如何在高中数学课堂激发优等生对高等数学的学习兴趣

付云皓[1] 朱华伟[2] 郑 焕[1]

(1. 广州大学计算机教育软件研究所 510006; 2. 广州市教育研究院 510030)

1 高等数学与初等数学

中学生在数学课堂学习的初等数学是一门在理论和实践方面都很有意义的课程，同时也是高等数学的基础. 很多学有余力的数学优等生对初中、高中的数学很有兴趣，知识方法也掌握得相当牢固，如果他们能进一步认真学习高等数学，其中会有很多人能够胜任理工科的研究与工作. 但是，这些学生到了大学后，有很大一部分缺乏对高等数学的激情，并未发挥出他们在数学上的天赋，这使培养了大量数学优等生的中学数学教师们不无惋惜. 学生们对高等数学的望而却步普遍归因为以下三点：

(1)高等数学与初等数学在思维方式上存在差异. 学习初等数学，重点在于将已有的知识与方法技巧有机地结合，而学习高等数学更需要的是系统分析能力与想象能力，从整体上把握所学的知识体系. 有些数学优等生接触到高等数学后，不能很快地适应高等数学的思维方式，认为高等数学太难，与初等数学脱节，学习没有成就感，无法很好地领会高等数学中的思想.

(2)高等数学与初等数学在内容和学习方法也存在差异. 初等数学中的概念的抽象程度和系统性远远比不上高等数学中的概念. 因此，在学习初等数学时，往往通过机械的训练也能熟练掌握其中的知识和方法技巧，但这样的机械训练不一定能提高学生的抽象性思维和整体性思维. 很多中学生迫于高考的压力，每天重复做着机械的训练，他们容易在这种机械的训练中消磨掉学习数学的激情，迷失学习数学的方向.

(3)从就业角度考虑，人们普遍认为在大学应该学习实用的技术. 但学习每门技术只有达到一定的深度和高度才能真正了解到高等数学在其中的应用. 所以很多学生在学习的开始阶段并不重视高等数学的学习.

高等数学是所有理工科学习的基础，是理科生必须要熟练掌握的知识体系. 在中学阶段，过度的机械练习会扼杀优等生对数学的兴趣，阻碍他们认识数学的实质和数学的美. 因此，针对数学优等生的高中数学教学，在保证完成教学目标的前提下，应尽量摆脱无用的重复演练，引导他们从更高的观点来把握所学的知识，注重知识的整体性. 只有让他们看到问题的本质，才能跳出框框，减少无谓的重复练习. 面对这些学生时，高中数学的教师不但应做好连接初中数学的“承上”工作，还应尽量做好“启下”的工作，帮助他们摆脱上面的问题，从而在数学这条路上走得更远.

想要激发学生对高等数学的学习兴趣，提高数学思维水平，首先要找到高等数学与初等数学的连接点，让学生认识到两者是一个连贯整体的不同部分，很多的问题是互相呼应的.

教师若能在这些连接点处向学生引入少量的高等数学知识和观点，让学生能近距离接触高等数学，则会对学生们的数学发展有所助益. 下面我们通过几个教学案例来说明这个问题.

2 数学案例

案例1 从一道求最小多项式的问题开始

师：我们在初中已经学习过解二次方程，现在来看一个反向的问题.（在黑板上写下数$\sqrt{2}+1$)，哪位同学能够写出一个系数都是整数的二次方程，有一个根是$\sqrt{2}+1$？

（学生们在纸上进行演算）

生甲：我算出的二次方程是 $x^2-2x-1=0$.

师：你是怎么计算的？

生甲：我先写出最终的解 $x=\sqrt{2}+1$，将解方程的方法反过来使用，得到 $x-1=\sqrt{2}$，平方得到 $x^2-2x+1=2$，整理得 $x^2-2x-1=0$.

师：非常好，还有同学有别的方法吗？

生乙：我用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，因此$\dfrac{-b}{2a}=1$，$\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\sqrt{2}$. 假设 $a=1$，可以解出$b=-2$，$c=-1$.

师：非常好. 这两种方法是分别将配方法和公式法反向使用得到的. 下面我们来看一个难一点的问题（在黑板上写下数$\sqrt{2}+\sqrt{3}$），能不能写出一个系数都是整数的二次方程，有一个根是$\sqrt{2}+\sqrt{3}$？

生：不能. 如果关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数都是整数，那么在求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$中，化简后只有 $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$一项可能为根式，$\dfrac{-b}{2a}$一项必然是整数或分数，不可能出现两个根式相加的情况.

