实数连续性命题

实数连续性命题(二)(单调收敛原理)

单调增有上界的数列必收敛. 单调减有下界的数列必收敛

实数连续性命题(三)(闭区间套定理)

设递降闭区间序列 $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$,其长度 $b_n-a_n\to 0\ (n\to+\infty)$,则存在唯一 $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$,即对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $x_0\in[a_n,b_n]$

定义(数列有界) $\{a_n\}$ 是一个 $\mathbb{R}$ 中的数列.

若 $\exists M\in\mathbb{R}_{>0}$,对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$,有 $|a_n|\leq M$,则称数列 $\{a_n\}$ 有界

若 $\exists B\in\mathbb{R}$,对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$,有 $a_n\leq B$,则称数列 $\{a_n\}$ 有上界 B.

若 $\exists A\in\mathbb{R}$,对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$,有 $a_n\geq A$,则称数列 $\{a_n\}$ 有下界 A.

(三)$\Rightarrow$(二) proof: 设 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个任意的单调增有上界的数列.

$\because$ 数列 $\{x_n\}$ 有上界 $\therefore \exists M\in\mathbb{R}$, s.t. 对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 有: $x_n\leq M$

$\therefore x_1\leq M$

若 $x_1=M$, 则 $\because$ 数列 $\{x_n\}$ 单调增 $\therefore$ 对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 有: $x_1\leq x_n\leq M=x_1$

$\therefore$ 对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 有: $x_n=x_1$ $\therefore$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_1\in\mathbb{R}$.

若 $x_1<M$, 则令 $a_1=x_1$, $b_1=M$ $\therefore a_1\in\mathbb{R}$, $b_1\in\mathbb{R}$, $a_1<b_1$.

$\therefore b_1$ 是数列 $\{x_n\}$ 的上界, $b_1-a_1=M-x_1\in\mathbb{R}_{>0}$,

对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 有: $x_1\leq x_n\leq M$ $\therefore x_n\in[x_1,M]=[a_1,b_1]$.

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的上界, 则令 $a_2=a_1$, $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, 此时有:

b_2 是数列 $\{x_n\}$ 的上界, $b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{M-x_1}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$,

对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 有: $x_1\leq x_n\leq b_2$ $\therefore x_n\in[x_1,b_2]=[a_2,b_2]$.

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 不是数列 $\{x_n\}$ 的上界，则令 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$，此时有：

b_2 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{M-x_1}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$，

$\because a_2$ 不是数列 $\{x_n\}$ 的上界 $\therefore \exists N_1\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, s.t. $x_{N_1}>a_2$

$\therefore$ 对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $n>N_1$，有：$a_2<x_{N_1}\leqslant x_n\leqslant b_2$ $\quad\therefore x_n\in[a_2,b_2]$.

综合这两种可能性，有：b_2 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，$b_2-a_2=\frac{M-x_1}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$，

~~存~~ $N_1\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $n>N_1$，有：$x_n\in[a_2,b_2]\subseteq[a_1,b_1]$

若 $\frac{a_2+b_2}{2}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，则令 $a_3=a_2$，$b_3=\frac{a_2+b_2}{2}$. 此时有：

b_3 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，$b_3-a_3=\frac{1}{2}(b_2-a_2)=\frac{M-x_1}{2^2}\in\mathbb{R}_{>0}$，

$N_1\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $n>N_1$，有：$x_n\in[a_3,b_3]$

若 $\frac{a_2+b_2}{2}$ 不是数列 $\{x_n\}$ 的上界，则令 $a_3=\frac{a_2+b_2}{2}$，$b_3=b_2$. 此时有：

b_3 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，$b_3-a_3=\frac{1}{2}(b_2-a_2)=\frac{M-x_1}{2^2}\in\mathbb{R}_{>0}$，

$\because a_3$ 不是数列 $\{x_n\}$ 的上界 $\therefore \exists N_2'\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, s.t. $x_{N_2'}>a_3$.

任取 $N_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $N_2>\max\{N_1,N_2'\}$. 则有：$a_3<x_{N_2'}\leqslant x_{N_2}\leqslant b_3$.

$\therefore$ 对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $n>N_2$，有：$a_3<x_{N_2}\leqslant x_n\leqslant b_3$ $\quad\therefore x_n\in[a_3,b_3]$.

