

关于数学教学改革之我见*

My Views on the Reform of Maths Teaching

姜伯驹

(北京大学数学系,教授 中国科学院院士 北京 100871)

关于数学和数学教改的形势

国家教委已明确提出,大学本科主要不是培养专才,而是要以科学素质教育为主。现在提出的“加强基础,淡化专业”,与 80 年代初的提法不一样,那么数学教育的作用恐怕也应该跟那时不一样。

我记得我做学生的时候,老师讲数学的重要性就是两句话,一个叫做“数学是思维的体操”,还有一句话是“数学是科学的语言”,言下之意,你如果要学其他的科学,就一定要学数学。

现在数学已经直接在科技的前沿发挥作用,不见得要通过别家学科了,这已经有好几个突出的例子。如有的获诺贝尔奖的工作,实际上就是一个数学问题。像 CT 这种先进的医疗设备,其实从硬件来说,它的核心就是一个 X 光机。X 光机不是早就有了吗?问题是怎么把它的数据处理好,从而产生更多的信息。这种数学理论在 30 年代就已有了,后来有人在这个基础上用计算机及时地把信息提取出来,做成 CT 的设备,获得诺贝尔医学奖。这种技术进步应该说是数学的功劳。很多高精尖的东西根本就是控制,完全靠数学模型。在现代的社会生活中,在人文社会科学方面,数学也在开始发挥很大的作用。记得 80 年代初期,我们常常听到出国留学的人的一种反映,说工科的学生到国外去听课,一个拦路虎就是数学。最近几年听到很多文科的,不单是经济的,甚至于政治、社会这些学科的学生到国外去学习时,数学上也碰到很大的困难。所以现在数学用得越来越多,越来越直接,起的作用也越来越大。有人说“数学是生活的需要”,我觉得至少可以说“数学是竞争的法宝”,已不只是我学生时代那两句话了。在很多事情上,在有竞争的地方,它往往是最后取胜的法宝:数学用得好,你就赢了。

当然数学本身在 20 世纪后半叶有很大的发

展,但我觉得最重要的一个发展是数学应用的情况跟“二战”以前很不一样。现在到处都在用数学,而且更多的地方在试图用数学。所以我们要重新思考数学系、数学专业起什么作用。如果你专门培养数学家、数学教师,那么就业的情况就摆在那儿——社会的需求量不是很大。现在更多的需要是什么呢?因为应用有这么大的发展,所以大量需要的人才恐怕是有很好的数学修养,而且对现代数学发展情况有一定了解的这样一些人。这样的人里面,会有相当多的,甚至于多一半的人将来要到其他的专业里去发挥作用。这个转行的机制就是考研或就业。现在越来越多的数学系毕业生在别的专业里读研究生,这个比例越来越大了,而且其他学科的一部分教师也开始看重数学系出身的研究生,一些有远见的企业也开始招募数学系的毕业生。

所以我想数学类的专业,今后定位可能要以这些考虑为主,否则我们就不能对国家建设起到应有的作用,而且还会出现萎缩。这正是教学改革问题的迫切性,因为数学本科教育的作用在发生变化。

关于数学教学改革的指导思想

国家教委倡导面向 21 世纪的教学改革,一些兄弟学科已经取得很大的成绩,走在前面。我想每个学科有各自不同的特点、不同的矛盾,还是要根据自己的问题、自己的矛盾、自己的特点来做,不能照搬别的学科的经验。

比如说,数学类的基础课所讲的核心内容,主要还是 17、18、19 世纪的原理。因为数学是一门演绎的科学,逻辑的基础比较牢固,所以数学基础课的内容相对来说比较稳定。现在面向 21 世纪、面向现代化,基础课的内容、观点是不是就要改掉呢?恐怕不行,因为不大适合数学的特点。当然,物理的基本规律也还是那些,但处理的观点发生了变化。我看数学连这样一个变化都不容易做到。计算机辅助