师：如果方程的次数可以高一些呢？

（学生开始思考，教师提示用平方来去根式）

生甲：先将 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$两边平方，得到 $x^2=5+2\sqrt{6}$，移项得 $x^2-5=2\sqrt{6}$，再平方得 $x^4-10x^2+25=24$，因此 $x^4-10x^2+1=0$ 这个方程就是系数都是整数，且以$\sqrt{2}+\sqrt{3}$为一个根的方程.

师：还有不同的做法吗？

生乙：我从 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$开始，两边平方，得到了相同的结果.

生丙：我从 $x-\sqrt{3}=\sqrt{2}$开始，两边平方，得到了相同的结果.

师：很好. 我们来看 $x^4-10x^2+1=0$ 这个方程，它的根都有哪些？

生甲：将我构造方程的过程反过来就是解方程的过程，第一次开方得到 $x^2-5=\pm 2\sqrt{6}$，因此 $x^2=5+2\sqrt{6}$或 $x^2=5-2\sqrt{6}$，再开方得到四个根分别为$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\sqrt{2}-\sqrt{3}$，$-\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

师：现在我们已经会构造以$\sqrt{2}+\sqrt{3}$为一个根，并且系数都是整数的方程了. 如果问题再复杂一点，例如以$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$为一个根（在黑板上写下$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$）呢？

生：直接乘方不行了，两个根式的次数不一样，越乘越复杂.

师：对，所以我们找找有没有其它办法. 像上一个问题一样，我们可以先移项. 在式子 $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$中，移哪一项到左边去好一些？

（学生尝试计算）

生甲：移动$\sqrt{2}$到左边去好一些，两边三次方之后，右边的三次根号就消掉了，左边还剩一些带$\sqrt{2}$的项，可以合并同类项. 如果移动$\sqrt[3]{3}$到右边去，两边平方的话，会得到带$\sqrt[3]{3}$和$\sqrt[3]{9}$的项，无法进一步化简.

师：整理后的结果如何？写在黑板上.

（生甲在黑板上写下立方后得到的方程 $x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-(2\sqrt{2}+3)=0$）

师：如何进一步化简，将根号全部去除？

生甲：将带$\sqrt{2}$的项全部移动到右边去，再两边平方.

师：很好，同学们都动笔计算一下.

（待学生们基本计算完毕后，教师在黑板上写出最终化简得到的方程 $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$，并与学生答案比较验证）

师：现在是一个六次方程了，谁能解这个六次方程？

生乙：应该从最后平方的地方进行考虑，最后的平方之后，未整理之前的式子为 $(x^3+6x+3)^2=(3\sqrt{2}x+2\sqrt{2})^2$，因此 $x^3+6x+3=\pm(3\sqrt{2}x+2\sqrt{2})$. 将正负的式子分别写出，将 3 移动到右边，其余项移动到左边，分别得到 $(x-\sqrt{2})^3=3$ 和 $(x+\sqrt{2})^3=3$，所以这个方程的六个根分别为

$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$，$\sqrt{2}+\omega\cdot\sqrt[3]{3}$，$\sqrt{2}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{3}$，$-\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$，$-\sqrt{2}+\omega\cdot\sqrt[3]{3}$，$-\sqrt{2}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{3}$，

其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 是1的三次方根.

师：大家观察一下这六个根，谁能发现其中有什么规律？结合前面的四次方程能总结出什么结论？

生丙：这6个根分别是方程 $x^2-2=0$ 的每个根与方程 $x^3-3=0$ 的每个根之和.

师：很好.事实上，用这样的方法可以构造出以更加复杂的根式的和、差为根，且系数都是整数的方程.我们今天讲的这个问题，放在大学数学中，就是一个数域上的代数元的问题.有理数集对加、减、乘、除(除数不能为0)封闭，它称为一个数域，但是有理数域上的一些方程，例如 $x^2-2=0$，它的根不是有理数，这些根就称为有理数域上的代数元.像 $\sqrt{2}$ 就称为2次代数元，因为以它为根的有理系数多项式(方程)的最低次数是2次，类似地，$\sqrt[3]{3}$ 是3次代数元.因为尺规作图能作出任意两条线段的比例中项，我们可以用此来作出任意2次代数元，4次代数元，8次代数元，等等.对于 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$，我们用一个例子说明了它是代数元，而且次数不超过6次，在未来的学习中，有了更多工具后我们可以证明它的次数就是6次，而且构造出来的方程的6个根就是原来2次方程的每个根加上3次方程的每个根而得到的.

