集合 对称差的几个小结论.

Lemma: $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

proof: 对 $\forall x\in$ 左边, 有: $x\in A\setminus B$ 或 $x\in B\setminus A$

① 若 $x\in A\setminus B$. 则 $x\in A$ 且 $x\notin B$ $\therefore x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B$ $\therefore x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

② 若 $x\in B\setminus A$. 则 $x\in B$ 且 $x\notin A$. $\therefore x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B$ $\therefore x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$\therefore x\in$ 右边. $\therefore$ 左边 $\subseteq$ 右边.

对 $\forall x\in$ 右边, 有: $x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B$ $\therefore(x\in A$ 或 $x\in B)$ 且 $x\notin A\cap B$.

① 若 $x\in A$ 且 $x\notin A\cap B$. 则 $x\in A$ 且 $x\notin B$ (假设 $x\in B$. 则 $x\in A\cap B$. 矛盾). $\therefore x\in A\setminus B$.
$\therefore x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

② 若 $x\in B$ 且 $x\notin A\cap B$, 则 $x\in B$ 且 $x\notin A$ (假设 $x\in A$, 则 $x\in A\cap B$, 矛盾) $\therefore x\in B\setminus A$.
$\therefore x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

$\therefore x\in$ 左边. $\therefore$ 右边 $\subseteq$ 左边. $\therefore$ 左边 $=$ 右边. $\square$

定义 $A\triangle B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 或 $A\triangle B:=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

所以我们有如下结论:
$x\in A\triangle B \iff x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B$.
$x\notin A\triangle B \iff x\notin A\cup B$ 或 $x\in A\cap B$.
$x\in A\triangle B \iff x\in A\setminus B$ 或 $x\in B\setminus A$.

~~Lemma: A~~

还有已知的结论:
$x\in A\cup B \iff x\in A$ 或 $x\in B$.
$x\notin A\cup B \iff x\notin A$ 且 $x\notin B$

接下来证明中的关键!

接下来我们证明对称差运算满足结合律.

Lemma: $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

proof: 思路仍然是双包含. 要分8种情况讨论.

对 $\forall x\in$ 左边, 有: $x\in(A\Delta B)\setminus C$ 或 ~~$x\in(B\Delta C)$~~ $x\in C\setminus(A\Delta B)$

(i). 若 $x\in(A\Delta B)\setminus C$, 则 $x\in A\Delta B$ 且 $x\notin C$. $\therefore (x\in A\setminus B$ 或 $x\in B\setminus A)$ 且 $x\notin C$.

① 若 $x\in A\setminus B$ 且 $x\notin C$. 则 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 且 $x\notin C$. $\therefore x\notin B\cup C$ $\therefore x\notin B\Delta C$.

$\therefore x\in A\setminus(B\Delta C)$ $\therefore x\in A\Delta(B\Delta C)$

② 若 $x\in B\setminus A$ 且 $x\notin C$. 则 $x\notin A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin C$. $\therefore x\in B\setminus C$. $\therefore x\in B\Delta C$.

$\therefore x\in(B\Delta C)\setminus A$ $\therefore x\in A\Delta(B\Delta C)$

(ii) 若 $x\in C\setminus(A\Delta B)$, 则 $x\in C$ 且 $x\notin A\Delta B$. $\therefore x\in C$ 且 $(x\notin A\cup B$ 或 $x\in A\cap B)$

③ 若 $x\in C$ 且 $x\notin A\cup B$. 则 $x\in C$ 且 $x\notin A$ 且 $x\notin B$. $\therefore x\in C\setminus B$. $\therefore x\in B\Delta C$

$\therefore x\in(B\Delta C)\setminus A$. $\therefore x\in A\Delta(B\Delta C)$

④ 若 $x\in C$ 且 $x\in A\cap B$. 则 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\in C$ $\therefore x\in B\cap C$ $\therefore x\notin B\Delta C$

$\therefore x\in A\setminus(B\Delta C)$ $\therefore x\in A\Delta(B\Delta C)$

$\therefore x\in$ 右边. $\therefore$ 左边 $\subseteq$ 右边.

对 $\forall x\in$ 右边, 有: $x\in A\Delta(B\Delta C)$ $\therefore x\in A\setminus(B\Delta C)$ 或 $x\in(B\Delta C)\setminus A$.

