北京高考数学压轴题的教学实践与反思

李启超　潘国双

（北京市十一学校数学教研组　100039）

北京高考理科数学压轴题向来以创新和难度著称，一直引起广大师生的关注．一方面，这些问题对考生的阅读理解、抽象概括、自主探究和推理论证能力都有很高的要求（[6]）．另一方面，这些问题“背景新颖，内涵丰富，解题方法质朴，思想背景深刻”（[9]），对优秀考生具有很好的选拔功能，同时也为中学数学教学指明了方向．毫无疑问，这些题目对学生而言是非常宝贵的学习资料，但因其难度较大，不适合在普通课堂上讲解．我们在高二数学小组上以近年来的北京高考压轴题为主题进行了一个学期的教学实践，期间遇到了一些教学困难，也取得了部分成效．本文中我们就此做一次总结，与大家分享我们的经验和收获．

1　北京高考数学压轴题的特点刍见

高考数学北京卷压轴题（第 20 题）考察角度之一是学生是否具有在全新的问题情境下，自觉地进行探究、尝试、归纳、猜想和论证而创造性地解决问题的能力（参考[6][9]）．这些试题一贯的新颖大气，特色鲜明，是北京卷的标志性题目，历年来引起广大师生的重视，依我们拙见，这些题目主要具有以下几方面的特点．

1.1　规避题型，突出新概念和陌生情境．

近年来北京高考数学理科卷（以下简称“京卷”）压轴题目往往是一种离散型极值问题，呈现形式上以集合或数列为主，但几乎总是伴有新概念和陌生情境出现．例如，2010 年北京卷第 20 题中就涉及到了“抽象的空间”和“抽象的距离”概念，方便起见我们把原题呈现如下：

（2010－北京－20）已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\},(n\geqslant 2)$．对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$，定义 A 与 B 的差为

$$A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|);$$

A 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$．

①证明：$\forall A,B,C\in S_n$，有 $A-B\in S_n$，并且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$；

②证明：$\forall A,B,C\in S_n$，$d(A,B)$，$d(B,C)$，$d(A,C)$ 三个数中至少有一个是偶数；

③设 $P\subset S_n$，P 中有 $m(m\geqslant 2)$ 个元素，记 P 中所有两元素间的距离的平均值为 $\bar{d}(P)$．证明：$\bar{d}(P)\leqslant\frac{mn}{2(m-1)}$．

分析　本题题干中涉及到几个新概念．对纠错码理论（[5]）有了解的读者可以发现，题干中的空间 S_n 实际上是二元域上的 n 维线性空间，距离 $d(A,B)$ 实为纠错码理论中熟知的 Hamming 距离．毫无疑问，这些概念与情境是考生之前在任何复习参考书上都难以见到的，题目对任何考生来说都是陌生的，有效地保证了考试的公平性．当然，任何考生解答此题无需纠错码理论背景知识，但是肯定需要准确地把握到距离 $d(A,B)$ 的意义，即：

“$d(A,B)$＝向量 A，B 相同位置上不同分量的个数．”

原题①②③三个小问一步步地引导考生深入探究距离概念 $d(A,B)$ 的性质．如果考生不能在短时间内有效的理解这个抽象距离概念，就只能“望题兴叹”了．这让我们教师意识到今后课堂上的概念教学中，必须摒弃那种“重结果，轻过程”（[12]）的讲授方式，让学生们亲自体会并参与到概念的形成过程中来．

再例如，2015 年京卷第 20 题呈现形式上是一道递推数列问题：

（2015－北京－20）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_i\in\mathbf{N}^*$，$a_1\leqslant 36$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & n>18\end{cases}$，记集

合 $M=\{a_n|n\in\mathbf{N}^*\}$.

①若 $a_1=6$，写出集合 M 的所有元素；

②若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，证明：M 的所有元素都是 3 的倍数；

③求集合 M 的元素个数的最大值.

分析　仔细审题后我们发现，本题并非常规意义下的"求递推公式"问题，本质上是一道组合问题. 题目中没有什么新概念，看上去似曾相识，实则每一问的提问角度都是前所未闻的，情境依旧陌生，需要考生从容不迫地从头探究起. 本题第①问引导考生从特例入手探究数列 $\{a_n\}$ 的性质，与人们从特殊到一般的认识规律一致，大多数学生都可以完成. 第②问是关于整数的整除性质，解答起来不需要太多数学知识，但显然复习时这类题型很难见到，但是如果考生只顾在脑海中搜索之前遇到过的类似题目"对题型，想技巧"的话，恐怕要无功而返了. 由此可见，京卷高考数学压轴题对于考生在面对陌生情境时能进行自主探究、尝试、归纳以解决问题的能力要求是非常高的.