综合这两种可能性，有：b_3 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，$b_3-a_3=\frac{M-x_1}{2^2}\in\mathbb{R}_{>0}$，

$N_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $N_2>N_1$，对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $n>N_2$，有：$x_n\in[a_3,b_3]\subseteq[a_2,b_2]$

若 $\frac{a_3+b_3}{2}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，则令 $a_4=a_3$，$b_4=\frac{a_3+b_3}{2}$，此时有：

b_4 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，$b_4-a_4=\frac{1}{2}(b_3-a_3)=\frac{M-x_1}{2^3}\in\mathbb{R}_{>0}$

$N_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $N_2>N_1$，对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 且 $n>N_2$，有：$x_n\in[a_4,b_4]$.

若 $\frac{a_3+b_3}{2}$ 不是数列 $\{x_n\}$ 的上界，则令 $a_4=\frac{a_3+b_3}{2}$，$b_4=b_3$. 此时有：

b_4 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，$b_4-a_4=\frac{1}{2}(b_3-a_3)=\frac{M-x_1}{2^3}\in\mathbb{R}_{>0}$，

∵ a_4 不是数列 $\{x_n\}$ 的上界　∴ $\exists N_3'\in\mathbb{Z}_{\geq1}$, s.t. ~~至~~ $x_{N_3'}>a_4$

任取 $N_3\in\mathbb{Z}_{\geq1}$, s.t. $N_3>\max\{N_2,N_3'\}$. 则有：$a_4<x_{N_3'}\leq x_{N_3}\leq b_4$

∴ 对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq1}$ 且 $n>N_3$，有：$a_4<x_{N_3}\leq x_n\leq b_4$　∴ $x_n\in[a_4,b_4]$.

综合这两种可能性，有：b_4 是数列 $\{x_n\}$ 的上界，$b_4-a_4=\frac{M-x_1}{2^3}\in\mathbb{R}_{>0}$，

$N_3\in\mathbb{Z}_{\geq1}$ 且 $N_3>N_2$，对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq1}$ 且 $n>N_3$，有：$x_n\in[a_4,b_4]\subseteq[a_3,b_3]$.

将上述证明过程继续下去，得一递降闭区间序列：

$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq[a_3,b_3]\supseteq[a_4,b_4]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$

对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq1}$，有：$b_n-a_n=\frac{M-x_1}{2^{n-1}}\in\mathbb{R}_{>0}$　∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M-x_1}{2^{n-1}}=0$

∴ 存在唯一 $\lambda\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$.　∴ $\lambda\in\mathbb{R}$.

~~对 $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$\exists N\in\mathbb{Z}_{\geq1}$, s.t. $\frac{M-x_1}{2^{N-1}}<$ 对 $\forall$~~

对 $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$\exists K\in\mathbb{Z}_{\geq1}$, s.t. $\frac{M-x_1}{2^{K-1}}<\frac{1}{10^{10}}\varepsilon$.

∴ $N_K\in\mathbb{Z}_{\geq1}$，对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq1}$ 且 $n>N_K$，有：

$x_n\in[a_{K+1},b_{K+1}]\subseteq[a_K,b_K]\subseteq(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$　∴ $|x_n-\lambda|<\varepsilon$.

∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lambda\in\mathbb{R}$.

设 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个任意的单调减有下界的数列.

~~∵ $\{x_n\}_{n\geq1}$ 是单调减数列　∴ 对~~

对 $\forall m,n\in\mathbb{Z}_{\geq1}$，$m<n$，∵ $\{x_n\}_{n\geq1}$ 是单调减数列　∴ $x_m\geq x_n$

∴ $-x_m\leq -x_n$　∴ $\{-x_n\}_{n\geq1}$ 是单调增数列.

$\because \{x_n\}$ 有下界 $\therefore \exists A\in\mathbb{R}$，对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，有：$x_n \geq A$

$\therefore -A\in\mathbb{R}$，对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，有：$-x_n \leq -A$

$\therefore$ 数列 $\{-x_n\}_{n\geq 1}$ 有上界 $\therefore$ 数列 $\{-x_n\}_{n\geq 1}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-x_n) = \mu\in\mathbb{R}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(0-(-x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 - \lim\limits_{n\to+\infty}(-x_n) = 0-\mu = -\mu\in\mathbb{R}$.

$\square$

4

Scanned with CamScanner