* 此文系作者在国家教委数学与力学教学指导委员会上的讲话整理稿。

教学方面,数学中演绎的成分比较多,每个人思路的差异也比较大,所以做数学演示也不那么容易。

那么,数学方面的教学改革到底需要解决什么样的问题呢?从80年代以来,教学内容的改革,做“加法”的比较多。但现在,到了90年代,本科教育的作用,数学的作用有这样大的变化,又改成五天工作制,势必要减一些学时。一个典型的态度是,每个教研室都在说:“你减别的教研室的课吧,我们教研室的课不能减。”多年以来的讨论总是在这个圈子里面,这就告诉我们不作一点全局性的考虑,恐怕是很难改得动的。因为只要是搞“加法”,不管你怎么“加”,是不可能使总体学时缩小的。

另外还有一种需要。现在外系对数学积极性很高,文科要求开数学课;理科呢,也想了解一些新的数学方法。大家知道,现在数学用得多了,有很多的方法,其它系科的人耳朵里听得挺多的,象什么混沌、模糊、小波啦,更不要说统计学了。那么大家纷纷要求开课,按过去传统的方法是“量体裁衣”,生物系开生物系的数学,化学系开化学系的数学。这种方式我们现在没有办法做,因为有那么多的系要我们开,这是不可能做的。出路是开放,许多课程本系外系要通讲。这样我们的课程就要模块化,就是根据你学过什么东西,来决定自己选什么模块课程。由于数学是一门演绎的科学,强调前后的逻辑关系,而以前的课程体系是紧密结合在一起的一个链条,不容易分断,这就很难适应现在这个新的需要。所以从课程的组织上来说,也需要作一些全局性的考虑。

但根本的问题还是要把基础课的改革搞好,因为基础课影响后面的课。基础课嘛,顾名思义当然强调加强基础,不过,既然数学基础的内容相对比较稳定,过去比较重视基础的传统又不能丢,那么数学基础课的改革到底要解决什么样的矛盾,现代化主要体现在什么地方?需要解决的首先是对象问题。现在的学生,将来要选择职业,他们将来在工作岗位上会“怎样用数学?用什么样的数学?”要根据这些来决定需要什么样的变化。

数学确实是很有用的。我跟好多同志讨论过“高等数学课程最重要的概念是什么?”有相当一部分同志对这个问题的看法是:高等数学这个课程中最重要、最基本的概念是极限。我不太赞成这个看法。这个课程原来的名字叫微积分,我觉得这个名字可能更能反映这门课程的要点。在我看来,微分、积分才是传统上说的高等数学课程最基本、最重要的概念。当然把其中的逻辑搞清楚,是非常必要的。但是若说要把极限这个东西弄得很清楚,那应该说,是一般拓扑学的任务。说到高等数学,首先是要把微分、积分这些概念弄清楚,并且会用,我觉得高等数学的重点首先应该是这个。如果不是这样,一

开始就去抠在大部分学生看来是很显然的事情,你就等于先给他们当头一棒:宣告直观靠不住。这样,学生学起来觉得枯燥无味,而且他学了以后反而不太注意微积分这些概念的威力和作用。我觉得即使对以后搞数学的人来说,这样学法也不见得是合适的。数学是一门演绎的科学,他的逻辑基础当然是很需要讲究的。但是我觉得我们从50年代以来,数学课程似乎把逻辑演绎体系当成了最主要的一个东西,往往搞数学的人经常想的就是“是对还是错”。当然,对和错是很要紧的。但是,数学难道就只是为了推理正确吗?正确的推理可以讲很多没用的东西。我觉得这个方面是不是有点太过了。课程也是,每门课程都对自己的逻辑体系特别看重,而且希望自己的逻辑体系是自我封闭的。其实,我也是50年代念书的,那时确实是这样的。但是后来,我看到一批苏联教材,有很大的不同。比如说拓扑学本来是从一些逻辑基础方面的问题提出来,可是你看看苏联60、70年代的教材,它讲流形,主要讲的是微分流形的若干重要例子,占了一半的篇幅。定义当然要讲,但是它讲完定义以后,马上讲很多很多重要例子。我们这儿没有这样的教材。以至于现在,你考硕士生,尤其考博士生都要面试,一面试你就发现问题了。他笔试可以做得很好,定义讲得很对。例如考“同调”,我拿一个环面给他,给他一个具体的同调类,叫他给我表示,他不会!考泛函,他泛函的导数讲得很清楚,给他一个最简单的“泛函”,它的导数是什么,他不知道!这就是说他学的是形式,是逻辑,他没有学到数学。形成这样的局面:学生从一年级一进来就学“大头”微积分,“大头”指的是从一开始就是 $\epsilon-\delta$, $\epsilon-\delta$ 学完了以后,在那摔了跟头的人,就再也爬不起来了。过了这个关的人,就“万般皆下品,唯有 $\epsilon-\delta$ 高”,别的东西都没有意思。几何课讲一点直观也不行,非得不用图的证明,才算是证明。我们数学系的教学太形式化了。以至不少学生连物理课都不愿学,对实际问题没有兴趣,这怎么行呢!

