

数学竞赛学习方法漫谈

何天成

(华南师范大学附属中学, 广州, 510630)

今年七月, 我有幸作为中国国家队的一员参加了第 58 届国际中学生数学奥林匹克竞赛 (IMO), 并获得了一枚金牌. 回顾六年竞赛之路, 我从开始的一个懵懂无知的新人, 一路上经历了不少挫折, 走了不少弯路, 在跌跌撞撞中算是摸索出了自己的一套学习竞赛的方法, 最后的结局也是幸运的. 而正是这份幸运, 让我觉得有责任把自己学习数学竞赛的经验与心得分享出来, 希望后来者能吸取我的经验和教训, 找到自己的不足, 并更好地看清未来.

I. 引言

对于一场考试, 我喜欢用以下 3 个参数来衡量最终的分数:

$$\text{最终分数} = \text{实力分} \times \text{运气分} \times \text{状态分}.$$

其中实力, 运气, 状态均为非负实数.

这里, 实力顾名思义. 尽管不好量化, 但是一般来说实力相差很大还是能看出来的.

运气主要代表“题目是否对路”, 比如一个擅长几何的选手参加一场几何送分的考试, 当然运气分较低; 而参加一场几何难度他刚刚好能做出来的考试, 运气分就比较高了. 当然, 运气分是取决于考试本身的, 可以认为主观上不能改变它, 但是在集训队这样的多次考试中, 平均下来, 运气会比较稳定; 并且, 我们可以用比如“补短板”或者“狂刷一科”等方法改变运气分的波动大小. 另一方面的运气来自于改卷, 即能不能得到预想中的分数. 这一点理论上来说也是不能自己操纵的, 但是可以通过加强书写等方法提升.

状态源于自身. 常见的影响状态的因素有比如考前一晚睡不着, 考试很冷手冻僵了, 旁边的同学一直发出噪音等等. 当然, 也可能会有状态莫名超好的情

收稿日期: 2017-07-28.

况,但是我们不能控制自己超常发挥,只能期望尽量发挥正常.

总结下来,我们当然要“提升实力”,但同时也要注意一些很容易被忽略的地方——提升运气和状态.这看似很难处理,但实际上还是有迹可循的.

运气方面,一是之前说的“补短板”与“狂刷一科”.

补短板是实力进阶的必经之路.我一直认为,一名真正优秀的选手并不一定要做出很多人都做不出的超难题,但是一定要做出有足够多人能做出的题.这就需要了解不同的方法,覆盖更多知识面,做真题.

“狂刷一科”是实力不够的情况下的赌博——比如就想联赛做出俩题混一等奖,然后狂刷代数与几何之类的.我对这种方法不予评价,但反正我自己的经历是,凡是赌博的情况都必输,实力不到说啥都没用,不如按部就班的来.读者可以自己考虑实力不够的时候的做法.

第二点大概就是关于过程的书写.事实上,很多人对自己的过程非常有自信.如果你批改过其他人的过程,总会觉得“这啥意思啊?搞了半天都不知道想干啥”或者“这里一句话带过根本就不显然嘛”.一般来说,过程写不好有两种:如果你讲都讲不清楚,那么可能是语文学的不好,请回炉再造;如果跟别人讲思路的时候别人可以理解,但是过程写不好的话,可能是没有掌握好写过程的技巧.写过程的主要目的有两个:一是要准确,不能让老师误解你的意思;二是要通俗易懂,节省老师的时间,让老师能够比较容易 get 到你的过程的脉络.

所以针对第一点,要学会过程的“数学化”表达:比如很多组合问题,直接表达就像写小说,如果可以换成集合或者图论的语言,又或者把它代数化表示,就简单很多了;另外,过程里的因果关系要清晰,至少要表达出“由什么推出什么”.这就需要多使用连词:因为(由于、注意到) + 所以、若 + 则 + 所以 + 从而、我们断言(证明) + 事实上,以及右箭头“ \Rightarrow ”.就算连词使用不多样,至少要达到的要求是:老师知道你的每一个结论是由那些结论推出的.

而第二点其实容易被忽视.我经常看到有些过程一路往下推,密密麻麻一大堆,又不知道他想干什么;语言又完全用的是集合的方法,全都是定义和运算,让人摸不着头脑.这时候,一旦出现一些笔误,很有可能老师就“如释重负”地圈起来给 0 分了.这就像写一篇议论文,要是你一直举例子不立论,当然不会给高分.这就需要把证明的脉络清晰地刻画出来,常见的连词有:证明分为如下几步、下面证明一个引理(结论)、我们断言(证明)以下结论、我们只需证明如下结论即可证明此题.这样的好处是,如果你断言的关键步骤恰好是答案中的步骤,或者老师知道是对的,那么老师就大致知道你做出来,只需验证一下细节

即可;就算你的证明出现了一些漏洞,老师也能知道你做出了什么,会更容易得到步骤分.

当然,还有一个大大增加可读性的方法:画图.特别是组合题,很多组合题用代数语言表达很繁琐,不易找到重点,也容易出现笔误,那如何让老师知道你做什么呢?那就是画图.如果要把一个图按照某种策略三染色,就画一个示意图,然后用 ABC 标顶点,看上去就清楚多了嘛;就算几何题是用复数算的,画个图,让老师不用自己找图,也不是什么难事吧?

最后我谈谈骗分.时间快到了的时候还是做不出题目,想争取一些过程分的情况是常见的.但是我非常非常反对大家东扯西扯,然后说证毕——做不出来就做不出嘛,要承认自己就是在混分,至于能给几分就看你做了什么结论了;但总有一些人不会做就瞎搞一通然后证毕,这样的人多了,就加大了老师判卷子的难度,就会连累一些“好人”.反正我觉得,要是明知道是错的还写证毕,绝对是败人品的行为.

状态方面,我觉得有两点:一是平时加强模拟考试——模拟考试绝对不仅仅指的是做一套题那么简单!我觉得模拟考试要起到效果,必须完完全全地模拟真实的情况——特别是 4.5 小时的考试,很多人只是开始两个小时上三板斧,然后消极怠工,这其实一点效果都没有.真实考试有 4.5 小时呢,要是平时这么模拟,真实考试的最后 2 个小时难道你就能继续保持极高的做题状态吗?二是,平时做题最好“认真对待”,两天的考试可以带着一些心理负担,这样真正考 CMO 这样的考试万一面对第一天考试失利,就不会心理太崩盘.

II. 各级竞赛

一、联赛

全国高中数学联赛是高中竞赛的第一步,但其实也是不确定性最大的一步.

