

卓有成效的民办英才教育

——以色列访问纪实

张英伯

(北京师范大学数学科学学院 100875)

2012 年 6 月 3—11 日,北京师范大学附属第二中学的金宝铮老师,实验中学的姚玉平老师,北师大数学科学学院的王昆扬教授和我在访问了法国和英国之后,赴以色列考察他们的数学英才教育.

从北京出发之前,我们几个人都分别得到了警告:那里不安全,马上要和伊朗打仗了.

到达特拉维夫机场,安排我们访问的 Zvi Arad 教授携夫人以及 Bernard Pinchuk 教授已经等在出口.我们分两组坐上他们的汽车前往内坦亚(Netanya).汽车穿过首都特拉维夫时,车窗外的街道绿树成荫,街道两旁现代化的建筑林立,随处可见大型超市,以及国际知名公司的大楼,这是以色列一座新兴的大城市.出了特拉维夫,汽车一直沿海滨的高速公路行驶.内坦亚是一座新建的海滨小城,为我们安排的旅馆正对着大海.



地中海海滨

放下行李,我们马上穿过一条小马路,来到海滨.湛蓝的地中海一望无垠,蔚蓝的天空透明洁净,与远方的大海连成一条美丽的弧线,这纯洁的

蓝色让人心醉,令人神往,如此的静谧与平和,使流连海滩的人们不忍离开.

美丽的海滩很难让人联想到战争.然而几天以后,我们在海滩上遇到了一队跑步的士兵,男孩和女孩都背着沉重的背包和长长的枪支,一张张年轻的脸庞透着稚气,看着都让人心疼.听 Arad 教授介绍,我们隔壁的一座宾馆,两年前曾被炸成灰烬,200 多人遇难.战争的烟云,至今仍然笼罩着世界上的许多地方.

第二天早晨,一辆出租车等在旅馆门口把我们送到内坦亚学院(Netanya College),Arad 教授是这个学院的创始人和院长.Zvi Arad 是一位代数学家,研究群论,发表过 90 多篇文章,3 部专著,是 Table Algebra 领域的学术带头人.他还担任多种代数期刊的编委,创建过两个研究所,担任过以色列国家高等教育委员会委员,并且在与德国、俄国、中国的学术交流中起到过举足轻重的作用.

Arad 的双亲在二战期间从波兰逃难到巴勒斯坦地区,(那时以色列还没有建国),就在祖先的土地上定居下来了.Arad 的组织能力也很出色,曾经做过系主任,理学院院长,巴依兰大学校长,那可是全校的教授选举产生,大学董事会讨论通过的.应内坦亚市政府的请求,他于 1994 年辞去校长职务,在一位企业家的资助下创建了内坦亚学院.我们西南大学的陈贵云教授曾在他那里做过博士后,并邀请他访问过中国,还参与合写过一本书.贵云说他为人特别有亲和力,每天上下班见到同事们,不论是教授,秘书,还是清扫楼道的工人,他都驻足亲切地打招呼.怪不得天天接送我们的出租车司机总说 Arad 是个好人.

30 年前 Arad 在巴依兰大学数学系做教授的时候,倡导和组织了数学英才项目(The Program for Mathematical Talented Youth),没有政府的资助,完全靠民间的力量,从零开始逐年做大、做强,得到公众和政府的认可,在以色列的数学英才教育中起到了排头兵的作用.和他一起创业的 Pinchuk 教授是一位谦和稳重的人,他出生于美国,在那里拿到博士学位,做分析方向,讲一口流利标准的美国英语.他们两个头顶上都戴着犹太教的小圆帽,我奇怪这么小的帽子怎么能戴着不掉下来呢,Arad 低下头来让我看,原来是用发夹固定在头顶上的.

去年年初,国际数学教育委员会(ICMI)的执委会在北京召开,我向 ICMI 副主席 Mina Teicher 表达了我们中国的老师和教授希望深入了解以色列英才教育的愿望,她为我们介绍了这个项目的负责人 Zvi Arad 教授.实际上 2010 年初在新西兰的执委会上,Mina 已经给我详细地介绍过这个项目[1].

走进学院的小会议室,长桌上已经摆好一盘盘的水果和糕点,每人的座位前都有一份英文文件夹,里面装着我们的行程,数学英才项目的起源、组织形式、各种数据,每个年级的课程设置,入学考试题目,以及一份教案.真是计划周密,准备

充足.



