

关于多边形的定义

邹晴霞

(首都师范大学数学科学学院 100048)

多边形是初中数学的必修内容,目前全国各个省份所用的各个版本的初中数学教材都有关于多边形的内容,但是我们在教材研究中发现各个版本的教材在多边形的基本概念方面普遍存在问题,这非常值得重视.下面我们讨论各个版本的教材中关于多边形的定义以及多边形的相关概念,指出他们的不严谨的地方,同时给出个人对修订多边形这部分内容的看法和建议.

1 多边形的定义

首先我们看一下各个版本的初中数学教材中多边形的定义.人教版第2版初中数学七年级下册教材中多边形的定义如下.

定义 RJ2 在平面内,由一些线段首尾顺次相接组成的图形叫做多边形.^[1]

北师大版初中数学八年级上册教材中多边形的定义如下.

定义 BSD 在平面内,由若干条不在同一条直线上的线段首尾顺次相连组成的封闭图形叫做多边形.^[2]

华师大版初中数学七年级下册教材中多边形的定义如下.

定义 HSD 一般地,由 n 条不在同一条直线上的线段首尾顺次相连组成的平面图形称为 n 边形,又称为多边形.^[3]

浙教版初中数学八年级下册教材中多边形的定义如下.

定义 ZJ 边数为3的多边形叫三角形,边数为4的多边形叫四边形.类似地,边数为5的多边形叫五边形,……边数为 n 的多边形叫 n 边形.^[4]

沪科版初中数学八年级下册教材中多边形的定义如下.

定义 HK 在平面内,由若干条不在同一条直线上的线段首尾顺次相连组成的封闭图形叫做

多边形.^[5]

北师大版和浙教版教材中都有注释,指明其教科书中所说的多边形都是指凸多边形.与北师大版和浙教版教材不同,沪科版教材,不仅指明教科书所研究的多边形是凸多边形,而且定义了凸多边形的概念.而人教版和华师大版教材则没做任何说明.苏教版教材^[6]则没有定义多边形,把多边形的概念当成已然知识,直接讲多边形的其他概念.

以上各个版本的初中数学教材中多边形的定义都没有排除自交的可能性.按照这些定义,图1中图形都是多边形.

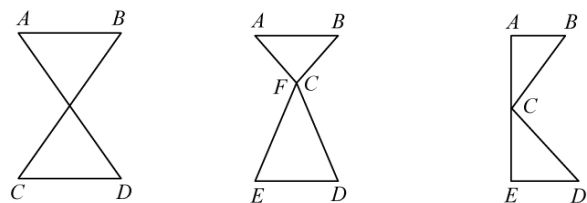


图1

多边形是初中数学的必修内容,也是初中数学中非常重要的概念之一.初中数学中几乎每学期都有涉及多边形的概念,下面以人教版教材为例,列举出多边形概念出现的那些章节.七年级下册第七章三角形,首次介绍了多边形及其相关概念;八年级下册第十九章四边形,整章讨论的四边形是四条边的多边形;九年级上册第二十四章圆,介绍了圆内接多边形、正多边形、正多边形和圆;九年级下册第二十七章相似,介绍了相似多边形,并讨论了相似多边形的特征.

2 Jordan 曲线定理

中学所研究的多边形是不自交的,是一条简单闭曲线,下面我们看一个关于简单闭曲线的重要定理.

定理1 (Jordan 曲线定理) 设 C 是平面中的一条简单闭曲线, 则 C 将平面分割成两个互不相交的开集 W_1 和 W_2 , 它们连同 C 组成整个平面, 并且 W_1 和 W_2 都以 C 作为其边界, 即 $C = \bar{W}_i - W_i, i=1, 2$. 此外, W_1 和 W_2 中有一个是有界的, 称为 C 的内部; 另一个是无界的, 称为 C 的外部.^[7]

Jordan 曲线定理是拓扑学中的一个重要定理, 这个定理很基本但也很深, 即使大学生也一般未读过. 所以我们不可能给初中生讲这个定理, 但我们需要告诉学生这个定理在多边形上的体现. 一个多边形将平面分成两个部分, 我们分别称它们为多边形的内部和外部. 例如, 图2中六边形 $ABCDEF$ 将平面分成两个部分, 分别记作 W_1 和 W_2 , 我们称 W_1 为六边形 $ABCDEF$ 的内部, W_2 为六边形 $ABCDEF$ 的外部.