不同的省份有不同的联赛的备考攻略.如果你来自一些超级联赛强省,比如上海、浙江等,那么你的一试水平一定要过硬,因为正常的年份很可能会出现很多人二试并列拼一试的情况;但如果是中等的省份,就拿广东举例吧,在大部分年份二试 3 题 + 一试 90 分可以进省队,并且二试 2 题的话几乎进不了省队,所以其实只需要做“适当”的一试练习,然后把重点放在二试上.

注意,这里的“ x 题”指的是最终得分.不同的省改卷严格程度不一,但是一般来说,被判错是少数,并且很有可能是自己的问题(有些人经常写伪证自己看不出来,或者写过程水平太差确实没法看,却自我感觉良好).所以在备考的过

程中要训练自己的书写, 要尽量写的严谨、工整, 避免被判错; 但至于最终结果要是还是被判错了, 也没办法啊, 尽力而为, 问心无愧.

由于联赛的考场很多, 并且各地规则不一, 请尽量熟悉自己将去到的考场与考试细则, 并在考前做好充足的准备, 避免出现考试之外的问题. 笔者在参加联赛的过程中曾经遇到过以下问题 (都是血的教训啊):

考场偏僻, 当天起的很早赶赴考场, 很疲倦; 考场空调直吹, 极冷; 教室很大, 老师发卷不及时, 导致开考 5 分钟才拿到卷子; 考试要求换草稿纸 (收一张给一张); 洗手间较少, 要等很久等等.

总之, 在考试之前, 一定要做好充分的准备. 联赛毕竟没几次, 要按照高考的规格对待, 提前踩点, 准备充足的衣物、食物, 避免因为考前准备不充足痛失好局.

联赛与之后的比赛的最大的两点区别就是: 时间短, 对书写要求高. 所以联赛的模拟更注重踏踏实实地掐表做, 并认真写过程, 最好让别人批改或者自己对着答案很仔细地检查笔误和写的不好的地方. 部分因为时间原因没有做出的题目可以考试结束后再想, 在考试的时候一定要保证“分数最大化”, 该跳过的题就跳过. 这样在真正的联赛中才不容易手忙脚乱.

联赛有一个不太好的地方: 答题的区域非常小. 尤其是二试第一题, 要是想到了一个很复杂的方法, 有可能要挖掉一大半第二题的空间才能写下. 因此在模拟的过程中也要注意这一点, 千万千万不能写错! 在考场上若是发现写了一大半的过程都是错的, 修正思路很长, 真是欲哭无泪……不差这几分钟. 要想好了再写, 多花点时间写, 表达尽量清楚.

因为联赛时间紧, 还有一个问题就是如何快速写出合要求的过程. 这也是需要平时训练的——很可能最后留给一试最后一题的时间只有 5 分钟了, 如果你快速读完题目后直接开始写, 抓得分点, 说不定最后能有 10 分.

总之, 模拟考试的最高境界就是“平时如考试, 考试如平时”. 平时训练的过程中一定要计时作答, 做不出来的题也要写上已得到的结论, 完全模拟考试的状态. 同时, 在一试二试都模拟完成之后, 可以再回头做做因为时间不够没有完成的题目, 从各方面思考“如何做到更好”——总结新出现的题型与错误的原因, 总结考试的时可能出现错误的的时间分配.

1. 一试

先说一试. 我的一试水平历来都不算好, 但是也不算差, 大概就是所谓的“90 分”标准——我个人认为 90 分应该是适当训练可以达到的, 而且在训练得

当的情况下,基本可以保证拿到这个分数.当然,我的训练其实不多,(因为前面说的弱省原因),但是也不算少.

首先,如果你刚学高中竞赛,对一试的知识点掌握的还不透彻,那么大概还是需要把套路过一遍的——这个过程有点像准备高考,但是要求更高.如果有教练当然极好,让教练帮着补补就好了;如果自学的话,大概需要做一些题.一试我能想到的问题大概是下面的这些东西.

解析几何,其实来来回回方法就那么几种:设直线方程配合韦达定理,设点,设参数方程;还有稍高级的方法,比如几何法,曲线系,极坐标,极线方程,仿射变换,等等.当然,解析几何看着容易,做起来却没那么简单,需要很好地计算能力,也需要灵活变通,这就需要大量的练习了.

做解析几何题的时候要注意:真正比赛的解析几何题目的答案一定不会太过于复杂.如果你在做题过程中发现比如求出的函数是无比困难的,很难求出最小值,那么可以考虑要么进行一些代换,因为这个表达式里面理论上来说肯定可以提取一些局部,切勿暴力求导;也可以试图先猜出特殊点,看看能不能直接证明大小关系.如果求出的动点坐标所要满足的参数方程很复杂,无从下手,你可以尝试在原来的图形里猜出动点满足的条件大致是什么——无非就是直线或者二次曲线之类的嘛,那么比如把 x, y 坐标平方乘系数加加减减说不定就全部消掉了.当然,做解析多了之后,要总结经验,在花了一定时间做不下去,一定要赶紧止损,换个方法,说不定不费很大力气就做出来了.

最后,要记住,验证平行坐标轴的情况.

数列技术含量稍高,不过绝大多数数列问题都是可以用局部不等式或者裂项做出来的.少数有高级技巧,比如积分估计,三角函数换元之类的.个人觉得数列其实难度很难估测,有的题目确实有难度.当然,就联赛的真题来看,数列题目并没有很多模拟题那么难,需要注意的是一定不能着急的瞎放缩,要多变形——绝大部分的数列都是用代数变形后裂项做出的.

大题里面可能还有一道求导的题目或者其他题目.这一类题目个人觉得没啥技巧,简而言之,练.代数的硬功夫是很重要的,这在之后做更难的大题中会有用.

立体几何.立体几何对于自学的同学来说往往会比较头疼——因为答案的做辅助线方法有时候真的很匪夷所思.那就不这么麻烦吧!立体几何有一个万金油方法——算!由于近年都出的是填空题,所以其实很多细节都可以不用处理(这是权宜之计,我推荐大家多学其他方法,保不准就出大题了……但如果想短

时间提高的话, 只会这样算就好了). 自己查一下怎么算法向量, 然后做几个题, 了解怎么算二面角、异面直线距离, 然后做几个题试试手感, 之后就再也不会为立体几何担心啦!

剩下的题目, 算是其他题目吧, 其实套路也有不少, 需要大量练习, 通过练习逐渐学会一些技巧. 每个人都是从 30 分做到 100 分的嘛, 开始不要着急, 如果遇到完全没有办法的题目可以适当想想暂时跳过, 记住答案里面的关键点, 在下次见到类似的方法时不要忘记就好.