理解到这个问题的背后是抽象代数中的一个更一般化的问题，有益于增强学生今后进一步学习的兴趣.

案例2 组合数与正态分布

学习了组合与概率后，教师提出这样的问题.

师：全班一共有40名同学，在一次投票中，每名同学都以 $\frac{1}{2}$ 的概率投赞成票，$\frac{1}{2}$ 的概率投反对票，且彼此不影响，那么最终投赞成票的人数大约会是多少？

生甲：每个人有一半概率投赞成票，因此投赞成票的应该是20人.

生乙：不对，这只是平均的人数，是期望值，投赞成票的人数从0人到40人都有可能.

生丙：我感觉20人左右出现的概率比较大.

师：那同学们能不能写出有 m 人投赞成票的概率呢？

(学生们写出答案 $\frac{C_{40}^m}{2^{40}}$)

师：因为40太大了，组合数不好求，同学们算一下10人投票的同样问题中，每种结果出现的概率，并把概率标在平面直角坐标系中.因为概率都是小于1的，我们可以把纵坐标拉伸一个倍数，例如20倍.最后试着用描点法，把这些点画在一个连续函数的图像中.

(学生们计算出每个结果出现的概率)

师：大家来看大屏幕(展示作图软件中的结果)，蓝色的线就是我用描点法画出的图像，那么红色的线是什么呢？它就是我们今天要介绍的正态分布的图像.正态分布是一种连续的概率分布，与它的分布相关的变量只有两个：峰值(即平均值)和方差.任何一个事件重复多次后的结果分布都趋近于正态分布.同学们也能看到，10个人的投票结果分布与正态分布的误差就已经很小了.

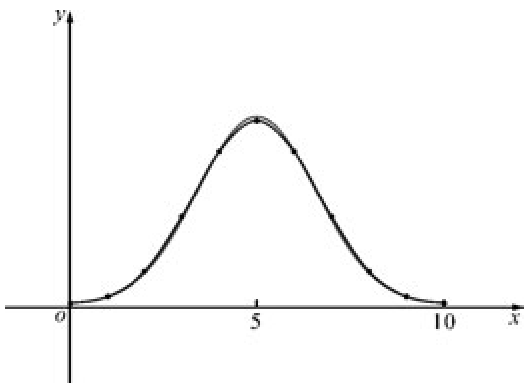

图1 正态分布与组合数分布的比较.

(红色线为正态分布 $y=\frac{1}{\sqrt{5\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{5}}$ 的图像，蓝色线为用描点法画出的 $y=\frac{C_{10}^x}{2^{10}}$ 的近似图像，为了视图清晰，纵坐标被拉伸到原来的20倍)

师：那么40个人的投票分布又会怎样呢？事实上，由40个人的投票分布描点画出的曲线已经和正态分布之间的误差已经无法用肉眼分辨了.

师：这两个分布有什么关系呢？它们具有相似的形状，注意看(在作图软件上演示).将第一

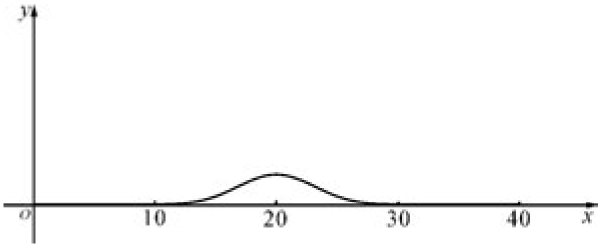

图 2 正态分布 $y=\frac{1}{\sqrt{20\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{20}}$ 的图像

（纵坐标被拉伸到原来的 20 倍）

个图像横向压缩至原来的一半，纵向拉伸到原来的 2 倍，就成了第二个图像．一个随机变量重复足够多次之后求和，其最终分布就如上面两个图像一样，随机变量可以是简单的，如同我们讨论的是非问题，也可以是复杂的，例如每位同学可以随机选择一个 0—1 之间的实数，再求和．这正是概率论中的中心极限定理：不论是连续还是离散的变量，在一定条件下累加求和，其最终结果的抽样分布均近似服从正态分布．

