LADR 1C 习题 (2)

P25 19题，23题(P26)

证明或举一反例：V是域$\mathbb{F}$上的向量空间，V_1，V_2，U是V的子空间，且有：

$V_1+U=V_2+U$，则有：$V_1=V_2$

解：举一反例如下：$V=\mathbb{F}^2$，$V_1=\{(x,0)\in\mathbb{F}^2 : x\in\mathbb{F}\}$，$V_2=\{(x,2x)\in\mathbb{F}^2 : x\in\mathbb{F}\}$

$U=\{(0,x)\in\mathbb{F}^2 : x\in\mathbb{F}\}$.

显然：V_1和U都是V的子空间.

$(0,0)\in V_2$. 对$\forall$ $(x,2x)$，$(y,2y)\in V_2$ (其中 $x,y\in\mathbb{F}$)，有：

$(x,2x)+(y,2y)=(x+y,2x+2y)=(x+y,2(x+y))\in V_2$.

对$\forall k\in\mathbb{F}$，$\forall$ $(x,2x)\in V_2$，有：$k(x,2x)=(kx,k(2x))=(kx,(k2)x)=(kx,(2k)x)$

$=(kx,2(kx))\in V_2$ $\therefore$ V_2是V的子空间

$\therefore$ V_1，V_2，U都是V的子空间.

已证 $V=V_1\oplus U$，显然 $V_2+U\subseteq V$.

对$\forall$ $(x,y)\in V$ (其中 $x,y\in\mathbb{F}$)，有：$\because x\in\mathbb{F}$ $\therefore 2x=x+x\in\mathbb{F}$ $\therefore -2x\in\mathbb{F}$

$\therefore$ $y-2x=y+(-2x)\in\mathbb{F}$

$\therefore$ $(x,2x)\in V_2$，$(0,y-2x)\in U$

$\therefore$ $(x,2x)+(0,y-2x)=(x,2x+y-2x)=(x,2x+y+(-2x))=(x,y)$

$\therefore$ $(x,y)=(x,2x)+(0,y-2x)\in V_2+U$ $\therefore V\subseteq V_2+U$ $\therefore V=V_2+U$

$\therefore$ $V_1+U=V=V_2+U$ 但显然 $V_1\neq V_2$.

对$\forall(\alpha,\beta)\in V_2\cap U$，$\because(\alpha,\beta)\in U$ $\therefore \alpha=0$ $\because(\alpha,\beta)\in V_2$ 且

$\therefore \beta=2\alpha=\alpha+\alpha=0+0=0$ $\therefore(\alpha,\beta)=(0,0)$ $\therefore V_2\cap U=\{(0,0)\}$

$\therefore V_2+U$是直和 $\therefore V=V_2\oplus U$ $\therefore V_1\oplus U=V=V_2\oplus U$

但$V_1\neq V_2$.

P25 20题

$\mathbb{F}$是域，$U=\{(x,x,y,y)\in\mathbb{F}^4 : x,y\in\mathbb{F}\}$，求$\mathbb{F}^4$的一个子空间$W$，s.t. $\mathbb{F}^4=U\oplus W$

解：$W_1=\{(x,0,y,0)\in\mathbb{F}^4 : x,y\in\mathbb{F}\}$，$W_2=\{(0,x,0,y)\in\mathbb{F}^4 : x,y\in\mathbb{F}\}$.

显然W_1和W_2都是$\mathbb{F}^4$的子空间. $\therefore U+W_1\subseteq\mathbb{F}^4$，$U+W_2\subseteq\mathbb{F}^4$.

对$\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{F}^4$（其中$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{F}$）

$\because(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(\beta,\beta,\delta,\delta)+(\alpha-\beta,0,\gamma-\delta,0)\in U+W_1$

$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(\alpha,\alpha,\gamma,\gamma)+(0,\beta-\alpha,0,\delta-\gamma)\in U+W_2$

$\therefore \mathbb{F}^4\subseteq U+W_1$，$\mathbb{F}^4\subseteq U+W_2$ $\therefore \mathbb{F}^4=U+W_1$，$\mathbb{F}^4=U+W_2$.