一般来说, 在经过至多一年的学习, 一试水平大概就可以达到“90 分”目标, 偶尔能全对, 但也可能算错很多题划水. 这个时候, 基础的东西都学会了, 剩下的提分点就在考试的状态上了.

关于一试的时间分配, 我个人的习惯是, 30 分钟做完填空题, 然后一道一道地做大题 (前两个大题大约做 10 到 15 分钟, 最后一个比较难的话就一直做), 但是最后至少留下 10 分钟检查. 我觉得在练习的过程中找到自己熟悉的节奏很重要, 并且考试的时候要严格执行之前的策略, 不要为了贪最后一个题目放弃检查 (当然, 如果你的习惯是不检查, 也可以).

我推荐在至少离考试还有 2 个月的时候开始进行一试模拟训练, 大概每 2 到 3 天做一套计时的一试题. 开始的时候肯定状态不会太好, 容易算错, 但是经过比较长的熟悉之后, 在离考试将近一个月左右的时候应该问题就不大了. 但是状态还是要继续保持. 如果突然出现状态特别差, 不要疲劳作战, 可以先休息调整一下, 再仔细分析在考试过程中出现的时间分配问题 (错的多情况往往是因为花了过多时间做难题导致时间分配不均).

2. 二试

联赛不确定性最大的地方, 大概就在于二试.

我认为联赛二试是数学竞赛中最不容易稳定发挥的考试. 时间太短导致随机性很大, 尽管题目一般本质不算太难, 却也都有关键的步骤.

从二试到之后的“大题”训练是数学竞赛的重点. 不过好在联赛二试的题目, 说难也不难, 相对 CMO 等之后的考试而言套路比较少. 个人认为有集训队实力的同学应该做联赛二试的题目不会很困难.

具体的专题训练写在之后了. 这里只提一点联赛二试要注意的问题:

联赛二试时间确实很紧, 平均每题半小时多, 很容易因为慌张或者时间不够发挥失误. 所以万一遇到不对路的题目, 在做了一段时间之后, 要选择果断跳过. 这里的分寸也是要在模拟考试中慢慢总结出来的, 因为有的时候尽管题目本身

可能不难, 如果思路陷入“死循环”, 再浪费一个小时很可能还是做不出来.

再者, 如果最后还剩下 1 个小时, 并且还剩下 2 个题目, 最好的做法是读题之后选一个做, 不要来回跳 (剩下多个题目也是类似的). 在时间不足的情况下静下心来想题也是一种能力.

关于具体的答题, 我觉得最要注意的就是不能“超纲”了. 有些人在培训中得到了很多很强的结论和性质, 但是在联赛中, 要谨慎使用, 最好给出证明 (也可以留个空位, 看情况, 有时间最后补). 特别的, 几何题非常不推荐用复数法, 重心坐标! 不到万不得已, 不要采用这几个方法 (当然, 要是真的不行就死马当活马医吧). 反正, 要是有了分, 你要庆幸; 要是没分, 不要怨改卷老师. 这些“高级”方法或多或少需要用到一些考纲外的性质, 可能会扣分; 并且计算法解几何出现笔误其实很正常. 联赛几何, 一般来说最好算的方法是三角. 可以多练练三角计算 (当然, 纯几何也是要练习的).

二、CMO

来到了 CMO, 就意味着进入了真正的“IMO 模式”了. 4.5 小时 3 题, 这个时间我觉得不算长也不算短——若是题目顺手, 3 小时足以完成 3 题; 但只要有至少一题“卡住”了, 就很可能出现时间不够用的情况 (有思路没时间). 当然, 对于初次接触这样类型的考试的同学, 很可能做不满 3 小时就已经找不到突破口, 无所事事了——这其实是很正常的, 所以在训练中, 最关键的就是锻炼如何在“卡住”的情况下调整心态, 寻求突破.

关于 CMO 的备考, 个人觉得不能只是从得知自己进入省队开始, 而应该是一个更有计划性的长期过程——从学数学竞赛的初期开始就应该不时挑战一些比较难的题目, 这样在真正进入省队之后才会有足够扎实的基本功. 不过无论如何, 备考的初期还是要先把所有 CMO 范围内的专题过一遍——在 CMO 中可能出现联赛不考 (或者考的很浅) 的很多知识点, 比如复数、多项式、函数方程、图论等, 至少不能出现明显的短板.

从 CMO 开始, 理论上来说答题纸可以无限用, 可以自带食物, 大部分方法也可以直接使用, 包括高等的方法 (当然, 要是你使用了一些大定理解决问题, 很有可能只有部分分数). 换句话说, 就是限制条件变少了, 大家可以凭借自己的本事各显神通.

CMO 的考试与联赛还有一个较大的不同——CMO 考试时, 参赛选手汇聚一堂. 这有好处也有坏处: 你可以与各地高手亲密接触, 体会举办地的风土人情, 但也要充分考虑举办地的气候, 饮食等生活条件的差异. 我参加过的两届

CMO 都在吃辣的地域举办, 结果吃东西很不习惯, 肚子有些不舒服, 影响了考试状态. 如果不习惯酒店的饮食也可以出去吃, 但一定要多加注意, 避免出现考试腹痛腹泻的悲剧情况. 另一方面, 冬令营在冬天举办, 最好提前调查好考场有没有空调和暖气, 带好足够的保暖衣物; 如果可以的话, 可以多提前几天去适应环境. 我曾经参加过的冬令营就出现了手冻到难以写字的问题.

而关于做题状态的保持, 我建议至少每个星期做一次模拟考——连续两天, 每天上午做 4.5 小时的题目, 模拟考试状态, 不能没做完就提前交卷或者消极考试, 写过程. 考完之后的下午可以休息, 保持精力, 也可以继续做题或者和同学讨论, 然后认真批改过程, 对比标准答案找出所有笔误和说不清楚的地方.

在 CMO 过程的书写上, 由于整体时间较多, 所以其实不用太着急. 宁可慢慢写, 也不要因为写的太着急而出现伪证, 或者因为字迹模糊被扣分. 这里要特别提一句: 如果提前做完了卷子, 不要提前交卷, 也不要趴在桌子上看别人做题, 一定要认真检查自己的过程, 甚至把写的不好的过程重新抄正! 在题目简单的时候, 任何一点跳步都可能成为最后的血的教训. “千里之堤, 毁于蚁穴”, 不要让自己多年的努力因为最后几个小时的懈怠功亏一篑.

