实数连续性命题

实数连续性命题(一)(确界存在定理)

有上界的非空数集必有属于$\mathbb{R}$的最小上界,即有有限的上确界.

有下界的非空数集必有属于$\mathbb{R}$的最大下界,即有有限的下确界

实数连续性命题(二)(单调收敛原理)

单调增有上界的数列必收敛. 单调减有下界的数列必收敛.

由(二)证明(一). proof: 设$A\subseteq\mathbb{R}$是一个任意的有上界的非空数集

$\because A\subseteq\mathbb{R}$ 且 $A\neq\emptyset$ $\quad\therefore \exists m\in A$ $\quad\therefore m\in\mathbb{R}$

$\because A$有上界 $\quad\therefore \exists M\in\mathbb{R}$, s.t. 对$\forall x\in A$, 有 $x\leqslant M$

$\because m\in A$ $\quad\therefore m\leqslant M$

若$M\in A$, 则 $\sup A = M\in\mathbb{R}$.

若$M\notin A$, 则 $\because m\leq M$, $m\in A$, $M\notin A$ $\quad\therefore m\neq M$ $\quad\therefore m<M$

$\therefore M-m\in\mathbb{R}_{>0}$ $\quad\therefore [m,M]$中有A中的数 (比如$m\in A$)

将$[m,M]$等分为两个闭区间 $\left[m,\frac{m+M}{2}\right]$, $\left[\frac{m+M}{2},M\right]$.

若$\left[\frac{m+M}{2},M\right]$中有$A$中的数, 则令 $a_1=\frac{m+M}{2}$, $b_1=M$

若$\left[\frac{m+M}{2},M\right]$中没有$A$中的数, 则$\left[m,\frac{m+M}{2}\right]$中必有$A$中的数. 此时令

$a_1=m$, $b_1=\frac{m+M}{2}$.

$\therefore b_1$是A的上界, $[a_1,b_1]$中有A中的数, $b_1-a_1=\frac{M-m}{2}\in\mathbb{R}_{>0}$

将$[a_1,b_1]$等分为两个闭区间 $\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$

若$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$中有A中的数，则令$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$

若$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$中没有A中的数，则$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$中必有A中的数. 此时令

$a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$

$\therefore b_2$是A的上界，$[a_2, b_2]$中有A中的数，$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{M-m}{2^2}\in\mathbb{R}_{>0}$，

$a_1\leqslant a_2$，$b_1\geqslant b_2$

将$[a_2, b_2]$等分为两个闭区间$[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$，$[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

若$[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$中有A中的数，则令$a_3=\frac{a_2+b_2}{2}$，$b_3=b_2$

若$[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$中没有A中的数，则$[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$中必有A中的数. 此时令

$a_3=a_2$，$b_3=\frac{a_2+b_2}{2}$

$\therefore b_3$是A的上界，$[a_3, b_3]$中有A中的数，$b_3-a_3=\frac{1}{2}(b_2-a_2)=\frac{M-m}{2^3}\in\mathbb{R}_{>0}$，

$a_2\leqslant a_3$，$b_2\geqslant b_3$

将$[a_3, b_3]$等分为两个闭区间$[a_3, \frac{a_3+b_3}{2}]$，$[\frac{a_3+b_3}{2}, b_3]$

若$[\frac{a_3+b_3}{2}, b_3]$中有A中的数，则令$a_4=\frac{a_3+b_3}{2}$，$b_4=b_3$

若$[\frac{a_3+b_3}{2}, b_3]$中没有A中的数，则$[a_3, \frac{a_3+b_3}{2}]$中必有A中的数. 此时令

$a_4=a_3$，$b_4=\frac{a_3+b_3}{2}$

$\therefore b_4$是A的上界，$[a_4, b_4]$中有A中的数，$b_4-a_4=\frac{1}{2}(b_3-a_3)=\frac{M-m}{2^4}\in\mathbb{R}_{>0}$，

$a_3\leqslant a_4$，$b_3\geqslant b_4$

将上述过程继续下去，得到了两个$\mathbb{R}$中的数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足：

① 对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，$b_n$是A的上界

② 对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，$[a_n, b_n]$中有A中的数

③ 对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，有：$b_n-a_n=\cancel{\frac{M-m}{\ }}\ \frac{M-m}{2^n}\in\mathbb{R}_{>0}$

④ $\{a_n\}$是单调增数列，$\{b_n\}$是单调减数列.

⑤ 对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，$a_n\leq M$，即数列$\{a_n\}$有上界

对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，$b_n\geq m$，即数列$\{b_n\}$有下界.

$\because\{a_n\}$是单调增有上界的数列　$\therefore\{a_n\}$收敛　$\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\in\mathbb{R}$

$\because\{b_n\}$是单调减有下界的数列　$\therefore\{b_n\}$收敛　$\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\in\mathbb{R}$

$\because\lim\limits_{n\to+\infty}b_n-\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M-m}{2^n}=0$

$\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\in\mathbb{R}$.　令$\lambda=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\in\mathbb{R}$.

假设λ不是A的上界，则$\exists\alpha\in A$，s.t. $\alpha>\lambda$

$\because$对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，$b_n$是$A$的上界　$\therefore$对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，$\alpha\leq b_n$

$\therefore\alpha\leq\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lambda$　$\therefore\lambda<\alpha\leq\lambda$. 矛盾.　$\therefore\lambda$是A的上界.

对$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，$\because\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lambda$　$\therefore\exists N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$且$n>N$，有：
$|a_n-\lambda|<\varepsilon$

$\therefore$对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$且$n>N$，有：$\lambda-\varepsilon<a_n$

$\because$对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，$[a_n,b_n]$中有$A$中的数

$\therefore$对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$且$n>N$，$\exists\alpha_n\in A$，s.t. $\alpha_n\in[a_n,b_n]$

$\therefore$对$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$且$n>N$，$\exists\alpha_n\in A$，s.t. $\lambda-\varepsilon<a_n\leq\alpha_n$

$\therefore\lambda$是A的上确界　$\therefore\sup A=\lambda\in\mathbb{R}$.