对$\forall(a,b,c,d)\in U\cap W_1$，有：$\because(a,b,c,d)\in W_1$ $\therefore b=d=0$

$\because(a,b,c,d)\in U$ $\therefore a=b=0$，$c=d=0$ $\therefore(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$

$\therefore U\cap W_1=\{0\}$ 同理可证$U\cap W_2=\{0\}$.

$\therefore \mathbb{F}^4=U\oplus W_1$，$\mathbb{F}^4=U\oplus W_2$. $\square$

Remark：求有限维向量空间的子空间的补空间，需要取子空间的基，扩充成原空间的基.

Ξ_{qm} P26 24题

Lemma（任意函数分解为奇函数与偶函数的和）. $\mathbb{R}$是实数域. 定义

$$V_{even}=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\mid 对\forall x\in\mathbb{R}, 有: f(-x)=f(x)\}$$

$$V_{odd}=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\mid 对\forall x\in\mathbb{R}, 有: f(-x)=-f(x)\}$$

则有: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=V_{even}\oplus V_{odd}$.

Proof: $\mathbb{R}$是$\mathbb{R}$上的向量空间, $\mathbb{R}$是一个非空集合, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$是从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的所有映射组成的集合.

之前已经证明了: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$是$\mathbb{R}$上的向量空间. 显然 $V_{even}\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $V_{odd}\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$0:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有: $0(-x)=0=0(x)$. $\therefore 0\in V_{even}$

$x\longmapsto 0$. 对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有: $0(-x)=0=-0(x)$ $\therefore 0\in V_{odd}$

对$\forall f,g\in V_{even}$, 有: $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\therefore f+g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有: $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$ $\therefore f+g\in V_{even}$

对$\forall k\in\mathbb{R}$, $\forall f\in V_{even}$, 有: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\therefore kf\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有: $(kf)(-x)=kf(-x)=kf(x)=(kf)(x)$ $\therefore kf\in V_{even}$

$\therefore V_{even}$是$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$的子空间.

对$\forall f,g\in V_{odd}$, 有: $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\therefore f+g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有: $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=(-f(x))+(-g(x))=-(f(x)+g(x))$

$=-(f+g)(x)$ $\therefore f+g\in V_{odd}$.

对$\forall k\in\mathbb{R}$, $\forall f\in V_{odd}$, 有: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\therefore kf\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有: $(kf)(-x)=kf(-x)=k(-f(x))=k((-1)f(x))=(k(-1))f(x)=((-1)k)f(x)$

$= (-1)(kf(x)) = (-1)(kf)(x) = -(kf)(x)$ $\therefore kf \in V_{odd}$

$\therefore V_{odd}$ 是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 的子空间. $\therefore V_{even} + V_{odd} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

对 $\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$，令 $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ $\quad x \longmapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

对 $\forall x \in \mathbb{R}$，$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一个唯一确定的元 $\therefore g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

对 $\forall x \in \mathbb{R}$，$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一个唯一确定的元 $\therefore h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\therefore g+h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

对 $\forall x \in \mathbb{R}$，有：$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$ $\therefore g \in V_{even}$

对 $\forall x \in \mathbb{R}$，有：$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$ $\therefore h \in V_{odd}$

$\because$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$，有：$(g+h)(x) = g(x)+h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$

$\therefore g+h = f$ $\therefore f = g+h \in V_{even} + V_{odd}$ $\therefore \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subseteq V_{even} + V_{odd}$

$\therefore \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = V_{even} + V_{odd}$

对 $\forall f \in V_{even} \cap V_{odd}$，有：$f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

对 $\forall x \in \mathbb{R}$. $\because f \in V_{even}$ $\therefore f(-x) = f(x)$ $\because f \in V_{odd}$ $\therefore f(-x) = -f(x)$

$\therefore f(x) = f(-x) = -f(x)$ $\therefore 2f(x) = 0$ $\therefore f(x) = 0$ $\therefore f = 0$ (0 是零映射)

$\therefore V_{even} \cap V_{odd} = \{0\}$ $\therefore \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = V_{even} \oplus V_{odd}$ $\square$