1.2　淡化技巧，有别于通常的竞赛题.

北京高考压轴题难，竞赛题也难，但两种难度是非常不一样的. 以下我们试举两例说明这一点：

（2004－北京－20）给定有限个正数满足条件 T：每个数都不大于 50 且总和 $L=1275$. 现将这些数按下列要求进行分组，每组数之和不大于 150 且分组的步骤是：首先，从这些数中选择这样一些数构成第一组，使得 150 与这组数之和的差 r_1 与所有可能的其他选择相比是最小的，r_1 称为第一组余差；然后，在去掉已选入第一组的数后，对余下的数按第一组的选择方式构成第二组，这时的余差为 r_2；如此继续构成第三组（余差为 r_3）、第四组（余差为 r_4），…，直至第 N 组（余差为 r_N）把这些数全部分完为止.

①判断 $r_1,r_2,\cdots,r_N$ 的大小关系，并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数；

②当构成第 $n(n<N)$ 组后，指出余下的每个数与 r_n 的大小关系，并证明：$r_{n-1}>\dfrac{150n-L}{n-1}$；

③对任何满足条件 T 的有限个正数，证明：$N\leqslant 11$.

（1990－全国中学生数学联赛加试－第三题）某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 C_i 名代表（$1\leqslant C_i\leqslant 39,1\leqslant i\leqslant n$）来到体育馆观看球赛，全部学生总数为 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i=1990$. 看台上每一横排有 199 个座位，要求同一学校的学生必须坐在同一横排，问体育馆最少要安排多少横排才能够保证全部学生都能坐下？（答案：最少要安排 12 横排才能保证全部学生都能坐下.）

分析　上面这道全国高中数学联赛题可以用极端原理或者局部调整法给出不同的多样性解答，方法灵活技巧性很强，这是竞赛数学的特点之一. 我们不难看出这道竞赛题有 2004 年北京卷压轴题的明显背景，但高考压轴题的考察角度与竞赛题则完全不同. 首先，压轴题抽象程度明显加强，隐去了实际应用问题背景，题干较长，对考生的阅读能力、信息加工能力要求较高. 其次，京卷压轴题独辟蹊径引入了"余差 r_i" 的概念，随后设置的①②两问引导考生逐步"发现"余差 r_i 的性质，最后第 ③ 问要求考生（在前两问的铺垫的基础上）导出最终结论. 三个小问之间环环相扣，逐层递进，并不需要什么高大上的技巧，这实在是因为命题人用"余差 r_i"的概念分散了难点. 用概念化分解难点，正是高等数学中处理问题的常见风格（参考[1]）. 我们认为，类似的命题思路在京卷压轴题中屡屡出现.

我国著名数学家李邦河院士指出（参考[3]）："数学玩的是概念，而不是纯粹的技巧. 因为中小学数学里面的概念比较少，所以就在一些难题、技巧上下功夫，这恰恰是舍本逐末的做法."京卷压轴题的命题理念是与此相合的，不强调炫酷的技巧，不强调复杂的计算，相反，强调学生的数学直观感觉和数学思想方法. 如果说数学竞赛题难在技巧上，那么京卷的压轴题则是难在策略上. 数学竞赛欣赏选手们"出其不意"的解题技巧，京卷压轴题则强调按部就班、逐个击破难点的解题策略.

1.3　背景深刻，重视实际应用型问题

北京数学高考压轴题中有过很多具有实际背景的问题，例如：2005 年京卷第 20 题，讨论如何对有界闭区间上的单峰函数缩短含峰区间长度，其背景是（单因素）优选法（参考[2]）；2010 年京卷第 20 题，第③问的背景是纠错码理论中的普洛特金 (Plotkin)上界（参考[5]）；2014 年京卷压轴

题看似抽象,实则其背景是两工序流水线时间最优化问题（参考文献[2]第八章或者文献[7]）.

（2014－北京理科－20）对于数对序列 $P(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$,记 $T_1(P)=a_1+b_1$, $T_k(P)=b_k+\max\{T_{k-1}(P),a_1+a_2+\cdots+a_k\}$ $(2\leqslant k\leqslant n)$. 其中 $\max\{T_{k-1}(P),a_1+a_2+\cdots+a_k\}$ 表示 $T_{k-1}(P)$ 和 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 两个数中最大的数.

