中学“边角边”公理教学中的思考

强 毅

（江西九江学院理学院 332005）

0 引言

近年来，在中学数学课程的不断调整过程中，一个一直有争议的问题是如何处理几何教程中的公理. 这个问题也涉及对希尔伯特公理体系的理解，事实上，希尔伯特当初建立一个完整的欧几里德几何公理体系，是为了回答当时很多人对欧几里德几何的严格性的质疑. 这个问题是“初等的”几何，但它本身绝不是初等的，恰恰相反，它是很深很困难的，是当时数学的顶尖工作（在今天属于数理逻辑的范围）. 这项工作说明，欧几里德几何体系完全可以严格化和完备化，并且是不矛盾的. 但严格化的方法并不止一种，例如张景中就曾给出与希尔伯特公理体系等价的其他公理休系.

此后很长的时间，并没有人主张将希尔伯特公理体系引入中等教育，只是逐渐引入高等教育，特别是师范教育，因为它有助于中学教师对初等几何的深入理解.

个人认为现今中学几何教学中存在一种极端的主张是完全引入希尔伯特公理体系，这种主张现在看来是完全失败. 其结果可能是走向反面，即完全取消公理系统，倒退到比欧几里德更古老的时代. 而取消公理系统的结果理所当然地给学生造成困惑.

1 “边角边”教材的严重问题

2009年教师节前夕，温总理在北京三十五中初二（5）班听了5堂课. 第一堂听的是数学课. 这堂数学课主要是讲三角形全等的判定，还讲了三角形全等的四种条件，以及两边一角全等的几种情况. 他对数学课提出了一点意见：“我觉得40分钟的课包容的量还可以大一点，就是说，一堂课只教会学生三角形全等判定，内容显得单薄了一些，还可以再增加一点内容. ”[1]从温总理的意见中我得到了一些启发，提出来供大家讨论.

从研究现行八年级数学课本（人民教育出版社）中第13章三角形全等第2节三角形全等的条件的课本内容中，我们发现大纲的教学方法主要是先确定三角形是全等的而后用尺规做图这个方式，使得初中学生去接受一系列三角形全等的条件，教材的内容安排如下：1. 先说明如果三角形全等就有对应边相等，对应角相等的性质. 再反过来说明三条边对应相等，三个角对应相等，就保证三角形全等. 2. 通过8个探究，循序渐进的说明三角形的全等条件（边边边，边角边，角边角，角角边，斜边、直角边）.

教材上反复写道“通过画图可以发现”，“通过探究反映的规律”从这些语句中充分体现大纲的教法. 因为课本的编者大概认为大多数的学生会接受通过以上方法得到三角形全等一定成立的事实，希望通过先定义合同后说明运动的观点教育学生，甚至就是强加给学生合同的概念而不说明运动. 编者的做法可能是希望把希尔伯特几何公理中合同公理渗入到八年级平面几何中. 但是现实情况是一部分老师都对欧几里德公理体系和希尔伯特的几何公理体系一知半解. 把希尔伯特的公理体系加入义教的课本，会使得学生更加不能清晰的感觉到公理的体系，教材中两个公理体系的交叉出现反而使得学生负担加重，概念模糊甚至错乱，以致更加厌恶数学. 基于以上的情况导致教师对于教学方法产生不够准确的定位以及对于教学内容产生不够严谨的态度，学生会对数学的公理化思想产生两种态度，一种是麻木接受，另一种是产生怀疑直至提问却很可能得不到明确的答案，这两种都不利于培养学生的理性思维.

多年前，中学几何教程一概都是采用欧几里德几何公理体系，用这样的教程不知培养了多少杰出人才，而且并没有发生混乱或困惑，足见其优越性和成熟性. 其优越性至少有下面几个方面：在逻辑上比学生以前学的课程更严谨，且有很强的

逻辑训练功能;定义和公理都很直观,与普通的经验相符,也易于检验,有很强的实用性;对于图形有较系统的研究方法,有很强的培养图形想象力的功能,等等.在这些方面,至今还没有什么其他的教育方法可以完全替代.