研讨会

我们在长桌的一边坐下,Arad 教授,Pinchuk 教授和项目组 3 位年轻的管理人员坐在对面.其中那位英俊的小伙子名叫 Gil,也带着犹太小圆帽,英语专业毕业,我们在出发之前已经和他通过多次邮件和电话,这份完备的资料应该他译成英文的.

第一次会议介绍了英才项目的全貌.以色列的孩子和我们中国一样,6—12 岁上小学(1—6 年级),12—15 岁上初中(7—9 年级),15—18 岁上高中(10—12 年级),18—21 岁服役,见下表的第一、二、三行.表中的第二、三、四行表示英才项目的三个相应部分的年级及年龄:

| | 小学 | | | | | | 初中 | | | 高中 | | | 服役 | | | |
|----|----|---|---|---|----|----|------|----|------|----|----|------|----|----|----|----|
| 年级 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | | | | |
| 年龄 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| | | | | | | | 初中项目 | | 高中项目 | | | 大学项目 | | 服役 | | |

目前英才项目已经在 21 个城市设点,在 2012 年,初中项目(School Program)开办了 118 个班级,2663 名学生;高中项目(High School Program)开办了 72 个班级,1459 名学生;初高中每班 21—25 人,在各个城市所设的班内学习.大学班(Academic)260 名(几年前只有 90 名),在特拉维夫、海法、巴依兰三所大学学习.学生通过严格的考试入学,并且逐年通过考试层层淘汰,只有非常有天赋同时非常努力的学生才有可能走完这段艰苦的历程.

正规学校的学生在 12 年级参加国家的统一会考,大约 75% 可以通过,得到中学毕业证书.英才项目的学生在 10 年级参加数学会考,通过率为

98%,其中有 74% 男生,26% 女生.正规学校的学生高中毕业后都要到部队服役,而英才项目的学生可以推迟一年,19 岁参军.在部队里他们会被委派在技术性最强的军事部门工作,并继续在上述 3 所大学学习研究生课程(不一定是数学),得到硕士学位,服役 3 年至 21 岁.然后再次选择自己未来的研究方向,可以在以色列,也可以在世界上任何一个国家攻读博士学位.这种服役方式,应该是以色列政府对英才项目从国家层面的肯定.

英才项目的教师选拔也很严格,大部分是数学功底非常强、并且经验丰富的中学老师,必须有学士学位,有的还有硕士、博士学位.项目公开招聘教师,经过筛选简历,面试、试讲、第 2 次面试共

4 道程序,入选的老师必须经过项目培训才能上岗. 他们的工资大约相当于一般学校教师的 3 倍.

最近 8 年以来,以色列政府开始在正规学校实施英才教育,大约从每 150 人中选拔 35 人左右组成一个班级,加深各个学科的课程.

第二次会议是由初中项目(enrichment)和高 中项目(Bagrut,以色列的一种考试)的负责人(director)分别介绍他们的工作. 经过 30 多年的实践和摸索,英才项目逐步形成了自己独特的课程体系和课程标准.

初中项目学生的年龄为 11—12 岁,在正常学校的六年级和初中一年级读书. 这些孩子们在校学习之外每周上一次英才项目的课程,设在下午 4 点至 7 点半进行,一共上两节课,每节课 90 分钟,中间休息 15 分钟. 一年的学费是 500 美元.



初中组的学生

六年级(11 岁)的课程标准共有八个内容.

数论:回文(对称排列的)数;数的关系;中国七巧板;模计算;数的性质;素数;码和加密;条码的数学.

拓扑:莫比乌斯带.

组合与概率.

数学游戏:数独(Sudoku,一种日本游戏);魔方;数学拼图(Mathematical puzzles);年轻的魔术师;数列;图形序列;基于圆的拼图.

几何证明:折纸;计算面积和不同图形的周长;圆饼;方块.

数理逻辑:逻辑拼图(Logical puzzle);现实拼图(Truth puzzle)

对策论:Zermelo 定理.

图论:用图形解决问题.

七年级(12 岁)的课标如下.

数论:有特殊性质的数;破解拼图——单变元方程;定义新的数学运算;两种数系;斐波那契数列.

图论:柯尼斯堡七桥问题;地图的着色问题.

概率:帕斯卡三角及其在概率问题中的应用.

