LADR 3A 线性映射(1)

定义(线性映射) V和W是域$\mathbb{F}$上的向量空间, $T: V\to W$是一个映射. 如果映射T满足

可加性: 对$\forall u,v\in V$, 有: $T(u+v)=Tu+Tv$

齐性: 对$\forall \lambda\in\mathbb{F}$, $\forall v\in V$, 有: $T(\lambda v)=\lambda(Tv)$

则称 $T: V\to W$ 是从V到W的线性映射.

Remark: Tv 也可写为 $T(v)$.

定义($\mathcal{L}(V,W)$, $\mathcal{L}(V)$) V和W是域$\mathbb{F}$上的向量空间, 则:

从V到W的全体线性映射组成的集合记作$\mathcal{L}(V,W)$

从V到V的全体线性映射组成的集合记作$\mathcal{L}(V)$, 即: $\mathcal{L}(V)=\mathcal{L}(V,V)$

Lemma ($\mathcal{L}(V,W)$非空) V和W是域$\mathbb{F}$上的向量空间, 则一定存在从V到W的线性映射.

proof: 定义 $T: V\to W$, $v\mapsto 0$, 则T是从V到W的映射.

对$\forall u,v\in V$, 有: $T(u+v)=0=0+0=Tu+Tv$

对$\forall\lambda\in\mathbb{F}$, $\forall v\in V$, 有: $T(\lambda v)=0=\lambda 0=\lambda(Tv)$

$\therefore$ $T: V\to W$, $v\mapsto 0$ 是从V到W的线性映射, 称为零映射, 记作$0\in\mathcal{L}(V,W)$

$\therefore$ $\mathcal{L}(V,W)$中一定有零映射, $0\in\mathcal{L}(V,W)$, $\mathcal{L}(V,W)\neq\emptyset$ $\square$

Lemma（恒等映射是线性映射）V是域$\mathbb{F}$上的向量空间，定义V到自身的恒等映射为：
$$id_V: V \longrightarrow V,\quad v \longmapsto v$$
则有：$id_V \in \mathcal{L}(V)$

proof: $id_V: V \longrightarrow V$ 是V到自身的映射.
$$v \longmapsto v$$

对$\forall u, v \in V$，有：$id_V(u+v) = u+v = id_V(u) + id_V(v)$

对$\forall \lambda \in \mathbb{F}$，$\forall x \in V$，有：$id_V(\lambda x) = \lambda x = \lambda\, id_V(x)$

$\therefore id_V: V \longrightarrow V$ 是V到自身的线性映射.　$id_V \in \mathcal{L}(V)$　$\square$
$$v \longmapsto v$$

Lemma（线性映射引理）V是域$\mathbb{F}$上的n维向量空间（$n \in \mathbb{N}_+$），W是域$\mathbb{F}$上的向量空间，$v_1, \cdots, v_n \in V$是V的一个基，$\forall w_1, \cdots, w_n \in W$，则存在唯一的线性映射 $T: V \to W$ 满足：~~对$k=1,2,\cdots$~~
$$Tv_1 = w_1, \cdots, Tv_n = w_n$$

proof: $\because \dim V = n$，$v_1, \cdots, v_n$是V的一个基

$\therefore$ 对$\forall x \in V$，$\exists$唯一的一组数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$，s.t. $x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

$\therefore$ 定义映射 $T: V \longrightarrow W$
$$x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \longmapsto a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$$

$\because$ 对$\forall x \in V$，$\exists$唯一的一组数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$，s.t. $x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

$\therefore Tx = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n \in W$ $\therefore Tx$是W中一个确定的元素

$\therefore T: V \to W$ 是一个映射.

对 $\forall x, y \in V$. $\exists$唯一的一组数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$, s.t. $x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.

$\exists$唯一的一组数 $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, s.t. $y = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$

$$\therefore x+y = (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n)$$
$$= (a_1 + b_1) v_1 + \cdots + (a_n + b_n) v_n$$

$$\therefore T(x+y) = T\big((a_1+b_1)v_1 + \cdots + (a_n+b_n)v_n\big) = (a_1+b_1)w_1 + \cdots + (a_n+b_n)w_n$$
$$= a_1 w_1 + b_1 w_1 + \cdots + a_n w_n + b_n w_n = (a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n) + (b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n)$$
$$= T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) + T(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n)$$
$$= T(x) + T(y)$$

对 $\forall \lambda \in \mathbb{F}$, $\forall x \in V$,

$\because x \in V$ $\therefore \exists$唯一的一组数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$, s.t. $x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

$$\therefore \lambda x = \lambda(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = \lambda(a_1 v_1) + \cdots + \lambda(a_n v_n) = (\lambda a_1) v_1 + \cdots + (\lambda a_n) v_n$$

$$\therefore T(\lambda x) = T\big((\lambda a_1) v_1 + \cdots + (\lambda a_n) v_n\big) = (\lambda a_1) w_1 + \cdots + (\lambda a_n) w_n$$
$$= \lambda(a_1 w_1) + \cdots + \lambda(a_n w_n) = \lambda(a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n)$$
$$= \lambda T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = \lambda T(x)$$

$\therefore T: V \to W$ 是一个线性映射.

$$T(v_1) = T(1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n) = 1w_1 + 0w_2 + \cdots + 0w_n = w_1$$

$$T(v_2) = T(0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n) = 0w_1 + 1w_2 + 0w_3 + \cdots + 0w_n = w_2$$

……

$$T(v_n) = T(0v_1 + \cdots + 0v_{n-1} + 1v_n) = 0w_1 + \cdots + 0w_{n-1} + 1w_n = w_n$$

$\therefore$ 存在性得证.

如果还有一个线性映射 $H: V \to W$ 满足 $H(v_1)=w_1, \cdots, H(v_n)=w_n$，则有：

对 $\forall x \in V$，$\exists$唯一的一组数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$，s.t. $x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

$$\therefore T(x) = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$$

映射T的定义

$$H(x) = H(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = H(a_1 v_1) + \cdots + H(a_n v_n)$$

线性映射H的可加性

$$= a_1 H(v_1) + \cdots + a_n H(v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = T(x)$$

线性映射H的齐性

$\therefore$ 对 $\forall x \in V$，有：$H(x) = T(x)$

$\therefore$ $H: V \to W$ 与 $T: V \to W$ 是同一个映射.

$\therefore$ 唯一性得证！ $\square$