2　欧几里德证明方法的合理性(运动)及一些优秀教师采用的解决方案

本质上我们认为希尔伯特的公理体系与欧几里德的公理体系之间的关系希尔伯特证明了欧几里德的几何体系是完全可靠的,从而解除了当时很多人对于欧几里德几何体系的疑虑.简而言之,希尔伯特证明了两点,一是欧几里德的几何公理是相互不矛盾的,而且没有一条是多余的;二是欧几里德的系统是完备的,即不需要增加任何公理了.(如果再增加一条公理,则或者与已有公理矛盾,或者可以由已有公理推出,即为定理.)这些事实是绝不可能在欧几里德的几何体系中证明的.控制论中的一个基本定理就是:在任何系统中不能证明该系统的不矛盾性.希尔伯特是在一个更大的系统中,证明了欧几里德几何体系的不矛盾性的.这一工作今天属于数理逻辑的领域.为了证明这些,首先需要澄清应该证明什么.在欧几里德的几何体系中,除了公理外,还用到其他一些"显而易见"的事实,包括顺序性,连续性,以及在"边、角、边"的证明中用到的运动等.为了澄清问题,希尔伯特将这些事实都明确地表述为公理,其中将"边、角、边"也作为公理,想来是为了避免使用运动以使公理系统简单些.在给出这样一个公理系统后,一切推理只能从这些公理出发,不能使用这个系统之外的任何东西.只有这样,才能给出一个严格的逻辑体系.由此可见,要理解希尔伯特的上述工作,需要很好的数学修养,这对于大多数人(即使是受过高等教育的人)是很困难的;另一方面,大多数人只需要知道欧几里德的几何体系是完全可靠的,可以放心大胆地使用,无论走多远也不会出错(除非自己犯错误)就够了,不必读懂希尔伯特的证明.既然如此,为什么要把希尔伯特的证明过程中出现的东西,加到大多数人使用的基础教材中呢?

在目前我国中学几何教程中,由于课时的压缩,已经不可能有完整的逻辑体系了.对于中学几何课程的内容如何设置,是一个一直有争议的问题.现在的一些教学名师往往实际讲解课程的时候还是延续欧几里得的证明"边、角、边"的内容.取得的学生较好的理解和认同.例如长春市第九十中学东校的姜影革老师的做法,他在讲解华东版九年级上第 24 章第二节全等三角形的识别的第四课时,根据知识的内在联系以及学生掌握知识的需要,他没有按照教材那样安排第 24 章的内容,先讲命题与证明和尺规作图,他认为在探究三角形的识别方法的时候,通过在已知条件下作图来探究的,有了尺规作图的知识,学生很容易作图,因为三角形全等的说明过程他认为其实就是三角形全等的证明过程,虽然新课标的要求是使证明题简单化,但是必要的数学证明还是有必要让学生掌握的,我觉得教材在编排的顺序上应该在教学中进行适当的调整,以便它更有利于学生的认知水平.

如前所述,欧几里德的体系在今天看来有原始、直观、简单和易于验证等优点,而又能作为初等几何的完整严格的逻辑基础.因此,在中学几何教程的设置中,返璞归真,回归到欧几里德的直观与自然,是一个可以考虑的方案.

3　运动公理以及公理体系的等价性

我们下面给出一个与希尔伯特公理体系等价的一个欧几里德几何公理体系,它由于使用了运动的概念,可以更接近欧几里德原来的想法.

[2]首先,空间可以理解为一个集合,其中的元素称为点.直线和平面都是空间的子集.任意两点 A,B 有一个距离 $d(AB)$,它是一个正实数(并令 $d(AA)=0$).一个运动是空间到自身的一个保持距离的映射.

公理体系如下:

A(结合公理).过任意两点存在唯一直线;过任意不共线的三点存在唯一平面;任一直线上至少有两个点;任一平面上存在不共线的三个点;任一平面包含过其中任两点的直线;任两个平面不能恰有一个公共点;(空间中)存在不共面的四个点.

B(顺序公理).在同一直线上的三个点中,存在唯一点,与另两点的距离之和等于另两点之间的距离.我们称该点在另两点之间.

我们采用下列术语:若点 A 在点 B 和点 C 之间,我们也称 A 和 B 在 C 的同侧,此时直线上所

有与 A 在 C 同侧的点组成的集合(连同 C)称为一条射线,记为射线 CA,而 C 称为射线 CA 的端点. 同一端点的两条射线组成的集合称为一个角,该端点称为角的顶点. 若这两条射线重合,则称该角为零角;若这两条射线组成一条直线,则称该角为平角. 两个角相等的意义是存在一个运动将一个角映为另一个角.