最后，教师拿出高尔顿钉板的示意图，并向学生解释小球从高尔顿钉板上掉下后的分布正是与前面函数相同的分布．

经过此番讲解，学生们建立了组合数与概率论之间的一些联系，了解到了连续变量和离散变量在重复足够多次后并没有多大差别，并会对以后概率论的学习产生兴趣．

除了在连接点处引入高等数学之外，教师也可以在一些具有高等数学的背景或定理处向学生展示高等数学的魅力．很多的问题和定理，放在初等数学中，解法是曲折的，或者是看似没有道理的，但放在高等数学中，解法和结论可以一目了然．正如小学的“行程问题”，“工程问题”等在引入了一元一次方程后变得平凡，很多中学数学的问题在引入了高等数学的知识或观点后也会变得平凡．如果把学习数学比作爬山，那么初中，高中阶段的学生正如站在云雾缭绕的半山腰．教师若能告诉学生，学习了高等数学，就等于爬上了山峰，可以将半山腰的景色看得清清楚楚，那学生自然就有了继续向前的兴趣和动力．同时，教师也应向学生提示，高等数学很少纠缠于方法和技巧上的组合，多数问题解决的关键都在于看问题的角度和对整个领域的理解．这里举两个有高等背景的定理作为例子．

案例 3 柯西不等式

教师在黑板上写下柯西不等式最简单的形式：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$，并写下两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(c,d)$．

师：同学们，黑板上是柯西不等式的简单形式，大家看看它和两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$，$\boldsymbol{\beta}=(c,d)$ 有什么关系？

生：左边的两项分别表示 $|\boldsymbol{\alpha}|^2$ 和 $|\boldsymbol{\beta}|^2$，而右边则表示 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2$，这个柯西不等式事实上说明的是 $|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\geqslant[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$．

师：那么这样一来，这个不等式好证明吗？

生：好证明，因为我们已经学过内积的三角形式 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$．

师：好．我们现在把问题推广到三项的形式 $(a_1^2+a_2^2+a_3^3)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$，

这还能用内积的方式去证明吗？更多项的情况呢？

生：三维空间中，内积不像平面那么简单，不可能直接证明，更不用说现实中不存在的高维空间了．

师：对．所以在高维空间中，我们要先定义内积．内积恰好定义为不等式右边括号里的式子的值．但是，这个地方的内积是否具有三角形式还没证明，不能用这种方法，我们换一种方法考虑．同学们想一想，什么样的式子里能同时出现 $|\boldsymbol{\alpha}|^2$，$|\boldsymbol{\beta}|^2$ 和内积 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$？

生（经过简单计算和试验）：形如 $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}]$ 这样的式子展开之后．

师：好．这样的式子中能出现 $|\boldsymbol{\alpha}|^2$，$|\boldsymbol{\beta}|^2$ 和内积 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$．为了研究它们间的不等关系，我们需要等式另一边有一定的性质．随便选取两个向量作内积，大小肯定不能保证，那么什么样的两个向量作内积，有一定的范围？

生：两个相同的向量．由内积的定义，两个向量相同的时候，内积一定大于等于 0．

师：很好．这个相同的向量应该是 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 各自的某个倍数相加，由于倍数是平凡的，这里可以去掉一个系数，我们来考虑 $|\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}|^2=[\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}]$．同学们，请试着展开这个内积，将它化成 $|\boldsymbol{\alpha}|^2$，$|\boldsymbol{\beta}|^2$ 和 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 的倍数之和的

形式.

（在学生计算展开的时候，教师可穿插讲解线性代数中对称双线性函数的概念，并说明这样定义的内积是一个对称双线性函数）

生：结果是 $|\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+k^2|\boldsymbol{\beta}|^2+2k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$.

师：注意，这个式子里 k 可以取任意的实数，所以 $|\boldsymbol{\alpha}|^2$，$|\boldsymbol{\beta}|^2$ 和 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 之间的关系是怎么得出的？

生：将 $|\boldsymbol{\alpha}|^2+k^2|\boldsymbol{\beta}|^2+2k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 看成关于 k 的二次函数，这个二次函数的值永远非负，所以判别式小于等于 0，化简就得到了 $|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\geqslant[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$.

师：很好，我们用这样的办法证明了柯西不等式. 同学们打开课本，看看课本上的证明和我们的证明方式，有没有什么发现？

生：两个证明实际上是一致的.