如果你从来没有考过一次 4.5 小时的考试, 找一个安静的地方, 一套没做过的 CMO 真题, 考一次试试吧. 开始做题的时候要有一种信念, 就算真的一点东西都得不出来也不能坐在座位上发呆思考人生或者无脑的在草稿纸上抄式子——这是“慢性自杀”的做法. 如果把沉浸在题目中的时间叫做“有效时间”, 有效时间越长, 就说明考试状态越好.

在考试之中一时做不出来题其实是很正常的. 如果真的感觉什么都得不出来, 可以尝试以下的事情:

去洗手间洗把脸, 顺便在走廊跑跑, 活动一下筋骨;

喝点水, 吞一条巧克力;

在纸上列出你能想到的有希望解决此题的所有可能的方向, 然后选择一个没有尝试过的去尝试.

最后一条比较关键: 绝大部分情况, 题目都是正确的, 并且存在一个分为若干步骤, 每一步骤都可以很容易理解的方法, 并且这个方法的答案长度不会超过两张 A4 纸.

做数学竞赛题是建立在题目存在这样的方法的基础上的. 所以如果你花了很久都没有攻克题目, 很有可能并不是题目本身很难, 而是你“误入歧途”, 常见的情况有:

第一步想当然地找到了一个看上去形式比较简单的等价命题,或者“不妨设”了一大堆条件,表面上是赚到了,但事实上从原题直接出发处理比较容易,转换过后反而变难了;

一直想直接做出来,但是实际用归纳法可以大大简化问题;一直想归纳,但是实际上命题并不具有归纳结构,反而应该在原题里面直接处理;

原题的条件可以直接推出一个很强而且很有用的结论,但是你没有发现.

这几点表面看上去很简单,但实际上,在真正做题的过程中很有可能还是陷入了死胡同出不来了(因为有时候可能真的只差了一点,不忍心放弃).怎样“在适当的时候判定这个方法没有用,并且尽快进入下一个分支”是竞赛高手的一种能力.

一次考试之中,把越多陷入困境的题目做出来,就算是考试状态越好.在陷入超过2小时的困境后做出一道题目,就算是成功入门了CMO类的考试了.

在这样的4.5小时的考试中,题目的难度未必是按照顺序排列的.一般来说,老师选题的时候会认为难度是递增的,但实际情况可能会有很大不同.如果在靠前的题目卡住比较久,千万不能慌张,可以跳过它做下一题.特别的,有时候第一题可能看着并不难,但是却一时想不到的话,可以先跳过它做2、3,如果能做出一题,就“解毒”了,心态会平稳很多,也就能比较顺利的做下去了.我曾经在考试中花了很久都做不出第1、2题,但是跳到3的时候,却立刻有思路(但其实3非常难),然后回头,最终依次做了2与1.如果我一直对着第1题猛攻4个小时,很可能最后颗粒无收,出了考场才会懊恼没有看3.所以思路要灵活,不能吊死在一棵树上.

还有一种常见的情况,就是在考试进行到了靠后的时间,却颗粒无收,比如在第3个小时的时候还一题都做不出来.这个时候,很多人肯定已经在思考:其他同学一定会嘲笑我,也没有好大学读了,只能和其他人一起高考……这样是非常错误的!能减少这种情况发生的方法大概就是在平时练习的时候模拟考试的环境,比如邀请几个同学一起做,这样在长时间做不出题的时候开始会比较焦急,通过一次一次考试的训练渐渐达到沉浸题目之中,不受其他状况影响.

考试的最后半个小时往往也很有意思.我做题的时候,“半小时魔咒”经常出现——之前的很长一段时间思路停滞,最后半小时却忽然思如泉涌.我也不知道是什么原因,但反正,如果最后半个小时突然有了思路,千万不要慌张,更要沉下心来认真想,一边想一边把想法写在卷子上.我曾经多次在考试的最后半个小时做出题目或者得到关键性步骤,这样的临危不乱也是需要平时练习的.

备考 CMO, 不同的同学有不同的题目选择. 但是有两套题目应该是所有人都会做的: 近年的 IMO 预选题 (可以从 IMO 官网下载), 《走向 IMO》里面的 CMO、集训队真题.

一般来说, 这些真题如果你完全按照 4.5 小时 3 题的这种考试模式, 几乎是做不完的. 当然, 在初学阶段, 不建议把所有的第一题都挑出来做掉或者大面积看答案, 因为这样会导致以后损失很多套题.

冬令营虽难, 但是实际分数线却并不算太高, 并且由于考试时间长, 状态的波动较小, 所以比起联赛并不算随机性太大. 我个人觉得, 像前国家队队员这样非常强的选手, 应该是可以保证能够进入下一年的集训队的; 而省队呢, 特别是在“拼一拼”的强省, 可能需要更多的训练.

最后说一下第一天考完的心理调整.

我强烈建议, 在第一天考完之后不要与其他人对答案, 不要看讨论题目的网站. 反正如果我是你的竞争对手, 我肯定一看题就说“怎么这么简单, 我们学校全部满分”, 让你心态崩盘; 而且就算是真的自以为做了 3 题, 实际能拿到多少分绝对是未知数. 一般来讲考完第一天狂水贴的人都比较浮躁, 很有可能真的伪证了. 再说了, 退一万步, 即使真的有 10 个人说自己做出 3 题, 集训队有 60 个人呢! 你要是做的不好, 很可能其他人也做的不好.

所以最正确的心态就是: 该吃吃该睡睡, 不要想太多. 还有一天呢, 在考完所有的考试之前, 一定不能放弃, 也一定不能骄傲.

考试的最佳状态就是忘记之前的一切, 忘记你的竞争对手, 把每场考试当成第一场考试, 把你的对手当成自己, 尽力多做出一道题目, 多挣一分.

三、TST

TST 就是集训队. 进入集训队就保送了, 很多同学会有自己的打算. 我个人认为集训队水平靠前的同学和靠后的同学还是有一定的实力差距的——可能集训队里大约有 15 个同学算是可以“保证”进入集训队的, 而有一半的同学实力跟前面那些同学有比较明显的差距, 进集训队有一定运气成分. 每年集训队中, 都会有一半左右的同学放弃备考, 从冬令营结束开始准备自己的事情——比如准备出国, 看大学数学, 勾搭妹子, 打牌等等. 我觉得不能说这样的同学是错的, 相反, 比起很多从冬令营结束开始一直在备考的同学, 他们真的“赚到”了一段很宝贵的时间, 可以比很多人在之后取得先机. 当然, 如果自认为有进入国家队的实力, 我更希望你能认真准备集训队的考试, 并向国家队发起冲击, 如果可以的话, 为中国队尽自己的一份力.

