定义(非空数集的分划) 设S是一个有大小顺序的非空数集，A和B是S的两个子集，如果A和B满足以下条件:

(1) $A\neq\emptyset$ 且 $B\neq\emptyset$

(2) $A\cup B=S$

(3) 对$\forall a\in A$，$\forall b\in B$，都有$a<b$

(4) A中无最大数

则我们将A，B称为S的一个分划，记为$(A|B)$

定义(有理分划，无理分划) 对有理数域$\mathbb{Q}$的~~分割~~任意分划$(A|B)$，必有以下两种情形之一发生:

(1) B中存在最小数，此时称$(A|B)$是一个有理分划

(2) B中不存在最小数，此时称$(A|B)$是一个无理分划

定义(实数系) 有理数系$\mathbb{Q}$的所有分划构成的集合称为实数系，记为$\mathbb{R}$。我们称$\mathbb{R}$中的这些无理分划为无理数。

定理(Dedekind分割定理) 对实数系$\mathbb{R}$的任一分划$(A|B)$，B中必有最小数。

Remark: 之后找别的英文教材，仔细研究一下这个定理的证明。

定义(上界，下界，有界集) 设集合$E\subseteq\mathbb{R}$，并且$E\neq\emptyset$。如果存在$M\in\mathbb{R}$，使得对$\forall x\in E$，都有$x\leqslant M$，则称E是有上界的，并且说M是E的一个上界。

如果存在$m\in\mathbb{R}$，使得对$\forall x\in E$，有$x\geqslant m$，则称E是有下界的，并且说m是E的一个下界。

如果E既有上界又有下界，则称E是有界的。

Lemma：对$\forall E\subseteq\mathbb{R}$，有：

E是有界的 $\Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}_{>0}$，~~使~~使得对$\forall x\in E$，有：$|x|\leqslant M$

Proof：($\Rightarrow$)：$\because$ E是有界的 $\quad\therefore$ E既有上界又有下界

$\because$ E有上界 $\quad\therefore \exists M\in\mathbb{R}$，对$\forall x\in E$，有：$x\leqslant M$

$\because$ E有下界 $\quad\therefore \exists m\in\mathbb{R}$，对$\forall x\in E$，有：$x\geqslant m$

任取$\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$，s.t. $\lambda>\max\{|M|+1, |m|+1\}$.

对$\forall x\in E$，有：$x\leqslant M\leqslant|M|<|M|+1<\lambda$

$$x\geqslant m\geqslant-|m|>-|m|-1>-\lambda$$

$\therefore -\lambda<x<\lambda \quad\therefore |x|<\lambda$

($\Leftarrow$)：$\because$对$\forall x\in E$，有：$x\leqslant|x|\leqslant M$ $\quad\therefore$ E是有上界的.

$\because$对$\forall x\in E$，有：$x\geqslant-|x|\geqslant-M$ $\quad\therefore$ E是有下界的

$\therefore$ E是有界的. $\square$

定义（上确界，下确界）设$E\subseteq\mathbb{R}$为一个非空数集.

若$\exists M\in\mathbb{R}$满足：

(1) M是E的一个上界，即对$\forall x\in E$，有$x\leqslant M$

(2) 对$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$\exists x'\in E$，s.t. $x'>M-\varepsilon$

则称M为E的上确界，记为$M=\sup E=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$

若$\exists m\in\mathbb{R}$满足：

(1) m是E的一个下界，即对$\forall x\in E$，有$x\geqslant m$

(2) 对$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$\exists x'\in E$，s.t. $x'<m+\varepsilon$

则称m为E的下确界，记为$m=\inf E=\inf\limits_{x\in E}\{x\}$

定理(确界存在定理)有上界的非空数集必有属于$\mathbb{R}$的最小上界,即有有限的上确界.

有下界的非空数集必有属于$\mathbb{R}$的最大下界,即有有限的下确界.

Proof: 设$E\subseteq\mathbb{R}$且$E\neq\emptyset$,E有上界.

若E中存在最大的数$\max E$(即$\max E\in\mathbb{R}$,$\max E\in E$,对$\forall x\in E$,都有$x\leqslant\max E$),则$\sup E=\max E\in\mathbb{R}$

若E中不存在最大的数,则有:

令$B=\{x\in\mathbb{R}\mid x\text{是E的上界}\}$,$A=\mathbb{R}\setminus B$,则有:

$A\subseteq\mathbb{R}$,$B\subseteq\mathbb{R}$.