师：是的. 这两个证明实际上是同一个证明. 使用内积的证明更加自然，同时也揭示了考虑 $(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+\cdots+(a_n+b_nx)^2$ 的原因. 在线性代数中，柯西不等式的形式就是 $|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\geqslant[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$，它的证明也更加自然. 在高等数学的观点下，初等数学中一些复杂的问题都会变简单.

经过对柯西不等式的学习，学生们看到了高等数学应用在初等数学中的威力，也明白了高等数学更加注重对整个体系的理解，会对未来的高等数学产生更加浓厚的兴趣.

案例 4　帕斯卡定理的高等证明

教师在黑板上介绍帕斯卡定理并画出示意图.

帕斯卡定理：设 A，B，C，D，E，F 是同一个圆上的六个点，直线 AB，DE 相交于点 P，直线 BC，EF 相交于点 Q，直线 CD，FA 相交于点 R，则 P，Q，R 三点共线.

定理中的圆可以改为其它二次曲线，即抛物线，双曲线，或者两条直线.

教师直接介绍使用射影几何和代数几何来证明帕斯卡定理的方法.

（1）使用射影几何的证明方法

过圆心 O 作一条垂直于圆所在平面上的直

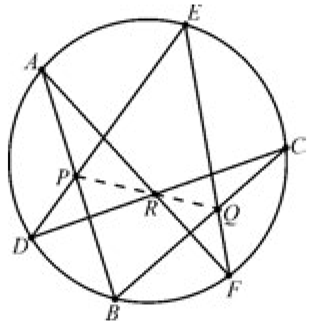

图 3　帕斯卡定理

线，在其上任取一点 S，考虑以 S 为顶点，该圆为底面的圆锥，用一个与 S，P，Q 三点确定的平面平行的平面 α 截这个圆锥，得到一个椭圆. 设 A' 是直线 SA 与平面 α 的交点，同理定义 B'，C'，D'，E'，F'，这样 A'，B'，C'，D'，E'，F' 都在同一个椭圆上（这实际上是以 S 为透视中心的中心射影）. 由 A，B，P 共线知 A，B，P，S 共面，故 A，B，P，S，A'，B' 共面，所以 $A'B'\parallel SP$（因 $SP\parallel\alpha$），同理 $D'E'\parallel SP$，故 $A'B'\parallel D'E'$. 同理，$B'C'\parallel E'F'$.

下面证明 $C'D'\parallel F'A'$，即证明：一个椭圆的内接六边形，若两组对边分别平行，则第三组对边也平行. 这可以通过将椭圆的长轴方向"压缩"使椭圆变成一个圆来证明，可用解析几何的方式证明压缩的过程中平行关系保持不变（这个"压缩"实际上是射影几何中以无穷远点为透视中心的中心射影），而圆内同样的结论是显然成立的.

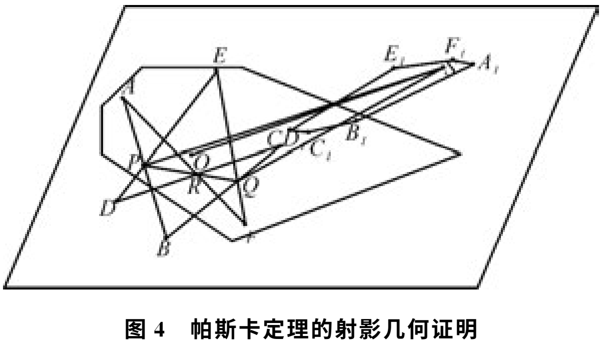

图 4　帕斯卡定理的射影几何证明

由 C，D，R 共线知 C，D，R，S 共面，故 C，D，R，S，C'，D' 共面，设此面为 β，同理可假设过 F，A，R，S，F'，A' 的面为 γ. 由 $C'D'\parallel F'A'$ 知 $C'D'\parallel\gamma$，$F'A'\parallel\beta$，因此 β，γ 的交线 RS 也与它们平行，故 $RS\parallel\alpha$，结合 α 的定

义可知 P，Q，R，S 四点共面，于是 P，Q，R 三点共线，证毕.

上述证明中，第一段和第三段在射影几何中也是显然的，无需这样细致的解释. 也就是说，在射影几何中仅需做两次中心射影变换，即可证明帕斯卡定理.

