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$）的方式唯一，即取$v_1=\cdots=v_m=0$

$\therefore v_1+(-u_1)=\cdots=v_m+(-u_m)=0$

$\therefore u_1=v_1,\cdots,u_m=v_m$

$\therefore V_1+\cdots+V_m$中任意一个元素表示成$v_1+\cdots+v_m$（其中$v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$）的方式唯一

$\therefore V_1+\cdots+V_m$是直和 $\square$

定理（两个子空间的和是直和的充要条件）$V$是域$F$上的向量空间，$U$和$W$是$V$的子空间，则：

$$U+W\text{是直和} \Leftrightarrow U\cap W=\{0\}$$

$(\Rightarrow)$：$\because$ $U$和$W$是$V$的子空间 $\therefore$ $U+W$是$V$的子空间，$U\cap W$是$V$的子空间

对$\forall v\in U\cap W$，有：$-v\in U\cap W$ $\therefore$ $0=v+(-v)$，其中$v\in U$，$-v\in W$

$\because$ $U+W$是直和 $\therefore$ $0$表示成$u+w$（其中$u\in U$，$w\in W$）的表法唯一，即$0=0+0$

$\therefore$ $v=0$，$-v=0$ $\therefore$ $v=0$ $\therefore$ $U\cap W=\{0\}$

$(\Leftarrow)$：设$0=u+w$（其中$u\in U$，$w\in W$）

$\because$ $u+w=0$ $\therefore$ $w=-u$，$u=-w$

$\because$ $W$是$V$的子空间 $\therefore$ $u=-w\in W$ $\therefore$ $u\in U\cap W=\{0\}$ $\therefore$ $u=0$

$\because$ $U$是$V$的子空间 $\therefore$ $w=-u\in U$ $\therefore$ $w\in U\cap W=\{0\}$ $\therefore$ $w=0$

$\therefore$ $0$表示成$\alpha+\beta$（其中$\alpha\in U$，$\beta\in W$）的表法唯一，为$0=0+0$

$\therefore$ $U+W$是直和 $\square$

定理（子空间的和是直和的另一充要条件）$V$是域$F$上的向量空间，$V_1,\cdots,V_m$是$V$的子空间，

则有：$V_1+\cdots+V_m$是直和 $\Leftrightarrow$ $V_1+\cdots+V_m$中有一个向量$\alpha$可以唯一地表示成$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$，

其中$\alpha_1\in V_1,\cdots,\alpha_m\in V_m$

proof：$(\Rightarrow)$：$\because$ $V_1+\cdots+V_m$是直和

$\therefore$ $V_1+\cdots+V_m$的所有元素表示成$v_1+\cdots+v_m$的方式唯一（其中$v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$）

$\therefore$ 结论显然成立.

$(\Leftarrow)$：$0\in V_1+\cdots+V_m$

设$0=\gamma_1+\cdots+\gamma_m$（其中$\gamma_1\in V_1,\cdots,\gamma_m\in V_m$），$0=\delta_1+\cdots+\delta_m$（其中$\delta_1\in V_1,\cdots,\delta_m\in V_m$）

$\therefore$ $\alpha=\alpha+0=(\alpha_1+\cdots+\alpha_m)+(\gamma_1+\cdots+\gamma_m)=(\alpha_1+\gamma_1)+\cdots+(\alpha_m+\gamma_m)$

其中$\alpha_1+\gamma_1\in V_1,\cdots,\alpha_m+\gamma_m\in V_m$

$\alpha=\alpha+0=(\alpha_1+\cdots+\alpha_m)+(\delta_1+\cdots+\delta_m)=(\alpha_1+\delta_1)+\cdots+(\alpha_m+\delta_m)$

其中$\alpha_1+\delta_1\in V_1,\cdots,\alpha_m+\delta_m\in V_m$

$\because \alpha$ 可以唯一地表示成 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$（其中 $\alpha_1\in V_1,\cdots,\alpha_m\in V_m$）

$\therefore \alpha_1+\gamma_1=\alpha_1=\alpha_1+\delta_1$，$\cdots$，$\alpha_m+\gamma_m=\alpha_m=\alpha_m+\delta_m$

$\therefore \gamma_1=0+\gamma_1=((-\alpha_1)+\alpha_1)+\gamma_1=(-\alpha_1)+(\alpha_1+\gamma_1)=(-\alpha_1)+\alpha_1=0$

$\delta_1=0+\delta_1=((-\alpha_1)+\alpha_1)+\delta_1=(-\alpha_1)+(\alpha_1+\delta_1)=(-\alpha_1)+\alpha_1=0$