$\because$ E有上界 $\quad\therefore B\neq\emptyset$

$\because E\neq\emptyset \quad \therefore \exists\,\alpha\in E \quad \therefore \alpha\in\mathbb{R} \quad \therefore \alpha-1\in\mathbb{R}$ $\quad\because \alpha-1$不是E的上界

$\therefore \alpha-1\notin B \quad \therefore \alpha-1\in\mathbb{R}\setminus B=A \quad \therefore A\neq\emptyset$

$\because A\subseteq\mathbb{R}, B\subseteq\mathbb{R} \quad \therefore A\cup B\subseteq\mathbb{R}$

对$\forall x\in\mathbb{R}$,若$x\in B$,则$x\in B\subseteq A\cup B$. 若$x\notin B$,则$x\in\mathbb{R}\setminus B=A\subseteq A\cup B$

$\therefore \mathbb{R}\subseteq A\cup B \quad \therefore A\cup B=\mathbb{R}$

对$\forall a\in A$,$\forall b\in B$,有: $\because a\in A=\mathbb{R}\setminus B \quad \therefore a\in\mathbb{R}$且$a\notin B$

$\therefore a$不是E的上界. $\quad\therefore \exists\,\beta\in E$, s.t. $\beta>a$

$\because b\in B \quad \therefore b\in\mathbb{R}$且$b$是E的上界 $\quad\therefore \beta\leqslant b \quad \therefore a<\beta\leqslant b$

假设A中有最大数. 设γ是A中的最大数. $\quad\therefore \gamma\in A=\mathbb{R}\setminus B$

$\therefore \gamma\in\mathbb{R}$且$\gamma\notin B \quad \therefore \gamma$不是E的上界. $\quad\therefore \exists\,\delta\in E$, s.t. $\delta>\gamma$

$\because \delta\in E \quad \therefore \delta\in\mathbb{R} \quad \therefore \frac{\gamma+\delta}{2}\in\mathbb{R}$

$\because \delta\in E$且$\delta>\frac{\gamma+\delta}{2} \quad \therefore \frac{\gamma+\delta}{2}$不是E的上界 $\quad\therefore \frac{\gamma+\delta}{2}\notin B$

$\therefore \frac{\gamma+\delta}{2} \in \mathbb{R}\setminus B = A$ $\quad\because \frac{\gamma+\delta}{2} > \gamma$ $\quad\therefore \gamma$不是A中的最大数

$\therefore$矛盾. $\quad\therefore$ A中无最大数.

$\therefore$ A, B是$\mathbb{R}$的一个分划，记为$(A|B)$

$\therefore$由Dedekind分割定理，B中必有最小数. 设ζ是B中的最小数.

$\therefore \zeta \in \mathbb{R}$ 且 ζ是E的上界

对$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\zeta-\varepsilon \in \mathbb{R}$ 且 $\zeta-\varepsilon < \zeta$ $\quad\therefore \zeta-\varepsilon \notin B$

$\therefore \zeta-\varepsilon$不是E的上界

$\therefore \exists x' \in E$, s.t. $x' > \zeta-\varepsilon$

$\therefore \zeta$是E的上确界，$\sup E = \zeta \in \mathbb{R}$.

设$E \subseteq \mathbb{R}$且$E \neq \emptyset$，E有下界.

令$-E := \{-x \mid x \in E\}$ $\quad\because E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad\therefore -E \subseteq \mathbb{R}$

$\because E \neq \emptyset$ $\quad\therefore -E \neq \emptyset$

$\because$ E有下界 $\quad\therefore \exists m \in \mathbb{R}$, s.t. 对$\forall x \in E$，有 $x \geqslant m$

$\therefore -m \in \mathbb{R}$，且对$-E$中任一元素$-x$（其中$x \in E$），有：$-x \leqslant -m$

$\therefore -E$有上界

$\therefore -E$有有限的上确界，即 $\sup(-E) \in \mathbb{R}$

令 $\lambda = -\sup(-E)$ $\quad\therefore \lambda \in \mathbb{R}$.

对$\forall x \in E$，有：$-x \in -E$. $\quad\because \sup(-E) \in \mathbb{R}$是$-E$的上确界

$\therefore -x \leqslant \sup(-E)$ $\quad\therefore x \geqslant -\sup(-E) = \lambda$

$\therefore \lambda$是E的一个下界

对$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\because \sup(-E) \in \mathbb{R}$是$-E$的上确界

$\therefore \exists -\eta \in -E$ （其中 $\eta \in E$）， s.t. $-\eta > \sup(-E) - \varepsilon$

$\therefore \eta < -\sup(-E) + \varepsilon = \lambda + \varepsilon$

$\therefore \lambda$ 是 E 的下确界． $\inf E = \lambda \in \mathbb{R}$ $\square$