我觉得数学固然是演绎的科学,但也要分层次。打一个不一定很恰当的比方,现在大家都在用计算机。计算机只认识“0”和“1”,你编一个程序,先是代码程序,上面接着是汇编语言,再上面才是C语言什么的,然后一直到很上面才是数学软件。我们现在去学计算机,有多少人是先去学“0”、“1”的程序。现在他们有一个词叫“平台”,我先做好一个平台,然后大家就在这个平台上盖房子、做事情。数学其实也一样。我们一般搞数学的人对数理逻辑也没有太仔细的研究,数理逻辑里面真正的问题、麻烦的东西多着呢,我们也就不去管它了,是不是?我们一般也就在我们念的基础课那个平台上做事情。我记得有一本书,是库朗(Courant)与罗宾斯(Rob-

bins)著的“What is Mathematics”,第一章就在讲克罗内克尔(Kronecker)有个观点:上帝创造了自然数,其余的一切都是人创造的。那么是不是在数学中念任何东西都要归结到自然数,才叫牢靠呢?是不是实数就不能认为是一个公共的平台呢?比如拓扑学,要引进一些公理。什么叫公理?公理就是一个平台。欧几里得的公理,我们中学也念过了。其实真要讲几何基础,希尔伯特(Hilbert)的那本《几何基础》,他那里的几何公理比我们中学的公理多得多了,这些东西我们不是也没有深究,不是也学过来了吗?微积分的逻辑基础,也不见得只有天经地义的一条路,“非标准分析”不也是一个坚实的平台吗?以后课程要模块化,只能这样设想:每门课程在某一个平台上做你的起点。

所以我觉得面向 21 世纪,首先在基础课的教学思想上面要改一改。我这是斗胆在这里讲,我觉得,这是多年以来长期存在的一个问题。在应用大发展的时代,要以使学生得到比较好的数学素质为基本出发点,而不是以培养数学家为基本出发点。从基础课开始,就要使他们对数学的理解要宽一点,应用意识要强一点。而且我们不但要反映物理科学的需要,还要反映信息科学的需要。这是我们过去长期忽略的。我觉得面向未来,要从我们的需要、学生的需要这方面去作更多的考虑。换句话说,理科不但要培养应用型人才,而且理科培养的基础型人才也需要有应用的观点和意识,这一点也是很要紧的。当然,在技能方面,现在由于计算机发展了,有一些运算的技巧不必讲得那么多,而在运用计算机的处理方面,要多给学生介绍一些。

以上所说,集中到一点,就是关于数学教育改革的主要矛盾到底是什么?这个问题我在这里提出来,希望能引起讨论。面向 21 世纪也好,面向现代化也好,到底我们的着重点应该放在什么地方?总的来说,我觉得对高年级的课程,我们在新的内容、新的方法方面应给予多一点的注意力,使得学生能够了解一些现代数学的新思想、新原理。但在基础课的阶段,仍要强调“加强基础”,基础课程改革的重点恐怕是要扭转过份形式化的倾向,使学生通过具体的学习对数学的用处、数学在科学发展里的革命性的作用有比较多的体会。

历史的经验值得注意

数学教育改革,从我念书开始,经我看到的、听到的起码就有三次。第一次是 50 年代学苏联,那个时候政治口号是“一边倒”,不学也不行。结果是抄袭了当时的苏联模式。这个模式有很好的方面,确实整个数学教育比解放前有了很大的进步,但是还有另外一方面:模式太单一了。现在在数学教育战

