2B 习题（理论部分）

Lemma：V是域$\mathbb{F}$上的有限维向量空间，U和W是V的子空间，$V=U+W$，

则有：V有一个由 $U\cup W$ 中的向量组成的基.

proof：$\because$ V是域$\mathbb{F}$上的有限维向量空间　$\therefore$ V有一个基

设 $v_1,\cdots,v_n\in V$ 是V的一个基　$\therefore$ 向量组 $v_1,\cdots,v_n$ 线性无关且 $V=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_n)$

对$\forall$ $i=1,2,\cdots,n$，$\because$ $v_i\in V=U+W$　$\therefore$ $\exists$ $u_i\in U$，$w_i\in W$，s.t. $v_i=u_i+w_i$

对$\forall\alpha\in V$，$\exists$ $k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{F}$，s.t.

$$\begin{aligned}\alpha&=k_1v_1+\cdots+k_nv_n=k_1(u_1+w_1)+\cdots+k_n(u_n+w_n)\\&=(k_1u_1+k_1w_1)+\cdots+(k_nu_n+k_nw_n)\\&=(k_1u_1+\cdots+k_nu_n)+(k_1w_1+\cdots+k_nw_n)\\&=k_1u_1+\cdots+k_nu_n+k_1w_1+\cdots+k_nw_n\end{aligned}$$

$\therefore$ $\alpha\in\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_n,w_1,\cdots,w_n)$　$\therefore$ $V\subseteq\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_n,w_1,\cdots,w_n)$

$\because$ $u_1,\cdots,u_n\in U\subseteq V$，$w_1,\cdots,w_n\in W\subseteq V$　$\therefore$ $\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_n,w_1,\cdots,w_n)\subseteq V$

$\therefore$ $V=\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_n,w_1,\cdots,w_n)$　且 $u_1,\cdots,u_n,w_1,\cdots,w_n\in U\cup W$

$\therefore$ 向量组 $u_1,\cdots,u_n,w_1,\cdots,w_n$ 中包含V的一个基，这个基包含于 $U\cup W$　$\square$

Lemma：V是域$\mathbb{F}$上的向量空间，U和W是V的子空间，$V=U\oplus W$，

$u_1,\cdots,u_m\in U$是U的一个基，$w_1,\cdots,w_n\in W$是W的一个基. 则有：

向量组 $u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n$ 是V的一个基

proof：对$\forall\alpha\in V$，有：$\alpha\in V=U\oplus W$　$\therefore$ $\exists$ $\beta\in U$，$\gamma\in W$，s.t.

$\alpha=\beta+\gamma$

$\because$ $\beta\in U=\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_m)$　$\therefore$ $\exists$ $p_1,\cdots,p_m\in\mathbb{F}$，s.t. $\beta=p_1u_1+\cdots+p_mu_m$

$\because$ $\gamma\in W=\operatorname{span}(w_1,\cdots,w_n)$　$\therefore$ $\exists$ $q_1,\cdots,q_n\in\mathbb{F}$，s.t. $\gamma=q_1w_1+\cdots+q_nw_n$

$\therefore \alpha=\beta+\gamma=(p_1u_1+\cdots+p_mu_m)+(q_1w_1+\cdots+q_nw_n)=p_1u_1+\cdots+p_mu_m+q_1w_1+\cdots+q_nw_n$

$\therefore \alpha\in \mathrm{span}(u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n)$ $\qquad\therefore V\subseteq \mathrm{span}(u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n)$

$\because u_1,\cdots,u_m\in U\subseteq V$, $w_1,\cdots,w_n\in W\subseteq V$ $\qquad\therefore \mathrm{span}(u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n)\subseteq V$

$\therefore V=\mathrm{span}(u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n)$

任取$k_1,\cdots,k_m,l_1,\cdots,l_n\in\mathbb{F}$，满足$k_1u_1+\cdots+k_mu_m+l_1w_1+\cdots+l_nw_n=0$，有：

$$k_1u_1+\cdots+k_mu_m=-(l_1w_1+\cdots+l_nw_n)=(-l_1w_1)+\cdots+(-l_nw_n)$$
$$=(-l_1)w_1+\cdots+(-l_n)w_n\in U\cap W=\{0\}$$

$\because$ 向量组$u_1,\cdots,u_m$线性无关 $\qquad\therefore k_1=\cdots=k_m=0$

$\because$ 向量组$w_1,\cdots,w_n$线性无关 $\qquad\therefore -l_1=\cdots=-l_n=0$ $\qquad\therefore l_1=\cdots=l_n=0$

$\therefore k_1=\cdots=k_m=l_1=\cdots=l_n=0$

$\therefore$ 向量组$u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n$线性无关

$\therefore$ 向量组$u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n$是$V$的一个基 $\qquad\square$