数学游戏:年轻的魔术师;拼图;Hanoi 塔问题;数学填字拼图;火柴杆拼图;数学史;物理——刚体运动,力和动量;拼图与犹太假日的关系.

几何证明:毕达哥拉斯定理及其应用;几何证明;全等——通过游戏实验.

数理逻辑:解决逻辑问题的方法;真实问题;逻辑法则;悖论;数学解题策略.

对策论:Zermelo 定理.

数学——科学的王后:DNA 的对称排列.

看得出来,这份课程设置很费了一番心思. 孩子们只有十一、二岁,正是天真烂漫,打闹玩耍的年龄,如何让这些有天赋的孩子不但喜欢数学,还能自觉自愿地学习数学,确实是一项艰巨的挑战.

英才班的课程年年更新,一方面需要仔细观察学生喜欢什么,另一方面需要跟上全世界飞速发展的科学技术的脚步,不断汲取新鲜的知识. 为我们准备的文件夹里有一份教案:超市的秘密(The Supermarket Mystery),像讲故事一样娓娓道来,介绍了条形码 UPC 的板式,识别图书的 ISBN 编码,以及矩阵条形码.

文件夹里还有一份小学六年级学生进入英才项目的入学试题,共 75 分钟,37 道题目,内容有绝对值计算,分数化小数,一元多项式和分式计算,将数值带入多项式中的字母,给出一个图形判断线段的平行、垂直、角的相等;给出一个园内接等腰直角三角形,问斜边是否等于两直角边之和(没有平方),底角是否 45 度,大多为选择题.

为了提高学生的兴趣,老师们想出了种种高招,比如把好朋友分在一个班,学期结束时请家长来看学生的成果展示,有些题目家长可能做不出来,孩子们就很高兴.

高中项目学生的年龄为 13—15 岁,在正常学校的初中二、三年级及高中一年级读书. 第一年与初中项目一样,在校学习之外每周上一次英才项目的课程,共上两节课,每节课 90 分钟,第二年用英才项目的数学课代替学校的数学课,但仍然参

加学校的数学考试, 第三年连学校的考试也不参加了, 但其他课程仍然照常在学校随班听讲. 高中英才项目每周的课外作业为 5—7 小时, 老师提供电话咨询服务, 一年的学费是 750 美元.

第一年(学生 13 岁, 八年级)的课程标准共有三个方向.

代数: 幂和根的性质; 解方程(一元一次和二元一次, 一元二次和二元二次, 无理方程); 不等式(一次, 二次, 无理); 指数和对数方程; 指数和对数不等式; 方程理论. 注释: 代数是数学英才项目众多内容的基础, 以便使学生在训练和练习中养成有计划的工作习惯, 以及对数学问题清晰的表达.

几何: 全等和相似的理论; 等腰和等边三角形; 四边形(矩形、菱形、平行四边形、正方形、梯形); 圆和多边形的性质. 注释: 平面几何为解析几何和三角函数提供了基础, 在这一阶段, 学生学习数学证明.

解析几何: 两点间的距离; 直线方程; 垂线和平行线; 点到直线的距离; 将一条线截成给定比例的线段; 圆和切线.

第二年(学生 14 岁, 九年级)的课标进入了高等数学.

函数: 函数及其定义域的定义; 求函数的定义域和值域; 正、负函数; 确定函数的增减区间; 通过图形分析找到函数的极大、极小点; 偶函数和奇函数; 函数极限的定义. 注释: 第一、二年侧重于初等函数.

微分: 作为极限的导数的定义; 微分; 曲线的切线及其在考察函数性质中的应用; 用微分解决极大和极小问题. 注释: 包括曲线的轨迹和函数性质的进一步探讨.

级数: 有限和; 无穷算术和几何收敛级数; 一般级数及其极限. 注释: 在低年级讲述级数的目的是了解级数构造的法则, 我们强调算术级数, 因为它能够帮助学生理解各种级数的求和运算.

数学归纳法: 引言和例子; 等式和不等式的练习. 注释: 放在级数之后讲授归纳法, 因为它对级数求和非常有用.

三角函数: 正三角形的计算; 三角恒等式和方程; 正弦和余弦定理; 用三角函数解决极大和极小

问题. 注释: 第一年已讲过平面几何. Bagrut 中有时将平面几何与三角函数在同一道题目中联系起来. 这个问题也在解析几何中平行地讲过, 以强调它们之间的联系.

解析几何: 复习第一年的内容.