$\gamma_1=\delta_1=0$

$\cdots$

$\gamma_m=0+\gamma_m=((-\alpha_m)+\alpha_m)+\gamma_m=(-\alpha_m)+(\alpha_m+\gamma_m)=(-\alpha_m)+\alpha_m=0$

$\delta_m=0+\delta_m=((-\alpha_m)+\alpha_m)+\delta_m=(-\alpha_m)+(\alpha_m+\delta_m)=(-\alpha_m)+\alpha_m=0$

$\gamma_m=\delta_m=0$

$\therefore 0$ 表示成 $v_1+\cdots+v_m$（其中 $v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$）的表法唯一，为：$0=\underbrace{0+\cdots+0}_{m个0}$.

$\therefore V_1+\cdots+V_m$ 是直和 $\square$

定理（用子空间的交来刻画直和）$V$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，$V_1,\cdots,V_m$ 是 $V$ 的子空间，则有：

$$V_1+\cdots+V_m \text{ 是直和} \Leftrightarrow V_i\cap\left(\sum_{j\neq i}V_j\right)=\{0\},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

proof：($\Rightarrow$)：对 $\forall\, i\in\{1,2,\cdots,m\}$.

任取 $\alpha\in V_i\cap\left(\sum_{j\neq i}V_j\right)$，有：$\alpha\in V_i$ 且 $\alpha\in\sum_{j\neq i}V_j$

$\because V_i$ 是 $V$ 的子空间，$\sum_{j\neq i}V_j$ 是 $V$ 的子空间 $\quad\therefore -\alpha\in V_i$ 且 $-\alpha\in\sum_{j\neq i}V_j$

$\because \alpha\in\sum_{j\neq i}V_j \quad\therefore$ 设 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_m$（其中 $\alpha_1\in V_1,\cdots,\alpha_{i-1}\in V_{i-1},\alpha_{i+1}\in V_{i+1},\cdots,\alpha_m\in V_m$）

$\therefore 0=(-\alpha)+\alpha=(-\alpha)+(\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_m)$

$=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+(-\alpha)+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_m$

（其中 $\alpha_1\in V_1,\cdots,\alpha_{i-1}\in V_{i-1}$，$-\alpha\in V_i$，$\alpha_{i+1}\in V_{i+1},\cdots,\alpha_m\in V_m$）

$\because V_1+\cdots+V_m$ 是直和 $\quad\therefore 0$ 表示成 $v_1+\cdots+v_m$（其中 $v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m$）的表法唯一，

为 $0=\underbrace{0+\cdots+0}_{m个0}$ $\quad\therefore \alpha_1=0,\cdots,\alpha_{i-1}=0$，$-\alpha=0$，$\alpha_{i+1}=0,\cdots,\alpha_m=0$

$\therefore \alpha=0 \quad\therefore V_i\cap\left(\sum_{j\neq i}V_j\right)=\{0\}$，$i=1,2,\cdots,m$

$(\Leftarrow)$: $\because V_1, \cdots, V_m$ 是 $V$ 的子空间 $\therefore V_1 + \cdots + V_m$ 是 $V$ 的子空间 $\therefore 0 \in V_1 + \cdots + V_m$

设 $0 = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ (其中 $\gamma_1 \in V_1, \cdots, \gamma_m \in V_m$)

$0 = \delta_1 + \cdots + \delta_m$ (其中 $\delta_1 \in V_1, \cdots, \delta_m \in V_m$)

对 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 有:

$\gamma_i = (-\gamma_1) + \cdots + (-\gamma_{i-1}) + (-\gamma_{i+1}) + \cdots + (-\gamma_m) \in \sum_{j \neq i} V_j$, $\gamma_i \in V_i$

$\therefore \gamma_i \in V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j\right) = \{0\}$ $\therefore \gamma_i = 0$

$\delta_i = (-\delta_1) + \cdots + (-\delta_{i-1}) + (-\delta_{i+1}) + \cdots + (-\delta_m) \in \sum_{j \neq i} V_j$, $\delta_i \in V_i$

$\therefore \delta_i \in V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j\right) = \{0\}$ $\therefore \delta_i = 0$

$\therefore 0$ 表示成 $v_1 + \cdots + v_m$ (其中 $v_1 \in V_1, \cdots, v_m \in V_m$) 的表法唯一, 为 $0 = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{m个0}$.

$\therefore V_1 + \cdots + V_m$ 是直和 $\square$