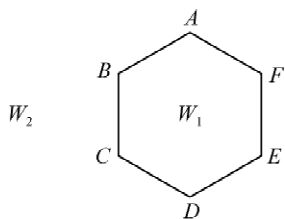


图2

3 多边形的内角的定义

定义了多边形的内部, 我们才能定义多边形的内角. 上节中我们已经对多边形的内部进行了定义, 故我们可以将多边形的内角定义如下.

定义1 一个多边形相邻两边在多边形内部的夹角称为多边形的内角.

定理2 n 边形内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ^[1].

排除自交的情形, 定义 RJ2 仍与数学中的原有定义不一致. 人教版第2版初中数学教材中多边形的内角定义如下.

定义 RJ2NJ 多边形相邻两边组成的角叫做它的内角.^[1]

综合定义 RJ2 及定义 RJ2NJ, 我们无法确定图3中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$, 到底哪个是这个三角形 ABC 的内角.

有人认为, 因为 $\angle 1 < 180^\circ$, 所以显然 $\angle 1$ 是这个三角形 ABC 的内角. 这个

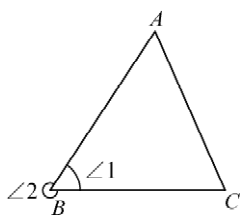


图3

理由显然不充分, 首先内角定义中没有限定内角小于 180° ; 其次如果加上这个限定, 多边形的内角小于 180° , 那么图4中 $\angle 3$ 就是这个四边形 $ABCD$ 的内角,

可能也有人认为, 图4是凹的多边形, 而初中所学习的多边形是凸的. 这个观点显然也是不合理的. 首先, 对初中生讲多边形的凸性显然远远超出课程标准, 其实连中学教师对多边形的凸性概念都不一定理解;

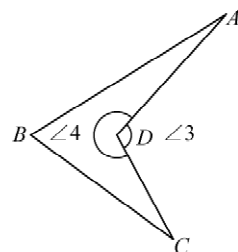


图4

其次, 规定多边形是凸的是不科学的, 与数学中原有的定义不一致(数学中将凸的多边形称为凸多边形); 再次, 多边形内角和公式并不要求多边形是凸的, 如果限定多边形内角公式中多边形是凸的, 那么学生就不知道这个公式在凹的情况下也是成立的, 这样就减弱了定理.

4 个人看法和建议

我们知道数学的逻辑性非常强, 非常严谨, 以上各个版本的教材中关于多边形的定义显然不严谨, 这不仅严重伤害了这些教材的科学严谨性, 而且在教学中肯定会引起不少麻烦, 同时也不利于培养学生严谨的治学态度.

因为各个版本的初中数学教材中关于多边形的概念部分均有严重的缺陷和漏洞, 所以我们需要修订这部分内容. 如何修订这部分教材, 是教材编写者需要思考的, 这是对教材编写者的一个考验, 同时也是教材编写者的责任.

下面我就个人对多边形概念的理解, 给出定义多边形的看法和建议. 我认为多边形可以定义如下.

定义2 多边形是一串首尾相接的线段 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ 组成的图形, 其中除了每个点 $A_i (1 \leq i \leq n)$ 是两条线段的公共端点之外, 任何两条线段都没有其他交点. 我们记这个多边形为 n 边形 $A_1A_2 \dots A_n$, 称点 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 边形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的顶点, 称线段 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ 为 n 边形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的边.