线的同志差不多都是同一个模式里学出来的,我觉得这很不利,既不适应科学发展多种多样的需要,也不利于数学教育的改革。因为数学教育改革中有各种各样的矛盾,各种类型的学校、学生,需要有很多不同的类型,甚至不同的系统,这样才做得好。再一次就是 1959 年的“教育革命”。当时的特点就是政治运动,什么“打倒牛家店”(牛顿),“打倒哥家店”(哥西)。但是,当时的教育革命有没有一点合理的成分呢?我觉得有点合理的成分,就是对“大头”微积分的一种反抗,反对过分的形式化,这是一点合理的成分,但是一弄成政治运动结果肯定是不好的。数学是一个很细致的东西,还是要通过积累,逐步地去改进,不能通过革命的办法。再有一次就是 60 年代美国的一个所谓“新数学运动”,主要是针对高中阶段的数学。这是由数学家发动,经过周密考虑,先编出教材,培训师资,然后推行的一个教改运动。但是干了几年以后,也还是失败了。对于这个失败的教训,我听到一些说法,认为这个跟头栽在两个方面,一个是教师,一个是家长。就是说,尽管一批数学家有很好的设想,但是没有得到广大教师的认同,更没有得到广大家长的认同。可见教学改革这个事情是一个很大的系统工程,一个社会工程。如果说我们要做一些改动,只是由我们这些人——即使我们的意见 100%地统一了,颁布一个大纲,那也不见得能推动。所以一定要充分地讨论,要在广大的教员中讨论,而且还需要得到社会的认同。这个社会的认同,在大学内主要是其它系科的教师,如物理老师,或工科的老师。他们如果觉得你的数学符合他们的学科发展的需要,就容易延续下去,如果他们不以为然,责怪说“你教的是什么玩艺儿?”表示反对,那么对于一个学工科的学生而言,肯定是工科老师的话占的份量大,我们这个事情就很难继续下去。当然,这要有一个过程,我们要向工科的教员宣传我们的观点。总之,我觉得教学改革需要放到一个比较全面的角度来考虑。

关于教材建设与计算机辅助教学

国家教委提出“九五”内要出 100 本面向 21 世纪的教材。我觉得相比之下数学内容变动比较不容易,尤其是基础课教材,若作大的变动调整还需要个认同的过程,所以一旦前面出了一本不好的教材,那么这个数学教学改革的名声马上就会坏掉。所以最好不要急于贴这个标签,而应多一点实践的检验和修改。这是我们应该认真讨论的一个问题。

我想,教科书不应该单单理解为可以照本宣科的书。过去比较强调教材要跟老师教的完全一样,学生才好用。如果这样,那就很难做出任何改革。我觉得我们目前的教学中有一些部分还要采用现有

(下转第 29 页)

种规定对于鼓励短期为国服务、进而促成留学人员最终回国效力是起阻碍作用的。但由于涉及不同部门,目前这一做法尚未改变。这类问题必须要有一位有魄力的国家高层领导人亲自过问、督促修订法规才能解决。

3. 最近一段时期,对于鼓励海外学人以各种方式为国服务十分重视,这是十分应该和必要的,但同时也不可忽略鼓励海外学子学成归国。建议有关部门对目前各种吸引留学人员回国服务的政策调查评估,进行必要的调整。很多政策由于是多年以前制定的,目前已不适应形势发展的需要。例如留学人员回国后可以申请科研启动经费,但近年来回国人员增加,物价上涨较高、较快,而国家给这笔专项经费的总额基本不变,使得该项启动经费的强度实际大大下降,难以真正起到“启动”的作用。

4. 建议设立留学人员回国安家基金。目前国内从事教学和科研工作的知识分子的收入水平相对来说并不高,留学人员回国意味着生活水平的大大下降,影响他们更好地发挥作用。但目前的体制还不允许给这批人以更高的工资。为此,是否可以考虑对那些在国外学成后很快回国的留学人员进行一次性的高额资助,使他们在回国后的基本生活条件得到保障,不必因经济原因而在国外滞留。