①对于数对序列 $P(2,5),(4,1)$,求 $T_1(P)$, $T_2(P)$ 的值.

②记 m 为 a,b,c,d 四个数中最小值,对于由两个数对 $(a,b),(c,d)$ 组成的数对序列 $P(a,b),(c,d)$,和 $P'(c,d),(a,b)$,试分别对 $m=a$ 和 $m=b$ 的两种情况比较 $T_2(P)$ 和 $T_2(P')$ 的大小.

③在由 5 个数对 $(11,8),(5,2),(16,11),(11,11),(4,6)$ 组成的所有数对序列中,写出一个数对序列 P 使 $T_5(P)$ 最小,并写出 $T_5(P)$ 的值（只需写出结论）.

分析　考虑这样一个实际应用问题:有 n 个零件 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,需要分别在两台机床 A,B 上按照先 A 后 B 的顺序加工. 每一个零件在每台机床上的加工时间（如下面 Table 1）是已知的. 问:零件如何排序可使得从第一个零件开始加工到最后一个零件加工完需要的时间最少?

Table 1:n 种零件在两台机床上的加工时间

零件序号	X_1	X_2	$\cdots$	X_n
机床 A 加工时间	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
机床 B 加工时间	b_1	b_2	$\cdots$	b_n

2014 年京卷压轴题的第②③问即分别为这个实际问题 $n=2,5$ 的情形,参考[7]. 这个实际应用问题已经由 S. M. Johnson 解决:“若 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中最小数出现在‘a’中,例如 a_i,则零件 X_i 安排在最早加工;若出现在‘b’中,比如 b_j,则安排 X_j 最后加工. 如果有多个相等的最小数,则按上面的办法任取一个安排. 去掉已经安排好的零件,重复上面的步骤,直到排完为止（证明过程请参考[2], pp. 138）.”上面的京卷压轴题第②问实则是在引导考生发现 S. M. Johnson 法则 $n=2$ 的特殊情形,只要考生领悟到 $n=2$ 时如何安放最小数（并不需要考生重新发现 S. M. Johnson 法则）,就不难通过猜想加检验的方式解决第③问（为降低表述的难度,这一问不要求写出解题过程）. 本题看似抽象,实则背景深刻. 近年来北京数学高考试题越来越重视试题素材的生活化（参考[4][5][6][7][11]）,例如选择题部分的最后一题和简答题中的概率统计问题中都可以感受到浓厚的生活气息,这无疑为我们今后的课堂教学指明了改进方向.

2　教学中遇到的障碍和反思

京卷高考压轴题解答起来往往不需要很多数学知识,但是对学生的数学素养有着非常高的要求. 在一个学期的教学实践中,我们遇到了一些教学障碍,也研究了一些应对措施. 归纳起来,主要有以下几个方面:

2.1　阅读理解能力薄弱

京卷高考压轴题题干通常较长,这对学生们的阅读能力形成考验. 选修课初期,我们沮丧地发现,多数学生读完题目后往往拿着笔无动于衷. 我们通过问卷调查发现,一些学生“不知原题在问什么”. 在后来的教学中,我们注意让学生审题后进行小组讨论,用语言辅助自己对逻辑的理解. 尽管数学语言讲究抽象概括、简洁凝练,提问时,我们要求学生用生活化的语言（白话）向同伴或老师描述清楚他（她）对题意的理解. 数学的抽象源于概括,但理解抽象必须从具体的东西入手. 遇到比较抽象些的概念,我们要求学生能从几个具体的例子入手,在“试验（举例计算）”中体会概念的本质. 我们认为京卷压轴题第 ① 小问的功能也正在于此.

2.2　过于迷信参考答案,自信力差

调查问卷中,多数学生表示,看过京卷压轴题的参考答案后会产生一种“挫败感”,原因是认为“自己根本想不出标答那么巧妙、缜密的解答过程.”我们认为这种情况在全体学生中普遍存在. 在课堂上,我们多次努力向学生解释,“任何参考答案并不是一下子提笔写就的,而是有其生产过程的.”所谓的生产过程,便是“探究、尝试、归纳、猜想、论证外加‘抛光答题语言’的过程.”在教学中,我们发现为了破除学生对参考答案的迷信就必须引导学生“改进”参考答案或推广原题,得出比参考答案更自然的解题方案. 在这一方面,我们取得了部分收获,请参考本文 3.2 小节.