今年的集训队考试公布了分数. 从分数所反应的情况来看, 集训队测试有两个很容易被忽视的地方:

第一点, 稳定性. 考试结束之后, 我们都认为分数线比预想低. 是的, 这样的分数线其实不要求你做出很多少于 10 人做出的难题, 仅仅只需要把那些“非难题”全部稳稳地拿下即可. 这并不是说在练习和考试的时候不做难题, 而是说, 其实相当一部分非常有实力的选手并没有拿下那些“不难”的题目, 所以在练习和考试中, 一定要练习拿下“非难题”的能力, 减少失误. 一场集训队测试的 6 题中, 一般有 1 到 2 个难题, 而你只需要每次测试拿到 28 分, 其实就足够了. 不过话又说回来, 作为一个自认为有实力的同学, 如果只是通过“稳定”勉强压线进队, 其实真正到了 IMO 考场也很虚. 所以当然要提升自己做难题的能力.

第二点, 过程. 在分数线附近的同学很多, 但实际上, 有相当一部分同学是因为过程写的不好, 7 变成了 6 甚至 5、4, 与国家队失之交臂. 关于写过程, 还是有很多技巧的.

到了 TST 这个级别的考试, 可以说在申诉之后不存在“判错”的问题——这里的判错指的是对错, 而不是尺度. TST 的考试判卷方法接轨 IMO, 更加重视逻辑, 对书写要求稍轻.

关于书写, 有一种“IMO 式书写法”. 在时间只有很短, 但是要写的东西很多的时候, 可以采用这样的书写方法: 用比较浅显易懂的语言把思路的核心步骤写出来 (比如说, 组合题可以不用写的太“数学化”, 可以用口语化语言写出来), 在旁边配很多图 (难写的很多是组合题, 配图可以大大增加直观性), 然后在每个步骤下面留出一段空白, 不验证细节. 如果在补完第一层之后还有时间, 就再补第二层细节……如果你的思路真的是对的, 一般来说都能得到一些分数.

一般来说, 这个级别的考试不太纠结笔误, 只要笔误不是太多太严重影响阅读都不会扣分. 但在写过程的最后最好读一读, 避免出现重复字母或者把所有 m 都写成 n 之类的情况. 关于笔误要注意的是: 如果使用了算法解几何题, 特别是解析几何、复数这种很可能不是标准答案又计算量非常大的方法, 一定要反反复复检查笔误! 因为如果出现了一些笔误, 到底你是算出来的还是蒙的, 就很难说清楚了; 一旦被发现, 可能会扣比较多得分.

关于逻辑. 一般来说, 越简单的题目, 对逻辑的严谨性要求越高; 如果题目本身很难, 可以适当跳步. 所以在写第一题的时候, 可能方法本身本身就没几行, 要是有一个关键结论不证明, 当然很可能掉分; 就算是掉 1 分, 也很痛苦. 这

里要注意, 凡是非定理的结论都最好去证明, 包括一些不难证明的结论, 比如 $OI^2 = R^2 - 2Rr$, 调和点列的性质等等.

如果题目本身很难, 比如你用了很多很多这样的性质, 也可以适当不证一些结论. 当然, 比较好的做法是如果最后还有时间, 把没证明的结论后面打个 (★), 把证明附在解答之后.

这里不得不说到伪证和漏步骤的问题了. 我自己做题的做法是在草稿纸上打草稿时把重点的结论圈起来, 这样在写证明的时候可以按照圈找回自己之前的思路, 避免“忘记之前怎么做”的悲剧 (在一道题目做了很久的情况下时常发生), 同时也不容易漏掉关键步骤 (比如, 其实只需要取 $f(a) = f(b)$ 带进某个式子就可以显然得到函数是单射的, 但是没有写在卷子上, 后面直接用, 很可能被扣一些分).

伪证是成为高手的绊脚石. 如果你在平时或者考试中经常出现伪证, 一定要引起足够的重视——伪证一旦在重要考试中出现, 就会是很可怕的事情. 这里要说的是, 如果在卷子上写了很多错误 (或者没用) 的东西, 不要着急划掉, 最好做个标记, 然后最后再做处理——因为你的这一部分过程很可能还是有道理的, 如果做出来后发现还要重新抄一大段划掉的东西就很亏了.

上面两点大概是我觉得集训队考试最需要注意的地方. 针对这两点, 在训练的过程中一定要尽量模拟考试的时间和状态, 并且耐下性子写过程.

集训队期间, 往往会有很多诱惑——比如打牌, 打游戏等等. 我非常不建议有决心冲击国家队的选手沉迷于这些活动, 最多考完试打一打. 每个人有自己的娱乐方式, 比如跑步、打球、做题等, 要按照自己的节奏来, 不要被本来不认真考试的同学带坏了.

最后讲讲集训队里的体力和心态调节.

集训队考试, 是整个竞赛生涯里持续时间最长, 也最压抑的考试. 可以说集训队考试要褪一层皮是毫不夸张的 (如果有第二轮的话就两层……). 集训队考试既是数学水平的较量, 也是心态和体力的较量.

一般来说, 集训队考试进行到一半左右肯定会越来越疲惫, 很可能状态逐渐下滑. “一鼓作气, 再而衰, 三而竭”, 这样的情况是正常的, 所以要注意睡眠, 保持规律的作息, 多锻炼身体, 保持充沛的精力. 如果觉得讲座太多的话, 可以放弃一些讲座 (其实很多讲座的主要受众是旁听生啦). 当然, 我建议每天上午准时起床, 认真做题, 下午和晚上可以适当放松, 这样更容易保持考试状态.

关于集训队考试期间的心态, 则比冬令营的两场考试要复杂得多, 也更考验

逆境下抗压的能力.

历史上, 波澜壮阔的大翻盘常有. 在最后一场考试之前永不放弃, 不仅是一句口号, 更是一种信念. 事实上, 在最后的大考结束之前, 一切都是未知数.

事实上心态的调整不仅仅局限于集训队测试中, 也同样存在于日常生活中. 能在人生的低谷里不骄不躁, 顶住压力, 卧薪尝胆, 最终走出黑暗, 也是人生中重要的能力.

心态主要分两部分: 之前考的较好的人, 尽管知道自己有领先优势, 也要不骄不躁, 一定不要在考试中计算分数! 就算是最后一场考试有很大优势, 也要全力以赴, 绝不能掉以轻心——那些没改出来的考试的分数都是未知的, 不能想当然的认为自己进队了就不努力了; 再说了, 进队也有排名的嘛.