第三年(学生 15 岁, 10 年级)的课标完成了大学工科一年级的数学课程.



高中组的学生

向量: 学生已经在第二年学过三角和解析几何, 因而让他们这个阶段学习向量是能够接受的.

积分: 计算面积和体积的可能性; 强调导数与积分的关系.

复数: 学生已经有向量和解析几何的准备.

字的问题: 起源、工作和混合问题, 将问题次序化有利于理解, 训练学生制表以便综合信息, 并产生必要的方程.

空间三角函数: 跟在几何与平面向量课程之后, 学生对于三维空间的理解和运算会有困难, 我们强调在一个领域中解决问题可以利用另一个领域已有的方法和工具.

概率.

增长问题: 我们将内容放在这里, 尽管也可以在级数后面来讲.

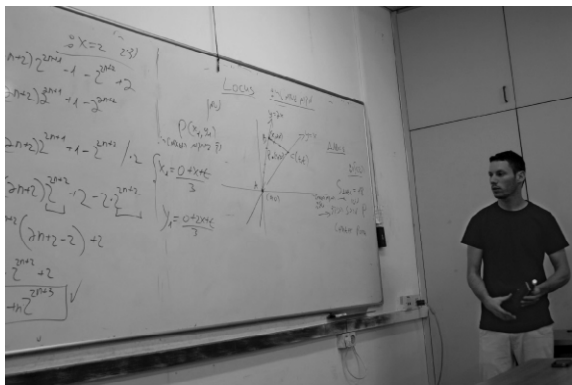
项目的 director 介绍说, 在正规学校, 数学课分成专题一个一个地讲, 学生不太容易把这些专题联系起来. 英才项目经过多年的摸索, 将数学内容整合, 比如平面几何与解析几何连续来讲, 相互之间联系紧密, 使学生能够看到数学的全貌.

会议结束之后, 我们在内坦亚学院听了设在那里的项目点第一年的最后一节课. 任课的女老



初中组的老师

师稳重、干练,长发过肩,黑色长裙拽地,很像我们中国一些经验丰富的中学女教师的做派。这节课讲对数函数,内容真是不少,老师语速很快,估计不快根本就讲不完。13 岁的孩子仍然显小,稚气未脱,女孩很少,男孩大多带着小圆帽,一个个透着机灵劲儿。老师在黑板上写下对数的定义,两个同底对数的和与差,以及对数的整倍数的公式,然后请学生到黑板上演算家庭作业的习题。孩子们太踊跃了,每个人都争着举手发言,争着上黑板演算。大约做了 7 道题目,包括解对数方程,对数不等式,比如: $\log_2 \left(4^{x-1} + \frac{1}{2} \right) = x - 4 + \log_2 33$; $\log \sqrt[3]{x+1} = \log 2 - \frac{1}{3} \log(x+3)$; $\log_3 x \log_3 \frac{x}{9} = 8$.



高中组的老师

我们还在巴依兰大学听了项目第二年的一节复习课,任课教师是一位经验丰富的男老师,内容包括极限,三角函数、级数,语速和板书极快。14 岁的孩子显得成熟一些,仍然十分活跃,争着上黑板解题。题目有:计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - \sin(3x)}{x + 10}$, 解方程

$\tan(4x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$; 计算 $A(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (2n+1)2^{2n+1}$; 已知三角形 ABC 在平面直角坐标系中,顶点 $A(0,0)$, $B(x,2x)$, 顶点 C 位于直线 $y=x$ 上,求三角形重心的坐标。其中第二题相当复杂,第三题要用到导数,第四题用到行列式。

非常遗憾的是项目第三年的课程已经结束,我们没有听成。

英才班的孩子们在各自的学校里都是次次考试得 100 分的最好的学生,到了这里可能会降到 70 分左右。他们一进来就面临着高强度的课程,每节课连续 90 分钟不休息,对学生无疑是一种严峻的挑战。家长有时也不理解,问为什么水平提得这么高。

特别需要精心处理的是,英才项目的淘汰率很高,每 3 个月有一次测验,每升一级都要经过严格的考试。因而在高中项目第一、二学年的考试之后会有一些学生离开。也有些学生成绩较差,老师动员他们离开。尽管孩子走了,少赚了一些美金,项目的老师和主管并不在意。他们说,“我们的目的是追求卓越,不是金钱。”