2.3 不适应"猜测＋检验"的探索方法

京卷压轴题向来强调学生"动手尝试、探索实践"的能力和"先猜再证"的基本研究方法([7][8]).教学中,我们发现一些知识基础很牢固的同学往往过于"迷信"逻辑的力量,认为一切解题思路都是依靠逻辑从概念出发推演出来的,从而使得解题过程陷入胶着状态. 事实上,数学是用直觉和猜测来发现的,逻辑的功能仅仅是保证"发现"的正确性. 逻辑固然重要,但是打开解题局面则需要"数学直观能力". 王雅琪老师在文献[8]中指出:"问题研究的过程,从来都是'大胆猜想、小心证明'的过程. 我们要求学生先要猜出结果,这是他(她)必须具备的科学素养." 我们认为解答京卷压轴题,每一道都需要具备这种"猜测＋检验"的能力. 在平时的教学中,我们必须有意识地培养学生这种"解题直觉."

2.4 懒于题后反思,不善于总结

著名数学家波利亚指出,一个完整的解题步骤包括:弄清问题、拟订解题计划、实现解题计划和解题回顾四个环节. 在解题回顾环节中,学生们可以对解题过程进行总结和反思,回顾每一个步骤的合理性和必要性,对比联想相关的解题思想,长期坚持下去,就有可能升华为解题策略([12]). 对于懒于做题后回顾的同学,我们强制要求他们写"数学作文",将自己的解题探究过程中遇到的挫折和后来的听课体会如实记叙下来.

3 教学策略与收获

3.1 按命题背景或解题策略分专题介绍,适当渗透高等数学知识和思想

我们开课讲压轴题的目的当然不是为了寻找命题规律押题,但是我们发现其中的一些重要的数学思想方法和解题策略,如"寻找单调变化的量(2006－北京－20、2008－北京－20)"、"构造对应(2007－北京－20、2009－北京－20)" 等策略不止一次地出现在参考答案中,我们将这些问题收集在一起分专题讲练,使得教学内容变得系统化. 我们认为,这些问题往往有着深刻的高等数学背景,试举一例:

(2007－北京－20) 已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant 2)$,其中 $a_i\in \mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$,由 A 中的元素构成两个相应的集合:

$S=\{(a,b)\mid a\in A,b\in A,a+b\in A\}$,$T=\{(a,b)\mid a\in A,b\in A,a-b\in A\}$,

其中 (a,b) 是有序数对,集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意的 $a\in A$,总有 $-a\notin A$,则称集合 A 具有性质 P. ① ②问略. ③判断 m 和 n 的大小关系,并给出证明.

分析 本题第③小问中为证明 $m=n$,我们可以构造一个从 S 到 T 的既单又满映射(一一映射),因为 S,T 为有限集,从而得到 $m=n$. 或者,首先构造一个从有限集 S 到 T 的单映射,得出 $m\leqslant n$,再构造一个从有限集 T 到 S 的单映射,得出 $n\leqslant m$,综合起来有 $m=n$. 这两种方法都不需要什么特别的技巧,但都涉及到"建立集合间对应"的数学思想,这是抽象代数里常见的策略. 像"一一对应、单射、满射"这些基本的高等数学概念是每一位优秀的高中生都能掌握的.

另一方面,对于一些背景深刻的题目,我们认为题目背后的高等数学背景比原题更有吸引力,为此我们准备了"纠错码与通讯(2010－北京－20 题,参考[5])"、"两工序流水线时间最优化问题与 S. M. Johnson 法则(2014－北京－20 题,参考[2][7])" 等专题讲座. 从同学们热情的参与度中,我们看得出来这些专题知识可以激发学生对高等数学的兴趣.

3.2 鼓励学生推广、改编原题,改进参考答案

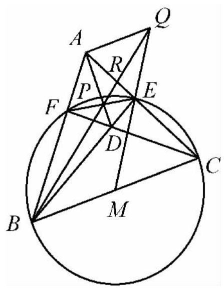
我们起初只是把改进参考答案当做帮助学生"破除对参考答案的迷信"的一个手段,但后来我们发现学生的潜力其实远高于我们的预期. 试举几例:

2006 年京卷压轴题定义了一个"绝对差数列":

(2006－北京－20)在数列 a_n 中,若 a_1,a_2 是正整数,且 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$, $n=3,4,5,\cdots$ 则称 a_n 为"绝对差数列". ① ②问略. ③ 证明:任何"绝对差数列"中总含有无穷多个等于零的项.

小组讨论时,有一组同学报告,他(她)们除了发现"任何绝对差数列中总含有无穷多个等于零的项",还进一步归纳出 "任何绝对差数列在出现零项之前,总会先出现 a_1,a_2的最大公约数" 而从后一个结论可以推出前一个. 我们立即热情地称赞了他(她)们的发现,并鼓励他(她)们深入下去给出证明,几天后他(她)们便将绝对差数列与辗转相除法联系起来,对自己的发现给出了严格证明.