如果之前的发挥差强人意, 一定不要给自己立 flag, 不要想着“要是拿不到 3 题我就进不了国家队了”. 题目的难度不可预测, 说不定题目很难, 其他人全都 0 分, 你做出 1 题就进国家队了呢? 又或者, 你之前估分为 0 的题目其实有 4 分, 别人估分 7 的题目其实只有 3 分, 这样算下来你的成绩并不算差. 题目对每个人都是公平的, 你觉得难, 其他人肯定也觉得难. 而万一因为自己心理要求太高导致考试心态失衡, 痛失好局, 就后悔莫及了.

总之, 还是那句话, 把每场考试当成第一场考试, 把所有对手当成自己, 只要发挥出自己的水平, 尽全力了, 就算是没进也没有关系. 再说了, 要是尽全力还是没法进入国家队, 那去 IMO 考试也只会压力更大嘛.

III. 关于具体的备考

下面这些内容主要针对自学. 如果你有一个会精心安排你的备考计划的竞赛教练, 下面的这些内容仅供参考, 主要还是要跟着教练的思路走.

关于培训, 在这里我不作推荐, 但是个人觉得如果可以的话最好还是要参加一些培训, 了解一下最新的题目和方法.

一、书和题

以下讲的这些都是我自己听过或者做过的书和题目, 应该大部分都可以在网上找到 pdf 版本. (也算是打广告啦) 当然, 没有提到的书和题很可能是没有做过的, 不敢枉加评价.

一般来说, 刚刚接触竞赛的新人都需要一套系统全面的入门书籍. 比如《奥赛经典》, 《奥数教程》, 《小丛书》等. 对于这些书, 如果可以的话当然是选一套书慢慢啃, 但其实几乎没有人能够有毅力地踏踏实实做完一套这样的

“大部头”……所以你可以先不这么“踏实”地先了解一下做题的方法, 然后做一些题, 不一定要做完所有习题.

在刚开始接触新的领域的时候可以直接看例题的答案, 但是最好每个题都要经过一段时间的思考, 至少也应该知道自己没有突破的地方在哪——那就是你能学到的新东西. 要学会举一反三, 这样很快就能掌握很多方法.

关于联赛的模拟题, 除了学校教练的题目, 我只做过《中等数学》的模拟题(包括非增刊和增刊). 当然, 模拟题的难度总归与真正联赛可能会有差距, 所以如果有些套题做下来一点思路都没有, 很可能是题目确实难, 不必太在意; 但是如果是自己算错的很多, 就要找原因了. 事实上, 我自己的体会是, 增刊模拟题一试平均分与真实联赛的成绩差距不会很大. 可能模拟会稍难一些, 但是真正考联赛的时候会比较紧张, 也有可能会出现低级失误.

在稍稍进步一些之后, 实际上你已经可以做出一部分联赛二试难度的题目了, 但是稳定性却不能保证. 这个时候, 比较重要的是补充短板. 可以看之后的具体分支中的书.

关于备战二试较难的题目和 CMO 以上级别的考试, 我强烈推荐单增的《数学竞赛研究教程》. 尽管这本书不长, 但其中很多章节里的思想很关键. 尽管现在新的方法很多, 很多很难的题目却恰恰用的是老的方法. 我觉得这本书是值得从头到尾扎实地把所有题做一遍的.

《命题人讲座》系列是一套补短板的好书, 但也有不足——部分书的部分章节太偏太难, 可能更像是科普而非针对竞赛. 我自己看过的书大概在之后写了, 其他的书就没怎么看过了.

一些流行的期刊, 比如《中等数学》等, 可能会载有一些最新的题目和方法. 我推荐大家在看书了解传统的方法的同时, 最好也要了解最新的题目与新兴的方法.

之前说到过两套所有人都要做的题目: 《走向IMO》和 IMO 预选题. 这两套题目都非常好, 在准备 CMO 和 TST 时都可以做. IMO 预选题大致按照难度排序, 并且题目本身大都很优美. (当然, 其中有些题目可能作为竞赛题确实过难了一些……)

当然, 题目看似虽少, 如果给足时间做这些题目, 实际上也需要不少时间.

从 IMO 官网 (www.imo-official.org) 的 problems 里可以找到近年的 IMO 预选题 (IMO shortlist) 与多种语言的 IMO 真题. 当然, 你也可以从官网里找到历年考试的成绩与选手的资料 (包括照片哦), 在做 IMO 题目的时候可以以此为

参考.

数学新星网 (www.nsmath.cn) 里有一些不错的文章, 新星征解的难度也不错 (当然, 难度不太均匀, 建议以题为单位单独做不要计时), 对数学竞赛可能会有帮助.

很多人都会逛一个论坛 AOPS (www.artofproblemsolving.com), 进入 community, contest 就可以找到很多其他国家的题目了, 也可以在论坛上与世界各地的数学爱好者讨论. 我自己做过近年美国的 USAMO, USATST, USATSTST 试题, 确实也不错.

另外, AOPS 上的方法一般是网友自己做出来的, 可能有很多方法与官方答案不同, 有很多非常优美的方法值得学习——有些题目官方答案很复杂, 但在 AOPS 上却有短而精辟的解答.

Aigner 与 Ziegler 的《Proofs from THE BOOK》是一本拓宽视野的好书. 平时没事可以翻翻, 里面的很多证明有推广价值. (不过有的章节需要用到高等数学的知识, 看不懂就留给以后再看吧)

二、专题

下面按照代数、几何、数论、组合的顺序给出一些具体的建议.

1. 代数

代数, 主要的题型有多项式, 复数, 数列, 不等式, 函数方程.

关于代数, 个人认为学一些数学分析和高等代数对代数感会有提高——有些题目会用到分析或者代数的思想, 未来的题目也很有可能向着这个方向发展, 所以有时间的话推荐大家学一些.

系统讲多项式和复数的书其实不多, 《数学竞赛研究教程》里有讲到一些, 但我对复数和多项式的了解主要还是来自于题目. 有一些特殊的多项式, 比如 Chebyshev 多项式, 还是要了解的. 多项式另一个考点是多项式的数论性质, 比如 Hensel 引理等, 也要了解.

数列, 要熟悉各种各样的换元法和求通项公式的方法, 能求出通项公式的数列往往可以通过通项公式大幅简化问题. 数列的另一种考法是与数论结合. 比如像 Fibonacci 数列这样的二阶线性递推数列有很好的数论性质, 要专门研究.