为了让这些孩子回到学校后能够正常地学习,英才初中项目和高中项目的第一年,孩子们仍然在学校跟班上数学课。另一方面,英才项目不断地与孩子们的家长和学校取得联系,请他们保护孩子的自尊心,年幼的孩子绝不能受到伤害。为了这个目的,一些离开学生甚至可以继续在英才班听课。事实上,孩子们尽管离开了,在英才项目中经受过的严格训练仍然对他们的数学学习颇有益处。

面对这些超常聪明的学生,英才项目的老师们也经受着挑战。孩子们喜欢发现问题,提出问题,这就要求老师有坚实的知识背景,以及对课程的深刻理解和精心准备。孩子们来自不同的家庭,富有的,贫穷的,家长知识水平高的,没有太多知识的,宗教信仰有犹太教、基督教或伊斯兰教的,老师要了解所有的情况,不断地与家长沟通,要有很强的敬业精神。

我们与英才项目组的最后一次会议在巴依兰大学的数学系进行。完成了三年的高中项目,学生们将再一次通过严格的考试,进入大学数学系



巴依兰大学校园

学习. 孩子们进入大学的前两年仍然是中学生, 在各自原来的学校学习数学以外的其它课程, 每周到大学来两次, 第三年就完全在大学了. 他们是数学系里最优秀的学生. 十九岁完成大学学业, 他们去部队服役并同时开始硕士阶段的学习. 当然他们并不是全部选择数学, 选择物理、化学或生物学的都有. 英才项目的数学训练, 为他们未来在各个领域的科学研究打下了扎实的基础. 会议过程中, 老师打电话请来了一位从英才班毕业, 拿过以色列数学竞赛的金牌, 正在巴依兰大学数学系攻读群论方向硕士学位的学生. 他高高的个子, 长得挺帅, 英气逼人, 脸上的稚气尚未脱尽, 没有穿军装. 他和我们聊了一会儿, 说他的理想是做一名计算机专家, 因此博士阶段将要去读计算专业.

我们在巴依兰大学参观了纳米实验室、声学实验室、新建的工程系大楼和犹太教教堂. 以色列是一个宗教氛围很浓烈的国家, 耶路撒冷是世界三大宗教: 基督教、伊斯兰教和天主教的发源地. 在耶路撒冷老城的山坡上, 三大宗教的教堂竟然彼此相邻地矗立着. 当然犹太教堂被罗马入侵者摧毁了, 现在只剩下一面哭墙, 每天都有成千上万的犹太人来到哭墙祈祷. 在耶路撒冷的街道上, 随处可见头带黑色宽沿礼帽, 身穿黑色长袍的犹太教徒; 也可以看到头上围着层层纱巾, 只露出眼睛的阿拉伯妇女.

巴依兰大学的校长接见了我们, Arad 教授和 Mina 都在. 校长也带着小圆帽, 很友好地询问了中国大学的一些情况, 告诉我们以色列和中国在



从左至右: 数学系的两位老师, Bernard Pinchuk, Mina Teicher, Zvi Arad, 巴依兰大学校长, 张英伯, 王昆扬, 金宝铮, 姚玉平

高等教育方面有很多合作. 我们知道 Mina 带过中国的博士后, 我国代数几何的学术带头人之一, 华师大谈胜利教授当年就在巴依兰大学作为博士后与 Mina 合作研究, 取得了出色的成绩. 谈胜利的学生叶飞现在正在这里做博士后, Mina 说他的论文也很出色, 准备去香港工作了. 校长嘱咐 Mina, 数学系可以和我们签订一份合作协议, 请中国的学校派更多的博士后来以色列, 也可以建立两国博士生的互派项目, 扩大以色列和中国的学术交流.

以色列的英才项目在某种程度上类似于科大的少年班, 但是避免了少年班的孩子智力超常, 心理年龄过小, 无法与正常大学生沟通的弊病.

目前中国的不少中学老师和一些大学数学系的教授希望建立我们自己的英才教育数学课程. 如果统一高考在中国一时半会儿还不能改变, 以色列英才项目的模式不失为一个良好的选择.

致谢: 感谢陈贵云教授提供的信息.

文中照片由金宝铮、姚玉平拍摄.

参考文献

- 1 张英伯. 以色列的英才教育项目. 见: 丘成桐, 杨乐, 季理真. 数学与教育[M](数学与人文第五辑), 北京: 高等教育出版社, 2011: 123—126