5. 要注意发挥已回国留学人员的作用,充分信任他们,给他们创造施展才能的机会。这些人在国

内的成功对在国外徘徊不定的留学人员是最有力的召唤。同时,对于回国人员不论是到国有单位还是到私人单位都应一视同仁,即使是对那些作为外资企业或国际组织职员回国人员,仍应一视同仁,支持和鼓励他们在做好本职工作之外,以各种方式为国家的建设做出贡献。

6. 继续扩大现有的各种鼓励留学人员以各种方式为国服务的渠道,如自然基金委员会、国家人事部、国家教委等部门的短期回国工作讲学基金项目,同时解决相应的政策配套问题。这里比较突出的是双重国籍问题,这个问题近年来应邀来访的留学生代表或团体负责人都曾多次提出。为了工作及生活的便利,在外人员中很多人已入所在国国籍,这给他们经常回国探亲工作带来了不便,因此很多人建议是否可以承认双重国籍。鉴于这个问题涉及到我国与周边国家历史遗留的重大外交问题,一时难以改变,故建议采取变通办法,如对海外入籍学人发放“回乡证”,从而省去办签证等繁杂手续。

目前台湾、香港、新加坡等国家和地区已加强了对海外人才资源的开发和利用。据英国《自然》杂志最近报道,近年来每年回到台湾的留学人员已超过 6 000;同时不少中国大陆留学生受聘到香港、新加坡。我国要抓住这个亚洲人才回流的时机,及时调整政策,吸引更多的海外学人为中华民族腾飞于 21 世纪贡献力量。
(责任编辑 蔡德诚)

(上接第 25 页)

的教材,每个老师在他的改革的地方,可以发他的补充教材,或者是替换教材。要形成这么一种观念:教材是教学的一种辅助材料,老师并不需要完全照着教材讲,而且在有条件的情况下,还应该鼓励老师在他的教学中体现一些他的特点。也应该要求学生从基础课开始就学会念书,这个念书是指跟老师的教学配合起来,灵活地来念这个书。当然教材还需要鼓励多样化。

再就是关于计算机辅助教学,这也是教改的一个重点。数学方面,完全演示性的,象物理教学那样,恐怕不能普遍适用。怎样才能使计算机在我们的教学里发挥更大的作用?这方面已经做过一些尝试,比如说编一些相当于习题课辅导的计算机软件。当然,有一些数学现象,包括几何、概率也可以演示。也有一些教授提出了数学实验课。萧树铁先生领导的那个教改课题组对这个问题有过着重的讨论。我的感觉是,有了计算机,应该可以使把数学学得更好。因为数学有很多事情不能光满足于形式逻辑,还要知道它实际上应该怎样做。真要解决一个实际问题,哪怕已经提成了一个数学问题,你要解决它,也还是需要把你学过的各种方法综合运用,而且你要有亲身的体会。这种“数学实验”很

值得研究。前几年曾大力提倡“数学模型”这门课,现在很多学校都在开设这门课程,受到了学生的欢迎。我觉得对“数学实验”也值得研究一下。当然可以有多种模式,可以跟计算方法课结合,也可以跟计算机课结合,或是单独设立一门课程。现在各校都在强调加强学生的计算机训练,可是据我了解,数学系的计算机课不太受欢迎。不受欢迎的原因跟普通物理不一样。学生用某种语言编了一个程序,老是通不过,然后教师告诉他这儿要用逗号,那儿要用分号。实际上它不跟任何数学内容相结合,学生只觉得繁琐,没有兴趣。你如果要学生去算一个东西,比如说把圆周率算到十位,那么学生就会自己先找到方法,然后自编程序去算;如果程序有错,通不过,他自己改几次也就通了。

在基础课教学中怎样发挥计算机的作用?美国的“微积分改革”运动方兴未艾,百花齐放,已涌现出一大批教学软件,可以在 Internet 上自由调取。我们不妨来个“拿来主义”,调来试用,做些调查研究,取得经验,而目前不必急于强调自编软件。我们还应密切注视国外有关的争论,这样可以少走弯路。

(责任编辑 蔡德诚)