不等式是一个大坑——种类繁多, 套路复杂. 拿到一个不等式, 第一件事一定是猜取等, 通过取等确定最基础的方向. 一般来说, 取等都是比较容易猜出的, 比如若干取 0 若干相同; 但是也有例外, 比如不对称的不等式和一些算常数的

不等式. 遇到不确定取等条件的不等式, 最好先观察有没有简化的方法: 比如可以通过调整, 让最小者是 0; 对局部求导, 得到一些要满足的性质等等.

三元对称不等式有一个很厉害的方法, 就是配齐次, 通分, 展开, 然后利用 Schur 不等式和 Murihead 定理一点一点消去一些项 (当然还有直接把一些平方展开可以得到的“自制”不等式), 最后把它拆成若干个非负的东西之和就可以了. (一般来说, 不等式都不会太强, 一点一点来总能可以做出来的) 当然, 现在考的三元对称不等式越来越少了, 一般也不会让你可以这么暴力的解出, 比如给一个很不友善的条件之类的 (如 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 让你配不了齐次). 遇到这种情况还是老老实实用传统的不等式方法 (均值, 柯西等) 做吧.

切割线法和局部不等式是解决问题的独门秘籍. 如果遇到简单放缩无法奏效的情况, 可以试着自己构造一个这样的局部.

如果不等式中变元是分离的, 可以考虑用 karamata 不等式和 Jensen 不等式, 验证一下凸性, 说不定就做完了或者大幅简化问题.

调整法很笨, 但是有的时候却能奏效. 但是调整法要注意: 如果要使用无限次的平均调整, 一定要说明调整是作用在紧集上的, 从而最小值点存在. 另外, 不是所有题都可以轻易地调整出来, 如果调整法计算量不小的话, 试试其他方法吧.

函数方程, 是一个中国考察得比较少的方向, 但是在 IMO 预选题代数里往往占据“半壁江山”. 个人觉得函数方程是代数里很难提高的部分, 不同题目的处理方法也不太有共通性. 虽说本质上就是不断代入, 但也有一些技巧, 比如寻找函数方程的单调、单射满射等性质; 考察函数的值域, 或者取函数的等于目标函数的点的集合, 刻画集合的性质以证明是全集; 适当给出变元间的关系使得等号两边部分项相等而消去; 把较复杂的复合函数带入, 结合之前的结论变形消元等等.

代数历来是中国的传统强项与国内竞赛中的一大考察重点. 不过相对而言, 代数对基本功要求较高, 通过训练会有较大提高.

2. 几何

几何与其他方向不同, 有多种本质不同的处理手段, 最关键的是掌握多种手段解题——纯几何 (包括几何变换), 三角, 复数, 重心坐标系, 解析几何.

这里我不讨论比较“奇怪”的几何题, 比如几何不等式或者立体几何. 当然主要原因是考得不多, 我自己也没有学过……

纯几何法, 简单来说就是几何的传统方法——一般标准答案一定会至少给出

一个这样的纯几何法, 所以普适性最强.

关于纯几何, 最权威的书或许是《近代欧氏几何学》. 这本书里记录了很多很有趣的性质, 但是对具体处理几何题似乎帮助不大……不过有向角和有向线段的书写在这本书里有, 可以练习一下; 另外, 这本书里面讲了很多关于反演的性质, 如果你不熟悉反演变换, 把这本书里面的性质证一遍会熟悉很多.

反演是处理几何题的常用手段——一般来说, 在拿道题目之后都要检测一下能不能通过反演大幅简化问题. 这是一个处理很多几何问题的捷径, 必须要学会, 也不算很难.

调和点列的性质很多, 也有很多很“套路”的题目可以用调和和配极做. 关于这个, 我印象里《中等数学》有一篇关于调和的文章讲的比较详细.

几何的定理和构型要熟悉. 比如伪内切圆, 三角形五心的关系, Miquel 点, 帕斯卡定理、笛沙格定理等等. 很多几何题是基于这些构型的, 如果不熟悉的话非常吃亏.

纯几何大概能讲的就这么多, 最后要记住: 如果做不出来, 请画一个标准图, 找相似、共线、共圆. 大智若愚, 往往做不出题的原因是你对这个图形的结构了解的还不够深, 只需猜到一些结论或许很快就能得到突破.

三角, 是简单几何构图中计算起来最快的方法, 也是覆盖面最广的方法, 所以联赛几何经常可以用三角做. 三角法的技术含量其实不算很高, 大概就是角写出来 (这里可能要用角元梅、赛), 然后用正弦、余弦定理表示边, 最后算出对应的性质. 需要注意的是: 和差化积、积化和差等三角变形公式必须非常熟悉, 并且在处理具体问题的时候, 一般来说乘比加的形式更漂亮, 因为更容易消掉一些东西——所以在表示边的时候尽可能少用余弦定理, 余弦定理一般是最后带入算.

另外, 三角法有时要配合同一法. 有时候一个角看似不好求, 实际上就是已有角的线性表示, 带入之后一下就做出来了. 所以在三角法陷入僵局的时候可以考虑带入特殊角.

复数法. 复数法其实适用范围并不广泛, 但是有的题目用复数会远简单——复数是做几何题的独门兵器. 复数法一般来说只能适用于圆比较少的情況: 因为给定 3 点求圆心坐标很困难. 一般来说, 原点取一个圆的圆心, 并把这个圆取成单位圆, 这样可以认为圆上的点有 $z\bar{z} = 1$. 相似三角形用复数比较容易表示, 但解两条直线的交点比较困难. 在计算的过程中, 尽量把所有点都用单位圆上的复数表示, 这样取共轭只需要把里面所有单位圆上的复数 z 分别换成

$1/z$ 即可.

在用复数法解题之前要先判断一下计算的复杂度. 一般来说, 表示起来复杂的点不能太多, 否则计算量会指数级增加.

重心坐标系我不会, 但似乎也有其用武之地, 有兴趣的同学可以自己了解.

解析几何法. 这是一种很暴力的方法, 适用范围最差, 计算量最大. 我几乎没见过有人可以用解析几何做出 CMO 以上难度的题, 就算有, 用三角也可以比较快的做出来. 当然, 有的题目用曲线系等“高级”解析几何方法可以迅速做出, 可以参考单墀《解析几何的技巧》.

处理一道几何体, 一般要先画一个比较标准的图, 然后观察是否有好的性质, 估测各种计算法的复杂度, 然后选择一种方法做下去. 特别要注意的是, 在 CMO 与之后的考试中, 如果点线之间的位置关系不确定, 最好使用有向角与有向线段或者分情况讨论 (尽管一般是本质相同的); 特别的, 在每个交点取出之前, 一定要先询问自己“是否有交点”, 避免因为这样的平凡情况被扣分.