根据这个多边形定义, 我们可以知道图1中三个图形都不是多边形. (下转第24页)

以渗透一些随机抽样的思想和方法是可行的. 因此, 初中阶段的学生可以学习一些随机抽样的方法.

5.4 从小学生对统计的认知特点看, 二三年级放在一个学段, 可能不太科学

从统计检验的结果表明, 从整体上看, 学过统计的二三年级学生对样本的认知水平有显著差异. 学过统计的三年级学生对样本的不同认知水平明显高于学过统计的二年级学生. 这是从本研究问卷调查所获得的数据中发现的结果, 对于将来的小学统计课程的设计可供参考.

参考文献

- 1 Moritz J B, Wason J M, Pereira-Mendoza L. The Language of statistical understanding: an investigation in two countries [C]. Paper presented at the annual conference of the Australian Association for Research in Education, Singapore, November, 1996
- 2 Jane M. Watson, Jonathan B. Moritz. Development of understanding of sampling for statistical literacy[J]. Journal of Mathematical Behavior. 2000, 19: 109—136
- 3 Schwartz, Daneil L., Goldman, Susan R., Moore, Allison L., Zech, Linda, Smart, Karen, Mayfield-Stewart, Cynthia, Vie, Nancy J., & Barron, Linda (1994, April). Adolescent understanding of sampling in the context of a survey. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA
- 4 Fischbein, E., & Schnarch, D. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions[J]. Journal of Research in Mathematics Education. 1997, 28(1), 96—105
- 5 Konold C. Informal conceptions of probability[J]. Cognition and Instruction. 1989, 6: 89
- 6 Stohl, H., & Tarr, J. E. Developing notions of inference using probability simulation tools[J]. Journal of Mathematical Behavior. 2002, 27, 319—337
- 7 Aspinwall, L., & Tarr, J. E. Middle school students' understanding of the role of sample size plays in experimental probability[J]. Journal of Mathematical Behavior. 2001, 20, 229—245.
- 8 Helena P. Osana, Erin Patria Leath 和 Shelley E. Improving evidential argumentation through statistical sampling: evaluating the effects of a classroom intervention for at-risk 7th-graders [J]. Journal of Mathematical Behavior. 2004, 23: 351—370
- 9 王秀军. 对中学生自发的抽样知识的调查研究[J]. 数学教育学报, 2003, 8(3): 66—87

(上接第 18 页)

有了这个多边形的定义, 首先我们要说明多边形将平面分成两个部分, 分别称为多边形的内部和外部, 见第 2 部分.

其次, 定义了多边形的内部, 我们就可以定义多边形的内角, 见第 3 部分中的定义 1. 有了这个多边形的内角的定义, 我们就可以判断图 3 中的 $\angle 1$ 是三角形 ABC 的内角, 图 4 中的 $\angle 4$ 是四边形 ABCD 的内角.

最后, 再讲多边形的内角和公式, 见第 3 部分中的定理 2.

以上仅是我个人观点, 由于个人所见有限, 难免有不当之处, 欢迎各位读者批评指正.

参考文献

- 1 课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心. 义务教育课程标准实验教科书数学七年级下册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2007, 6: 79—88
- 2 义务教育数学课程标准研制组. 义务教育课程标准实验教科书数学八年级上册[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2007, 3: 125
- 3 王建磐, 王继延, 唐复苏. 义务教育课程标准实验教科书数学七年级下册[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2006: 159
- 4 范良火, 岑参, 张宝珍. 义务教育课程标准实验教科书数学八年级下册[M]. 杭州: 浙江教育出版社, 2005, 2: 104
- 5 《新时代数学》编写组. 义务教育课程标准实验教科书数学八年级下册[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006, 12: 70
- 6 杨裕前, 董林伟. 义务教育课程标准实验教科书数学七年级下册[M]. 江苏科学技术出版社, 2004, 20—32
- 7 Munkres, J. R. 著; 熊金城等译. 拓扑学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006, 4: 299