C(连续公理). 对任一直线上的任意两点 A,B 及任意正实数 r,存在唯一与 B 在 A 同侧的点 C 使得 $d(AC)=r$.

D(运动公理).

(1) 一个点通过运动可以移动到任意另一点.

(2)对任意三点 A,B,C,若 $AB=AC$,则存在一个运动将 B 移到 C,且保持 A 点不动.

(3)对任意一点 O 和任意三条射线 OA,OB,OC,若 $\angle AOB=\angle AOC$,则存在一个运动将射线 OB 移为 OC,且保持射线 OA 不动.

(其中(3)也可改为"……保持射线 OA 上的每一点不动").

E(平行公理). 在任一平面上,过任一直线外的任一点至多存在一条与该直线不相交的直线.

可以验证,上列公理体系与希尔伯特公理体系是等价. 而上列公理体系更简单,且更接近欧几里德的原始思想.

总之我们有

命题 1 运动公理蕴涵希尔伯特合同公理.

我们需要证明两点:一方面,由运动公理可以推出合同公理,这一点已由命题 1 给出(详见参考文献 2);另一方面,由希尔伯特公理体系可以定义运动,满足运动公理.

命题 2 希尔伯特公理体系可以定义运动,并满足运动公理.

命题 1 和命题 2 合起来就给出定理 1.

定理 1 若将希尔伯特公理体系中的合同公理换为运动公理,同时保持其余四组公理,则所得的公理体系与希尔伯特公理体系等价.[2]

4 结论

欧几里德的系统中运动是基本的概念,合同是图形由运动搬到叠合时候的结果,所以是由运动派生而得的概念. 但是希尔伯特便不这样作,作为基本的概念是图形的合同,运动是合同的图形相互叠合起来的动作,所以运动是由合同产生出来的概念.[3] 我们知道这样两种方法都是正确的,没有优劣之分. 但是对中学数学教育而言,运动概念显然要比合同概念更加适合学生理解,因此在"边角边"的教学过程中更应该渗透运动的概念,这一点可以从下面我们所举例子中看出.

例 如图所示,任意直角三角形斜边长度平方等于两个直角边长度平方的和. (勾股定理)

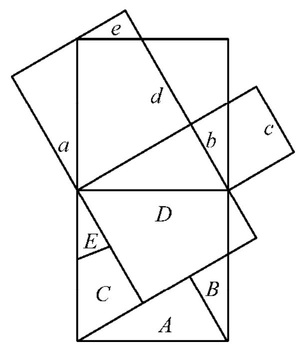
说明:以 A,B,C,D,E,a,b,c,d,e 表示所示图形,

$S_A,S_B,S_C,S_D,S_E,S_a,S_b,S_c,S_d,S_e$ 表示所示图形的面积.

$S_A+S_B+S_C+S_D+S_E=$ 斜边长度平方,

$S_a+S_d+S_e=$ 一条直角边长度平方,

$S_b+S_c=$ 另一条直角边长度平方.



图形 A 旋转 $90°$ 得图形 $a\Rightarrow$ 图形 $A\cong$ 图形 a,

图形 B 平移得图形 $b\Rightarrow$ 图形 $B\cong$ 图形 b,

图形 C 平移得图形 $c\Rightarrow$ 图形 $C\cong$ 图形 c,

图形 D 旋转 $90°$ 得图形 $d\Rightarrow$ 图形 $D\cong$ 图形 d,

图形 E 旋转 $90°$ 得图形 $e\Rightarrow$ 图形 $E\cong$ 图形 e.

即得证明任意三角形斜边长度平方等于两个直角边长度平方的和.

综上所述:运动公理是解决中学几何教学问题的强有力工具,通过现代数学语言把它严格化是十分有必要的. 而应用欧几里得方式证明"边、角、边"内容有益于教师教学,有益于学生接受知识. 可以切实增加课堂教学内容的包容量,就是说,一堂课除了教会学生三角形全等判定,还可以再增加一点内容.

参考文献

1 新浪新闻. http://news. sina. com. cn/c/2009-10-12/091816422767s. shtml. 2009,10

2 强毅. 欧几里德几何体系中运动与中学数学. 硕士论文,2009

3 钱端壮. 几何基础. 北京:高等教育出版社,1959