(iii) 若 $x\in A\setminus(B\Delta C)$. 则 $x\in A$ 且 $x\notin B\Delta C$ $\therefore x\in A$ 且 $(x\notin B\cup C$ 或 $x\in B\cap C)$

⑤ 若 $x\in A$ 且 $x\notin B\cup C$, 则 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 且 $x\notin C$ $\therefore x\in A\setminus B$. $\therefore x\in A\Delta B$

$\therefore x\in(A\Delta B)\setminus C$. $\therefore x\in(A\Delta B)\Delta C$

⑥ 若 $x\in A$ 且 $x\in B\cap C$, 则 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\in C$ $\therefore x\in A\cap B$ $\therefore x\notin A\Delta B$

$\therefore x\in C\setminus(A\Delta B)$ $\therefore x\in(A\Delta B)\Delta C$

(iv) 若 $x\in(B\Delta C)\setminus A$. 则 $x\in B\Delta C$ 且 $x\notin A$. $\therefore (x\in B\setminus C$ 或 $x\in C\setminus B)$ 且 $x\notin A$

⑦ 若 $x\in B\setminus C$ 且 $x\notin A$, 则 $x\notin A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin C$ $\therefore x\in B\setminus A$ $\therefore x\in A\Delta B$.

$\therefore x\in(A\Delta B)\setminus C$. $\therefore x\in(A\Delta B)\Delta C$

⑧ 若 $x\in C\setminus B$ 且 $x\notin A$. 则 $x\in C$ 且 $x\notin B$ 且 $x\notin A$. $\therefore x\notin A\cup B$ $\therefore x\notin A\Delta B$

$\therefore x\in C\setminus(A\Delta B)$ $\therefore x\in(A\Delta B)\Delta C$

$\therefore x\in$ 左边. $\therefore$ 右边 $\subseteq$ 左边.

$\therefore$ 左边 $=$ 右边. $\therefore$ 对称差运算满足结合律.

Lemma: $A\cup B=(A\triangle B)\triangle(A\cap B)$.

proof: 对$\forall x\in$左边，有: $x\in A$或$x\in B$.

(i) 若$x\in A$. 此时又分两种情况:

① 若$x\in A$且$x\in B$. 则$x\in A\cap B$. $\therefore x\notin A\triangle B$ $\therefore x\in(A\cap B)\setminus(A\triangle B)$

$\therefore x\in(A\triangle B)\triangle(A\cap B)$

② 若$x\in A$且$x\notin B$. 则$x\in A\setminus B$. $\therefore x\in A\triangle B$. $\because x\notin A\cap B$ $\therefore x\in(A\triangle B)\setminus(A\cap B)$

$\therefore x\in(A\triangle B)\triangle(A\cap B)$

(ii). 若$x\in B$. 此时又分两种情况.

③ 若$x\in B$且$x\in A$. 则$x\in A\cap B$. $\therefore x\notin A\triangle B$. $\therefore x\in(A\cap B)\setminus(A\triangle B)$

$\therefore x\in(A\triangle B)\triangle(A\cap B)$

④ 若$x\in B$且$x\notin A$. 则$x\in B\setminus A$ $\therefore x\in A\triangle B$ $\because x\notin A\cap B$ $\therefore x\in(A\triangle B)\setminus(A\cap B)$

$\therefore x\in(A\triangle B)\triangle(A\cap B)$

$\therefore x\in$右边. $\therefore$左边$\subseteq$右边.

对$\forall x\in$右边，有: $x\in(A\triangle B)\setminus(A\cap B)$或$x\in(A\cap B)\setminus(A\triangle B)$

(iii). 若$x\in(A\triangle B)\setminus(A\cap B)$. 则: $x\in A\triangle B$且$x\notin A\cap B$ $\therefore x\in A\cup B$.

(iv). 若$x\in(A\cap B)\setminus(A\triangle B)$. 则: $x\in A\cap B$且$x\notin A\triangle B$ $\therefore x\in A\cap B\subseteq A\cup B$.

$\therefore x\in$左边 $\therefore$右边$\subseteq$左边.

$\therefore$左边$=$右边. $\square$

Lemma: $(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)=A\triangle C$

proof: 对$\forall x\in$左边. 有: $x\in(A\triangle B)\setminus(B\triangle C)$或$x\in(B\triangle C)\setminus(A\triangle B)$

(i) 若$x\in(A\triangle B)\setminus(B\triangle C)$. 则$x\in A\triangle B$且$x\notin B\triangle C$

$\therefore x\in A\cup B$且$x\notin A\cap B$且($x\notin B\cup C$或$x\in B\cap C$).

①. 若$x\in A\cup B$且$x\notin A\cap B$且$x\notin B\cup C$，则$x\notin B$且$x\notin C$且$x\in A$. $\therefore x\in A\setminus C$.

$\therefore x\in A\triangle C$

② 若$x\in A\cup B$且$x\notin A\cap B$且$x\in B\cap C$，则$x\in B$且$x\in C$且$x\notin A$ $\therefore x\in C\setminus A$.