(2)使用代数几何的证明方法

建立平面直角坐标系 xOy，考虑直线 AB，CD，EF 所对应的一次式，将它们乘起来得到一个三次曲线的方程 $f(x, y)$；考虑直线 BC，DE，FA 所对应的一次式，将它们乘起来得到一个三次曲线的方程 $g(x, y)$. 在圆上任取不同于 A，B，C，D，E，F 的一点 K，设它的坐标为 (x', y'). 显然 $f(x', y')$，$g(x', y')$ 都不等于 0，适当选取非零参数 u，v，使得 $u \cdot f(x', y') + v \cdot g(x', y') = 0$.

设 $u \cdot f(x, y) + v \cdot g(x, y) = h(x, y)$，则 $h(x, y)$ 显然不是零多项式(任取 AB 上除 A，B，P 外的任一点 M：(x_m, y_m)，则 $f(x_m, y_m) = 0$ 但 $g(x_m, y_m) \neq 0$). $h(x, y)$ 代表一个不超过 3 次的曲线，但它却与 $ABCDEF$ 的外接圆(这是一个 2 次曲线)有 A，B，C，D，E，F，K 七个公共零点. 由 Bezout 定理，代表这两个曲线的多项式一定有公共因式，但代表圆的多项式不可能拆成两个一次因式的乘积(否则将是两条直线而不是圆)，所以 $h(x, y)$ 一定是代表圆的多项式再乘上一个一次多项式所得. 注意将 P，Q，R 三点的坐标代入 f，g，结果都是零，故将它们的坐标代入 h，结果也是零. 由于 P，Q，R 三点都不在圆上，所以它们必然都是那个一次多项式的零点，这也说明 P，Q，R 三点共线，证毕.

相比射影几何，用代数几何的证明还是需要一个小技巧，即取圆上第七个点 K，并构造 f，g 的线性组合使其以 K 为零点，这样构造出一个三次曲线与一个二次曲线有 $3 \times 2 + 1 = 7$ 个公共零点，从而恰到好处地使用了 Bezout 定理. Bezout 定理的证明不可能对学生完全讲清，但是 3 次和 2 次曲线的特例则可以通过消元降次解方程的方法来说明.

通过讲解帕斯卡定理的高等证明，学生意识到在中学数学中非常有技巧的定理，在高等数学的观点下实际是平凡的，不需要任何花巧的. 高等数学有“重剑无锋，大巧不工”的意境，从而对即将到来的高等数学的学习产生了憧憬和向往.

3　结束语

在高中数学教学中，适时引入高等数学的知识和观点，能让数学优等生看清问题的本质和方向，为他们省去在一些数学问题的不同变式中做大量重复的、机械的练习的时间，将他们从中解放出来. 教师在课堂上适当引入更高的观点，配合信息技术直观地进行展示和讲解，可以让数学优等生体会到数学的美感，提高他们对数学学习的兴趣.

最后，关于实用性的问题，因为现在的科学技术已经发展到了一定的高度，学生在日常生活中基本看不到初等数学的应用，导致很多学生觉得数学纯粹是思维上的操练，学习数学只是为了应付考试. 这样他们容易在无休止的机械训练中产生厌倦情绪. 到了大学以后，很多学生觉得终于可以摆脱数学的学习了，于是不再重视高等数学的学习. 为此，教师可以在课余时间向学生介绍和展示高等数学对社会的重要性. 高等数学的各个分支在各行各业中都有应用，例如：微积分可应用于天文学、力学、化学、工程学、经济学等学科；计算机的算法设计与分析需要组合数学、图论和概率论等等；计算物理中物体的运动、化学反应的稳定状态等等都需要用到微分方程，生物学、经济学中对一些事物的预测需要建立数学模型，应用概率与统计等等.

诚然，在高中数学课堂中对学生引入高等数学，激发学生对高等数学的学习兴趣，是否真的能鼓励数学优等生继续在高等数学上深造，还需要后期的跟踪调查和研究. 本文的内容也只是笔者抛砖引玉的一些见解，还要在不久的将来进行不断的完善.

参考文献

1　张景中. 从数学教育到教育数学[M]. 北京：中国少年儿童出版社，2005

2　沈文选. 走进教育数学[M]. 北京：科学出版社，2009

3　F. 克莱因(德国). 高观点下的初等数学(第一、二、三卷)[M]. 舒湘芹，陈义章等，译. 武汉：湖北教育出版社，1989