中国国内的考试对几何的要求不算高, 并且很多几何题可以用“算”的方法解出, 所以高手做几何题往往更偏重计算法. (有一定原因是中国选手代数基本功较好) 计算法的优势在于熟练之后所需时间比较稳定, 不容易卡壳. 不过, IMO 中较难的几何题中有不少通过计算法很难解出, 中国队就普遍做的不好. 所以我更推荐大家在学习几何的时候计算、纯几何方法都要熟练, 运用“综合法”解题, 这样才更容易稳定发挥.

3. 数论

数论题目主要分成 3 类: 传统型数论、估计型数论、结合型数论.

传统类的数论主要用同余, 阶与原根, Pell 方程, 二次剩余来处理. 我自己看的是潘承彪和潘承洞的《初等数论》的前面一部分章节, 其实已经足够了. 稍高级的技巧, 比如关于素数分布、连分数的结论, 其实也可以学学, 在有些题目里会有帮助.

传统类的数论中国人比较擅长. 这一类的数论套路有限, 多做一些题就可以了. 另外, 命题人讲座里的《初等数论》也不错, 题目难度适中. 不过这一类题目出现的频率与难度目前在逐渐下降.

LTE 引理很有用, 算是一个“黑科技”, 一定要熟练掌握; 关于 $n!$ 里素数的指数以及组合数里的数论性质也要熟悉.

估计型数论是最近出现的比较新颖的题目, 一般是对一些量算两次——比如 Bertrand-Chebyshev 定理和有关素数分布的结论的证明. 在我的印象里, 估计

方法在处理 square-free 的时候很好用, 但很多估计类题目其实并不算明显——很多题目使用估计的想法出其不意, 要是没有往这方面想, 就很难做出了. 同时需要记住一些关于素数的结论, 比如素数倒数和发散等等.

结合型数论, 其实近年考的也不少, 主要是与组合或者代数结合. (IMO 2016 T3 连几何都结合了起来, 很有趣)

与代数结合的数论有整值数列, 数论函数方程, 整系数、整值多项式等. 这一类题目有自己独特的处理方法, 要专门寻找并练习.

与组合结合的数论题不少. 这一类题目实际是“披着数论皮的组合”, 在处理中常使用抽屉原理、构造法等方法来解决, 中国剩余定理往往在其中扮演了重要角色.

另外, 还有一种整体思考类型的数论题目, 最典型的题目是: “在 $2n-1$ 个整数中总可以取出其中 n 个数, 其和为 n 的倍数” (Erdős-Ginzburg-Ziv 定理). 第一次见到这种方法肯定会觉得不可思议, 但这种方法其实是证明存在性的一种较常见的手段.

综合型数论近年来在数论题目中出现的比例越来越高. 事实上, 跨分支出题是近年来的命题趋势. 所以要提升自己的知识的综合运用能力.

4. 组合

组合, 大概就是前面三个分支的补集吧. 做过 IMO 预选题的同学都知道组合的厉害——组合是四个分支中平均难度最高的分支, 方法纷繁复杂, 不易分专题训练; 有人笑称一些组合题是“小学奥数”, 其实有一定道理——很多组合题并不需要很多前置知识, 答案也只有寥寥数行, 却有很高的本质难度. 所以组合题的训练是四个分支中最困难的, 做组合题很依赖大脑中的“灵光一现”. 当然, 也正因为做组合题的方法较多, 如果尝试某种方法久而未果, 最好尝试新的方法, 很可能会有收获.

关于组合, 我大概能想到的专题有图论, 集合, 组合几何, 组合恒等式, 母函数以及其他杂题.

图论, 个人觉得 Bondy 和 Murty 的《Graph Theory with Applications》是不错的教材, 这里面已经有足够应付竞赛的性质和定理了; 命题人里的《图论》也不错. 当然, 只看这样的书并不能熟悉真正的题目, 我强烈推荐大家找本俄罗斯数学奥林匹克 (RMO) 的书来, 找到里面所有的图论题来做.

关于集合的问题出现的很多, 但是方法其实与其他组合题差不多, 有一些可以用图论里的方法, 如 Hall 定理; 另外一些题目可以用归纳法或者极端原理.

集合里也有一些值得注意的定理, 比如 Sperner 定理, 有很多不同的证明, 最好都要了解 (因为有很多题目可以用类似定理某种证明的方法做出).

组合几何, 命题人讲座的那本还不错, 但我也只是翻过. 组合几何类型也很多, 包括棋盘问题和格点问题, 主要还是需要做大量的题目来熟悉竞赛题在考什么.

组合恒等式其实更多的时候主要采用代数或者数论的方法解决, 只有少数组合恒等式可以用“组合”来解决. 推荐《研究教程》里组合恒等式和母函数的章节.

母函数, 有一本很不错的讲母函数的书, 是 Graham, Knuth, Patashnik 写的《Concrete Mathematics》. 其中讲特殊数列, 母函数和母函数的应用的部分非常详细, 但缺点是比较长. 当然如果没有这么多时间, 单薄的《母函数》也不错.

其他题就归结为杂题了. 杂题类型很多, 没有什么固定的方法, 只能多做题寻找其中的规律.

特别的, 我要提一下代数方法 (比如线性代数法, 组合零点定理等) 以及概率方法. 这些“新颖”的方法容易被忽视, 但却有其用武之地. 有兴趣的同学可以自己研究一下. (tips: 在 AOPS 上找 IMO 2012 T3 和 IMO 2014 T6, 有惊喜)

关于组合题, 我强烈推荐 RMO 的题目. RMO 里的组合题都非常好, 不算很难, 但是用到了很多方法. RMO 的题目一般偏重几何和组合, 代数和数论会相对简单一些. 除了 RMO, 莫斯科数学竞赛, 圣彼得堡数学竞赛, 全苏奥林匹克竞赛等竞赛题目风格类似, 也非常优秀.

IV. 总结与感谢

如果大家认真地看完了之前写的一切, 可能会有些迷茫, 也可能有点晕. 不过没事, 其中的很多东西可能暂时不会用到, 可以之后再看.

由于笔者水平有限, 文章的逻辑有些混乱, 内容也只是“填鸭式”地把我能想到的东西都写了出来; 但其中, 每一行字都是笔者的经验之谈, 很多简短的话语中饱含了血的教训. 希望大家能尽可能地理解我想表达的意思, 在竞赛路上找到属于自己的天空.

最后, 感谢一路陪伴的同学、老师——是你们的存在让我的竞赛之路如此丰富多彩; 特别感谢 2017 年中国国家队教练组老师们的辛勤付出, 老师们辛苦了!