$\therefore x\in A\triangle C$

(ii) 若$x\in(B\triangle C)\setminus(A\triangle B)$，则$x\in B\triangle C$且$x\notin A\triangle B$

$\therefore x\in B\cup C$且$x\notin B\cap C$且($x\notin A\cup B$或$x\in A\cap B$)

③ 若$x\in B\cup C$且$x\notin B\cap C$且$x\notin A\cup B$. 则$x\notin A$且$x\notin B$且$x\in C$. $\therefore x\in C\setminus A$.

$\therefore x\in A\triangle C$

④ 若 $x\in B\cup C$ 且 $x\notin B\cap C$ 且 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin C$ $\therefore x\in A\setminus C$.

$\therefore x\in A\triangle C$

$\therefore x\in$ 右边. $\therefore$ 左边 $\subseteq$ 右边.

对 $\forall x\in$ 右边，有：$x\in A\triangle C$ $\therefore x\in A\setminus C$ 或 $x\in C\setminus A$

(iii) 若 $x\in A\setminus C$. 则 $x\in A$ 且 $x\notin C$. 此时又分成两种情况.

⑤. $x\in A$ 且 $x\notin C$ 且 $x\in B$. 则 $x\in A\cap B$ 且 $x\in B\setminus C$.

$\therefore x\notin A\triangle B$ 且 $x\in B\triangle C$ $\therefore x\in (B\triangle C)\setminus(A\triangle B)$ $\therefore x\in (A\triangle B)\triangle(B\triangle C)$

⑥ $x\in A$ 且 $x\notin C$ 且 $x\notin B$ 则 $x\in A\setminus B$ 且 $x\notin B\cup C$

$\therefore x\in A\triangle B$ 且 $x\notin B\triangle C$ $\therefore x\in(A\triangle B)\setminus(B\triangle C)$ $\therefore x\in(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)$

(iv) 若 $x\in C\setminus A$. 则 $x\in C$ 且 $x\notin A$. 此时又分成两种情况

⑦. $x\in C$ 且 $x\notin A$ 且 $x\in B$ 则 $x\in B\setminus A$ 且 $x\in B\cap C$

$\therefore x\in A\triangle B$ 且 $x\notin B\triangle C$ $\therefore x\in(A\triangle B)\setminus(B\triangle C)$ $\therefore x\in(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)$

⑧ $x\in C$ 且 $x\notin A$ 且 $x\notin B$. 则 $x\notin A\cup B$ 且 $x\in C\setminus B$

$\therefore x\notin A\triangle B$ 且 $x\in B\triangle C$. $\therefore x\in(B\triangle C)\setminus(A\triangle B)$

$\therefore x\in(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)$

$\therefore x\in(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)$ $x\in$ 左边 $\therefore$ 右边 $\subseteq$ 左边.

$\therefore$ 左边 $=$ 右边. $\square$

Lemma: $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$ (分配律)

proof: 对 $\forall x\in$ 左边，有：$x\in A$ 且 $x\in B\triangle C$ $\therefore x\in A$ 且 ($x\in B\setminus C$ 或 $x\in C\setminus B$)

(i) 若 $x\in A$ 且 $x\in B\setminus C$. 则 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin C$. ~~$\therefore x\in A\setminus C$ 且 $x\in B\setminus C$ $\therefore x\in A\triangle C$ 且 $x\in B\triangle C$~~

~~$\therefore x\in(A\triangle C)\cap(B\triangle C)$~~ $\therefore x\in A\cap B$ 且 $x\notin A\cap C$ $\therefore x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$ $\therefore x\in(A\cap B)\triangle(A\cap C)$

(ii) 若 $x\in A$ 且 $x\in C\setminus B$. 则 $x\in A$ 且 $x\in C$ 且 $x\notin B$. $\therefore x\in A\cap C$ 且 $x\notin A\cap B$

$\therefore x\in(A\cap C)\setminus(A\cap B)$ $\therefore x\in(A\cap B)\triangle(A\cap C)$

$\therefore x\in$ 右边. $\therefore$ 左边 $\subseteq$ 右边.

对 $\forall x\in$ 右边，有：$x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$ 或 $x\in(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

(iii) 若 $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$ 且 $x\notin A\cap C$. $\therefore x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin C$.

$\therefore x\in A$ 且 $x\in B\setminus C$. $\therefore x\in A$ 且 $x\in B\triangle C$. $\therefore x\in A\cap(B\triangle C)$

(iv) 若 $x\in(A\cap C)\setminus(A\cap B)$，则 $x\in A\cap C$ 且 $x\notin A\cap B$. $\therefore x\in A$ 且 $x\in C$ 且 $x\notin B$. $\therefore x\in A$ 且 $x\in C\setminus B$.

$\therefore x\in A$ 且 $x\in B\triangle C$ $\therefore x\in A\cap(B\triangle C)$ $\therefore x\in$ 左边. $\therefore$ 右边 $\subseteq$ 左边. $\therefore$ 左边 $=$ 右边. $\square$