(下转封底)



（江西师范高等专科学校　王建荣　陈志钦 335000）

2345　设 n 为正整数，证明：$\frac{1}{C_n^0}+\frac{3}{C_n^1}+\frac{5}{C_n^2}+\cdots+\frac{2n+1}{C_n^n}\geqslant\frac{(n+1)^3}{2^n}$.

（甘肃省秦安县第二中学　罗文军　741600）

（上接第 48 页）

2015 年京卷压轴题第②问（题目请见本文 1.1 节）要求证明给定的数列 $\{a_n\}$ 中，要么各项都是 3 的倍数要么各项都不是 3 的倍数. 官方给的参考答案是分情况讨论加反证法，我们有一位同学指出，他发现从递推关系

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, n\leqslant 18\\ 2a_n-36, n>18\end{cases}$$

出发可以导出 $a_{n+1}+a_n=3a_n$ 或 $3a_n-36$，从而总是有 $3|a_{n+1}+a_n$，这样一来立刻就可以得出若数列 $\{a_n\}$ 中存在一个元素是 3 的倍数，那么所有元素都是 3 的倍数，这就给出了比参考答案更加简洁的证明. 在获得了全数学小组同学的热烈掌声后，这位同学变得更加活跃了.

（2009－北京－20）已知数集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}(1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n, n\geqslant 2)$ 具有性质 P：对任意的 $i, j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，$a_ia_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A. ①②问略. ③证明：当 $n=5$ 时，a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.

在引导大家做完原题之后，有同学举手提问 $n=6$ 时会怎样，是否 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 依旧是等比数列？这与我们教师备课时的想法不谋而合. 我们立即肯定了她出色的数学直觉，并鼓励大家考虑 $n\geqslant 5$ 的情形. 很快 $n=6, 7$ 的情形都被同学们验证是等比数列. 我们鼓励大家乘胜追击，把总结出来的“排序”加“一一对应”的方法贯彻到底，最终在大家的共同努力下，有一组同学在黑板上证明出：等比数列的结论对 $n=3$ 和 $n\geqslant 5$ 的情形都成立，而对 $n=4$ 的情形则不一定成立.

总结　从“表现得令人沮丧”到“令教师眼前一亮”，我们的学生在课堂上取得了不小的进步，这使得我们越来越相信：只要教法得当，京卷高考压轴题是非常宝贵的教学资源.

致谢　本文参考了大量文献，在此对作者们表示衷心的感谢. 我们感谢高二年级数学小组同学在课堂上的投入表现.

参考文献

1　付云皓，朱华伟，郑焕. 如何在高中数学课堂激发优等生对高等数学的学习兴趣[J]. 数学通报，2015(7)：38－43

2　华罗庚，王元. 数学模型选谈[M]. 大连理工大学出版社，2011，5

3　李邦河. 数的概念的发展[J]. 数学通报，2009(8)：1－4

4　李春雷. 2010 年北京理科高考数 2 题解法研究[J]. 中学数学杂志，2010(4)：52－54

5　李启超，荣贺. 从高中数学试题到纠错码理论[J]，数学通报，2016(4)：47－52

6　连春兴，王芝平. 数学高考北京卷对教学的启示[J]. 数学通报，2010(9)：54－58

7　王雅琪. 生活中的数学与高考———谈 2014 年北京市高考理科试卷第 20 题的背景[J]，中学生数学，2015(7)上：36－38

8　王雅琪. 坐标一桥飞架，数形天堑变通途———谈 2015 年高考数学北京卷对解析几何的考查[J]，数学通报，2016(3)：46－49

9　王芝平，李亚斌. 破解 2010 年高考北京卷压轴题的心智历程与几点感悟[J]. 数学通报，2011(1)：54－58

10　王芝平. 构建模式探新路，一个方法贯始终———2011 年高考北京卷压轴题的变式研究与启示[J]. 数学通报，2011(7)：61－63

11　徐文兵. 2010 年高考数学北京卷理科压轴题剖析[J]. 中学生数学，2010(12)上：40－41

12　章建跃. 中学数学教学概论(第 2 版)[M]. 北京：北京师范大学出版社，2008

刊号：ISSN 0583－1458 / CN11－2254/O1　全国各地邮局订购　代号：2－501　全年定价：72.00 元　每期定价：6.00 元